

## 2 軸曲げを受ける単一山形鋼柱の強度

ON THE STRENGTH OF RESTRAINED SINGLE-ANGLE  
COLUMNS UNDER BIAXIAL BENDING

宇佐美 勉\*・T.V. ガランボス\*\*

By Tsutomu Usami and T.V. Galambos

## 1. 緒 言

山形鋼は鋼構造物の部材として広く用いられている。たとえば、橋構造物では横構、対傾構に、また鉄塔ではその構成部材に広範囲に使用されている。山形鋼を単一部材として用いる場合には、部材両端にボルトまたはリベット接合したガセットプレートを介して他の部材と連結される場合が普通である。山形鋼はまた建築構造物としてトラスはりまたは屋根トラスの腹材としてもよく使用される。腹材としての単一山形鋼材はその一つの脚を直接弦材に溶接接合される場合も多く、この場合にはガセットプレートを省略することができる。

単一山形鋼はこのように鋼構造物の部材として広範囲に用いられているのにかかわらず、その圧縮部材としての強度を理論的、実験的に求めた研究はきわめて少ない。単一山形鋼圧縮部材は、上述のような接合方法がとられるため、断面の両主軸に関して偏心した軸方向圧縮力を受け、両端における回転は拘束された状態になっている。このような部材は 2 軸曲げを受ける拘束された柱であって、曲げとねじれが連成した複雑な挙動を示し、その耐荷力は常に柱の一部が非弾性域に入った後に決定される<sup>1)</sup>。

山形鋼柱の座屈および屈服に関する理論的研究は今まで数多く行なわれているが、2 軸曲げを受け両端の回転を拘束された状態での耐荷力を論じた研究は見あたらない。中心軸圧縮力を受ける等辺山形鋼柱の弾性、非弾性座屈の初期の研究 (1952 年以前) は Bleich<sup>2)</sup> によって整理されている。その後、石田<sup>3)</sup> は溶接によって生じた残留応力をもつ等辺山形鋼柱の座屈、屈服に関する詳細

な研究結果を発表している。しかし、研究の対象とされた柱は両端を単純に支持されたものであり、載荷状態は中心軸圧縮および対称軸上 (強軸上) の偏心圧縮のみである。2 軸曲げを受け両端の回転を拘束された山形鋼柱の弾性解は Trahair<sup>4)</sup> によって発表されている。前述したように、このような柱の破壊は常に柱の一部が降伏したことによって生ずるため、Trahair の弾性解からは柱の最大強度を求めることができない。山形鋼柱の耐荷力を求めるための実験的研究は、板の局部座屈を目的としたもの<sup>5)</sup> を除けばあまり多くない。すなわち、Foehl が 1948 年に行なった屋根トラスの腹材を対象とした山形鋼柱の実験<sup>6)</sup>、石田<sup>6)</sup> および若林ら<sup>7)</sup> が、それぞれ 1964 年および 1965 年に行なった送電鉄塔の圧縮部材を対象とした溶接および圧延山形鋼柱の広範囲な実験をあげることができるのみである。Foehl の実験においては、柱をできるだけ実際に近い状態で実験するため、T 形鋼片の腹板が柱の両端に溶接され、軸方向圧縮力は T 形鋼片フランジ上面、腹板面内にシリンダーを介して加えられた。実験結果は AISC の旧示方書 (1939 年発行) より求められた設計荷重と比較されているが、理論的解析は行なわれていない。石田および若林らの実験は両端を単純に支持された柱について行なわれており、前者の実験は中心軸圧縮状態で、後者の実験は種々の偏心量をもつ軸方向圧縮力のもとで行なわれている。若林らの実験のいくらかは、2 軸曲げの状態で行なわれているが、その理論的考察はなされていない。

以上が筆者らの目に触れた山形鋼柱に関する理論的、実験的研究のおもなものであるが、これだけでは実際の構造物に用いられた場合の山形鋼圧縮部材の合理的設計法を導くには不十分と思われる。従来、山形鋼圧縮部材は両端単純支持の中心軸圧縮力を受ける柱として設計されてきた<sup>9), 10)</sup>。しかし、Foehl の実験結果よりわかるように、このような設計方法は明らかに不合理であり、柱が短くなるにつれて危険側にさえる。このような部材

\* 正会員 D.Sc. 岐阜大学講師 工業短期大学部土木工学科  
(元名古屋大学講師)

\*\* Ph.D. Chairman, Professor of Civil Engineering, Washington University, St. Louis, Missouri, U.S.A.

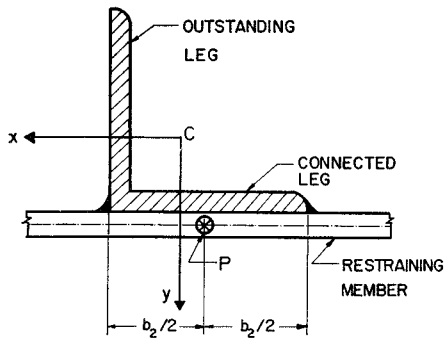


Fig. 1 Joint of a Truss

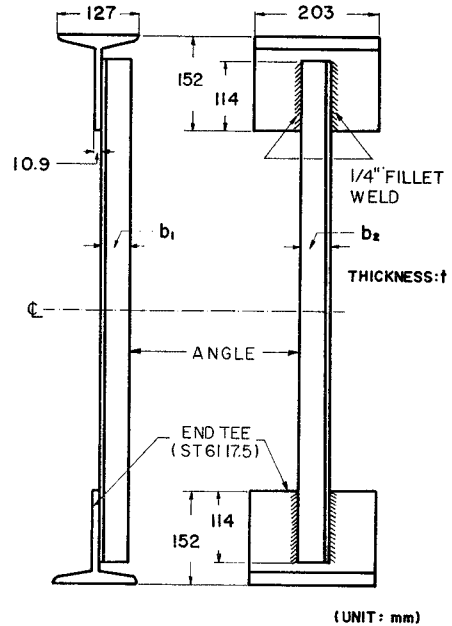
の合理的設計法を導くためには、軸方向圧縮力の偏心によって生ずる 2 軸曲げおよび柱両端に存在する拘束が柱の強度におよぼす影響の正しい評価が重要であると思われる。本研究は、単一山形鋼圧縮部材の強度をこのような観点から実験的、理論的に考察し、合理的な設計方法を導くための基礎資料を得ようとしたものである。

Fig. 1 は単一山形鋼部材の端部を示したものであり、図中の拘束材はガセットプレートまたは強材の腹板などを表わすものである。以後、山形鋼の脚で拘束材面に接合されたものを“接合脚”，そしてもう一方の脚を“突出脚”と呼ぶことにする。Fig. 1 の  $x, y$  軸は、それぞれ拘束材面に平行、垂直な軸であって、ともに山形断面の重心  $C$  を通る。この場合には、 $x, y$  軸は山形断面の主軸とならない。

## 2. 実験的研究

### (1) 実験の概要

Fig. 1 に示したような端部を持つ単一山形鋼圧縮部材の破壊に至るまでの挙動を調べるため、2 つの異なる端部支持条件のもとで総計 34 本の柱の実験を行った。使用した山形鋼の鋼種および断面寸法によって実験を Table 1 に示すように 3 つのシリーズ A, B, C に分けた。シリーズ A では ASTM A 242 鋼（公称降伏点応力 = 35.2 kg/mm<sup>2</sup>）よりなる 50.8 × 50.8 × 6.35 mm (2 × 2 × 1/4 in) の等辺山形鋼，シリーズ B では ASTM A 36 鋼（公称降伏点応力 = 25.3 kg/mm<sup>2</sup>）よりなる 50.8 × 50.8 × 6.35 mm の等辺山形鋼，そしてシリーズ C では ASTM A 441 鋼（公称降伏点応力 = 35.2 kg/mm<sup>2</sup>）よりなる 76.2 × 50.8 × 6.35 mm (3 × 2 × 1/4 in) の不等辺山形鋼を用いた。これらの山形鋼はすべて熱間加工による圧延形鋼である。Fig. 2 は実験柱の正面および側面図を示したものである。山形鋼材両端にすみ肉溶接されている T 形鋼片は A 36 鋼材よりなるもので、



(UNIT: mm)

Fig. 2 Front and Side View of Test Specimen

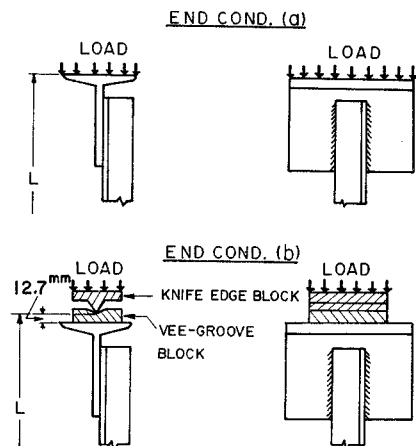


Fig. 3 End Bearing Conditions

Fig. 1 に示した拘束材をシミュレートするために用いた。実験に用いた柱の端部支持条件は Fig. 3 に示した 2 つである。端部条件 (a) の場合、T 形鋼片フランジを試験機にボルト接合し、荷重はその上面に直接加えた。端部条件 (b) では、ナイフ・エッジを図に示すような位置で用いた。したがって、柱端部は T 形鋼腹板面外には自由に回転でき、面内には拘束された状態になっている。これらの端部支持条件は、実際の単一山形鋼圧縮部材のそれを理想化したものと考えることができる。実験柱の断面寸法はマイクロメーターで長さ方向に沿った 3 点で、また柱の長さはテープ R で測定した。Table 1 は測定した断面寸法の平均値、それから計算で求めた断面定数および測定した柱の長さ  $L$  (端部条件 a の場

Table 1 Test Specimen Dimensions

Test Series	Test No.	Cross-Section Dimensions (See Fig. 2)				Column Length L (cm)	Radius of Gyration		End Condition and Attitude		
		$b_1$ (cm)	$b_2$ (cm)	$t$ (cm)	$A$ (cm <sup>2</sup> )		$r_z$ (cm)	$r_x$ (cm)			
A	A-1-1	5.11	5.05	0.627	5.98	201	0.993	1.56	(a)		
	A-1-2	5.03	5.08	0.625	5.93	157	0.991	1.53			
	A-1-3	5.03	5.08	0.627	5.96	137	0.991	1.53			
	A-1-4	5.03	5.08	0.627	5.96	130	0.991	1.53			
	A-1-5	5.05	5.11	0.632	6.02	117	0.993	1.54			
	A-1-6	5.08	5.03	0.625	5.93	106	0.991	1.55			
	A-1-7	5.05	5.08	0.625	5.96	96.3	0.993	1.53			
	A-1-8	5.05	5.13	0.622	5.95	86.1	0.993	1.54			
	A-1-9	5.05	5.05	0.620	5.88	76.2	0.988	1.54			
	A-1-10	5.05	5.05	0.622	5.91	68.3	0.991	1.54			
	A-1-11	5.05	5.05	0.617	5.85	55.4	0.983	1.54			
A	A-2-1	5.08	5.13	0.622	5.97	203	0.993	1.55	(b)		
	A-2-3	5.08	5.05	0.625	5.94	140	0.991	1.55			
	A-2-5	5.03	5.08	0.625	5.92	119	0.988	1.53			
	A-2-7	5.11	5.05	0.620	5.90	101	0.991	1.55			
	A-2-8	5.08	5.08	0.632	6.02	88.6	0.991	1.55			
	A-2-9	5.03	5.11	0.635	6.03	78.7	0.993	1.53			
	A-2-10	5.11	5.05	0.635	6.05	70.9	0.993	1.55			
	A-2-11	5.13	5.05	0.638	6.08	58.4	0.933	1.56			
	B	B-1-1	5.18	5.13	0.640	6.16	137	0.991		1.58	(a)
		B-1-1a	5.18	5.13	0.638	6.16	137	0.991		1.58	
		B-1-5	5.16	5.13	0.638	6.15	86.4	0.991		1.57	
B-1-6		5.13	5.16	0.638	6.15	68.4	0.991	1.56	(b)		
B-2-2		5.16	5.11	0.638	6.15	132	0.991	1.56			
B-2-5		5.11	5.16	0.638	6.15	88.9	0.991	1.57			
B-2-6	5.13	5.16	0.638	6.16	71.1	0.991	1.56				
C	C-1-1	7.75	5.03	0.622	7.61	139	1.09	2.47	(a)		
	C-2-1	4.90	7.62	0.638	7.55	140	1.06	1.39			
	C-1-3	7.72	4.93	0.622	7.48	94.0	1.07	2.47			
	C-2-3	4.93	7.72	0.622	7.48	93.7	1.07	1.33			
	C-3-1	7.75	4.93	0.622	7.55	142	1.07	2.47	(b)		
	C-4-1	4.93	7.77	0.625	7.55	143	1.07	1.33			
	C-3-3	7.72	4.93	0.622	7.48	96.0	1.07	2.47			
	C-4-3	4.93	7.70	0.620	7.48	96.5	1.07	1.40			

\* LLO : Long Leg Outstanding  
 \*\* SLO : Short Leg Outstanding

合にはフランジ上面間距離, 端部条件bの場合にはナイフ・エッジ間距離)をそれぞれの試験柱に対して示したものである。表中, A は山形鋼の断面積,  $r_z$  は最小断面2次半径,  $r_x$  はx軸まわりの断面2次半径を表わす。また, LLO は不等辺山形鋼の長脚が“突出脚”であることを示し, SLO は短脚が“突出脚”であることを示す。

Fig. 4 は実験中の柱(端部条件a)の全景を示す。使用した試験機は最大容量約 100 t のアムスラー型長柱試験機である。実験柱の水平方向変位は, 柱の中央および下端から  $L/4$  の点で, それぞれ3個のダイヤルゲージ(最小目盛 0.0254 mm)によって Fig. 5 に示すように測定した。図中の2枚のアルミ片はC-クランプで柱に固定されたもので, 柱の水平変位量を拡大するために用いた。柱に生ずるひずみは電気抵抗線型ひずみゲ-

ジで柱の種々の点で測定した。また, 降伏域のひろがりを観察するため, 生石灰水溶液をすべての実験柱に塗布した。

(2) 実験柱の材料特性

それぞれのシリーズの山形鋼材について, その材料特性を調べるため引張り試験および短柱試験(Stub Column Test)を2本ずつ行なった。引張り試験は ASTM の引張り試験片の規格<sup>3)</sup>に合格する試験片を山形鋼材の一つの脚から切り出して行ない, 短柱試験は

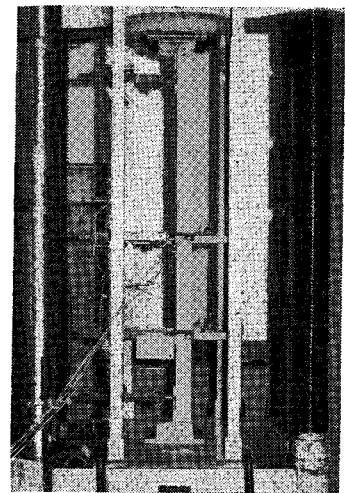


Fig. 4 View of Test Setup, End Condition (a)

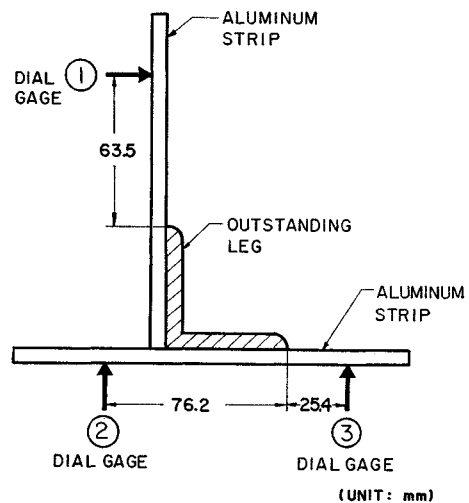


Fig. 5 Locations of the Deflection Gauges at Colum Center (UNIT: mm)

Table 2 Results of Tension Coupon and Stub-Column Tests

Material	Test	Modulus of Elasticity $E$ ( $\times 10^3$ kg/mm $^2$ )	Yield Stress $\sigma_Y$ (kg/mm $^2$ )	Yield Strain $\epsilon_Y$ ( $\times 10^{-6}$ )	Residual Stress Level $\frac{\sigma_Y - \sigma_p}{\sigma_Y}$	Ultimate Tensile Strength $\sigma_u$ (kg/mm $^2$ )
A 242 (Series-A)	Tension	20.4	36.4	1790	—	52.6
		21.0	35.6	1700	—	52.0
	Average	20.7	35.8	1730*	0.296	52.3
A 36 (Series-B)	Tension	20.4	29.3	1435	—	50.1
		21.4	31.4	1470	—	53.2
	Average	21.0	30.0	1430*	0.215	51.6
A 441 (Series-C)	Tension	20.6	40.6	1970	—	56.7
		19.0**	39.9	2110	—	56.2
	Average	20.6	40.4	1960*	—	56.4

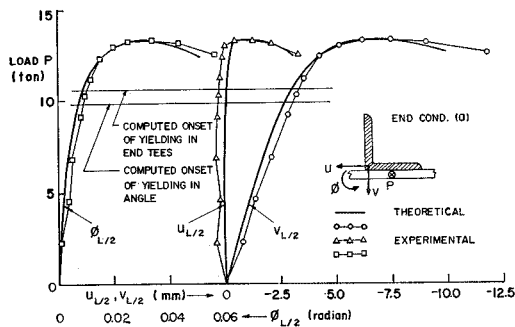
\* From the Formula  $\epsilon_Y = \sigma_Y / E$ \*\* This Value was Omitted When the Values of  $E$  were Averaged

Fig. 6 Experimental and Theoretical Load-Midheight Deflection Curves, Column A-1-8

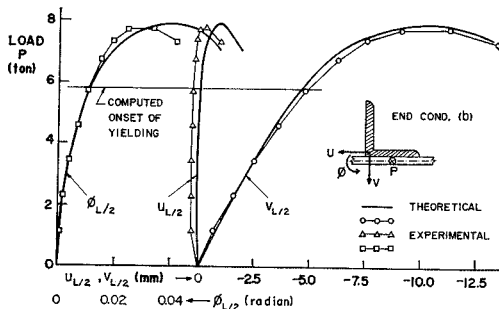


Fig. 7 Experimental and Theoretical Load-Midheight Deflection Curves, Column A-2-8

長さ約 20 cm の短柱を切り出して行なった。後者の試験はアメリカの Column Research Council (以後 CRC

と略記する) による方法<sup>9)</sup> にしたがって行なった。Table 2 は測定した結果をまとめたものである。表中、 $\sigma_p$  は短柱試験から得られた比例限界応力を示し、 $(\sigma_Y - \sigma_p) / \sigma_Y$  は降伏応力  $\sigma_Y$  で無次元化した最大圧縮残留応力の値を示す。シリーズ C の不等辺山形鋼の短柱試験では、その長脚の局部座屈のため、降伏点応力および最大圧縮残留応力の値を求めることができなかった。

### (3) 実験結果

柱中央で測定した 3 つのダイヤルゲージの読みから、山形鋼断面のせん断中心 (両脚の交差点) の  $x, y$  軸方向への変位量  $u_{L/2}, v_{L/2}$  およびその点まわりのねじれ角  $\phi_{L/2}$  を求め、代表的な例として柱 A-1-8 (端部条件 a) および柱 A-2-8 (端部条件 b) の結果を Fig. 6, 7 に示した。これら 2 本の柱は端部支持条件が異なるのみで、他の諸量はほぼ同一である。両者とも

ほぼ同じような変形挙動を示していることが図よりわかる。すなわち、変位量  $v_{L/2}$  は  $u_{L/2}$  に比較してかなり大きく、またねじれ角は最高荷重に達するまでは比較的小さい。したがって、柱中央は T 形鋼腹板面外 (y 軸の負の方向) におもに変位し、最高荷重通過後、面内の方向 (x 軸の負の方向) にも大きく変位してそしてねじれるという挙動を示している。これは弱軸上に偏心圧縮力を受けるはり-柱 (Beam-Column) の横ねじれ座屈<sup>14)</sup> と類似した挙動であり、前述の若林<sup>7)</sup> の実験結果とは異なったものである。このことから、拘束材による柱の両端の変形拘束の影響が大きいことがわかる。次に、実験柱に塗布したひずみ塗料 (生石灰) に表われたすべり線より観察した降伏域の拡がりについて述べる。柱 A-1-8 の場合、降伏は柱両端の T 形鋼腹板上にまず生じ、変形の増大につれて山形鋼材両端の“接合脚”上、そして柱中央付近の“接合脚”上に順次発生し柱はその耐荷力を失うという過程をたどった。この現象は端部条件 (a) の実験柱に共通してみられたことであり、柱はその材の降伏によって生じた剛性の低下によって引き起こされる不安定現象によってその耐荷力を失ったと考えられる。特筆すべきことは、柱の最初の降伏は常に T 形鋼腹板上に生じたことであって、これによる拘束力の低下が柱自身の降伏による剛性の低下と相まって不安定現象を促進したと思われる。柱 A-2-8 における最初の降伏は柱中央付近“接合脚”上に生じ、変形の増大につれて柱の両端方向に拡がる過程で柱はその耐荷力を失った。この現象もまた端部条件 (b) の実験柱に共

**Table 3** Test and Computed Results of Columns with End Conditoin (a)

Test Number	Slenderness Ratios				Squash Load $P_Y$ (t)	Maximum Loads			Column ① Column ②
	$\frac{L}{r_z}$	$\frac{L}{r_x}$	$\lambda_z = \frac{L}{r_z} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$	$\lambda_x = \frac{L}{r_x} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$		Test		Computed	
						$P_{max}$ (t)	$\frac{P_{max}}{P_Y}$ ①	$\frac{P_{max}}{P_Y}$ ②	
A-1-1	202	129	2.67	1.72	21.4	6.8	0.318	0.356	0.894
A-1-2	159	103	2.11	1.37	21.2	10.3	0.485	0.456	1.056
A-1-3	139	89.6	1.84	1.19	21.3	11.3	0.530	—	—
A-1-4	131	84.6	1.73	1.13	21.5	11.1	0.521	—	—
A-1-5	118	76.0	1.56	1.01	21.5	11.5	0.531	0.570	0.933
A-1-6	107	68.7	1.42	0.914	21.2	12.3	0.579	—	—
A-1-7	97.0	62.7	1.28	0.834	21.3	12.5	0.587	—	—
A-1-8	86.8	56.0	1.15	0.745	21.3	13.2	0.617	0.605	1.020
A-1-9	77.2	49.6	1.02	0.660	21.0	12.1	0.575	—	—
A-1-10	69.0	44.3	0.914	0.589	21.1	13.8	0.655	—	—
A-1-11	56.3	35.9	0.745	0.477	21.0	14.0	0.699	0.673	0.994
B-1-1	136	86.8	1.64	1.04	18.5	10.5	0.571	—	—
B-1-1 a	136	87.0	1.64	1.04	18.5	11.0	0.597	—	—
B-1-5	85.9	54.8	1.03	0.658	18.5	11.2	0.607	—	—
B-1-6	68.2	44.0	0.821	0.528	18.2	12.5	0.676	—	—
C-1-1	128	56.4	1.80	0.795	30.8	14.2	0.461	0.454	1.015
C-1-3	87.7	38.1	1.24	0.537	30.3	16.5	0.546	0.530	1.030
C-2-1	131	100	1.84	1.41	30.5	11.2	0.366	0.381	0.960
C-2-3	87.5	66.8	1.23	0.942	30.3	15.8	0.522	0.519	1.005

**Table 4** Test and Computed Results of Columns with End Condition (b)

Test Number	Slenderness Ratios				Squash Load $P_Y$ (t)	Maximum Loads			Column ① Column ②
	$\frac{L}{r_z}$	$\frac{L}{r_x}$	$\lambda_z = \frac{L}{r_z} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$	$\lambda_x = \frac{L}{r_x} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$		Test		Computed	
						$P_{max}$ (t)	$\frac{P_{max}}{P_Y}$ ①	$\frac{P_{max}}{P_Y}$ ②	
A-2-1	205	131	2.71	1.74	21.4	3.23	0.151	0.150	1.007
A-2-3	141	90.2	1.87	1.20	21.2	5.13	0.241	0.241	1.000
A-2-5	121	77.9	1.60	1.04	21.2	6.44	0.304	—	—
A-2-7	102	64.7	1.46	0.861	21.1	7.35	0.348	—	—
A-2-8	89.5	57.2	1.18	0.761	21.5	7.66	0.356	0.367	0.970
A-2-9	79.4	51.4	1.05	0.684	21.6	9.21	0.426	—	—
A-2-10	71.4	45.6	0.945	0.606	21.6	9.71	0.449	—	—
A-2-11	59.0	37.5	0.781	0.500	21.7	10.3	0.472	0.450	1.048
B-2-2	131	84.8	1.58	1.02	18.5	5.53	0.300	—	—
B-2-5	88.4	56.5	1.06	0.678	18.5	7.44	0.403	—	—
B-2-6	70.7	45.6	0.851	0.547	18.5	8.35	0.452	—	—
C-3-1	133	57.5	1.87	0.811	30.5	11.0	0.361	0.352	1.025
C-3-3	89.8	38.9	1.27	0.548	30.3	13.8	0.457	0.437	1.045
C-4-1	133	102	1.87	1.44	30.5	5.62	0.184	0.184	1.000
C-4-3	89.8	69.0	1.27	0.967	30.3	8.44	0.279	0.279	1.034

通してみられた。

**Table 3, 4** は実験より得られた柱の最高荷重  $P_{max}$  をまとめたものである。表中、 $P_Y$  は降伏荷重であって  $A \cdot \sigma_Y$  に等しい。また、 $\lambda_z$  および  $\lambda_x$  は、それぞれ次式で定義される無次元化した細長化である。

$$\lambda_z = \frac{L}{r_z} \cdot \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}, \lambda_x = \frac{L}{r_x} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \dots\dots(1)$$

実験柱の端部支持条件が柱の最大強度におよぼす影響をみるため、 $P_{max}/P_Y$  を  $\lambda_z$  に対してプロットしたものが **Fig. 8, 9** である。両図中には CRC の提案になる

中心軸圧縮力を受ける両端単純支持の柱の座屈曲線も比較のため加えておいた。これらの図よりわかることは、1) 端部条件 (a) の柱はそれと同一部材で端部条件 (b) の柱にくらべて、最大強度は 40~100% 高くなる、2) 不等辺山形鋼の場合、長脚を突出脚に用いた方が強度的に有利である、3) 等辺山形鋼の場合、CRC の座屈曲線は細長比の大きい ( $\lambda_z > 1.8$ ) の場合には端部条件 (b) の柱の最大強度にぞん近するが、細長比の小さい ( $\lambda_z < 1.3$ ) の場合には、どちらの端部条件の柱に対しても危険側になる。

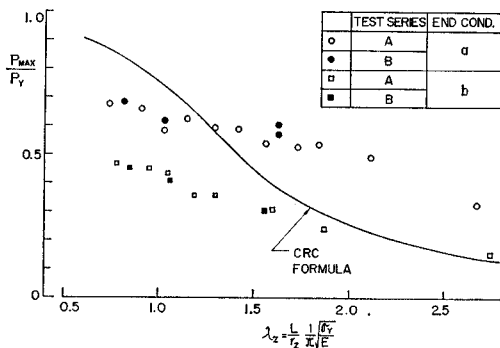


Fig. 8 Maximum Load-Versus-Slenderness Ratio  $\lambda_z$  Relations, Test Series A and B

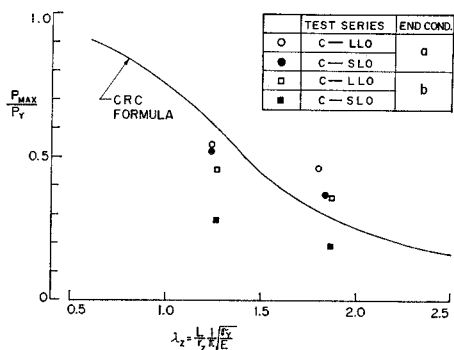


Fig. 9 Maximum Load-Versus-Slenderness Ratio  $\lambda_z$  Relations, Test Series C

3. 理論的研究

ここでは、先に述べた単一山形鋼実験柱の解析方法を一般化した単一山形鋼柱の2軸曲げの問題の非弾性解析方法について述べる。2軸曲げを受ける柱の非弾性解析については、今まで数多くの研究結果が発表されている<sup>1)</sup>。しかしながら、本論文で議論しているような、拘束された柱が偏心圧縮力を受ける2軸曲げの問題を取り扱ったものは見当らないようである。さて、ここで述べる解析に用いる解析モデルは Fig. 10 に示したようなものである。図中、 $x, y$  軸は先に定義したものと同じであり、 $z$  軸は柱の重心軸に一致する。拘束材の面内および面外曲げ剛性によって与えられる柱端部の拘束条件は、それぞれ等価な回転剛性  $R_x$  および  $R_y$  をもつ  $x$  軸および  $y$  軸まわりの回転スプリングに置き換えられている。これらのスプリングの柱への接合点(すなわち、柱の拘束点)は、図に示した位置にあるものとする。先に述べたように、端部条件 (a) の実験柱が不安定となる荷重は、端部拘束材としての T 形鋼片腹板降伏後に生じ、かつ柱に生ずる変形はおもに T 形鋼腹板面外

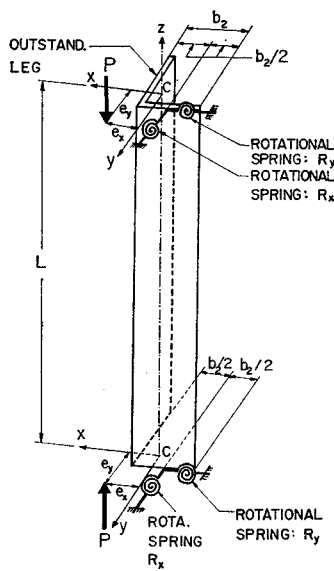


Fig. 10 Idealized Single-Angle Column

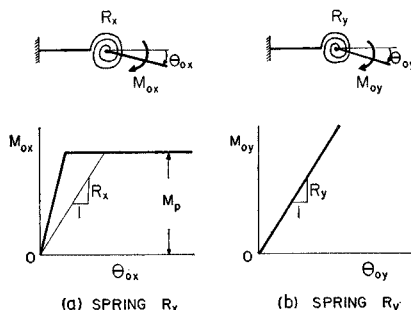


Fig. 11 Characteristics of the Rotational Springs

への曲げ変形であった。したがって、解析モデルにおいてもその点を考慮し、 $x$  軸回りの回転スプリングは Fig. 11 (a) に示したような理想弾塑性<sup>2)</sup>スプリングであるとする。一方、 $y$  軸まわりの回転スプリングは常に弾性的であるとする。軸方向圧縮力  $P$  は偏心量  $e_x, e_y$  をもって柱両端面に作用している。

(1) 解析に用いる仮定および条件

以下の解析に用いるおもな仮定は、1) 柱材の応力-ひずみ曲線は理想的弾塑性型であり、ひずみ硬化は考えない、2) 柱材の降伏は軸方向応力によってのみ生ずる<sup>3)</sup>、3) 柱の端部は水平方向に移動せずかつねじれない、4) 柱端部の回転スプリングの特性は Fig. 11 に示したものとする。ここに、 $x$  軸、 $y$  軸まわりのモーメント  $M_{ox}, M_{oy}$  と回転角  $\theta_{ox}, \theta_{oy}$  は次式で結ばれる。

$$M_{ox} = R_x \theta_{ox}, M_{oy} = R_y \theta_{oy}, \dots \dots \dots (2)$$

ここで、回転剛性  $R_x, R_y$  は、それぞれ、 $M_{ox} - \theta_{ox}$ ,

$M_{0y} - \theta_{0y}$  曲線の割線弾性係数として与えられる, 5) 拘束ねじれによって生ずる軸方向ひずみ (Warping strain) は無視する<sup>15)</sup>, 6) 弾性, 非弾性域にわたって柱のねじれ中心軸は柱のせん断中心軸に一致する, 7) サンブナンの非弾性ねじれ剛性は弾性域における値と同じである<sup>16)</sup>.

さらに, 解析に際して取り入れることのできる条件としては, 1) 不等冷却によって圧延山形鋼材に存在する残留応力, 2) 柱の初期曲がり, そして 3) 初期曲がりのある柱を端部で拘束することによって生ずる軸方向応力。

上記 1) の残留応力  $\sigma_R$  は次式を満足する<sup>14)</sup>。

$$\int_A \sigma_R dA = \int_A \sigma_R \cdot x dA = \int_A \sigma_R y dA = 0 \quad \dots(3)$$

上記 2) の初期曲がりは  $x$  および  $y$  軸方向に存在するものとし, それによって柱に生ずる初期たわみを  $u_I$  および  $v_I$  と書く。これらは柱端で 0 と仮定する。上記 3) の初期応力は, たとえば初期曲がりのある柱を端部条件 (a) で実験した場合存在するもので, それを  $\sigma_I$  と書くこと次式を満足する。

$$\left. \begin{aligned} \int_A \sigma_I dA = 0, \quad M_{Ix} = \int_A \sigma_I y dA, \\ M_{Iy} = - \int_A \sigma_I x dA \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

式 (4) の第 1 式は, 柱がその無載荷状態で軸方向に拘束されていない条件を表わし, 第 2, 3 式の  $M_{Ix}, M_{Iy}$  は,  $\sigma_I$  の存在によって生ずる  $x, y$  軸まわりの初期曲げモーメントで, それらはベクトル的にみて, それぞれ  $x, y$  軸の正方向に向くとき正の符号を取るものとする。

最後に, 応力  $\sigma_R$  と  $\sigma_I$  の代数和は柱内部のどこでも降伏応力を越えないものとする。

(2) つり合い方程式の誘導

いま, 重心に作用する軸方向圧縮力  $P^*$ ,  $x, y, z$  軸まわりのモーメント  $M_x^*, M_y^*, M_z^*$  を受ける単位長さの山形鋼部材を考える。ここで, “単位長さ”とは, 一次理論が適用できるほど短い部材であると定義しておく。これらの外力  $P^*, M_x^*, M_y^*$  および  $M_z^*$  は軸方向ひずみおよびせん断ひずみを部材内に生ぜしめるが, 仮定 2 および 7 により,  $M_z^*$  によるこの部材の応答は他の外力によるそれと別に考察できるであろう。したがって, 部材内の一点における軸方向ひずみ  $\epsilon^*$  は次のように表わされる<sup>14)</sup>。

$$\epsilon^* = -\epsilon_c^* - \phi_x^* \cdot x + \phi_y^* \cdot y + \frac{\sigma_R + \sigma_I}{E} \quad \dots\dots(5)$$

ここで,  $\epsilon_c^*$  は重心  $C$  における軸方向圧縮ひずみ,  $\phi_x^*$  は  $x-z$  面における曲率,  $\phi_y^*$  は  $y-z$  面における曲率を表わす。曲率  $\phi_x^*, \phi_y^*$  の符号は, ベクトル的にみて,

それぞれ  $M_x^*, M_y^*$  の正の方向 ( $x, y$  軸の正方向) を正とする。次に, 外力の微小増加後の軸方向ひずみの増分は次式で与えられる。

$$\delta \epsilon = -\delta \epsilon_c - \delta \phi_x \cdot x + \delta \phi_y \cdot y \quad \dots\dots(6)$$

ここに,  $\delta \epsilon, \delta \epsilon_c, \delta \phi_x, \delta \phi_y$  は, それぞれ,  $\epsilon^*, \epsilon_c^*, \phi_x^*, \phi_y^*$  の微小な増分を示す。式 (5), (6) で表わされる  $\epsilon^*, \delta \epsilon$  はともに弾性および塑性ひずみ成分に分割され, 弾性ひずみ成分は対応する軸方向応力とフックの法則によって結ばれる。すなわち

$$\epsilon^* = \frac{\sigma^*}{E} + \epsilon^{*p} \quad \delta \epsilon = \frac{\delta \sigma}{E} + \delta \epsilon^p \quad \dots\dots(7)$$

ここに, 記号  $p$  は塑性ひずみであることを意味し,  $\sigma^*$  および  $\delta \sigma$  はそれぞれ  $\epsilon^*$  および  $\delta \epsilon$  に対応する軸方向応力である。塑性ひずみ成分  $\delta \epsilon^p$  は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} |\epsilon^* + \delta \epsilon| \leq \epsilon_Y \quad \text{のとき} \quad \delta \epsilon^p = 0 \\ |\epsilon^*| \leq \epsilon_Y, |\epsilon^* + \delta \epsilon| \geq \epsilon_Y \quad \text{のとき} \\ \delta \epsilon^p = (\epsilon^* + \delta \epsilon) - \epsilon_Y \cdot \text{sgn}(\epsilon^* + \delta \epsilon) \quad \dots\dots(8) \\ |\epsilon^*| \geq \epsilon_Y, |\epsilon^* + \delta \epsilon| \geq \epsilon_Y \quad \text{のとき} \quad \delta \epsilon^p = \delta \epsilon \\ |\epsilon^*| \geq |\epsilon^* + \delta \epsilon| \quad \text{のとき} \quad \delta \epsilon^p = 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに,  $\text{sgn}$  は signum 記号で, 次に表われるカッコ内の量の符号を表わす。次に,  $\epsilon^{*p}$  は次式で与えられる。

$$\epsilon^{*p} = \sum \delta \epsilon^{*p} \quad \dots\dots(9)$$

ここに,  $\delta \epsilon^{*p}$  は外力が  $P^*, M_x^*$  および  $M_y^*$  に達するまでに生じた塑性ひずみの増分であり,  $\sum$  はその和を表わす。

式 (5), (6), (7) より外力の微小な増分後の部材内の一点における軸方向応力  $\sigma$  の表現が次のように得られる。

$$\sigma \equiv \sigma^* + \delta \sigma = E(-\epsilon_c - \phi_x \cdot x + \phi_y \cdot y - \epsilon^{*p} - \delta \epsilon^p) + \sigma_R + \sigma_I \quad \dots\dots(10)$$

ここに,  $\epsilon_c \equiv \epsilon_c^* + \delta \epsilon_c, \phi_x \equiv \phi_x^* + \delta \phi_x, \phi_y \equiv \phi_y^* + \delta \phi_y$  であって, これらは外力の増分後の変形量を表わす。式 (10) の応力は次のような軸方向圧縮力および曲げモーメントを生ずる。

$$\left. \begin{aligned} P = - \int_A \sigma dA, \quad M_x = \int_A \sigma \cdot y dA \\ M_y = - \int_A \sigma \cdot x dA \end{aligned} \right\} \dots\dots(11)$$

式 (10) を上式に代入して,  $x, y$  軸は断面の重心を通る軸であることおよび式 (3), (4) を考慮すれば以下の式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} P = E(A \cdot \epsilon_c + \Gamma) \\ M_x = E(-I_{xy} \phi_x + I_x \phi_y - \Gamma_x) \quad M_{Ix} \\ M_y = E(I_y \phi_x - I_{xy} \phi_y + \Gamma_y) - M_{Iy} \end{aligned} \right\} \dots\dots(12.1, 2, 3)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned}
 I_x &\equiv \int_A y^2 dA, & I_y &\equiv \int_A x^2 dA, \\
 I_{xy} &\equiv \int_A xy dA & \Gamma &\equiv \Gamma^* + \delta\Gamma \\
 \Gamma^* &\equiv \int_A \epsilon^* \rho dA & \delta\Gamma &\equiv \int_A \delta\epsilon \rho dA \\
 \Gamma_x &\equiv \Gamma_x^* + \delta\Gamma_x & \Gamma_x^* &\equiv \int_A \epsilon^* \rho y dA \\
 \delta\Gamma_x &\equiv \int_A \delta\epsilon \rho y dA & \Gamma_y &\equiv \Gamma_y^* + \delta\Gamma_y \\
 \Gamma_y^* &\equiv \int_A \epsilon^* \rho x dA & \delta\Gamma_y &\equiv \int_A \delta\epsilon \rho x dA
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

最後にねじりモーメントの表現式は仮定 2, 5, 7 より次式で与えられるであろう。

$$M_z = GK_T \phi' \dots\dots\dots (12.4)$$

ここに、 $GK_T$  はサンプナンの弾性ねじれ剛性、また '(prime) は  $z$  軸に関する微分を表わす。式 (12-1,2,3, 4) はそれぞれ、柱の解析における  $z$  軸方向の内力、 $x, y, z$  軸まわりの内部抵抗モーメントを表わすことになる。

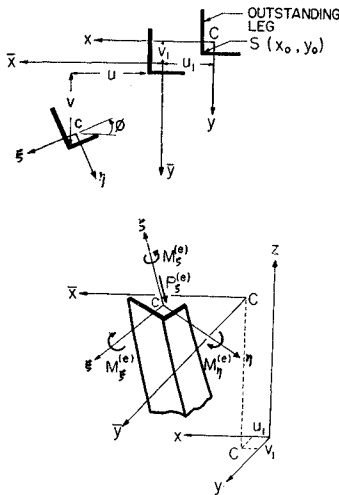


Fig. 12 Coordinate Systems and Sign Convention for External Force and Moments

さて、次に柱の外力および外力モーメントの表現式を求めよう。Fig. 12 は以下の誘導に用いられる座標系および外力の正の方向を示す。C-x, y, z 座標系に前に定義したものと同一であり空間に固定されている。初期曲がりの位置での“接合脚”および“突出脚”に平行な軸をそれぞれ  $\bar{x}$  および  $\bar{y}$  軸とする。柱の初期変位  $u_I, v_I$  は図のように測る。C-ξ, η, ζ 座標系は荷重によって変位した柱に固定された座標系で、ξ および η 軸はそれぞれ“接合脚”および“突出脚”に平行な軸であり、ζ 軸は変形した柱の重心軸と一致する。荷重による断面

のせん断中心  $S$  の  $\bar{x}, \bar{y}$  軸方向の変位を  $u, v$  そして  $z$  軸まわりのねじれ角を  $\phi$  とする。柱端部に存在する拘束モーメントは2つの原因によって生ずる。すなわち、一つは柱の初期曲がりによるものであり、他の一つは載荷重によって生ずる柱の変位によるものである。これらの拘束モーメントの和を  $M_{0x}, M_{0y}$  とすれば次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned}
 M_{0x} &= -R_x \left( v_0' + v_{I0} - \frac{b_2}{2} \phi_0' \right) \\
 M_{0y} &= R_y (u_0' + u_{I0}')
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ここで、下記号 (subscript) 0 のついた変位量はそれが柱端部の量であることを示し、 $b_2$  は“接合脚”の長さである (Fig. 10 参照)。次に、次式で定義される等価偏心量を導入する。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{e}_y &\equiv e_y - \frac{M_{0x}}{P} = e_y + \frac{R_x}{P} \left( v_0' + v_{I0}' - \frac{b_2}{2} \phi_0' \right) \\
 \bar{e}_x &\equiv e_x + \frac{M_{0y}}{P} = e_x + \frac{R_y}{P} (u_0' + u_{I0}')
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

これらの量を導入することにより、拘束された柱は軸方向圧縮力  $P$  が偏心量  $\bar{e}_x, \bar{e}_y$  をもって作用する両端単純支持の柱に置き換えることができる。このような柱に対する外力および外力モーメントの表現式は Culver<sup>17)</sup> によって求められている。すなわち、

$$\left. \begin{aligned}
 P_\xi^{(e)} &= P \\
 M_\xi^{(e)} &= P \{ v + v_I - \bar{e}_y - (x_0 - \bar{e}_x) \phi \} \\
 M_\eta^{(e)} &= -P \{ u + u_I - \bar{e}_x + (y_0 - \bar{e}_y) \phi \} \\
 M_\zeta^{(e)} &= P \{ (y_0 - \bar{e}_y) (u' + u_I') \\
 &\quad - (x_0 - \bar{e}_x) (v' + v_I') \} - \bar{K} \phi'
 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

ここに、 $P_\xi^{(e)}$  は  $\xi$  軸方向の外力、 $M_\xi^{(e)}, M_\eta^{(e)}, M_\zeta^{(e)}$  はそれぞれ  $\xi, \eta, \zeta$  軸まわりの外力モーメント (Fig. 12 参照) であり、 $x_0, y_0$  は C-x, y, z 座標系におけるせん断中心の座標である (Fig. 12)。式 (16) の最後の式中の  $\bar{K}$  は次式で定義される。

$$\bar{K} \equiv \int_A \sigma \{ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \} dA \dots\dots\dots (17)$$

式 (10) で表わされる  $\sigma$  を上式に代入し、式 (12.2,3) で  $M_x \equiv -P\bar{e}_y, M_y \equiv P\bar{e}_x$  とおいた式を用いれば次式を得る。

$$\bar{K} = -(Pr_s^2 + EA) + \bar{K}_R + \bar{K}_I \dots\dots\dots (18)$$

上式中の  $r_s^2, \bar{K}_R, \bar{K}_I, A$  の表現式は Appendix に与えてある。

さて、柱の変形は微小であると仮定すれば変形した柱に生ずる曲率は

$$\phi_\xi \equiv \phi_x \equiv u'', \phi_\eta \equiv \phi_y \equiv -v'' \dots\dots\dots (19)$$

で表わされる。したがって、変形後の柱の内力と外力のつり合い方程式<sup>14)</sup>に式 (12) および (16) を代入し、式 (18)、式 (30)~(36)、(19) を考慮すれば柱の変形後の



つり合いを表わす微分方程式が以下のように求まる。

$$P = EA \left( \epsilon_c + \frac{\Gamma}{A} \right) \dots\dots\dots(20.1)$$

$$EI_x v'' + EI_{xy} u'' + Pv - P(x_0 - \bar{e}_x) \phi = P \bar{e}_y - E \Gamma_x - Pv_I + M_{Ix} \dots\dots\dots(20.2)$$

$$EI_y u'' + EI_{xy} v'' + Pu + P(y_0 - \bar{e}_y) \phi = P \bar{e}_x - E \Gamma_y - Pu_I - M_{Iy} \dots\dots\dots(20.3)$$

$$P(x_0 - \bar{e}_x) v'' - P(y_0 - \bar{e}_y) u'' + (GK_T + \bar{K}_R + \bar{K}_I - Pr_S^2) \phi'' = E A \phi'' - P(x_0 - \bar{e}_x) v_I'' + P(y_0 - \bar{e}_y) u_I'' \dots\dots\dots(20.4)$$

ただし、式 (20.4) は \$z\$ 軸まわりの内力モーメントと外力モーメントのつり合い式を一度 \$z\$ で微分した結果の式で、その際、\$(E A \phi')' \approx E A \phi''\$ なる近似を行なった。式 (20) の微分方程式に対する境界条件は、

$$u_0 = v_0 = \phi_0 = u_{L/2} = v_{L/2} = \phi_{L/2} = 0 \dots\dots\dots(21)$$

(3) 数値計算方法

連立微分方程式 (20.2)~(20.4) は次のように変形できる。

$$EI_x (v'' - v_0'') + EI_{xy} (u'' - u_0'') + Pv - P(x_0 - \bar{e}_x) \phi = E(\Gamma_{x0} - \Gamma_x) - Pv_I \dots\dots\dots(22.1)$$

$$EI_y (u'' - u_0'') + EI_{xy} (v'' - v_0'') + Pu + P(y_0 - \bar{e}_y) \phi = E(\Gamma_{y0} - \Gamma_y) - Pu_I \dots\dots\dots(22.2)$$

$$P(x_0 - \bar{e}_x) (v'' - v_0'') - P(y_0 - \bar{e}_y) (u'' - u_0'') + (GK_T + \bar{K}_R + \bar{K}_I - Pr_S^2) (\phi'' - \phi_0'') = E \{ A \phi'' - (A \phi'')_0 \} - P(x_0 - \bar{e}_x) (v_I'' - v_{I0}'') + P(y_0 - \bar{e}_y) (u_I'' - u_{I0}'') \dots\dots\dots(22.3)$$

ここで、下記号 (subscript) 0 のついている変位量および \$\Gamma\_x, \Gamma\_y, A \phi''\$ は柱端部で定義された量である。式 (22) は柱端部 (\$z=0, L\$) では恒等的に満足される微分方程式である。次に、次式によって定義される回転ばね係数 \$\bar{R}\_x, \bar{R}\_y\$ を導入する。

$$R_x \equiv \frac{\bar{R}_x}{1 - \bar{R}_x} \frac{EI_x}{L} \quad R_y \equiv \frac{\bar{R}_y}{1 - \bar{R}_y} \frac{EI_y}{L} \dots\dots(23)$$

上式および

$$M_{Ix} = -R_x v_{I0}' \quad M_{Iy} = R_y u_{I0}'$$

を考慮すれば、式 (20.2)~(20.4) の柱端部での表現式は次のようになる。

$$(1 - \bar{R}_x) EI_x v_0'' + (1 - \bar{R}_x) EI_{xy} u_0'' - \bar{R}_x \frac{EI_x}{L} \left( v_0' - \frac{b_2}{2} \phi_0' \right) = (1 - \bar{R}_x) P e_y - (1 - \bar{R}_x) E \Gamma_{x0} \dots\dots\dots(24.1)$$

$$(1 - \bar{R}_y) EI_y u_0'' + (1 - \bar{R}_y) EI_{xy} v_0'' - \bar{R}_y \frac{EI_y}{L} u_0' = (1 - \bar{R}_y) P e_x - (1 - \bar{R}_y) E \Gamma_{y0} \dots\dots\dots(24.2)$$

$$P(x_0 - \bar{e}_x) v_0'' - P(y_0 - \bar{e}_y) u_0'' + (GK_T + \bar{K}_R + \bar{K}_I - Pr_S^2) \phi_0'' = E(A \phi'')_0 - P(x_0 - \bar{e}_x) v_{I0}'' + P(y_0 - \bar{e}_y) u_{I0}'' \dots\dots\dots(24.3)$$

式 (20) を境界条件 (21) で解くのにくらべ、式 (20.1), (22) を境界条件 (21), (24) で解く方法は固定端を有する柱の問題を解く場合に特に便利である。たとえば、柱端部が \$y\$ 軸まわりに固定されているとき \$R\_y = \infty\$ となるが、式 (23) よりこの条件は \$\bar{R}\_y = 1\$ となって式 (24.2) で表わされる境界条件は \$u\_0' = 0\$ となり固定端の条件と一致する。柱端部が \$y\$ 軸まわりに単純支持されているときは \$R\_y = \bar{R}\_y = 0\$ となり、式 (24.2) の境界条件式は内力モーメントと外力モーメント \$Pe\_x\$ とのつり合いを表わす周知の式になる。したがって、\$\bar{R}\_y\$ の値は一般に 0 (単純支持) から 1 (固定) の間の値を取る。以上の議論は \$\bar{R}\_x\$ についてもいえることである。数値計算を実際に行なうには以上の諸式を無次元化しておく

$$\{U, V, U_I, V_I, X_0, Y_0, \bar{E}_x, \bar{E}_y, E_x, E_y\} = \frac{1}{r_0} \{u, v, u_I, v_I, x_0, y_0, \bar{e}_x, \bar{e}_y, e_x, e_y\} \dots\dots\dots(25)$$

$$Z \equiv \frac{z}{L} \quad P_x \equiv \frac{\pi^2 EI_x}{L^2} \quad P_y \equiv \frac{\pi^2 EI_y}{L^2} \quad P_z \equiv \frac{GK_T + \bar{K}_R + \bar{K}_I}{r_0^2} \quad \bar{P} \equiv \frac{P}{P_x}$$

ここに、\$r\_0\$ は式 (31) で定義した量である。これらの量を用いて式 (20.1), (21), (22), (24) は容易に無次元化できるが、結果の式はここでは省略する<sup>16)</sup>。

上記のように無次元化した微分方程式を解くために有限積分法 (Finite Integral Method)<sup>18)</sup> を用いた。有限積分法は、差分法 (Finite Different Method) とよく似た数値計算法である。しかし、後者は分割点の変位 (たとえば \$U, V, \phi\$) を未知量に取り、変位の導関数をそれらの未知量によって近似する方法であるが、前者は分割点の変位の導関数 (たとえば \$U'', V'', \phi''\$) を未知量にとり、それより低次の導関数を未知量によって近似する方法である。これらの近似の手段として、差分法では数値微分法、有限積分法では数値積分法が用いられる。周知のように、数値積分法は数値微分法にくらべはるかに安定な演算法である。したがって、有限積分法の方が同じ分割数で差分法より精度のよい解が得られるといわれている<sup>19)</sup>。さて、柱の長さの半分を \$m\$ 等分して各分割点を柱端から \$0, 1, \dots, m\$ と名付ける。本解析においては、各分割点の無次元変位の 2 次導関係 \$V\_i'', U\_i'', \phi\_i''\$ (\$i=0, 1, \dots, m\$) および重心の圧縮ひずみ \$\epsilon\_{oi}\$ (\$i=0, 1, \dots, m\$) を未知量とする。したがって、合計 4 (\$m+1\$) の未知量が存在することとなる。\$V\_i''\$ を 1 度お

よび2度積分し、境界条件(21)を考慮すれば、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} V_i' &= \int_0^{iH} V_i'' dZ - \int_0^{1/2} V_i'' dZ \\ V_i &= \int_0^{iH} \int_0^{iH} V_i'' dZ dZ - iH \int_0^{1/2} V_i'' dZ \end{aligned} \right\} \dots (26)$$

ここに、 $H$  は柱の長さ  $L$  で割って無次元化した分割点間隔で  $1/2 m$  に等しい。 $U'$ ,  $U$ ,  $\phi'$ ,  $\phi$  についても上と同様な式が得られる。Brown および Trahair によれば<sup>18)</sup>,

$$\left. \begin{aligned} F_i' &= \int_0^{iH} F_i'' dZ \\ F_i &= \int_0^{iH} \int_0^{iH} F_i'' dZ dZ \quad (i=0, 1, \dots, m) \end{aligned} \right\} \dots (27)$$

なる積分はそれぞれ次式によって近似できる。

$$\left. \begin{aligned} \{F'\} &= \frac{H}{12} [N] \{F''\} \\ \{F\} &= \frac{H^2}{144} [N][N] \{F''\} \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

ここに、 $\{F''\}$ ,  $\{F'\}$ ,  $\{F\}$  はそれぞれ  $F_i''$ ,  $F_i'$ ,  $F_i$  を成分とする  $(m+1)$  次元ベクトルであり、 $[N]$  は  $(m+1)$  次の正方マトリックスで Appendix に定義してある。式(28)を式(26)に適用すれば、 $V_i'$ ,  $V_i$  を成分とする  $(m+1)$  次元ベクトル  $\{V'\}$ ,  $\{V\}$  は  $V_i''$  を成分とする  $(m+1)$  次元ベクトル  $\{V''\}$  の関数として表わされる。同様な関係式は  $\{U'\}$ ,  $\{U\}$  と  $\{U''\}$  および  $\{\phi'\}$ ,  $\{\phi\}$  と  $\{\phi''\}$  に対しても容易に求められる。式(20.1), (22)を式(25)を用いて無次元化した式を分割点  $i=1, 2, \dots, m$ , また式(24)を式(25)を用いて無次元化した式を分割点  $i=0$  に適用し、上で求められた  $\{V'\}$ ,  $\{V\}$  と  $\{V''\}$  の関係式などを用いれば次に示される  $4(m+1)$  元連立方程式を得る。

$$[A]\{x\} + \bar{P}[B]\{x\} = \{D\} + \bar{P}\{E\} \dots (29)$$

ここに、 $\{x\}$  は  $4(m+1)$  次元ベクトルで、その成分は  $V_i''$ ,  $U_i''$ ,  $\phi_i''$  および  $\epsilon_{ci}$  ( $i=0, 1, 2, \dots, m$ ) より成り立つ。マトリックス  $[A]$  は一種の柱の剛性を表わすマトリックスであり、 $[B]$  は2次理論(Second Order Theory)適用の際表われる付加的な外力モーメントに関するマトリックスである。また、柱の一部が塑性域に入ったことによって生ずる量  $\Gamma$ ,  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$ ,  $A$  はベクトル  $\{D\}$  に集められ、ベクトル  $\{E\}$  は軸方向圧縮力の偏心量および初期曲がりに関する項を集めたものである。

次に、これまで定義してきた種々の断面量を求めるための方法について述べる。式(13), (36)で定義した  $\Gamma$ ,  $\Gamma_x$ ,  $\Gamma_y$ ,  $A$  などは解析的に求めることはかなりめんどうであるので、断面を Fig. 13 に示すように多くの要素に分割して数値解析的に求めた。図のように、2つの長方形ネットワークを用い、“突出脚”は  $l_1 \times n_1$  個の面積  $A_1$  の長方形要素に、“接合脚”(両脚の交差点を除

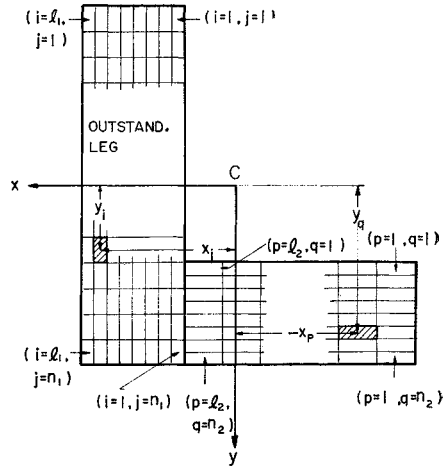


Fig. 13 Column Cross-Section Showing Grid Networks

く)は  $l_2 \times n_2$  個の面積  $A_2$  の長方形要素に等分割した。断面量の計算に際しては、おのおのの要素内の座標、ひずみなどはその図心における座標、ひずみなどによって代表されるものとした。

さて、次に式(29)の解法について述べる。式(29)は変位量  $\{x\}$  の関数である等価偏心量  $\bar{E}_x$ ,  $\bar{E}_y$  および回転ばね係数  $\bar{R}_x$  を係数マトリックスに含むため、柱が弾性域にあっても、直接厳密解を得ることは不可能である。本論文における計算方法では、まず変形量の微小増分  $\{\delta x\}$  を仮定し、そのすぐ前のステップのくり返し計算で求めた(収れんした)変形量  $\{x^*\}$  との和  $\{x^* + \delta x\}$  が式(29)を満足するまで  $\{\delta x\}$  を調整し、新しい変形量  $\{x\}$  を求めるという方法をとった。その際、計算の簡単化のため、 $\bar{E}_x$ ,  $\bar{E}_y$ ,  $\bar{R}_x$  はその変形の増分の間一定とした。したがって、式(29)は、柱が弾性域にある間は直接解くことが可能になる。以下に柱の一部が塑性域に入った後の計算順序を示す。その際、右肩に\*のついた量はすぐ前のステップのくり返し計算で求めた(収れんした)量であり、 $\delta$ をつけた量はその微小増分を表わす。これらの記号法はいままで用いて来た記号法と一致する。

- 1) マトリックス  $[A^*]$ ,  $[B^*]$ ,  $\{D^*\}$ ,  $\{E^*\}$  を  $\{x^*\}$  より求める。
- 2)  $\{\delta x\}$  の値を仮定し、 $\{x\} = \{x^*\} + \{\delta x\}$  を求める。
- 3)  $\{\delta D\}$  の値を仮定した  $\{\delta x\}$  から求め、 $\{D\} = \{D^*\} + \{\delta D\}$  を求める。
- 4) 各分割点での  $\bar{P}$  を式(20.1), (25)より求め、それらを平均することにより、軸方向圧縮荷重の control value  $\bar{P}_c$  を求める。
- 5) 式(29)および  $\bar{P} = \bar{P}_c$  を用いて仮定した  $\{\delta x\}$  の修正量  $\{\delta(\delta x)\}$  を Newton-Raphson 法<sup>19), 16)</sup>を用い

て求める。

6)  $\{\delta(\delta x)\}$  が次の収れん則を満足するかどうか調べる。

$$\left| \frac{\delta(\delta x)_i}{x_i} \right| \leq \mu \quad (i=0, 1, \dots, 4(m+1))$$

ここに、 $x_i$  および  $\delta(\delta x)_i$  はそれぞれ  $\{x\}$  および  $\{\delta(\delta x)\}$  の一成分であり、 $\mu$  の値としては、 $x_i$  が  $V_i''$  および  $\epsilon_{ci}$  のとき 0.003、 $U_i''$  および  $\phi_i''$  のとき 0.005 を用いた。

7) 上記の収れん則が満足されなければ、 $\{\delta(\delta x)\}$  を  $\{\delta x\}$  に加え、新しい変形量増分  $\{\delta x\}$  を求めて 2)~6) の計算をくり返す。もし満足されたときは、収れんした変形量  $\{x\}$  より変位量  $V, U, \phi$  などを求めて  $\bar{P}$  の値などととも印刷する。

8) 上記計算順序 1)~7) を柱中央の変位量が規定の値に達するまでくり返す。

#### (4) 実験柱のモデル化

2. で述べた実験に用いた柱を 前述の方法によって解

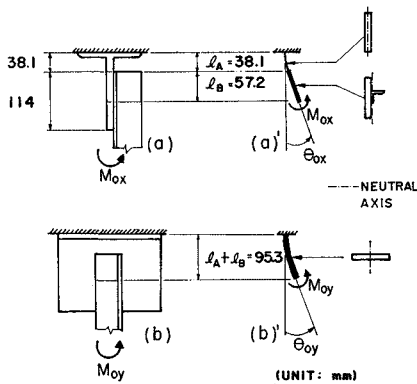


Fig. 14 Models for Determining the End Spring Stiffnesses

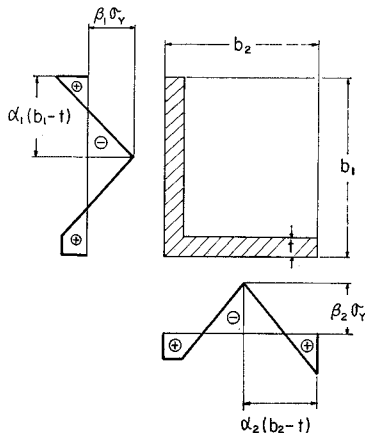


Fig. 15 Assumed Residual Stress Pattern

析するため、実験柱のモデル化を行なった。以下にその概要を述べる。

まず、柱の端部支持条件を規定する回転ばね係数  $\bar{R}_x, \bar{R}_y$  および  $x$  軸まわりの回転スプリングの全塑性モーメント  $M_p$  (Fig. 11 参照) の決定方法であるが、そのために Fig. 14 (a)', (b)' に示すようなモデルを考える。端部条件 (a) の場合、T形鋼片フランジは試験機に固定して実験したため、その腹板の面外、面内曲げ剛性がそれぞれ  $\bar{R}_x, \bar{R}_y$  を支配する。したがって、Fig. 14 (a)', (b)' における片持ちはりに作用するモーメント  $M_{ox}, M_{oy}$  と対応する自由端のたわみ角  $\theta_{ox}, \theta_{oy}$  の関係がわかれば、 $\bar{R}_x, \bar{R}_y, M_p$  の値は容易に求められる。計算に際しては、 $M_{ox} - \theta_{ox}, M_{oy} - \theta_{oy}$  性状はたがいに連成しないものとし、 $M_p$  は Fig. 14 (a)' の片持ちはりに単独に作用するモーメント  $M_{ox}$  の最大値 (すなわち、はりの全塑性モーメント) に等しいと仮定した。端部条件 (b) の場合にはナイフ・エッジが用いられているため、 $\bar{R}_x$  の値は常に 0 であり、 $\bar{R}_y$  の値は端部条件 (a) におけるそれと等しい。

次に、柱の有効長さの決定方法であるが、端部条件 (b) の場合にはナイフ・エッジ間距離を有効長さにとってもよいであろう。しかし、端部条件 (a) の場合には議論の起こるところである。ここでは、柱全体の長さ、すなわち T形鋼片フランジ上面間距離を柱の有効長さとした。したがって、柱の有効長さは、端部条件 (a), (b) とも、Table 1 に示した実験柱長  $L$  と一致する。

軸方向圧縮力  $P$  の偏心量  $e_x, e_y$  を定めるため、 $P$  は Fig. 1 に示したように、T形鋼片腹板面内、“接合脚”中央に作用するものと仮定した。したがって、 $e_x, e_y$  の値は山形鋼の断面寸法および T形鋼片腹板厚がわかれば求まる。

次に、圧延山形鋼断面に存在する残留応力の分布であるが、文献 3) から取った Fig. 15 の分布形を仮定する。図に示した 4 つのパラメーター  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  の値が定めれば、式 (3) を用いることにより他のディメンションは自動的に定まる。等辺山形鋼の場合、 $\beta_1 = \beta_2$  の値としては Table 2 の  $(\sigma_Y - \sigma_B) / \sigma_Y$  の負の値、 $\alpha_1 = \alpha_2$  の値は文献 3) から取った 0.575 を用いた。不等辺山形鋼の場合、残留応力測定結果は文献に見当らなかったため、等辺山形鋼と同じ値を用いた。

次に、載荷前の実験柱に存在する初期曲がりであるが、柱の耐荷力が最も低下すると思われる“突出脚”方向 ( $y$  軸の負の方向) へのみ初期曲がりが存在するものと仮定する。初期曲がりによる柱の初期変位は 2 次放物線 で表わされるものとし、その最大値 (柱中央での初期変位量) は ASTM Specification A 6<sup>13)</sup> に定められている山形鋼の最大許容そり量  $L/240$  に等しくとった。

ここに、 $L$  はインチで表わした柱の長さである。端部条件 (a) の場合、前述のように、端部が自由に回転できないため、上で仮定したような初期曲がりをもつ柱には、初期変位  $u_1, v_1$  そして初期応力  $\sigma_1$  が荷重前に存在することとなる。これらの値を厳密に求めるのはかなりめんどうであるが、ここでは、 $u_1, v_1$  もまた 2 次放物線と近似できるものと仮定した<sup>16)</sup>。なお、端部条件 (b) の場合には、ナイフ・エッジが用いられ端部は自由に回転できるため、上で仮定した初期曲がりそのまま荷重前の柱に存在することとなり、初期応力は 0 である。

(5) 数値計算結果

前述の解析方法はすべて FORTRAN IV 言語によって、電子計算機による計算のためプログラムした。使用した電子計算機はワシントン大学理工学部所有の IBM

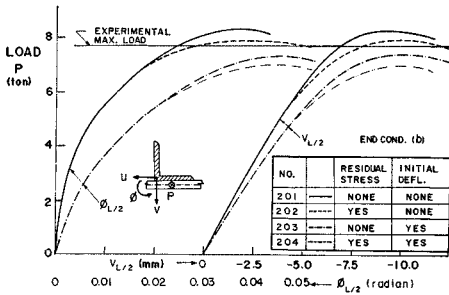


Fig. 16 Effects of Residual Stresses and Initial Deflections, Problems 201 through 204

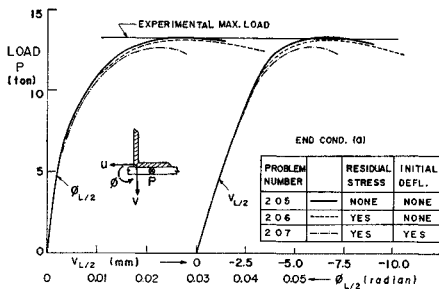


Fig. 17 Effects of Residual Stresses and Initial Deflections, Problems 205, 206 and 207

360/50 である。文献 16) では、柱の長さ方向の分割数  $m$  による解の精度の比較、Trahair の弾性解<sup>11), 12)</sup> との比較などについて詳細に述べたが、ここではそれらを省略し、以下に残留応力および初期曲がり柱の弾塑性性状におよぼす影響、そして実験結果との比較のため解析した 22 本の柱に対する結果について述べる。

残留応力および初期曲がりの影響を調べるため、2 本の柱を選択し、Table 5 に示したような 7 つの問題を解いた。問題 201~204 は実験柱 A-2-8 (端部条件 b)、問題 205~207 は実験柱 A-1-8 (端部条件 a) を対象としたものである。数値計算の際、柱の材質、寸法などは測定値を用い、柱の長さの半分は 6 分割 (すなわち、 $m=6$ ) し、断面の分割数は  $l_1=n_2=3, n_1=24, l_2=21$  である。Fig. 16 は問題 201~204 の計算結果を荷重一柱中央の変位曲線として描いたものである。また、Table 5 には、初期降伏荷重および最大荷重などがまとめられている。同表より、最大荷重は問題番号が増加するにしたがって減少することがわかる。問題 202 (残留応力のみ考慮) の柱は問題 203 (初期曲がりのみ考慮) の柱にくらべ早く降伏域に達するが、前者は後者よりもより多くの非弾性強度を保留している。残留応力の影響はあまり顕著でなく、その存在による耐荷力の低下は高々 4% である。一方、初期曲がりの存在による耐荷力の低下は約 10% でかなり大きい。実験より得られた最大荷重は問題 202 および 203 の最大荷重の中間にある。問題 205~207 の計算結果は Fig. 21 および Table 5 に示してある。Table 5 の初期降伏荷重の欄には 2 つの荷重が与えてある。一つは柱に関するもので、他の一つは端部回転スプリングに関するものである。後者の初期降伏は最高荷重よりかなり小さな荷重で生ずることがわかる。残留応力、初期曲がりの影響は無視できるほど小さく、この種の柱の耐荷力は端部回転スプリングの全塑性モーメントの大きさに大きく左右されるものと思われる。以上の議論より初期曲がりは端部条件 (b) の柱の強度をかなり低下させることがわかったが、柱の初期曲がりはまったくランダムに存在するものであり、計算に用いた初期曲がりの仮定は実在の柱にとって最悪の場合

Table 5 Effects of Residual Stresses and Initial Deflections

Problem Number	Corresponding Test Column		Residual Stress	Initial Deflection	Computed First Yielding Loads (t)		Maximum Loads $P_{max}$ (t)		
	No.	End			Angle	End Spring	Test	Computed	Ratio
201	A-2-8	(b)	None	None	7.26	—	7.66	8.26	1.0
202			Yes	None	5.81	—		7.89	0.956
203			None	Yes	6.17	—		7.35	0.890
204			Yes	Yes	4.99	—		6.99	0.847
205	A-1-8	(a)	None	None	12.2	11.2	13.2	13.11	1.0
206			Yes	None	9.98	10.4		13.10	1.0
207			Yes	Yes	10.4	10.4		12.66	0.965

である。

さて、次に実験結果と比較する目的で解析した 17 本の柱の結果について述べる。実験を通じて柱の初期曲がり は測定しなかったので、解析には残留応力のみを考慮した。柱の長さ方向の分割数  $m$ , 断面の分割数  $l_1, n_1, l_2, n_2$  の値はすべて前述の値と同じものを用いた。ただし、不等辺山形鋼で長脚が突出脚の場合(すなわち、LLO の場合)、 $n_1$  の値を 36 に増加させた。Fig. 6, 7 はそれぞれ、柱 A-1-8, A-2-8 の実験より得られた荷重-一柱中央の変位量曲線を対応する理論解と比較したものである。理論解は実験結果とかなり良く一致することがわかる。特に、実験柱はその端部条件および荷重の偏心量があまり明白でないこと、および解析には柱の初期曲がり、初期ねじれが取り入れていないことを考慮するならば前述の解析方法は十分信頼できると思われる。計算より求めた合計 17 本の柱の最大荷重  $P_{max}/P_y$  は実験結果とともに Table 3, 4 にまとめてある。計算値は実験値と最大 10.6% 異なり、それらの間の比の平均値は 1.002 である。また、Fig. 18, 19 は、それぞれ端部条件 (a), (b) をもつすべての実験柱の最大荷重を計算値より求めた強度曲線と比較したものである。横軸に  $\lambda_x$

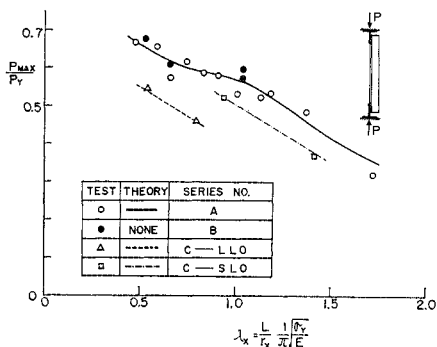


Fig. 18 Comparison of Theoretical and Experimental Maximum Loads, End Condition (a)

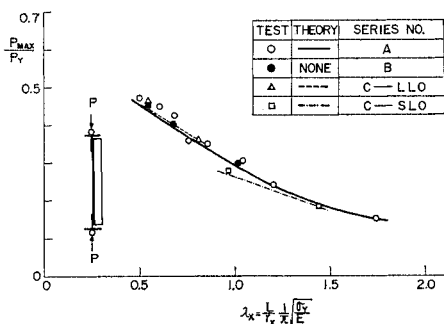


Fig. 19 Comparison of Theoretical and Experimental Maximum Loads, End Condition (b)

をとった理由は、実験および理論解析結果より明らかのように、柱はおもに  $x$  軸まわりの曲げ変形を起こすから、柱の強度は  $\lambda_x$  よりも  $\lambda_y$  に支配されると考えたからである。図よりわかるように、端部条件 (a) の場合、理論曲線は山形鋼の断面形および突出脚の状態 (LLO または SLO) によって大きく異なるが、端部条件 (b) の場合には図に示された範囲内でその差異はほとんどない。

#### 4. 結 言

以上、橋構造物における横構、対傾構および建築構造物におけるトラスはり、屋根トラス、送電鉄塔などに広範囲に使用されている単一山形鋼圧縮部材の強度および変形状に関する実験的、理論的研究の結果について述べた。本研究では、単一山形鋼圧縮部材を 2 軸曲げを受け、端部の回転を拘束された柱として取り扱った。まず、等辺および不等辺山形鋼よりなる総計 34 本の柱 (Fig. 2, 3 参照) の耐力実験を行ないその変形挙動を調べるとともに、端部条件が柱の耐力におよぼす影響、中心軸圧縮力を受ける両端単純支持の柱の耐力との相違などについて検討した。次に、端部の回転を拘束された単一山形鋼柱 (Fig. 10 参照) が 2 軸曲げを受けるときの非弾性解析方法について述べ、その数値計算結果を実験結果と比較して解析方法の妥当性を示した。

本論文においては単一山形鋼圧縮部材の設計方法には触れなかった。しかし、このような部材がトラスはりまたは屋根トラスに用いられたときの設計方法については、本論文に述べた結果をもとにして文献 (11), (12), (16) に述べた。

本研究で取り扱った山形鋼はトラスはり、屋根トラスなどを対象とした比較的小さい断面のものであったが、橋梁の横構、対傾構などの山形鋼はその脚長が 100 mm 程度に達する大きな断面寸法のものが多い。したがって本研究の結果をそれらの圧縮部材の設計に利用するためには、実物大の実験による検証がさらに必要となるであろう。それについては、現在名古屋大学で計画中である。

本論文は第一著者が第二著者の指導のもとで研究を行ない、米国ワシントン大学 (セントルイス市) に提出した学位論文<sup>10)</sup>の一部をとりまとめたものである。また本研究は米国の Steel Joist Institute からの委託研究として行なわれたものである。本研究をまとめるにあたって、いろいろご協力をいただいたワシントン大学土木工学科の研究スタッフに対して深甚なる謝意を表すものである。また、有益なるご助言をいただいたシドニー大学 N.S. Trahair 博士および名古屋大学 福本嘯士博士

に深謝する次第である。

5. Appendix

(1)  $r_s^2, \bar{K}_R, \bar{K}_I$  および  $A$  の表現式

$$r_s^2 = r_0^2 + \left\{ \left( \bar{e}_x - \frac{M_{Ix}}{P} \right) - \frac{I_{xy}}{I_x} \left( \bar{e}_y + \frac{M_{Iy}}{P} \right) \right\} \beta_y + \left\{ \left( \bar{e}_y + \frac{M_{Iy}}{P} \right) - \frac{I_{xy}}{I_y} \left( \bar{e}_x - \frac{M_{Ix}}{P} \right) \right\} \beta_x \dots\dots\dots(30)$$

ここに、

$$r_0^2 = x_0^2 + y_0^2 + \frac{I_x + I_y}{A} \dots\dots\dots(31)$$

$$\beta_x = \frac{1}{1 - I_{xy}^2 / I_x I_y} \left\{ \frac{\int_A y(x^2 + y^2) dA}{I_x} - 2y_0 - 2x_0 \frac{I_{xy}}{I_x} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

$$\beta_y = \frac{1}{1 - I_{xy}^2 / I_x I_y} \left\{ \frac{\int_A x(x^2 + y^2) dA}{I_y} - 2x_0 - 2y_0 \frac{I_{xy}}{I_y} \right\} \dots\dots\dots(33)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_R &= \int_A \sigma_R (x^2 + y^2) dA \\ \bar{K}_I &= \int_A \sigma_I \{ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34, 35)$$

$$A = - \frac{I_x + I_y}{A} \Gamma - \left( \beta_x - \beta_y \frac{I_{xy}}{I_x} + 2x_0 \right) \Gamma_x - \left( \beta_y - \beta_x \frac{I_{xy}}{I_y} + 2y_0 \right) \Gamma_y + \int_A (\varepsilon^* \rho + \delta \varepsilon \rho) (x^2 + y^2) dA \dots\dots\dots(36)$$

(2) マトリックス  $[N]$

マトリックス  $[N]$  の表現を  $m=6$  の場合について示す。

$$[N] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 8 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 9 & 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 9 & 8 & -1 \\ 4 & 16 & 8 & 16 & 8 & 16 & 4 \end{bmatrix}$$

参考文献

1) Chen, W.F. and Santathadaporn, S. : "Review of Column Behavior Under Biaxial Loading", ASCE, Vol. 94, No. ST 12, Journal of the Structural Division, Proc. Paper 6316, Dec. 1968.

2) Bleich, F. : "The Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill Book Company, New York, 1952.  
 3) 特集 "残留応力と座屈", JSSC, Vol. 3, No. 16, 1967.  
 4) Trahair, N.S. : "Restrained Elastic Beam-Columns", ASCE, Vol. 95, No. ST 12, Journal of the Structural Division, Proc. Paper 6941, Dec. 1969.  
 5) Foehl, P.J. : "Direct Method of Designing Single Angle Struts in Welded Trusses", in "Design Book for Welding", Lincoln Electric Company, Nov. 1948.  
 6) 石田 昭 : "溶接形成山形材の座屈実験", 建築学会論文報告集第 103 号, 1964.  
 7) Wakabayashi, M. and Nonaka, T. : "On the Buckling Strength of Angles in Transmission Tower", Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute, University of Kyoto, Kyoto, Japan, Vol. 15, Part 2, No. 91, Nov. 1965.  
 8) 若林 実・野中泰二郎 : "山形鋼の座屈張度に関する実験的研究", 京大防災研究所年報第 9 号, 1965.  
 9) Johnston, B.G., ed : "Guide to Design Criteria for Metal Compression Member", Second Edition, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1966.  
 10) German Buckling Specification, DIN 4114, Vol. 1, English Translation by T.V. Galambos and J. Jones, Column Research Council, June 1957.  
 11) Trahair, N.S., Usami, T. and Galambos, T.V. : "Eccentrically Loaded Single Angle Columns", Research Report No. 11, Washington University, Department of Civil and Environmental Engineering, Aug. 1969.  
 12) Galambos, T.V. : "Supplement to Washington University Report No. 11, Eccentrically Loaded Single Angle Column, by Trahair, N.S., Usami, T. and Galambos, T.V. : "Research Report No. 11 A, Washington University, Department of Civil and Environmental Engineering, Jan. 1970.  
 13) American Society for Testing and Materials : "Standard Specification for General Requirements for Delivery of Rolled Steel Plates, Shapes, Sheet Piling and Bars for Structural Use", A 6-64, Adopted, 1964.  
 14) Galambos, T.V. : "Structural Members and Frames", Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1968. 福本 啓士・西野文雄共訳 : "鋼構造部材と骨組一強度と設計一", 丸善, 1970.  
 15) Oden, J.T. : "Mechanics of Elastic Structures", Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1967.  
 16) Usami, T. : "Restrained Single-Angle Columns under Biaxial Bending", Dissertation Presented to Washington University in Partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science, Jan., 1971.  
 17) Culver, C.G. : "Initial Imperfections in Biaxial Bending", ASCE, Vol. 92, No. ST 3, Proc. Paper 4846, Journal of the Structural Division, June, 1966.  
 18) Brown, P.T. and Trahair, N.S. : "Finite Integral Solution of Differential Equations", Research Report No. R 85, School of Civil Engineering, The University of Sydney, Sept. 1967.  
 19) Scarborough, J.B. : "Numerical Mathematical Analysis", 4th E., John Hopkins Press, 1958.

(1970.11.11・受付)