

疲労試験における途中打ち切りデータの 処理に関する研究

ON THE TREATMENT OF CENSORED DATA IN FATIGUE TEST

浜田 純夫*・中川 建治**・成岡 昌夫***

By Sumio Hamada, Kenji Nakagawa and Masao Naruoka

1. ま え が き

コンクリートの疲労試験のデータの処理方法を考察する場合、一つの問題が生ずる。それは、繰り返しの規定回数（たとえば、200 万回）で破壊しなかったデータの取扱い方法である。従来は、規定回数で破壊しなかったデータを全く取り除くか、あるいは規定回数で破壊したものとしてデータに含めていた。いずれにしても、若干の不合理がある。

著者らは、規定回数で破壊しないような途中打ち切りデータの順序統計量に対して、より合理的な解釈を与えてプロット位置を推定し、正規分布およびワイブル (Weibull) 分布に従う場合については、新しいデータ処理法を導いた。

データ処理において、途中打ち切りデータも含めると、正規分布の平均値、さらにワイブル分布の係数を決定するのは、かなり複雑な計算となる。そこで、著者らは、計算を簡単にするために、正規分布に対しては平均値と標準偏差を、ワイブル分布に対しては3つの係数を、それぞれ最小分散にするような最良線形推定量として導いた。正規分布に対してはおのこの係数を計算して数表化した。ワイブル分布については、数表は膨大になるので計算の方法のみを示した。

従来の打ち切りデータを含めない場合では、正規分布の平均値と分散値の計算は容易である。ワイブル分布の係数については、ワイブルが Blom¹⁾の方法を用いて、線形推定量の係数を計算している。

阿部²⁾は、国鉄における保安度（信頼度）の問題で、

従来の多くのデータから、近似的に、途中打ち切りデータを含めた寿命推定方法を示したが、これは順序統計量に対して2つ以上の分布関数を同時に適用する方法である。

2. 途中打ち切りデータのプロット位置

理論分布と一連の観測値とを比較する場合、観測値のプロット位置の決定が重要な要素となる。大きさの順に小さい方から並べられた観測値 $x_i (i=1, 2, \dots, n)$ をどの位置にプロットするか、すなわち、 $x \leq x_i$ の生起確率をいかにするかという問題を考えよう。

n 個の観測値のうち r 個が限界値 X を超過して、疲労試験が X で途中打ち切りになった場合を考慮しよう。金属材料の疲労試験などにおいては、200 万回で破壊しないものは半永久的繰返し回数でも破壊しないといわれているが、ここでは限界値（たとえば、200 万回）で破壊しなかったものも、限界値以下で破壊したものと同一の確率分布に従って破壊するものであって、たまたま限界値を超過しただけであると仮定する。したがって、 n 個の観測値（順序統計量）のうち第1番値より $n-r$ 番値までの値 x_1, x_2, \dots, x_{n-r} は与えられているが、 $X < x_{n-r+1}, \dots, x_n$ という r 個の順序統計量は未知のままである。

さて、第 i 番値に対する確率変数 x_i の分布関数を $F(x_i) = F_i$ とし、限界値 X に対するものを $F(X) = F_X$ と略記すると、第 i 番値が x_i となり、上位 r 個が限界値 X を超過するという同時確率密度関数 $\varphi(F_i, F_X, r)$ は、

$$\varphi(F_i, F_X, r) dF_i = i \binom{n}{i} \binom{n-i}{r} F_i^{i-1} \cdot (F_X - F_i)^{n-r-i} (1 - F_X)^r dF_i \dots \dots \dots (2.1)$$

となる。 $r=0$ は疲労試験が途中打ち切りにならずに完了する場合である。一般には、 $r=0 \sim n$, $0 \leq F_i \leq F_X \leq 1$ であり、式 (2.1) より

$$\sum_{r=0}^n \int_0^{F_X} \varphi(F_i, F_X, r) dF_i dF_X = \sum_{r=0}^n \frac{1}{n+1} = 1$$

* 学生員 工修 名古屋大学大学院土工学専攻博士課程在学 (休学中)、現在、カナダ Alberta 大学 Ph. D. 課程在学

** 正会員 工修 山口大学助教授 工学部土工学教室

*** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土工学教室

を得て、 $\varphi(F_i, F_X, r)$ は確率密度関数であることがわかる。さらに、 $\varphi(F_i, F_X, r)$ を F_i と F_X で積分したものは r には無関係になり、 r に関しては一様分布になること、および、 r に関して和をとるかわりに $(n+1)$ を乗じてよいことが示された。 r 個が超過するという条件付確率を論ずるには、同時確率密度関数に $(n+1)$ を乗れればよいこともわかる。

F_i の確率密度関数を $\varphi(F_i, F_X, r)$ として、 X を r 個が超過するという条件を付加するために $(n+1)$ を乗じて、 F_i の平均値という意味からのプロット位置 $\bar{F}_{i\varphi}$ を求めると、

$$\bar{F}_{i\varphi} = (n+1) \int_0^1 \int_0^{F_X} F_i \varphi(F_i, F_X, r) dF_i dF_X = \frac{i}{n+2} \dots\dots\dots(2.2)$$

を得る。

式 (2.1) の F_i に関するモードをとるために $\partial\varphi/\partial F_i = 0$ をとるならば、

$$\tilde{F}_{i\varphi} = \frac{i-1}{n-r-1} F_X \dots\dots\dots(2.3)$$

となる。 F_X は、限界値 X に対するプロット位置である。 n 個のうち r 個が X を超過する確率 $\psi(F_X, r)$ は

$$\psi(F_X, r) = \binom{n}{r} F_X^{n-r} (1-F_X)^r \dots\dots\dots(2.4)$$

$$\sum_{r=0}^n \int_0^1 \psi(F_X, r) dF_X = \sum_{r=0}^n \frac{1}{n+1} = 1$$

となる。 r 個超過するという条件のもとでは $(n+1)$ を乗ずればよいことがわかったから、 F_X の $\psi(F_X, r)$ に関する平均値 $\bar{F}_{X\psi}$ は、

$$\bar{F}_{X\psi} = (n+1) \int_0^1 F_X \cdot \psi(F_X, r) dF_X = \frac{n-r+1}{n+2} \dots\dots\dots(2.5)$$

となる。 F_X のモード $\tilde{F}_{X\psi}$ は、 $\partial\psi/\partial F_X = 0$ より

$$\tilde{F}_{X\psi} = \frac{n-r}{n} \dots\dots\dots(2.6)$$

となる。式 (2.3) の F_X として、 $\bar{F}_{X\psi}$ 、あるいは、 $\tilde{F}_{X\psi}$ を代入すればよい。

つぎに、 n 個のうち r 個が超過したという条件の下で、第 i 番値が x_i となる条件付確率 $g(F_i, F_X|r)$ をもとにして、 F_i の平均値とモードを導こう。 $g(F_i, F_X|r)$ は、式 (2.1) と式 (2.4) より

$$g(F_i, F_X|r) = \frac{\varphi(F_i, F_X, r)}{\varphi(F_X, r)} \dots\dots\dots(2.7)$$

となる。 F_i の平均値を g に関して求めると、

$$\bar{F}_{ig} = \int_0^1 F_i g(F_i, F_X|r) dF_i = \frac{i}{n-r+1} F_X \dots\dots\dots(2.8)$$

となる。 $g(F_i, F_X|r)$ よりモードを求めると、 $\partial g/\partial F_i = 0$ より、

$$\tilde{F}_{ig} = \frac{i-1}{n-r-1} F_X \dots\dots\dots(2.9)$$

表-1

F_i に関して	F_X に関して	$F_i =$	$F_X =$
モード	モード	$\frac{i-1}{n} \frac{n-r}{n-r-1}$	$\frac{n-r}{n}$
	平均	$\frac{i-1}{n+2} \frac{n-r+1}{n-r-1}$	$\frac{n-r+1}{n+2}$
g による平均	モード	$\frac{i}{n} \frac{n-r}{n-r+1}$	$\frac{n-r}{n}$
	平均	$\frac{i}{n+2}$	$\frac{n-r+1}{n+2}$
φ による平均		$\frac{i}{n+2}$	---
$r=0$ ワイブル		$\frac{i}{n+1}$	---
$r=0$ モード		$\frac{i-1}{n-1}$	---

を得る。式 (2.8) と式 (2.9) とにおける F_X として、 \bar{F}_{ig} と \tilde{F}_{ig} とのいずれを用いるかによってそれぞれ変化するので、一括して表-1 に示す。

著者らは、表-1 のいずれの組合せを採用するかについて、ワイブルの考え方にしたがって、 F_i, F_X とともに平均値をとる組合せ

$$F_i = \frac{i}{n+2}, F_X = \frac{n-r+1}{n+2} \dots\dots\dots(2.10)$$

を採用することを提案する。なぜならば、1) モードを採用すると確率紙上でプロット不可能な場合がある。2) $r=0$ (すべて破壊) の場合には、ワイブルが平均値の採用によって導いたプロット位置 $F_i = i/n+1$ が広く採用されている。3) ワイブルの値との差 d_i は、

$$d_i = \frac{i}{n+1} - \frac{i}{n+2} = \frac{i}{(n+1)(n+2)}$$

となって、 i が小さいほど差が小さい。4) $F_{n-r} < F_X$ が成立している。

r 個が限界値 X を超過したという試験結果も貴重なデータである。式 (2.10) にしたがって破壊回数 $x_1 \sim x_{n-r}$ のプロット位置を決定すると、限界値 X において第 $n-r+1$ 番目の破壊が生じたようにみなされ、プロット位置 F_X が対応させられる。すなわち、 n 個の供試体のうち r 個が限界値 X で非破壊になった場合、 $n+1$ 個の供試体が $x_1 \sim x_{n-r}$ で破壊して、さらに X で $n-r+1$ 番目が破壊したものとみなして従来のワイブルのプロット位置を用いばよい。

3. 最良線型推定量

最良線型推定量は、従来から多くの統計学者によって研究されている。最も広く利用されているのは、G. Blom により提案されたもので、近似最小分散によるものであろう。この方法によれば、矩形分布の平均値については 100%、正規分布、極値分布の平均値については、それぞれ 99.8、98.8% の効果をもっている。

著者らは、G. Blom の方法によらず、別の最小分散による線型推定量を考え、正規分布とワイブル分布に対して適用した。

供試体の破壊機構に関する仮定は、前節の仮定と全く同一のものとする。順序統計量 $x_i (i=1 \sim n-r+1)$ に対するプロット位置 F_i として、式 (2.10) を採用する。

(1) 正規分布における最良線型推定量

順序統計量 $x_i (i=1 \sim n)$ を、平均値と分散値を \bar{x}, σ^2 とする正規分布にしたがうものとする。

$$F(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left\{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} dx \dots (3.1)$$

$F(x_i)$ の逆関数を $G(F_i)$ として

$$x_i = \bar{x} + \sigma G(F_i) \dots \dots \dots (3.2)$$

とする。 $G(F)$ を級数の形で求めるのは困難であり、実験データの整理が目的であるから、Newton の内挿法によって近似的に求める。この近似法は、少なくとも小数以下3けたまでは有効であり、データ整理としては十分有効であろう。 $G(F)$ の F に関する多項式を求めることの困難さは、 $F=0, 1$ の近傍の発散によるが、ここでは、 $0.05 \leq F \leq 0.95$ で十分である。

$$\left. \begin{aligned} 0.05 \leq F \leq 0.30 \\ G_1(F) &= -1.684485 + 0.36630 D_{1,1} \\ &\quad - 0.05905 D_{2,1} + 0.01131 D_{3,1} \\ &\quad - 0.00188 D_{4,1} + 0.00027 D_{5,1} \\ 0.30 \leq F \leq 0.50 \\ G_2(F) &= -0.67449 + 0.15009 D_{5,5} \\ &\quad - 0.00551 D_{6,5} + 0.00065 D_{7,5} \\ &\quad - 0.000045 D_{8,5} + 0.000004 D_{9,5} \\ 0.50 \leq F \leq 0.70 \\ G_3(F) &= -G_2(1-F) \\ 0.70 \leq F \leq 0.95 \\ G_4(F) &= -G_1(1-F) \\ D_{n,s} &= \prod_{i=s}^n (20F-i) \\ &= (20F-s)(20F-s-1) \dots (20F-n) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.3)$$

式 (3.2) の F_i へ式 (2.10) の F_i を代入すると、第 i 番値の理論値 x_i' を得る。 $x_i' = \bar{x} + \sigma G(i/n+2)$ しかるに、一般には $x_i \neq x_i'$ であるから、最小自乗法を用いて、 $x_i (i=1 \sim n-r+1)$ より \bar{x} と σ を決定する。

$$Q = \sum_{i=1}^{m+1} \left\{ x_i - \sigma G\left(\frac{i}{n+2}\right) - \bar{x} \right\}^2$$

$$m = n - r$$

$$\frac{\partial Q}{\partial \bar{x}} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = 0$$

より正規方程式を求めて解くと、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{i=1}^{m+1} f_i x_i \\ \sigma &= \sum_{i=1}^{m+1} g_i x_i \\ f_i &= \frac{\sum_{j=1}^{m+1} \left\{ G\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2 - G\left(\frac{i}{n+2}\right) \sum_{j=1}^{m+1} G\left(\frac{j}{n+2}\right)}{(m+1) \sum_{j=1}^{m+1} \left\{ G\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2 - \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} G\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2} \\ g_i &= \frac{(m+1) G\left(\frac{i}{n+2}\right) - \sum_{j=1}^{m+1} G\left(\frac{j}{n+2}\right)}{(m+1) \sum_{j=1}^{m+1} \left\{ G\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2 - \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} G\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3.4)$$

f_i, g_i については、 $2 \leq n \leq 11$ について計算し、表-2 に示した。同一条件のもとに n 個の供試体で疲労試験を行ない、 r 個が破壊せずに打ち切りになった場合に、強度が正規分布に従うと仮定し得る場合に平均値と標準偏差 \bar{x}, σ を表-2 によって推定し得る。対数正規分布に従うものとみなし得る場合は、 $\xi_i = \log x_i, (i=1 \sim n-r+1)$ という変換によって新しい順序統計量 ξ_i を求めて、その平均値と標準偏差 \bar{x}_ξ, σ_ξ を式 (3.4) と表-2 の f_i, g_i より求める。

(2) ワイブル分布における最良線型推定量

ワイブル分布とは、つぎのような分布である。

$$1 - F(x_i) = \exp\left\{-\left(\frac{x_i - \mu}{\beta}\right)^{1/2}\right\} \dots \dots \dots (3.5)$$

2度両辺の対数をとって逆関数にすると

$$x_i = \mu + \beta \exp\left\{\alpha \log \log\left(\frac{1}{1-F_i}\right)\right\}$$

となる。ここで F_i として式 (2.10) の値を代入すると、第 i 番値としての理論値 x_i' が得られる。

$$x_i' = \beta H\left(\frac{i}{n+2}\right) + \mu$$

$$H\left(\frac{i}{n+2}\right) = \exp\left\{\alpha \log \log\left(\frac{n+2}{n+2-i}\right)\right\} \dots (3.6)$$

正規分布の場合と同様にして、

$$Q = \sum_{i=1}^{m+1} \left\{ x_i - \beta H\left(\frac{i}{n+2}\right) - \mu \right\}^2$$

を最小にするような μ と β を決めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \sum_{i=1}^{m+1} \theta_i x_i \\ \beta &= \sum_{i=1}^{m+1} \zeta_i x_i \end{aligned} \right\} m = n - r \dots \dots \dots (3.7)$$

$$\theta_i = \frac{\sum_{j=1}^{m+1} H^2\left(\frac{j}{n+2}\right) - H\left(\frac{i}{n+2}\right) \sum_{j=1}^{m+1} H\left(\frac{j}{n+2}\right)}{(m+1) \sum_{j=1}^{m+1} H^2\left(\frac{j}{n+2}\right) - \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} H\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2}$$

$$\zeta_i = \frac{(m+1) H\left(\frac{i}{n+2}\right) - \sum_{j=1}^{m+1} H\left(\frac{j}{n+2}\right)}{(m+1) \sum_{j=1}^{m+1} H^2\left(\frac{j}{n+2}\right) - \left\{ \sum_{j=1}^{m+1} H\left(\frac{j}{n+2}\right) \right\}^2}$$

.....(3.8)

$H(in+2)$ は、式 (3.6) に示すように α の関数であるから、 θ_i, ζ_i も α の関数である。 α は、ほぼ 0.1~1.5 の間にあるので、 θ_i, ζ_i を α, n, r の関数として数表化すれば便利である。

α を決定する 1 つの方法として、著者らのはつぎのような方法を提案する。残差の自乗和 Q は α の関数でもあるから、 α で微分してつぎの関係を得る。

$$\beta M + \mu N = \sum_{i=1}^{m+1} q_i x_i \dots\dots\dots (3.9)$$

$$\left. \begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^{m+1} A_i H^2 \left(\frac{i}{n+2} \right) \\ N &= \sum_{i=1}^{m+1} A_i H \left(\frac{i}{n+2} \right) \\ q_i &= A_i H \left(\frac{i}{n+2} \right) \\ A_i &= \log \log \left(\frac{1}{1-F_i} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.10)$$

まず、適当と思われる α を選んで式 (3.7)、式 (3.8) より μ と β を決定し、式 (3.10) より q_i, M, N を求めて式 (3.9) へ代入して α の当否を検定する。この操作を 2, 3 回繰り返して最終的な μ, β, α の値を決定する。

ワイブルは α を決定するために、尤度 L を最大にする条件式を求めている。 $\alpha=1/b$ として $\partial L / \partial b = 0$ を必要条件とした。

$$\begin{aligned} L &= \sum_{i=1}^n \log f(x_i) \\ \frac{\partial L}{\partial b} &= \frac{n}{b} + \sum_{i=1}^n \log \left[\frac{(x_i - \mu)}{\beta} \right] \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - \mu)}{\beta} \right]^{-b} \log \left\{ \frac{(x_i - \mu)}{\beta} \right\} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (3.11)$$

仮定した α によって求められた μ, β が式 (3.11) を満足するか否かを検定する方法である。

もし、式 (3.10) の M, N が数表化されていたならば、式 (3.11) を用いるより式 (3.9) による方法が簡単である。

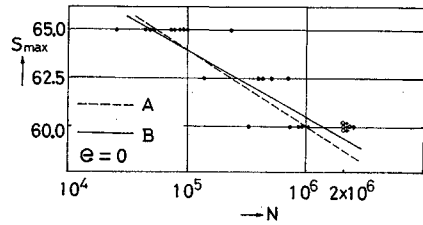
4. 計算例

著者らがさきに報告した軽量コンクリートの圧縮疲労試験⁹⁾は、従来のデータ整理方法で解析したものである。同じデータに対して、上記の解析方法を適用して比較しよう。

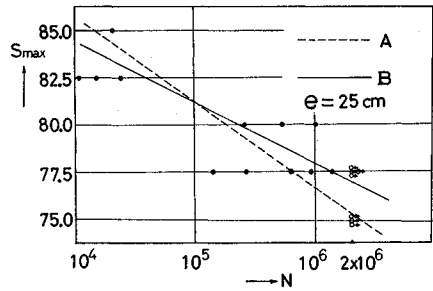
(1) 対数正規分布の場合

著者らの軽量コンクリートの圧縮疲労試験結果を、図 1(a), (b) に示す。

限界値 200 万回を超過する供試体のあるのは、偏心率



(a)



(b)

A: 非破壊供試体を取り除く方法
B: 著者らの提案する方法

図-1

$e=0$, 最大応力 $s=60\%$ (この意味については文献 4) を参照のこと) の場合と、 $e=2.5$ cm, $s=77.5\%$ の場合である。破壊までの繰返し回数 N_i が対数正規分布にしたがっていると仮定すると、順序統計量 x_i を、 $x_i = \log_{10} N_i$ として正規分布公式を用いればよい。表-2 より、 $n=10, m=5$ の場合と、 $n=9, m=5$ ($m=n-r$) の場合の f_i, g_i を求めて、平均値と標準偏差 \bar{x}, σ を求める過程を表-3 に示す。この結果より $S-N$ 曲線は表

表-3 対数正規分布による方法

i	$e=0, s=60, n=10, r=0$				$e=2.5, s=77.5, n=9, r=4$			
	$N_i(10^5)$	$\log_{10} N_i$	f_i	g_i	$N_i(10^5)$	$\log_{10} N_i$	f_i	g_i
1	3.219	5.508	-0.198	-0.597	1.396	5.145	-0.135	-0.566
2	7.418	5.874	-0.002	-0.275	2.757	5.440	0.026	-0.265
3	8.658	5.937	0.137	-0.049	6.607	5.820	0.140	-0.050
4	8.687	5.939	0.252	0.139	9.658	5.985	0.236	0.130
5	10.229	6.010	0.356	0.309	13.958	6.145	0.324	0.295
6	20.000	6.301	0.455	0.497	20.000	6.301	0.410	0.456
\bar{N}, \bar{x}	16.37 × 10 ⁵		6.214		17.77 × 10 ⁵		6.249	
σ			0.620				0.819	
	従来の方法 $\bar{x}_0=5.87$				5.70			

表-4

偏心率	方法	S-N 曲線	200 万回疲労強度
0	A	$\log N = 20.3 - 0.239 S$	58.6
	B	$\log N = 24.4 - 0.303 S$	59.8
2.5 cm	A	$\log N = 25.0 - 0.248 S$	75.5
	B	$\log N = 32.2 - 0.335 S$	77.4

A: 200 万回で破壊しない供試体を取り除く方法
B: 著者らの提案する方法

—4 と 図—1 のようになり、200 万回強度は、 $e=0$ では 2.0%， $e=2.5$ では 2.5% の差を生じた。表—3 で得た \bar{x} と σ を式 (3.1) へ代入して、近似確率曲線（補間曲線）による確率を求めて F_i' として、プロット位置 $F_i=i/(n+2)$ との偏差 ε を求めて表—5 に示す。 ε は近似曲線の精度を示すものである。

(2) ワイブル分布の場合

$e=0$ の場合についてワイブル分布のあてはめの精度を検討するために、 $n=10$, $r=5$ ($m=5$) として $\alpha, \zeta, \theta, q, M, N$ の値を計算して表—6 に示す。

ワイブル分布の x_i を、 $x_i=10^{-5} N_i$ として関係式に代入すると、 $1.3 \geq \alpha \geq 0.8$ の区間においては、式 (3.9) の相対誤差は非常にゆるやかな変化しか示さない（表—7 参照）。誤差 ρ をさらに 0 に近づけるには、 $\alpha > 1.3$ とすればよいと推定される。しかし、 μ は破壊強度の下限值という特

性値であることから、 $\mu < N_i$ でなければ意味がない。よって、 $\alpha=1.3$ としても精度は低いことがわかる。

他方、 $x_i=\log_{10} N_i$ として対数変換して関係式に代入すると、表—7 の右欄に示すように $\rho=0$ の点が精度よく求められることがわかる。補間法によって、 $\alpha=0.21$ を得る。表—8 は、 $x_i=10^{-5} N_i$ の場合と $x_i=\log_{10} N_i$ の場合との ε を表—5 と同じ方式で比較したものである。表—5 と表—8 の結果を通して、対数変換してワイ

表—7 ワイブル分布による場合

	$x_i=N_i \times 10^{-5}$			$x_i=\log_{10} N_i$	
	α	μ	β	$d_1=\beta M+\mu N$	$d_2=\Sigma qx$
α	1.3	1.0	0.8	0.2	0.3
μ	2.953×10^5	1.552×10^5	0.042×10^5	4.488	4.950
β	23.486×10^5	22.313×10^5	22.245×10^5	1.841	1.323
$d_1=\beta M+\mu N$	-13.876×10^5	-18.070×10^5	-21.839×10^5	-31.182	-26.672
$d_2=\Sigma qx$	-13.667×10^5	-17.779×10^5	-21.494×10^5	-31.159	-26.889
$\rho=(d_2-d_1)/d_1$	0.015	0.016	0.016	0.001	-0.008

表—8 ワイブル分布 $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (F_i' - F)^2}$

	$x_i=10^{-5} N_i$		$x_i=\log_{10} N_i$		$F_i=i/n+2$
	α	μ	β	ρ	
α	1.3	0.21			
μ	2.953×10^5	4.534			
β	23.49×10^5	1.789			
i	$x_i=N_i(10^5)$	F_i'	$x_i=\log_{10} N_i$	F_i'	
1	3.219	0.0314	5.508	0.0780	0.0833
2	7.418	0.2457	5.874	0.2204	0.1667
3	8.658	0.2859	5.937	0.2697	0.2500
4	8.687	0.2868	5.939	0.2713	0.3333
5	10.229	0.3337	6.010	0.3298	0.4167
6	20.000	0.5423	6.301	0.6095	0.5000
ε		0.0592		0.0044	
\bar{x}	30.35×10^5		14.89×10^5		
\bar{x}	17.54×10^5		15.55×10^5		

表—5 対数正規分布 $\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{6} \sum_{i=1}^6 (F_i' - F_i)^2}$

i	$e=0, n=10$		$e=2.5, n=9$	
	F_i'	$F_i=i/n+2$	F_i'	$F_i=i/n+2$
1	0.1274	0.0833	0.0880	0.0909
2	0.2917	0.1667	0.1626	0.1818
3	0.3275	0.2500	0.3027	0.2727
4	0.3287	0.3333	0.3746	0.3636
5	0.3711	0.4167	0.4511	0.4546
6	0.5558	0.5000	0.6610	0.5455
ε	0.0693		0.0496	

表—6 $n=10, r=5$ の場合の ζ, θ, q, M, N と α

α	i	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3
		ζ	1	-4.730	-2.641	-1.957	-1.623	-1.429	-1.306	-1.222	-1.162	-1.119	-1.088	-1.065
	2	-2.009	-1.193	-0.936	-0.820	-0.760	-0.729	-0.713	-0.708	-0.710	-0.716	-0.726	-0.734	-0.752
	3	-0.229	-0.187	-0.184	-0.193	-0.206	-0.222	-0.240	-0.261	-0.282	-0.305	-0.329	-0.351	-0.379
	4	1.166	0.633	0.453	0.361	0.303	0.262	0.229	0.202	0.178	0.155	0.133	0.113	0.090
	5	2.359	1.357	1.034	0.881	0.797	0.746	0.715	0.695	0.623	0.676	0.673	0.762	0.673
	6	3.442	2.032	1.590	1.393	1.296	1.249	1.232	1.234	1.251	1.278	1.323	1.352	1.403
θ	1	4.366	2.259	1.555	1.203	0.991	0.850	0.748	0.672	0.612	0.565	0.525	0.491	0.465
	2	1.951	1.112	0.831	0.690	0.605	0.548	0.506	0.475	0.449	0.429	0.411	0.395	0.383
	3	0.370	0.315	0.298	0.290	0.285	0.283	0.281	0.280	0.279	0.278	0.277	0.276	0.276
	4	-0.868	-0.335	-0.155	-0.064	-0.008	0.030	0.057	0.079	0.096	0.110	0.122	0.132	0.141
	5	-1.928	-0.908	-0.567	-0.396	-0.293	-0.224	-0.174	-0.135	-0.105	-0.081	-0.060	-0.042	-0.027
	6	-2.890	-1.443	-0.962	-0.723	-0.581	-0.487	-0.420	-0.370	-0.331	-0.301	-0.276	-0.254	-0.237
q	1	-1.913	-1.498	-1.174	-0.919	-0.610	-0.564	-0.442	-0.346	-0.271	-0.212	-0.166	-0.130	-0.102
	2	-1.436	-1.211	-1.021	-0.862	-0.727	-0.613	-0.517	-0.436	-0.368	-0.310	-0.262	-0.221	-0.186
	3	-1.010	-0.971	-0.857	-0.757	-0.668	-0.590	-0.521	-0.460	-0.406	-0.358	-0.316	-0.279	-0.247
	4	-0.825	-0.754	-0.689	-0.629	-0.575	-0.525	-0.480	-0.438	-0.401	-0.366	-0.334	-0.306	-0.279
	5	-0.581	-0.546	-0.513	-0.483	-0.454	-0.427	-0.401	-0.377	-0.354	-0.333	-0.313	-0.294	-0.277
	6	-0.353	-0.341	-0.328	-0.317	-0.305	-0.294	-0.284	-0.273	-0.264	-0.254	-0.245	-0.236	-0.228
M		-5.321	-3.966	-3.013	-2.331	-1.834	-1.467	-1.189	-0.977	-0.812	-0.682	-0.578	-0.494	-0.425
N		-6.207	-5.321	-4.583	-3.966	-3.449	-3.013	-2.644	-2.331	-2.064	-1.834	-1.637	-1.467	-1.319

ブル分布をあてはめるのがきわめのよい精度を与えることがわかる。

ワイブル分布の場合の平均値 \bar{x} とメジアン \tilde{x} とは、つぎのような関係式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \mu + \beta \Gamma(1 + \alpha) \\ \tilde{x} &= \mu + \beta (\log 2)^\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

表—8 に示した α, β, μ をそれぞれ、式 (4.1) へ代入して \bar{x} と \tilde{x} を求めて 表—8 に示す。対数変換したものに対しては結果を逆変換して示す。 $x_i = 10^5 N_i$ の場合については、平均値もメジアンも大きな差を生じ、対数正規分布の平均値とメジアンが近くなる。対数変換した場合は、平均値とメジアンが近づき、対数正規分布による平均値とも、ほぼ一致する。このような点からも、この例では、対数変換の後にワイブル分布を適用する方が、より信頼性の高い結果を得ることが期待されよう。

5. む す び

コンクリートのように疲労限度の存在が認められない

と考えられている材料に対して、規定回数（一般には200万回）で破壊しないデータも含めて統計的に解析する方法を示した。このような解析方法は、従来の疲労関係の文献では触れられていなくて、データの解析に若干の矛盾をもたらしていた。特に非破壊供試体の多い場合には、かなりの差が現われる。

著者らのデータ解析法が多少でも役立てば、幸いである。

参 考 文 献

- 1) Blom, G.: On Linear Estimates with Nearly Minimum Variance, Arkiv för Matematik, Band 3, Nr. 37, 1954, Sweden
- 2) 阿部俊一：中途打ち切りデータによる寿命推定の新しい方法，国鉄技術研究所報告，581（車両篇第170号），昭和42.4.28，pp. 1-117
- 3) Gumbel, E.J.: Statistics of Extremes, Columbia U.P. 1958
- 4) 浜田・成岡：軽量コンクリートの圧縮疲労強度に関する一実験，土木学会論文報告集，第176号，昭和45年4月，pp. 83-88

(1970.5.4・受付)