土木学会論文報告集
第 191 号・1971 年 7 月

骨組構造の大変形解析

LARGE DEFORMATION ANALYSIS OF FRAMED STRUCTURES

堀井健一郎*・斉藤　進**・川原睦人***・森　繁****
By Kenichiro Horii, Susumu Saito, Mutsuto Kawahara, Shigeru Mori

1. 緒　言

任意の形状を持つ骨組構造の大変形解析は，古くから着目されている解析であると同時に，構造の設計上からも重要な解析である。このような大変形解析は，まず Livesley[1] などによって解析の端緒が開かれ Argyris[2]，Jennings[3),4]，Saafan[5),6]，Marchant，Brotton[7),8]，Mallet，Marcal[9]，Poskitt[10] 大地[11),12]，後藤[13),14]，など多くの研究者[15)~30]によって理論の展開がなされている。

また，実際の設計計算を目的とした，STRUDL[26),31]，ASKA[32] などの大型汎用プログラムにも組み入れられはじめている。

この報告では，骨組構造を構成する部材は直線部材であるとし，それらの軸変形，曲げ変形と主として考えることにする。ここに示す大変形解析に対する基礎方程式は良く知られており，これらの基礎方程式をいかに手順良く解析するか，また，どのように用いたらもっとも実用的であるかが現在の問題点であると考えられる。

基礎方程式は，変形前の座標系による場合と，変形後の座標系が用いられる場合とがある。この報告では，これらの基礎方程式を使って，部材内での変形を適当に仮定し，有限要素法における変位法の手法にしたがって解式を誘導する方法を主として用いる。このとき，基礎方程式において，構造解析に影響する度合いが小さいと思われる項を省略することから種々の解式が得られる。これによって従来の理論との対応を考え，また同一の例題を用いて計算結果の比較を行なう。

* 正会員　早稲田大学教授　理工学部土木工学科
** 正会員　工修　八戸工業高等専門学校助手
*** 学生会員　工修　早稲田大学大学院理工学研究科建設工学専攻博士課程
**** 学生会員　早稲田大学大学院理工学研究科建設工学専攻修士課程

さらに，計算方法の違いに着目する。すなわち，荷重状態を与えて，その変形，応力を直接計算する方法（直接解析法），荷重を少しずつ増加させ，その間での変形，応力を追跡してゆく方法（荷重増加解析法），ある基準となる荷重状態を与え，固有値問題として骨組構造の全体座屈荷重を求める方法（全体座屈解析法）などの利点欠点について考察する。全体座屈荷重を求めるときには，構造の節点数の増加とともに，大次元行列の固有値を求める必要が生じてくる。さらに，構造物の設計では，影響線が用いられることが多いが，この点についても考えることにしたい。

すなわち，この報告の目的は，骨組構造の，主として曲げ変形に関する大変形の影響を対象に，実際の骨組構造の大変形解析を行なう場合に問題となる解式ならびに解析方法の相互関連を考察することである。

細部にわたる式の変形，電子計算機のプログラムは，小杉溥孝，板橋啓治，内藤泰（以上早大大学院），青木道夫，桜井清一（早大学生）がそれぞれ担当して行なった。

2. 基礎方程式

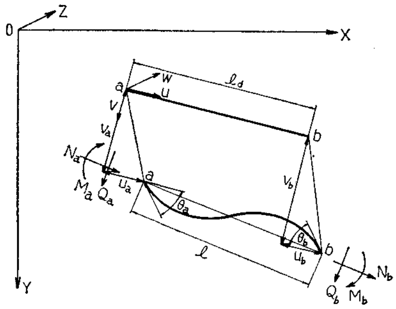
(1) 変形前の座標による基礎方程式

骨組構造を構成する直線等断面部材に着目する。応力とひずみとの関係は比例関係が成立するものとする。弾性係数を E とする。ここに述べる解析法は，立体骨組構造にも応用できるが，説明の簡単のため，平面骨組構造を対象として解式の展開を行なうことにする。

軸力 N，曲げモーメント M と軸変形 n，曲率 χ との間の関係は周知のように曲げに伴うせん断変形を無視して，

$$N=EAn \quad \cdots\cdots(1)$$

$$M=EI\chi \quad \cdots\cdots(2)$$



図—1

である。ここに，A, I はそれぞれ断面積，断面二次モーメントを表わす。軸変形 n，曲率 χ はそれぞれ，式 (3), (4) で与えられるものとする。

$$n=\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

$$\chi=\frac{-\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}\approx-\frac{d^2v}{dx^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

ここに，座標系は，図—1 のごとく変形前の状態において x 軸を部材軸に一致させてとった右手系とする。変位 u, v はそれぞれ x, y 軸方向の変位である。

式 (3) は，有限ひずみの定義式により導かれるものであり，一般に有限変形と呼ばれる理論では式 (3) 右辺第 2 項は省略されている。この報告では，比較の目的で，この項を考慮することにする。すなわち，軸変形に対して式 (3)，曲げ変形に対して式 (4) を定義式として用いた場合をこの報告では大変形解析と呼ぶことにする。簡単のため，節点以外には荷重が作用しないとするが，部材に直接作用する荷重への拡張は簡単に行なうことができる。つりあい方程式は，式 (5), (6) で与えられる。

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\right\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}M+\frac{d}{dx}\left\{N\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

以上，式 (1)～(6) を基礎方程式と考えることにする。

さて，部材内に貯えられるひずみエネルギー W は，部材長を l で表わすことにして，式 (7) で与えられる。

$$W=\frac{1}{2}\int_0^l (EAn^2+EI\chi^2)dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

式 (3), (4) を用いて，式 (7) を書きなおすと，式 (8) が得られる。

$$W=\frac{1}{2}\int_0^l dWdx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

$$dW=EA\left(\frac{du}{dx}\right)^2+EI\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)^2$$

$$+EA\left(\frac{du}{dx}\right)\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}$$

$$+\frac{EA}{4}\left\{\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}^2$$

ひずみエネルギーの第 1 変分 δW は式 (7) より次のようになる。

$$\delta W=\int_0^l (N\delta n+M\delta\chi)dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

ここに，

$$\delta n=\frac{d\delta u}{dx}+\left(\frac{du}{dx}\right)\left(\frac{d\delta u}{dx}\right)$$

$$+\left(\frac{dv}{dx}\right)\left(\frac{d\delta v}{dx}\right) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\delta\chi=-\frac{d^2\delta v}{dx^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

である。δu, δv はそれぞれ x, y 方向の変位の変分を表わす。式 (9) によって，

$$\delta W=0$$

であり，かつ δu, δv がそれぞれ任意であることを用いると，式 (5), (6) が得られることは周知の通りである。また，式 (9) によって，ひずみエネルギーの第 2 変分 δ^2W は，微小項を省略して，

$$\delta^2W=\int_0^l (\delta N\cdot\delta n+\delta M\cdot\delta\chi)dx \cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

となる。ここに，

$$\delta N=EA\,\delta n \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

$$\delta M=EI\,\delta\chi \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

である。

式 (5), (6) の両辺にそれぞれ δu, δv を掛け，加え合わせて，部材全長にわたって積分すれば，

$$\int_0^l\left[\delta u\cdot\frac{d}{dx}\left\{\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\right\}+\delta v\left\{\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left(N\frac{dv}{dx}\right)\right\}\right]dx=0$$

となるから，これを部分積分することによって，次のように仮想仕事の方程式を導くことができる。

$$\int_0^l\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\cdot\frac{d\delta u}{dx^2}dx-\int_0^l M\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx$$

$$+\int_0^l N\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d\delta v}{dx}dx=N_a\delta u_a+N_b\delta u_b$$

$$+M_a\delta\theta_a+M_b\delta\theta_b+Q_a\delta v_a+Q_b\delta v_b \cdots(15)$$

ただし，

$$N_a=-\left[\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\right]_{x=0},$$

$$N_b=\left[\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\right]_{x=l},$$

$$M_a=[M]_{x=0},\ M_b=-[M]_{x=l},$$

$$Q_a=-\left[\frac{dM}{dx}+N\frac{dv}{dx}\right]_{x=0},$$

$$Q_b=\left[\frac{dM}{dx}+N\frac{dv}{dx}\right]_{x=l},$$

$$\delta u_a=[\delta u]_{x=0},\ \delta u_b=[\delta u]_{x=l},$$
$$\delta v_a=[\delta v]_{x=0},\ \delta v_b=[\delta v]_{x=l},$$
$$\delta\theta_a=\left[\frac{d\delta v}{dx}\right]_{x=0},\ \delta\theta_b=\left[\frac{d\delta v}{dx}\right]_{x=l}$$

である。

微小変形の仮定の下には，式 (3) は，

$$u=\frac{du}{dx} \quad\cdots\cdots(16)$$

となり，また，一般には式 (3) 右辺第2項が省略されており，

$$n=\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad\cdots\cdots(17)$$

が用いられている。軸変形 n が式 (17) で与えられる場合には，つりあい方程式は，式 (5), (6) のかわりに，

$$\frac{dN}{dx}=0 \quad\cdots\cdots(18)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}+N\frac{d^2v}{dx^2}=0 \quad\cdots\cdots(19)$$

が用いられる。さらに，仮想仕事の方程式は，式 (18), (19) を用いることによって，式 (20) となる。

$$\int_0^l N\frac{d\delta u}{dx}dx-\int_0^l M\frac{d^2\delta v}{dx^2}dx+\int_0^l N\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d\delta v}{dx}dx=N_a\delta u_a+N_b\delta u_b+M_a\delta\theta_a+M_b\delta\theta_b+Q_a\delta v_a+Q_b\delta v_b \quad\cdots\cdots(20)$$

ただし，この場合には，

$$N_a=-[N]_{x=0},\ N_b=[N]_{x=l}$$

であり，ほかの項については式 (15) におけるものと一致している。

（2） 増分形式による基礎方程式

ある基準となる荷重の状態を考えて，この状態から，荷重が少し変化した状態を考察する。軸力 N, 曲げモーメント M がそれぞれ $\varDelta N$, $\varDelta M$ だけ増加して，$N+\varDelta N$, $M+\varDelta M$ になったものとすると，つりあい方程式 (5), (6) はそれぞれ，次のごとくになる。

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{d\varDelta u}{dx}\right)(N+\varDelta N)\right\}=0 \quad\cdots\cdots(21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(M+\varDelta M)+\frac{d}{dx}\left\{(N+\varDelta N)\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)\right\}=0 \quad\cdots\cdots(22)$$

ここに，$\varDelta u$, $\varDelta v$ はそれぞれ変位 u, v の増分である。

式 (21), (22) に式 (5), (6) の関係を用いて増分 $\varDelta N$, $\varDelta M$ に関して整頓すると結局次の関係を得ることができる。

$$\frac{d}{dx}\left\{\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{d\varDelta u}{dx}\right)\varDelta N+N\frac{d\varDelta u}{dx}\right\}=0 \quad\cdots\cdots(23)$$

$$\frac{d^2}{dx^2}M+\frac{d}{dx}\left\{\varDelta N\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)+N\frac{d\varDelta v}{dx}\right\}=0 \quad\cdots\cdots(24)$$

式 (23), (24) の両辺にそれぞれ，仮想増分変位 $\delta\varDelta u$, $\delta\varDelta v$ を掛け，加え合わせて，全部材長にわたって積分すれば，増分形式による仮想仕事の方程式を得ることができる。すなわち，

$$\int_0^l\left\{\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{d\varDelta u}{dx}\right)\varDelta N+N\frac{d\varDelta u}{dx}\right\}\cdot\frac{d\delta\varDelta u}{dx}dx-\int_0^l\varDelta M\frac{d^2\delta\varDelta v}{dx^2}dx+\int_0^l\left\{\varDelta N\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)+N\frac{d\varDelta v}{dx}\right\}\cdot\frac{d\delta\varDelta v}{dx}dx=\varDelta N_a\cdot\delta\varDelta u_a+\varDelta N_b\cdot\delta\varDelta u_b+\varDelta M_a\cdot\delta\varDelta\theta_a+\varDelta M_b\cdot\delta\varDelta\theta_b+\delta\varDelta Q_a\cdot\delta\varDelta v_a+\varDelta Q_b\cdot\delta\varDelta v_b \quad\cdots\cdots(25)$$

である。ここに，

$$\varDelta N_a=-\left[\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{d\varDelta u}{dx}\right)\varDelta N+N\frac{d\varDelta u}{dx}\right]_{x=0},$$

$$\varDelta N_b=\left[\left(1+\frac{du}{dx}+\frac{d\varDelta u}{dx}\right)\varDelta N+N\frac{d\varDelta u}{dx}\right]_{x=l},$$

$$\varDelta M_a=[\varDelta M]_{x=0},\ \varDelta M_b=-[\varDelta M]_{x=l},$$

$$\varDelta Q_a=-\left[\frac{d\varDelta M}{dx}+\varDelta N\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)+N\frac{d\varDelta v}{dx}\right]_{x=0},$$

$$\varDelta Q_b=\left[\frac{d\varDelta M}{dx}+\varDelta N\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)+N\frac{d\varDelta v}{dx}\right]_{x=l},$$

$$\delta\varDelta u_a=[\delta\varDelta u]_{x=0},\ \delta\varDelta u_b=[\delta\varDelta u]_{x=l},$$
$$\delta\varDelta v_a=[\delta\varDelta v]_{x=0},\ \delta\varDelta v_b=[\delta\varDelta v]_{x=l},$$
$$\delta\varDelta\theta_a=\left[\frac{d\delta\varDelta v}{dx}\right]_{x=0},\ \delta\varDelta\theta_b=\left[\frac{d\delta\varDelta v}{dx}\right]_{x=l}$$

である。

また，式 (20) に対応する増分形式の仮想仕事方程式は次のごとくに整頓することができる。まず，式 (18), (19) を用いて，式 (23), (24) に対応する次の関係を得る。

$$\frac{d\varDelta N}{dx}=0 \quad\cdots\cdots(26)$$

$$\frac{d^2\varDelta M}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left\{\varDelta N\left(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\right)\right.$$

$$+N\frac{d\varDelta v}{dx}\Big\}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

式 (26), (27) によって式 (28) のごとくに仮想仕事方程式が表わされる。すなわち，

$$\int_0^l \varDelta N\frac{d\delta\varDelta u}{dx}dx-\int_0^l \varDelta M\frac{d^2\delta\varDelta v}{dx^2}dx$$
$$+\int_0^l\Big\{\varDelta N\Big(\frac{dv}{dx}+\frac{d\varDelta v}{dx}\Big)$$
$$+N\frac{d\varDelta v}{dx}\Big\}\frac{d\delta\varDelta v}{dx}dx=\varDelta N_a\cdot\delta\varDelta u_a$$
$$+\varDelta N_b\cdot\delta\varDelta u_b+\varDelta M_a\cdot\delta\varDelta\theta_a+\varDelta M_b\cdot\delta\varDelta\theta_b$$
$$+\varDelta Q_a\cdot\delta\varDelta v_a+\varDelta Q_b\cdot\delta\varDelta v_b \quad \cdots\cdots\cdots(28)$$

である。このときには，

$$\varDelta N_a=-[\varDelta N]_{x=0},\ \varDelta N_b=[\varDelta N]_{x=l}$$

であり，ほかの項は式 (25) と同じである。

また，式 (1), (2) によって，

$$\varDelta N=EA\cdot\varDelta n \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

$$\varDelta M=EI\cdot\varDelta\chi \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

であり，さらに，式 (3), (4) によって，

$$\varDelta n=\frac{d\varDelta u}{dx}+\frac{du}{dx}\cdot\frac{d\varDelta u}{dx}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d\varDelta v}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

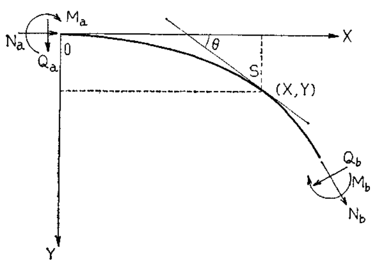
$$\varDelta\chi=-\frac{d^2\varDelta v}{dx^2} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

となる。式 (17) に対応して，式 (31) 右辺第2項を省略して次の関係が得られる。

$$\varDelta n=\frac{d\varDelta u}{dx}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{d\varDelta v}{dx} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

(3) 変形後の座標系による基礎方程式

図—2 を参照して，変形後の部材軸にそった座標を S で表わすことにすると，軸力 N, 曲げモーメント M と S 方向変位 u, たわみ角 θ との間に，式 (34), (35) が成立すると考えることができる。



図—2

$$N=EA\frac{du}{dS} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$M=EI\frac{d\theta}{dS} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(35)$$

つりあい方程式は，

$$\frac{dN}{dS}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(36)$$

$$\frac{d^2M}{dS^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(37)$$

である。式 (34) と式 (36)，式 (35) と式 (37) によって，それぞれ，

$$EA\frac{d^2u}{dS^2}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

$$EI\frac{d^3\theta}{dS^3}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(39)$$

が得られる。変形後の部材内の一点を (X, Y) で表わすと次の関係が成立する。

$$\frac{dY}{dS}=\sin\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(40)$$

$$\frac{dX}{dS}=\cos\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

いま，式 (40), (41) について，

$$\frac{dY}{dS}\approx\theta \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

$$\frac{dX}{dS}\approx 1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

のようにみなし得る場合には，式 (42) において，

$$Y=v$$

と置き換えることから，式 (39) は式 (44) のように変形することができる。

$$EI\frac{d^4v}{dS^4}=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

式 (38), (44) は，微小変形の仮定の下に構成される方程式と，形式的に相似である。一般には，S 座標は直角座標とはならないから，式 (42), (43) は成立しない。しかしこの関係が成立する範囲内においては，基礎方程式を式 (38), (44) のごとくに考えることができる。すなわちこの場合には，微小変形の仮定の下に構成された，通常用いられている線形の解式を変形後の座標を用いて作成し，くり返し試算によって変形を求めれば良いことがわかる。

3. 解式の誘導

(1) 直接解析法

基礎方程式は，次の3組の方程式より成り立っている。すなわち，曲げモーメント，軸力と曲率，軸変形との関係を表わす式 (1), (2)，次に，曲率，軸変形と変位との関係を表わす式 (3), (4)，さらに，曲げモーメント，軸力のつりあい関係を表わす式 (5), (6) とである。式 (1), (2) など内力と変形の関係を表わす方程式を以後，内力変形関係式と呼ぶことにする。また，式 (3), (4) などは，ひずみと変位の関係より導かれる方程式であるから，広い意味でひずみの適合条件を表わしていると解

积することができる。よって，以後これらを単に適合条件式と呼ぶことにする。式 (5),(6) などは，内力のつりあい関係を表わす意味でつりあい条件式と呼ぶことにする。

これらより，それぞれ変数を消去すれば，変位を未知数とする微分方程式が得られるが，これを解くことは容易でない。そこで，解式の誘導として，有限要素法における変位法を用いることにする。

すなわち，部材内の変形を次のように仮定する。

$$u=\left(1-\frac{x}{l}\right)u_a+\left(\frac{x}{l}\right)u_b \quad \cdots\cdots(45)$$

$$v=\left(1-3\frac{x^2}{l^2}+2\frac{x^3}{l^3}\right)v_a+\left(3\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}\right)v_b+\left(x-2\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\theta_a+\left(-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\theta_b \quad \cdots\cdots(46)$$

いま，部材端の変位 u_a, u_b, v_a, v_b, θ_a, θ_b が計算されたとすれば，式 (3),(4) によって軸変形 n, 曲率 χ が計算され，したがって式 (1),(2) によって軸力 N, 曲げモーメント M が計算される。しかし，この軸力 N, 曲げモーメント M は一般につりあい条件式 (5),(6) は満足していない。そこでつりあい条件を平均的に満足させるように仮想仕事方程式 (15) を用いて，換算節点力と節点・変位との関係を誘導する。この関係が導かれれば，構造の節点における節点変位の連続条件式，構造の節点におけるつりあい条件式を用いて構造全体の解式を構成することができる。

ここでは，換算節点力と節点変位との関係を解式と呼ぶことにする。一般に，基礎方程式 (1)～(6) は，有限ひずみ理論と呼ばれる理論に対応している。この報告では，曲率と変位との関係に式 (4) を用い，また曲げ変形に伴うせん断変形を省略するなどの仮定を用いているので，式 (1)～(6) を用いることはかならずしも適当でないかも知れない。そこで省略し得る項を省略して簡単にしてゆき，それぞれ別の解式を作成する。これらの解式と従来の理論との対応を考え，また解式相互の比較を同一の計算例題によって行なうことにする。

a) 解式—1

① 内力・変形関係式として，式 (1),(2)

② 適合条件式として，式 (3),(4)

③ つりあい条件式として，式 (15)

④ 変位仮定，式 (45),(46)

以上の4項によって，変位法にしたがい導かれた解式を解式—1と呼ぶことにする。具体的な数式は付録—1に収録する。このときの支配方程式は，

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left\{\left(1+\frac{du}{dx}\right)N\right\}=0,\\ &N=EA\left\{\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(47)$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}+\frac{d}{dx}\left\{N\left(\frac{dv}{dx}\right)\right\}=0,\ M=-EI\frac{d^2v}{dx^2} \quad \cdots\cdots(48)$$

としたものに対応している。すなわち式 (47),(48) と変位法の手法によって解式を導き，これによって解析する方法であるといえる。

b) 解式—2

軸変形の関係を与える式 (3) の第2項を省略した式 (17) を用い，また，つりあい条件として仮想仕事式 (20) を用いた場合を解式—2とする。すなわち，

① 内力・変形関係式として，式 (1),(2)

② 適合条件式として，式 (17),(4)

③ つりあい条件式として，式 (20)

④ 変位仮定，式 (45),(46)

以上の4項によって，変位法にしたがい導かれた解式を解式—2と呼ぶことにする。具体的な数式は付録—2に収録する。このときの支配方程式は，

$$\frac{dN}{dx}=0,\ N=EA\left\{\frac{du}{dx}+\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right\}$$

$$\frac{d^2M}{dx^2}+N\frac{d^2v}{dx^2}=0,\ M=-EI\frac{d^2w}{dx^2}$$

としたものに対応している。この解式は Mallet, Marcal[9] によって扱われている解式に対応している。また，このとき，曲げに関する支配方程式は，

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}-N\frac{d^2v}{dx^2}=0$$

となり，解析的に解くことができる。この解析解によって剛性行列を導く方法が Conner, Logcher, Chang[26] をはじめ多くの研究者によって取扱われている。

c) 解式—3

軸変形の関係を与える式 (3) の右辺第2項および第3項を省略した式 (16) を軸変形の関係式として用いる解式を解式—3とする。すなわち，

① 内力・変形関係式として，式 (1),(2)

② 適合条件式として，式 (16),(4)

③ つりあい条件式として，式 (20)

④ 変位仮定，式 (45),(46)

以上の4項目によって，変位法にしたがい導かれた解式を解式—3と呼ぶことにする。これは，Przemieniecki[27] などによって扱われている解式に対応し，具体的な数式は文献 27) に収録されている。このときの支配方程式は，

$$EA\frac{d^2u}{dx^2}=0$$

$$EI\frac{d^4v}{dx^4}-N\frac{d^2v}{dx^2}=0$$

となる。係数には軸力が含まれている。

d）解式—4

解式—3 の支配方程式は解析的に解くことができる。この解析解を用いて解式を導くことができる。これは，Livesley[1]，大地[11] などによって取扱われており具体的には，文献 11）などに数式がある。この報告では比較のために，これを 解式—4 と呼ぶことにする。

また，解式—4 はその解式の係数の中に軸力の項を含むことになるが，この軸力について展開し，一次の項のみをとったものは 解式—3 と一致している。

（2）荷重増加解析法

基準荷重状態からの変形増分と荷重増分との関係を導き，この解式によって荷重を少しずつ増加させながら解析する方法がとられる場合がある。後藤[13),14)] は終始この増分による解析法によって解析を進めている。

部材内の変位増分をそれぞれ，

$$\Delta u=\left(1-\frac{x}{l}\right)\Delta u_a+\left(\frac{x}{l}\right)\Delta u_b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(49)$$

$$\begin{aligned}\Delta v=&\left(1-3\frac{x^2}{l^2}+2\frac{x^3}{l^3}\right)\Delta v_a\\&+\left(3\frac{x^2}{l^2}-2\frac{x^3}{l^3}\right)\Delta v_b\\&+\left(x-2\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\Delta\theta_a\\&+\left(-\frac{x^2}{l}+\frac{x^3}{l^2}\right)\Delta\theta_b \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(50)\end{aligned}$$

と仮定することにする。

e）解式—5

① 内力・変形関係式として，式（29），（30）

② 適合条件式として，式（31），（32）

③ つりあい条件式として，式（25）

④ 変位仮定，式（49），（50）

以上の 4 項によって，変位法の手法にしたがい導かれた増分による解式を 解式—5 とする。具体的な数式は付録—3 に収録する。

f）解式—6

① 内力・変形関係式として，式（29），（30）

② 適合条件式として，式（33），（32）

③ つりあい条件式として，式（28）

④ 変位仮定，式（49），（50）

以上の 4 項によって変位法の手法にしたがい導かれた増分による解式を 解式—6 とする。具体的な数式は 付録—4 に収録する。

（3）変形後の座標系による解式

2.（3） に述べた基礎方程式とさらにせん断力 Q と外力との関係，すなわち，

$$Q=P_X\cos\theta+P_Y\sin\theta$$

とを用いた解析が Lee，多田[30)] によって行なわれている。ここに，P_X，P_Y は外力の X，Y 方向成分である。これでは Galerkin 法による有限要素法を用いて Elastica の解析が行なわれており，だ円関数による解析解と良い一致をみせている。

式（42），（43）が成り立つ範囲では，微小変形の仮定の下に構成される解式と形式的にまったく同一の関係を与えることになり，非常に簡単である。この解式を 解式—7 と呼ぶことにする。

4．計算方法と数値計算例

（1）直接解析法

微小変形の仮定の下では構造全体の解式は，

$$[\boldsymbol{K}]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{P}\}$$

である。ここに，$\{\boldsymbol{x}\}$，$\{\boldsymbol{P}\}$，$[\boldsymbol{K}]$ はそれぞれ，構造全体の変位，外力，剛性行列を表わす。大変形解析では構造全体の解式が非線形になるから，これを

$$[\boldsymbol{K}_D(\boldsymbol{x})]\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{P}\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

と表わす。式（51）を解くためにはあらかじめ $\{\boldsymbol{x}\}$ を仮定し，$[\boldsymbol{K}_D(\boldsymbol{x})]$ を修正しながらくり返し計算を行なう。これをくり返し代入法と呼ぶ。解式—3,4 はこの方法で計算している。式（51）はまた，

$$\{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{P})\}=\{\boldsymbol{0}\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(52)$$

と書き換えることができ，これより Newton-Raphson 法のアルゴリズムが

$$\{\boldsymbol{x}\}=\{\boldsymbol{x}_0\}-\left[\frac{\partial\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{P})}{\partial\boldsymbol{x}}\right]^{-1}\cdot\{\boldsymbol{\Phi}(\boldsymbol{x}_0,\ \boldsymbol{P})\}$$

のように得られる。ここに $\{\boldsymbol{x}_0\}$ は適当に仮定された変位の初期値である。解式—1,2,7 はこの方法によりくり返し試算を行なっている。この 3 つの解式は，式（52）がいずれも変位のみに関する非線形方程式であるから，Newton-Raphson 法が適用しやすい。

（2）荷重増加解析法と影響線解析法

解式—5,6 によれば基準の荷重状態からの増分の関係で構造全体の解式を表わすことができる。基準の状態に対して増分が小さい場合には，構造の解式における増分の影響を無視することができる。このときには構造の節点変位の増分 $\{\Delta\boldsymbol{x}\}$ と，荷重増分 $\{\Delta\boldsymbol{P}\}$ との関係は次のように表わすことができる。

$$([\boldsymbol{K}]+[\boldsymbol{K}_L(x_0)])\{\Delta\boldsymbol{x}\}=\{\Delta\boldsymbol{P}\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(53)$$

ここに $\{\boldsymbol{x}_0\}$ は，基準状態における構造全体の変位である。このとき式（53）の左辺係数行列はすべて既知となり，連立方程式を解く操作のみで未知数 $\{\Delta\boldsymbol{x}\}$ を求

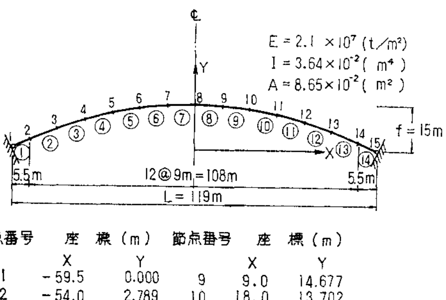
めることができる。これを基準状態の変位に加え合わせ，あらためて次の荷重増分に対して計算を進めてゆく。

橋梁などの設計には影響線が用いられることが多い。大変形解析では影響線は一般には用いることはできないが，次のような場合に近似的に適用することが考えられる。いま基準となる荷重状態として，たとえば死荷重のみによる応力，変位の状態を考えることとし，何らかの方法によってこの応力，変位は計算されているものとする。次にこの状態からさらに，たとえば活荷重が作用したものと考える。このとき活荷重による変位が構造全体の方程式の係数行列に与える影響を無視し得るものとすれば，式 (53) が成立すると考えることができる。この場合には，$\{\Delta \boldsymbol{P}\}$ は活荷重，$\{\Delta \boldsymbol{x}\}$ は活荷重による変位，$\{\boldsymbol{x}_0\}$ は死荷重による変位である。よって式 (53) 左辺係数行列の逆行列は活荷重に対する影響線を与えることがわかる。これには解式—5,6 を用いる。また解式—3,4 では死荷重による軸力が何らかの方法で与えられれば，式 (51) 左辺の逆行列は影響線と考えることができる。

(3) 数値計算例

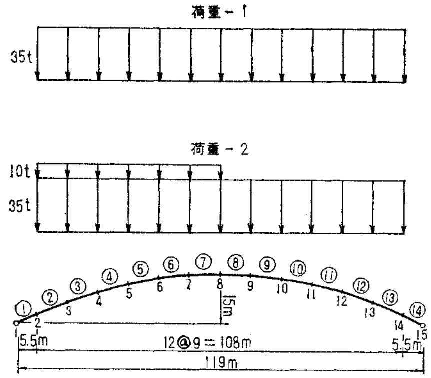
図—3 に示されるアーチ橋について，**図—4** に示す荷重状態の場合の計算例を掲げる。全節点に 35 t 集中荷重が作用する場合を荷重—1，スパン中央の節点まで 45 t の集中荷重が作用し，ほかの節点には 35 t 集中荷重が作用する場合を荷重—2 とする。荷重—1 による節点 8 の，荷重—2 による節点 5 の，それぞれ変位，曲げモーメント，軸力の値を **表—1** に示してある。

解式—1～解式—4 では荷重—1,2 ともにほとんど相違が認められない。またこの程度の荷重に対しては微小変形の仮定の下における剛性行列を変形後の座標について作成しなおして計算した解析法（解式—7）によっても同様の解を得ることができる。



節点番号	座標 (m) X	Y	節点番号	座標 (m) X	Y
1	−59.5	0.000	9	9.0	14.677
2	−54.0	2.789	10	18.0	13.702
3	−45.0	6.655	11	27.0	12.061
4	−36.0	9.726	12	36.0	9.726
5	−27.0	12.061	13	45.0	6.655
6	−18.0	13.702	14	54.0	2.789
7	−9.0	14.677	15	59.5	0.000
8	−0.0	15.000			

図—3 計算に用いたアーチ橋



図—4 荷　重

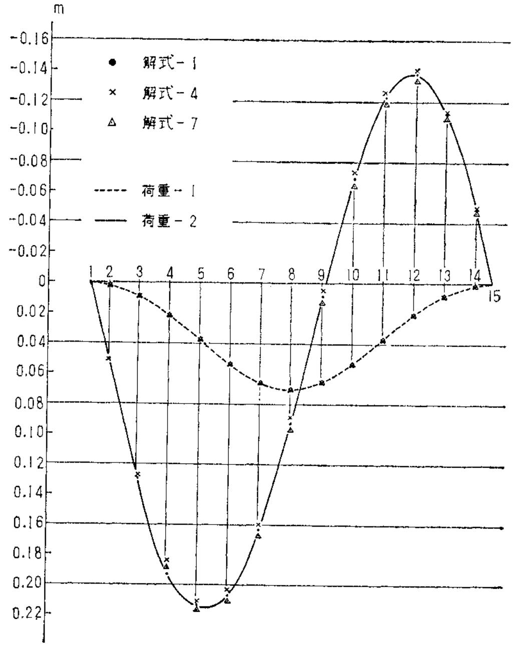
表—1 解式の相違による比較（直接解析法）

荷重—1 節点 8

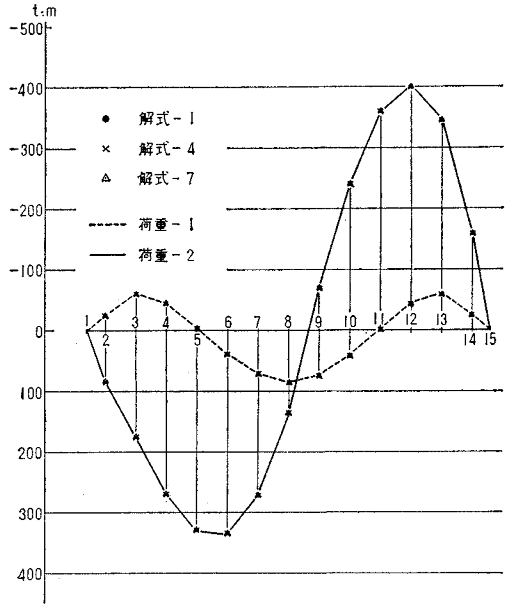
		解—1	解—2	解—3	解—4	解—7
鉛直変位	[cm]	7.0745	7.0723	7.0568	7.0567	7.0768
曲げモーメント	[t·m]	84.590	84.578	84.510	84.506	84.697
軸力	[t]	458.29	458.29	458.29	458.29	458.28

荷重—2 節点 5

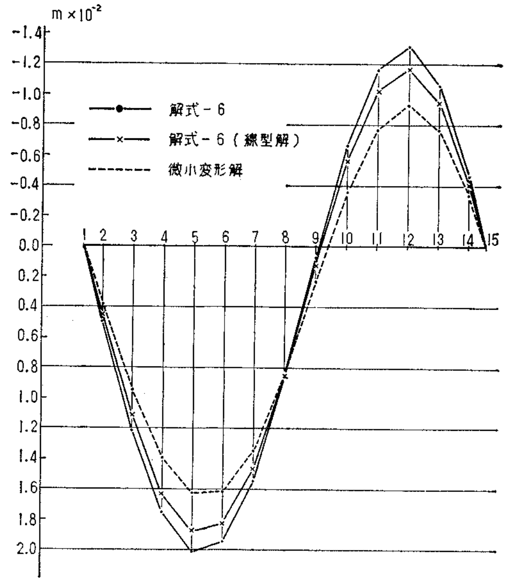
		解—1	解—2	解—3	解—4	解—7
鉛直変位	[cm]	0.21440	0.21435	0.21113	0.21113	0.21608
曲げモーメント	[t·m]	329.80	329.74	328.36	328.36	329.20
軸力	[t]	540.48	540.48	540.46	540.46	540.42



図—5 直接解析法による変位図

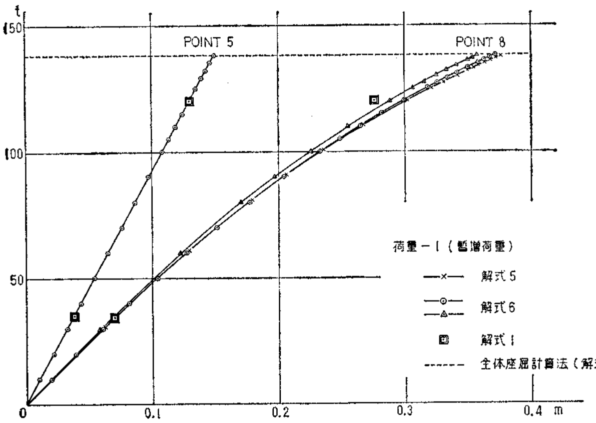


図—6 直接解析法による曲げモーメント図



図—8 影響線解析法による変位図

図—5 には 荷重—1,2 に対する 変位，図—6 には同じく曲げモーメントが示されている。計算法はくり返し代入法と Newton-Raphson 法の両者を用いたが，解式—7，荷重—2 の場合を除いて すべて 一致した値が得られている。解式—7，荷重—2 の場合，くり返し代入法では解が発散して結果が得られていない。一般に，荷重が大きくなるとくり返し代入法では解が得られない場合が多く，Newton-Raphson 法の方が適しているということができる。荷重—1,2 は実際の橋梁を参考にして想定した荷重であるが，図—7 などに示されているようにこの橋梁の全体座屈荷重にくらべると 1/3～1/4 の荷重である。この程度の荷重に対しては式 (3) 第2項，第3項の影響は小さいようである。すなわち，解式—3，4 によって計算してもよいように思われる。



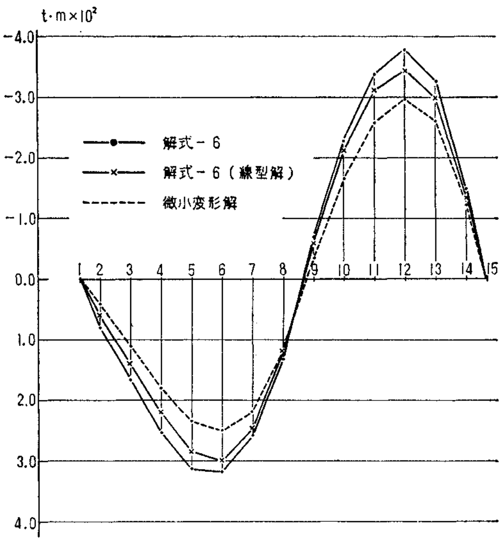
図—7 荷重増加解析法による変位図

図—7 には荷重増加法による計算結果を示した。解式—5，解式—6 による結果が掲げてあるが，解式の種別による計算結果の相違よりも，荷重の増加割合による相違の方が大きいことがわかる。この計算法は基準状態の変位を用いて剛性行列を作成し，増分変位を計算し，あらためて増分変位を基準とした変位に加え合わせて剛性行列を作ることによって計算している。図—7 には Newton-Raphson 法による結果（解式—1）および固有値による計算結果が併記されている。

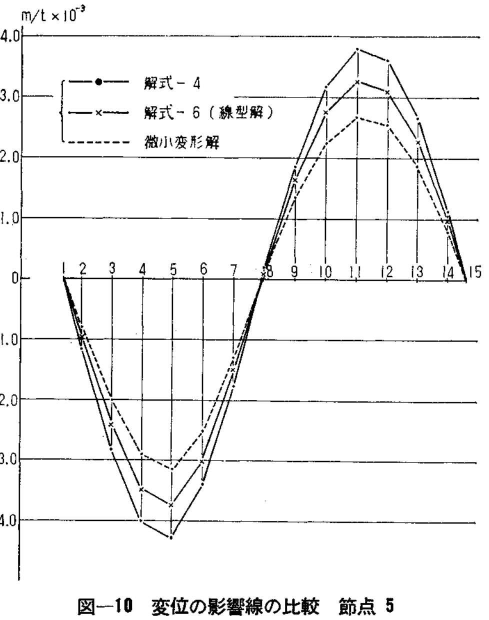
図—8,9 には影響線解析法による結果の一例を示す。まず 35 t の集中荷重を各節点にすべて作用させておき，微小変形の仮定の下に節点変位を計算する。これを基準状態として 解式—6 によって剛性行列を作成し，逆行列を計算する。これを影響線とみなしてあらたにスパン中央まで 10 t の集中荷重を作用させて変位，曲げモーメントを計算する。これが 図—8,9 に解式—6（線形解）として示されている。解式—6 を用いて，後から作用させた 10 t 集中荷重に対して，くり返し計算を行なったものが 図—8,9 にある 解式—6 である。参考のため微小変形の仮定による解を併記してある。

線形解とくり返し計算した解との比は最大変位について 15%，最大曲げモーメントについて 8% である。

図—10,11 は 解式—4 によってくり返し代入法を用いて軸力を計算し，この軸力を用いて剛性行列を作成し，その逆行列を影響線と考えたもの (*A*)；解式—6 により 35 t の



図—9 影響線解析法による曲げモーメント図



図—10 変位の影響線の比較 節点 5

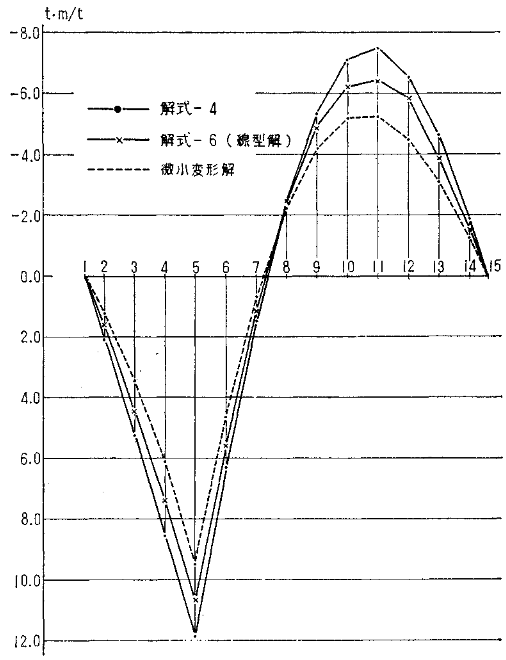
集中荷重を基準荷重として線形解によるものを影響線と考えたもの (B)，微小変形の仮定による影響線 (C) をそれぞれ比較したものである。図—**10,11** には，節点5の影響線が示されている。

この場合に，影響線の正の面積を比較すると，まず変位について，

$$\frac{A-B}{B}=15.2\%,\quad \frac{A-C}{C}=37.1\%$$

曲げモーメントについて，

$$\frac{A-B}{B}=14.8\%,\quad \frac{A-C}{C}=38.1\%$$



図—11 曲げモーメントの影響線の比較 節点 5

となっている。よって影響線を用いることだけで変位，部材力を計算することはむずかしく，何らかのくり返し計算をすることが必要であると思われる。

5．全体座屈解析法

（1） 全体座屈の計算法

骨組構造全体に貯えられるポテンシャル エネルギーを W とする。W は極値をとるべきことから，その第1変分

$$\delta W=\sum_i\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]\cdot\delta x_i \cdots\cdots(54)$$

は，任意の変位の変分 δx_i について 0 でなければならない。すなわち，

$$\left[\frac{\partial W}{\partial x_i}\right]\equiv\{0\}$$

これは，式 (52) に一致している。またポテンシャルエネルギーが最小値をとるための条件から W の第2変分

$$\delta^2 W=\sum_i\sum_j\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}\right]\delta x_i \delta x_j \cdots\cdots(55)$$

が任意の δx_i に対して正であることが要求される。このためには式 (56) が成り立たなければならない。

$$D=\left|\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}\right]\right|>0 \cdots\cdots(56)$$

よって骨組構造の弾性全体座屈の限界は行列式Dを用い

て

$$D=0 \quad \cdots\cdots(57)$$

によって判定することができる。

さて，**3**. における解式のうち，解式—1,2,3 では，W を変位のみの関数で表わすことができる。またこれは，変位の二次およびそれ以上のべき関数である。したがって，変位について二回微分すれば，定数のみの行列と，それ以上の項を含む方程式となるので，これを，

$$\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j}\right]=[\boldsymbol{K}]+[\boldsymbol{K}_L(\boldsymbol{x})] \quad \cdots\cdots(58)$$

と表わすことにする。ここに，$[\boldsymbol{K}]$ は微小変形の仮定の下に成立する剛性行列であり，$[\boldsymbol{K}_L(\boldsymbol{x})]$ は，大変形による項である。

いま，ある基準となる荷重状態を $\{\boldsymbol{P}_0\}$ と表わすことにし，そのときの変位を $\{\boldsymbol{x}_0\}$ とする。荷重の作用状態は変らずにその絶対値だけが λ 倍された荷重状態を考え，これを $\{\boldsymbol{P}\}$ とする。すなわち λ を定数として

$$\{\boldsymbol{P}\}=\lambda\{\boldsymbol{P}_0\} \quad \cdots\cdots(59)$$

である。荷重状態 $\{\boldsymbol{P}\}$ における変位を $\{\boldsymbol{x}\}$ とし，ここで式 (60) が成立すると仮定する。

$$[\boldsymbol{K}_L(\boldsymbol{x})]=\lambda\cdot[\boldsymbol{K}_L(\boldsymbol{x}_0)] \quad \cdots\cdots(60)$$

式 (60),(58) を用いて式 (57) を書きなおすと，座屈判定の条件式は結局次のように書き表わすことができる。

$$|[\boldsymbol{K}]+\lambda[\boldsymbol{K}_L(\boldsymbol{x}_0)]|=0 \quad \cdots\cdots(61)$$

すなわち式 (61) で表わされる固有値問題を解くことに帰着する。この報告では，解式—1,2,3 について式 (61) による解析を行なっている。

一般には，式 (58) はかならずしも成立せず，座屈判定の条件式は

$$|\boldsymbol{K}_D(\lambda)|=0 \quad \cdots\cdots(62)$$

となる。解式—4 では，式 (62) によって解析を行なっている。

（2） 固有値の計算法

全体座屈の判定条件式は式 (61) あるいは式 (62) のように与えられる。すなわち，

$$[\boldsymbol{A}]\cdot\{\boldsymbol{y}\}=\lambda\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{y}\} \quad \cdots\cdots(63)$$

$$[\boldsymbol{C}(\lambda)]\cdot\{\boldsymbol{y}\}=\{\boldsymbol{0}\} \quad \cdots\cdots(64)$$

なる固有値問題を解くことに帰着する。

骨組構造の座屈安定解析における固有値問題は，式 (63),(64) の形式の問題であることのほかに，次のような特徴を持っている。すなわち，

a. 骨組構造の節点数の増加とともに求めようとする行列の元数が急激に増加するが，そのうち 0 でない要素は比較的少ないこと，

b. 固有値は実数を対象とすればよいこと，たとえば振動問題などでは，複素数の固有値を求める必要が生ずることがあるが，ここでは実数の固有値に限定される，

c. 最小固有値および 2 次，3 次程度までの固有値，固有ベクトルを求めればよいこと，しかし，最小固有値のみでは，たとえば固有値が非常に近い場合など不十分で，少なくとも 2 次あるいは 3 次までは求められる方法である必要がある，

などであろう。一般に式 (63) 型の固有値問題では，Jacobi の回転法およびその修正アルゴリズムがよく用いられている。この方法は確実にしかもすべての固有値，固有ベクトルが同時に求まる点ですぐれた方法である。しかし大きな記憶容量を必要とする点で，節点数が多い構造物に対しては不都合である。ここでは共役勾配法および Sturm 数列特性による二分割法によって計算を行なった。共役勾配法は式 (63) 型のみに適用されるが 2 分割法では式 (63) 型，式 (64) 型両者ともに計算することができる。

共役勾配法による固有値の計算法は，W.W. Bradbury, R. Fletcher[33] によって最小の固有値について研究され，それを R.L. Fox, M.P. Kapoor[34] が J.B. Rosen[35] による勾配射影法を利用して中間固有値が求まるように拡張している。

まず，式 (63) による固有値問題は式 (65) に示すような Rayleigh 商 R を最小にする $\{\boldsymbol{y}\}$ ならびにそのときの R を求める問題となる。

$$R=\frac{\{\boldsymbol{y}\}^T\cdot[\boldsymbol{A}]\cdot\{\boldsymbol{y}\}}{\{\boldsymbol{y}\}^T\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{y}\}} \quad \cdots\cdots(65)$$

この最小化問題のアルゴリズムは，R. Fletcher, C. M. Reeves[36] によって次のように与えられている。

$\{\boldsymbol{y}^{(0)}\}$：任意ベクトル

$$\{\boldsymbol{G}^{(0)}\}=\{VR(\boldsymbol{y}^{(0)})\},\ \{\boldsymbol{S}^{(0)}\}=-\{\boldsymbol{G}^{(0)}\}$$

$$\{\boldsymbol{y}^{(i+1)}\}=\{\boldsymbol{y}^{(i)}\}+\alpha^{(i)}\cdot\{\boldsymbol{S}^{(i)}\}$$

$$\{\boldsymbol{G}^{(i)}\}=\{VR(\boldsymbol{y}^{(i)})\}$$

$$\beta_i=|\{\boldsymbol{G}^{(i+1)}\}|^2/|\{\boldsymbol{G}^{(i)}\}|^2$$

$$\{\boldsymbol{S}^{(i+1)}\}=-\{\boldsymbol{G}^{(i+1)}\}+\beta_i\{\boldsymbol{S}^{(i)}\}$$

$i=0,\ 1,\ 2,\cdots$（反復回数）

ここに，$|\ |$ は絶対値を表わし，また $\{VR(\boldsymbol{y})\}$ は式 (65) に与える R の勾配を示すベクトルで次のようになる。

$$\{VR(\boldsymbol{y})\}=\frac{2([\boldsymbol{A}]\cdot\{\boldsymbol{y}\}-R[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{y}\})}{(\{\boldsymbol{y}\}^T\cdot[\boldsymbol{B}]\cdot\{\boldsymbol{y}\})}$$

さらに，α_i は $R(\{\boldsymbol{y}^{(i)}\}+\alpha^{(i)}\cdot\{\boldsymbol{S}^{(i)}\})$ を最小にするように選択されるもので，添字を省略して，

$$u=(\{\boldsymbol{S}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{S}\})(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{S}\})-(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{S}\})(\{\boldsymbol{S}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{S}\})$$

$$v=(\{\boldsymbol{S}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{S}\})(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{y}\})-(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{y}\})(\{\boldsymbol{S}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{S}\})$$

$$w=(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{S}\})(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{y}\})$$

$$-(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{A}]\{\boldsymbol{y}\})(\{\boldsymbol{y}\}^T[\boldsymbol{B}]\{\boldsymbol{S}\})$$

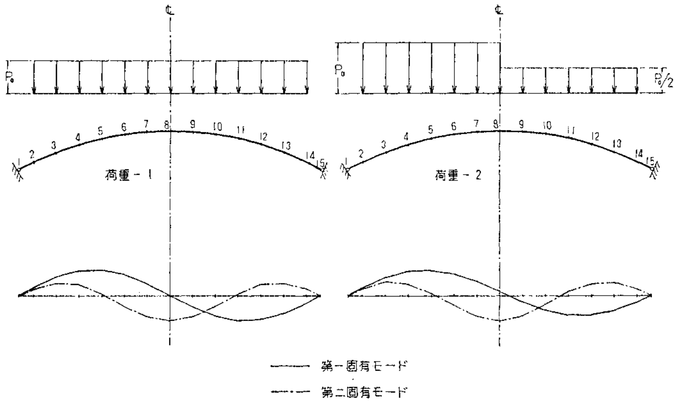
と書くことにすれば，

$$u\alpha^2+v\alpha+w=0$$

の2根のうち正の値を用いる。

このアルゴリズムによれば，行列 $[\boldsymbol{A}]$，$[\boldsymbol{B}]$ とベクトル $\{\boldsymbol{y}\}$，$\{\boldsymbol{S}\}$ との積の計算が主であることがわかる。このことから0でない要素のみを用いて簡単にプログラム化することができる。

次に Sturm 数列特性を用いた2分割法の計算方法について述べる。これは G. Peters, J.H. Wilkinson[37),38)] により研究され，K.K. Gupta[39)] が構造の振動解析に応用している。



図—12 荷重状態と解式—2 によるモード

まず式 (63) を変形して式 (64) のように表わす。すなわち，式 (63) は式 (64) において

$$[\boldsymbol{C}(\lambda)]=[\boldsymbol{A}]-\lambda[\boldsymbol{B}]$$

であると解釈する。行列 $[\boldsymbol{C}(\lambda)]$ の r 次小行列の固有多項式 $f_r(\lambda)$ を $f_0(\lambda)=1$ を初期値として，次のような規則によって作成する。

$r=0,\ 1,\ 2,\cdots,\ (n-1)$ （n は行列 $\boldsymbol{C}$ の元数）

$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$ について，

① もし $|C_{r+1,i}|>|C_{ii}|$ ならば，

$j=i,\ i+1,\cdots n$ について $C_{r+1,j}$ と C_{ij} とを交換する。

② $j=i+1,\ i+2,\cdots n$ について，

$$C_{r+1,j}=C_{r+1,j}-\frac{C_{ij}\cdot C_{r+1,i}}{C_{ii}} \quad とする。$$

このとき第 r 次小行列の固有多項式は，

$$f_{r+1}(\lambda)=(-1)^N C_{11}\cdot C_{22}\cdots C_{r+1,r+1}$$

によって与えることができる[40)]。ここに N は r の各段階における①の交換回数である。まず λ を適当に仮定して，以上によって求めた数列 $f_0(\lambda),\ f_1(\lambda)\cdots f_n(\lambda)$ の相隣る項の符号の一致する数は，仮定した λ より大きい固有値の個数に等しい。この性質を利用し，適宜 λ を仮定しながら二分割法をくり返して用いることにより目的とする固有値を求める。この固有値によって別に固有ベクトルを計算する。

（3） 数値計算例

図—3 に示すアーチ橋に対して計算した結果を示す。

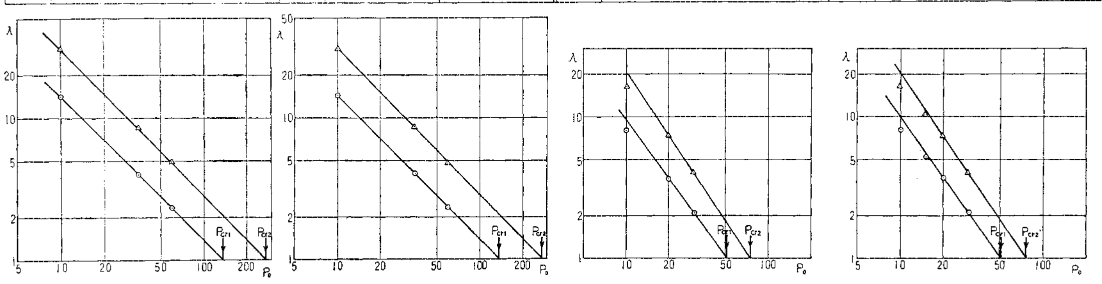
図—12 のように全節点に等しい集中荷重が作用する場合，スパン中央まで2倍の集中荷重が作用する場合をそれぞれ荷重—1,2 とする。固有モードは 図—12 に示してある。解式—1,2 の計算結果を 表—2 に示す。

固有値の計算は二分割法によっている。基準となる荷重 P_0 を数種類変化させ，固有値 λ を求め，これより λP_0 をそれぞれ計算したものである。解式—1，解式—2 ともに大きな相違はない。荷重—1 では λP_0 の計算値は P_0 には大きくは影響されないが，荷重—2 では P_0

表—2 全体座屈解析法による計算結果

荷重－1									
解式－1					解式－2				
基準荷重	1 次		2 次		基準荷重	1 次		2 次	
P_0(t)	λ_1	$\lambda_1\times P_0$(t)	λ_2	$\lambda_2\times P_0$(t)	P_0(t)	λ_1	$\lambda_1\times P_0$(t)	λ_2	$\lambda_2\times P_0$(t)
10	14.15	141.5	30.30	303.0	10	14.14	141.4	30.32	303.2
35	4.017	140.6	8.523	298.3	35	4.020	140.7	8.530	298.6
60	2.327	139.6	4.847	290.8	60	2.329	139.7	4.856	291.4
座屈荷重	$P_{cr1}=135$(t)		$P_{cr2}=275$(t)		座屈荷重	$P_{cr1}=136$(t)		$P_{cr2}=277$(t)	

荷重－2									
解式－1					解式－2				
基準荷重	1 次		2 次		基準荷重	1 次		2 次	
P_0(t)	λ_1	$\lambda_1\times P_0$(t)	λ_2	$\lambda_2\times P_0$(t)	P_0(t)	λ_1	$\lambda_1\times P_0$(t)	λ_2	$\lambda_2\times P_0$(t)
10	7.987	79.9	16.07	160.7	10	7.996	80.0	16.09	160.9
20	3.672	73.4	7.220	144.4	20	3.676	73.5	7.231	144.6
30	2.091	62.7	3.967	119.0	30	2.095	62.9	3.979	119.4
座屈荷重	$P_{cr1}=52$(t)		$P_{cr2}=76$(t)		座屈荷重	$P_{cr1}=52$(t)		$P_{cr2}=78$(t)	



表—3　解式の相違による座屈荷重の比較

			解式—1		解式—2		解式—3		解式—4	
			λ	座屈荷重 [t]	λ	座屈荷重 [t]	λ	座屈荷重 [t]	λ	座屈荷重 [t]
荷重—1	$P_0=35$ [t]	第1固有値	4.017	140.6	4.020	140.7	4.075	142.6	4.075	142.6
		第2固有値	8.523	298.3	8.530	298.6	9.201	322.0	9.201	322.0
	$P_0=60$ [t]	第1固有値	2.327	139.6	2.329	139.7	2.372	142.3	2.372	142.3
		第2固有値	4.847	290.8	4.856	291.4	5.354	321.2	5.354	321.2
荷重—2	$P_0=20$ [t]	第1固有値	3.672	73.4	3.676	73.5			9.169	183.4
		第2固有値	7.220	144.4	7.231	144.6			20.69	413.8
	$P_0=30$ [t]	第1固有値	2.091	62.7	2.095	62.9	6.106	183.2	6.108	183.2
		第2固有値	3.967	119.0	3.973	119.4	13.78	413.4	13.78	413.4

の値のとり方によって，相当異なった値となっている。そこで，$\lambda-P_0$ 関係を両対数目盛の上に表示し，これより $\lambda=1$ に対応する荷重を座屈荷重として示してある。

表—3 には，解式の相違による固有値 λ および λP_0 の相違を示してある。解式—1,2,3,4 ともに同一の基準荷重によって比較してある。荷重—2 の場合には解式—3,4 の結果は 解式—1,2 の結果と一致していない。

これは軸変形に対する変位 v の影響によるものと考えられる。解式—3 の結果と 解式—4 の結果がよく一致していることから，有限要素法における変位法的手法は妥当であると考えてよいと思われる。

表—4　二分割法と共役勾配法の比較

荷重状態	基準荷重 P_0 [t]	数値計算法	固有値1次 λ_1	$\lambda_1\times P_0$ [t]	固有値2次 λ_2	$\lambda_2\times P_0$ [t]
荷重—1	60	二分割法	2.372	142.3	5.354	321.2
		共役勾配法	2.403	144.2		
荷重—2	30	二分割法	6.106	183.2	13.78	413.4
		共役勾配法	6.128	183.8	14.35	430.5

表—4 は 解式—3 について， 共役勾配法 と二分割法との比較を 行なったものである。 共役勾配法は式 (68) の停留性に着目したくり返し計算法であるから，収束の判定条件に解が左右され，また初期値のとり方によって計算時間が大きく影響を受ける。さらに，初期値とするベクトルによってはかならずしも最小の固有値が得られない点に注意しなければならない。共役勾配法の利点は，記憶容量を非常に小さくすることができる点と，固有値ならびに固有ベクトルを同時に求めることができる点とである。一方，二分割法では固有値の値の範囲をあらかじめ推定しておく必要があり，また帯行列として記憶しても多少容量は増加する。さらに，固有ベクトルを別途求めなければならない。しかし，求められた固有値が何番目の固有値であるかが明確であり，確実性に富んでいる点ですぐれている。一般的には共役勾配法によってあらかじめ解を推定し，二分割法で正確に固有値を決定しかつ固有ベクトルを求め，最後に再び共役勾配法で検算するという方法が推奨される。

6. 結　　言

この報告は骨組構造の大変形問題について，変形前後の座標系による都合7つの解式にしたがい，直接解析法，荷重増加解析法，影響線解析法，全体座屈解析法によって計算する方法の相互の比較対応について述べたものである。

解式—3 と 解式—4 との 計算結果より，解析解を用いた剛性行列と有限要素法における変位法の手法による剛性行列との相違は小さいものと推察される。また，解式—1 と 解式—2 との計算結果からみると，式 (3) 第2項の影響は小さい。しかし固有値による解析法の計算結果（**表—2**）からわかるように，変形が大きくなると，式 (3) 第3項の影響が 大きくなるようである。 以上のことから Newton-Raphson 法が適用しやすく，また固有値による 解析法にも 適している 解式—2 が実用上便利であるということができる。

次に荷重増加解析法では，**図—7** のように荷重の増加の方法によって異なった解が得られることが経験され，各荷重に対応する変位，部材力が計算し得る一方，計算時間は長くかかる。応力とひずみとの関係が比例関係にあるとする範囲内では直接解析法による方が有利であると思われる。

影響線解析法では基準荷重状態における影響線を用いたのでは不十分で，少なくとも 2〜3 回のくり返し計算を必要とする。橋梁の死荷重と活荷重のように荷重の作用順序が決っている場合には，解式—6 が有効であると考えられる。

座屈荷重を求める場合には，荷重増加解析法によってもよいが，解式を変形して固有値を求める方法による方が計算上都合がよい。この場合に基準とする荷重によって座屈荷重の計算値が異なることがある。固有値の計算方法としては著者の経験では，骨組構造の解式の係数行列の性質を有効に利用できる Sturm 数列特性を用いた

二分割法が確実であった。この場合には，あらかじめ個有値の範囲が推定されていると計算時間がより短縮される。

計算には，日本電子計算(株)所有 Burroughs B-5500 を用いた。記して感謝の意を表する。

付録—1

$$
\begin{Bmatrix} N_a \\ Q_a \\ M_a \\ \hdashline N_b \\ Q_b \\ M_b \end{Bmatrix} = \left(\left[\begin{array}{ccc:ccc} A_1 & & & -A_1 & & \\ & B_1 & C_1 & & -B_1 & C_1 \\ & C_1 & D_1 & & -C_1 & E_1 \\ \hdashline -A_1 & & & A_1 & & \\ & -B_1 & -C_1 & & B_1 & -C_1 \\ & C_1 & E_1 & & -C_1 & D_1 \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ccc:ccc} A_2 & B_2 & C_2 & -A_2 & -B_2 & D_2 \\ B_2 & E_2 & F_2 & -B_2 & -E_2 & G_2 \\ C_2 & F_2 & H_2 & -C_2 & -F_2 & I_2 \\ \hdashline -A_2 & -B_2 & -C_2 & A_2 & B_2 & -D_2 \\ -B_2 & -E_2 & -F_2 & B_2 & E_2 & -G_2 \\ D_2 & G_2 & I_2 & -D_2 & -G_2 & J_2 \end{array} \right] \right) \begin{Bmatrix} u_a \\ v_a \\ \theta_a \\ \hdashline u_b \\ v_b \\ \theta_b \end{Bmatrix}
$$

$$A_1=\frac{EA}{l} \quad B_1=\frac{12\,EI}{l^3} \quad C_1=\frac{6\,EI}{l^2} \quad D_1=\frac{4\,EI}{l} \quad E_1=\frac{2\,EI}{l}$$

$$A_2=\Big[-\frac{3\,EA}{2\,l^2}(u_a-u_b)+\frac{EA}{2\,l^3}(u_a-u_b)^2+\frac{EA}{5\,l^3}(v_a-v_b)^2+\frac{EA}{30\,l^2}(v_a-v_b)(\theta_a+\theta_b)$$
$$+\frac{EA}{45\,l}(\theta_a{}^2+\theta_b{}^2)-\frac{EA}{90\,l}\theta_a\theta_b\Big]$$

$$B_2=-\frac{3\,EA}{5\,l^2}(v_a-v_b)-\frac{EA}{20\,l}(\theta_a+\theta_b)+\Big[\frac{2\,EA}{5\,l^3}(u_a+u_b)(v_a-v_b)+\frac{EA}{30\,l^2}(u_a-u_b)(\theta_a+\theta_b)\Big]$$

$$C_2=-\frac{EA}{20\,l}(v_a-v_b)-\frac{EA}{15}\theta_a+\frac{EA}{60}\theta_b+\Big[\frac{EA}{30\,l^2}(u_a-u_b)(v_a-v_b)+\frac{2\,EA}{45\,l}(u_a-u_b)\theta_a-\frac{EA}{90\,l}(u_a-u_b)\theta_b\Big]$$

$$D_2=-\frac{EA}{20\,l}(v_a-v_b)+\frac{EA}{60}\theta_a-\frac{EA}{15}\theta_b+\Big[\frac{EA}{30\,l^2}(u_a-u_b)(v_a-v_b)-\frac{EA}{90\,l}(u_a-u_b)\theta_a+\frac{2\,EA}{45\,l}(u_a-u_b)\theta_b\Big]$$

$$E_2=-\frac{3\,EA}{5\,l^2}(u_a-u_b)+\frac{36\,EA}{35\,l^3}(v_a-v_b)^2+\frac{9\,EA}{35\,l^2}(v_a-v_b)(\theta_a+\theta_b)+\frac{3\,EA}{70\,l}(\theta_a{}^2+\theta_b{}^2)+\Big[\frac{EA}{5\,l^3}(u_a-u_b)^2\Big]$$

$$F_2=-\frac{EA}{20\,l}(u_a-u_b)+\frac{9\,EA}{70\,l^2}(v_a-v_b)^2+\frac{3\,EA}{35\,l}(v_a-v_b)\theta_a-\frac{EA}{280}(\theta_a{}^2-\theta_b{}^2)+\frac{EA}{140}\theta_a\theta_b$$
$$+\Big[\frac{EA}{60\,l^2}(u_a-u_b)^2\Big]$$

$$G_2=-\frac{EA}{20\,l}(u_a-u_b)+\frac{9\,EA}{70\,l^2}(v_a-v_b)^2+\frac{3\,EA}{35\,l}(v_a-v_b)\theta_b+\frac{EA}{280}(\theta_a{}^2-\theta_b{}^2)+\frac{EA}{140}\theta_a\theta_b$$
$$+\Big[\frac{EA}{60\,l^2}(u_a-u_b)^2\Big]$$

$$H_2=-\frac{EA}{15}(u_a-u_b)+\frac{3\,EA}{70\,l}(v_a-v_b)^2-\frac{EA}{140}(v_a-v_b)(\theta_a-\theta_b)+\frac{EAl}{35}\theta_a{}^2+\frac{EAl}{420}\theta_b{}^2-\frac{EAl}{140}\theta_a\theta_b$$
$$+\Big[\frac{EA}{45\,l}(u_a-u_b)^2\Big]$$

$$I_2=\frac{EA}{60}(u_a-u_b)+\frac{EA}{140}(v_a-v_b)(\theta_a+\theta_b)-\frac{EAl}{280}(\theta_a{}^2+\theta_b{}^2)+\frac{EAl}{210}\theta_a\theta_b-\Big[\frac{EA}{180\,l}(u_a-u_b)^2\Big]$$

$$J_2=-\frac{EA}{15}(u_a-u_b)+\frac{3\,EA}{70\,l}(v_a-v_b)^2+\frac{EA}{140}(v_a-v_b)(\theta_a-\theta_b)+\frac{EAl}{420}\theta_a{}^2+\frac{EAl}{35}\theta_b{}^2-\frac{EAl}{140}\theta_a\theta_b$$
$$+\Big[\frac{EA}{45\,l}(u_a-u_b)^2\Big]$$

付録—2

付録—1 で，[ ] の部分を省略したものである。

付録—3

$$\begin{Bmatrix} \Delta N_a \\ \Delta Q_a \\ \Delta M_a \\ \hdashline \Delta N_b \\ \Delta Q_b \\ \Delta M_b \end{Bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} A1 & P1 & Q1 & -A1 & -P1 & R1 \\ P1 & B1 & C1 & -P1 & -B1 & C2 \\ Q1 & C1 & D1 & -Q1 & -C1 & D2 \\ \hdashline -A1 & -P1 & -Q1 & A1 & P1 & -R1 \\ -P1 & -B1 & -C1 & P1 & B1 & -C2 \\ R1 & C2 & D2 & -R1 & -C2 & E1 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \Delta u_a \\ \Delta v_a \\ \Delta \theta_a \\ \hdashline \Delta u_b \\ \Delta v_b \\ \Delta \theta_b \end{Bmatrix}$$

$$A1 = \frac{EA}{l}\left(1-\frac{u_a-u_b}{l}\right)\left(1-\frac{u_a-u_b+\Delta u_a-\Delta n_b}{l}\right)-\frac{EA}{l}\left(1-\frac{u_a-u_b}{2l}\right)(u_a-u_b)$$
$$+\frac{1}{l}\{p(\Delta v_a-\Delta v_b)+q\,\Delta\theta_a+r\,\Delta\theta_b\}+\frac{1}{2l}\{p(v_a-v_b)+q\,\theta_a+r\,\theta_b\}$$

$$P1=-\left(1-\frac{u_a-u_b}{l}\right)p,\quad Q1=-\left(1-\frac{u_a-u_b}{l}\right)q,\quad R1=-\left(1-\frac{u_a-u_b}{l}\right)r$$

$$B1=\frac{12EI}{l^3}+EA\left(\frac{3}{2}i+i'+\frac{6U'}{5l}\right)$$

$$U'=-\frac{u_a-u_b+\Delta u_a-\Delta u_b}{l}+\frac{u_a-u_b}{l}\left(\frac{u_a-u_b}{2l}+\frac{\Delta u_a-\Delta u_b}{l}\right)$$

$$C1=\frac{6EI}{l^2}+EA\left(\frac{3}{2}l+l'+\frac{U'}{10}\right)$$

$$C2=\frac{6EI}{l^2}+EA\left(\frac{3}{2}n+n'+\frac{U'}{10}\right)$$

$$D1=\frac{4EI}{l}+EA\left(\frac{3}{2}j+j'+\frac{2lU'}{15}\right)$$

$$p=EA\left\{\frac{6}{5l^2}(v_a-v_b)+\frac{1}{10l}(\theta_a+\theta_b)\right\}$$

$$D2=\frac{2EI}{l}+EA\left(\frac{3}{2}m+m'-\frac{lU'}{30}\right)$$

$$q=EA\left\{\frac{1}{10l}(v_a-v_b)+\frac{2}{15}\theta_a-\frac{1}{30}\theta_b\right\}$$

$$E1=\frac{4EI}{l}+EA\left(\frac{3}{2}k+k'+\frac{2lU'}{15}\right)$$

$$r=EA\left\{\frac{1}{10l}(v_a-v_b)-\frac{1}{30}\theta_a+\frac{2}{15}\theta_b\right\}$$

$$i=\frac{3}{35l}\theta_a^2+\frac{3}{35l}\theta_b^2+\frac{72}{35l^2}(v_a-v_b)^2+\frac{18}{35l^2}\theta_a(v_a-v_b)+\frac{18}{35l^2}\theta_b(v_a-v_b)$$

$$i'=\frac{3}{35l}\theta_a\cdot\Delta\theta_a+\frac{3}{35l}\theta_b\cdot\Delta\theta_b+\frac{72}{35l^3}(v_a-v_b)(\Delta v_a-\Delta v_b)+\frac{9}{35l^2}\theta_a(\Delta v_a-\Delta v_b)+\frac{9}{35l^2}\Delta\theta_a(v_a-v_b)$$
$$+\frac{9}{35l^2}\theta_b(\Delta v_a-\Delta v_b)+\frac{9}{35l^2}\Delta\theta_b(v_a-v_b)$$

$$j=\frac{2l}{35}\theta_a^2+\frac{l}{210}\theta_b^2+\frac{3}{35l}(v_a-v_b)^2-\frac{l}{70}\theta_a\theta_b-\frac{1}{70}\theta_a(v_a-v_b)+\frac{1}{70}\theta_b(v_a-v_b)$$

$$j'=\frac{2l}{35}\theta_a\cdot\Delta\theta_a+\frac{l}{210}\theta_b\cdot\Delta\theta_b+\frac{3}{35l}(v_a-v_b)(\Delta v_a-\Delta v_b)-\frac{l}{140}(\theta_a\cdot\Delta\theta_b+\Delta\theta_a\cdot\theta_b)-\frac{1}{140}\theta_a(\Delta v_a-\Delta v_b)$$
$$-\frac{1}{140}\Delta\theta_a(v_a-v_b)+\frac{1}{140}\theta_b(\Delta v_a-\Delta v_b)+\frac{1}{140}\Delta\theta_b(v_a-v_b)$$

$$k=\frac{l}{210}\theta_a^2+\frac{2l}{35}\theta_b^2+\frac{3}{35l}(v_a-v_b)^2-\frac{l}{70}\theta_a\theta_b+\frac{1}{70}\theta_a(v_a-v_b)-\frac{1}{70}\theta_b(v_a-v_b)$$

$$k'=\frac{l}{210}\theta_a\cdot\Delta\theta_a+\frac{2l}{35}\theta_b\cdot\Delta\theta_b+\frac{3}{35l}(v_a-v_b)(\Delta v_a-\Delta v_b)-\frac{l}{140}(\theta_a\cdot\Delta\theta_b+\Delta\theta_a\cdot\theta_b)+\frac{1}{140}\theta_a(\Delta v_a-\Delta v_b)$$
$$+\frac{1}{140}\Delta\theta_a(v_a-v_b)-\frac{1}{140}\theta_b(\Delta v_a-\Delta v_b)-\frac{1}{140}\Delta\theta_b(v_a-v_b)$$

$$l=-\frac{1}{140}\theta_a^2+\frac{1}{140}\theta_b^2+\frac{9}{35l^2}(v_a-v_b)^2+\frac{1}{70}\theta_a\theta_b+\frac{6}{35l}\theta_a(v_a-v_b)$$

$$l'=-\frac{1}{140}\theta_a\cdot\Delta\theta_a+\frac{1}{140}\theta_b\cdot\Delta\theta_b+\frac{9}{35l^2}(v_a-v_b)(\Delta v_a-\Delta v_b)+\frac{1}{140}(\theta_a\cdot\Delta\theta_b+\Delta\theta_a\cdot\theta_b)+\frac{3}{35l}\theta_a(\Delta v_a-\Delta v_b)$$
$$+\frac{3}{35l}\Delta\theta_a(v_a-v_b)$$

$$m=-\frac{l}{140}\theta_a^2-\frac{l}{140}\theta_b^2+\frac{l}{105}\theta_a\theta_b+\frac{1}{70}\theta_a(v_a-v_b)+\frac{1}{70}\theta_b(v_a-v_b)$$

$$m' = -\frac{l}{140}\theta_a \cdot \Delta\theta_a - \frac{l}{140}\theta_b \cdot \Delta\theta_b + \frac{l}{210}(\theta_a \cdot \Delta\theta_b + \Delta\theta_a \cdot \theta_b) + \frac{1}{140}\theta_a(\Delta v_a - \Delta v_b) + \frac{1}{140}\Delta\theta_a(v_a - v_b)$$
$$+ \frac{1}{140}\theta_b(\Delta v_a - \Delta v_b) + \frac{1}{140}\Delta\theta_b(v_a - v_b)$$

$$n = \frac{1}{140}\theta_a{}^2 - \frac{1}{140}\theta_b{}^2 + \frac{9}{35\,l^2}(v_a - v_b)^2 + \frac{1}{70}\theta_a\theta_b + \frac{6}{35\,l}\theta_b(v_a - v_b)$$

$$n' = \frac{1}{140}\theta_a \cdot \Delta\theta_a - \frac{1}{140}\theta_b \cdot \Delta\theta_b + \frac{9}{35\,l^2}(v_a - v_b)(\Delta v_a - \Delta v_b) + \frac{1}{140}(\theta_a \cdot \Delta\theta_b + \Delta\theta_a \cdot \theta_b)$$
$$+ \frac{3}{35\,l}\theta_b(\Delta v_a - \Delta v_b) + \frac{3}{35\,l}\Delta\theta_b(v_a - v_b)$$

付録—4

付録—3 における $A1 \sim R1,\ U'$ をそれぞれ次のように変更する。

$$A\,1 = \frac{EA}{l}$$

$$P\,1 = -p,\ Q\,1 = -q,\ R\,1 = -r$$

$$U' = -\frac{\Delta u_a - \Delta u_b + u_a - u_b}{l}$$

参考文献

1) Livesley, R.K. : "The Application of an Electronic Digital Computer to Some Problems of Structural Analysis", Struc. Engr., Vol. 34, No. 1, 1956.
2) Argyris, J.H. : "Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis", Pergamon Press, 1964.
3) Jennings, A. : "Frame Analysis Including Change of Geometry", Proc. ASCE, Vol. 94, No. ST 4, 1968.
4) Jennings, A. : "The Elastic Stability of Rigidly Jointed Structures", Int. J. Mech. Sci. Vol. 5, pp. 93～113, 1963.
5) Saafan, S.A. : "Nonlinear Behavior of Structural Plane Frames", Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST 4, 1963.
6) Saafan, S.A. : "Theoretical Analysis of Suspension Bridges", Proc. ASCE, Vol. 92, ST 4, 1966.
7) Miller, M.A., Broton, D.M. and Merchant, W. : "A Computer Method for the Analysis of Nonlinear Elastic Plane Frames", International Symposium on Use of Computers in Structural Engineering, New-Castle upon Tyne, 1966.
8) Merchant, W. and Brotton, P.M. : "A Generalized Method of Analysis of Elastic Plane Frames", Proc. IABSE, Rio de Janeiro, Brazil, 1964.
9) Mallet, R.H. and Marcal, P.V. : "Finite Element Analysis of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, Vol. 94, No. ST 9, 1968.
10) Poskitt, T.J. : "Numerical Solution of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, Vol. 93, No. ST 4. 1967.
11) 大地羊三："行列による骨組構造の解法", 鉄道技術研究報告 No. 260, Oct. 1961.
12) 大地羊三："架設途上にある構造物の応力解析", 第15回橋梁構造工学研究発表会, 1968.
13) 後藤茂夫："有限変形法による吊橋の解法", 土木学会論文集 No. 156, 1968.
14) 後藤茂夫："有限変形法に関する二, 三の考察", 土木学会論文報告集 No. 163, 1969.
15) 藤野 勉・大坂憲司："任意形式のツリ橋の静的解析法—有限変位理論による骨組構造解析法の応用—", 三菱重工技報 Vol. 3, No. 6, 1966.
16) 堀井健一郎・川原睦人："有限変形を考慮した平面骨組構造の弾塑性解析法", 土木学会論文報告集 No. 169, 1969.
17) Goldberg, J.E. and Richard, R.M. : "Analysis of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST 4, 1963.
18) Zarghamee, M.S. and Shah, J.M. : "Stability of Spaceframes", Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM 2, 1968.
19) Lee, S.L., Manuel, F.M. and Rassow, E.C. : "Large Deflection and Stability of Elastic Frames", Proc. ASCE, Vol. 94, No. EM 2, 1968.
20) Halldorsson, O.P. and Wang, C.K. : "Stability Analysis of Frameworks by Matrix Method", Proc. ASCE, Vol. 94, No. ST 7, 1968.
21) Salem, A.H. : "Buckling of Rigidly-jointed Plane Trusses", Proc. ASCE, Vol. 95, No. ST 6, 1969.
22) Johnson, D. and Brotton, D.M. : "A Finite Deflection Analysis for Space Structures", International Conference on Space Structures, University of Surry, 1966.
23) Williams, F.W. : "An Approach to the Nonlinear Behavior of the Members of a Rigidly Jointed Plane Frameworks with Finite Deformations", Qua. J. Mech. Appl. Math. Vol. 17, pp. 451～469, 1964.
24) Goldberg, J.E. and Goldberg, R.M. : "Analysis of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, Vol. 89, No. ST 4, 1963.
25) Renton, J.D. : "Stability of Space Frames by Computer Analysis", Proc. ASCE, Vol. 88, No. ST 4, 1962.
26) Conner, J.J., Logcher, R.D. and Chan, S.C. : "Nonlinear Analysis of Elastic Framed Structures", Proc. ASCE, Vol. 94, No. ST 6, 1968.
27) Przemieniecki, J.S. : "Theory of Matrix Structural Analysis", Mac Graw-Hill, 1968.
28) Purdy, D.M. and Przemieniecki, J.S. : "Influence of Higher-Order Terms in the Large Deflection Analysis of Frameworks", Joint Speciality Conference on Optimization and Nonlinear Problems, University of Illinois, 1968.
29) Martin, H.C. : "On the Derivation of Stiffness Matrices for the Analysis of Large Deflection and Stability Problems", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, AFFDL-TR-66-80, 1966.
30) Tada, Y. and Lee, G.C. : "Finite Element Solution to an Elastica Problems of Beams", Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 2, No. 2, 1970.

31) Ferrante,, A.J., Logcher, R.D. and Conner, J.J. : "The Solution of Finite Element Problems Using the STRUDL Language", JSSC Symposium on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969.

32) Bergmann, H.W. : ASKA-A Large-Scale Software System for Finite Element Analysis", Japan-U.S. Seminor on Matrix Methods of Structural Analysis and Design", Tokyo, 1969.

33) Bradbury, W.W. and Fletcher, R. : "New Iterative Methods for Solution of the Eigenproblem", Numerishe Mathematik, Vol. 9, pp. 259～267, 1966.

34) Fox, R.L. and Kapoor, M.P. : "A Minimization Method for the Solution of the Eigenproblem Arising in Structural Dynamics", Second Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, WPAFB, Ohio, 1968.

35) Rosen, J.B. : "The Gradient Projection Method for Nonlinear Programming Part I-Linear Constraints", Jour. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 8, No. 1, 1960.

36) Fletcher, R. and Reeves, C.M. : "Function Minimization by Conjugate Gradients", Comp. Jour., Vol. 7, pp. 149～154, 1964.

37) Wilkinson, J.H. : "Calculation of the Eigenvalues of a Symmetric Tridiagonal Matrix by the Method of Bisection", Num. Math., Vol. 4, pp. 362～367, 1962.

38) Peters, G. and Wilkinson, J.H. : Eigenvalues of $Ax = \lambda Bx$ with Band Symmetric A and B", Comp. Jour., Vol. 12, pp. 398～404, 1969.

39) Gupta, K.K. : "Vibration of Frames and Other Structures with Banded Stiffness Matrix", Int. J. Num. Meth. Engng. Vol. 2, No. 2, 1970.

40) 古屋　茂："行列と行列式" 培風館, 1957.

(1971.1.6・受付)