

# 土の降伏条件に関する一試案とその考察

## A PROPOSAL OF NEW YIELD CRITERION FOR SOILS

佐 武 正 雄\*  
By Masao Satake

### 1. ま え が き

土の降伏条件については、古くから多くの研究者によって実験や理論による研究がなされてきた<sup>1)</sup>。現在考えられている降伏条件式を、簡単のため粘着力のない場合についてあげれば、次の三つである。

(a) Mohr-Coulomb の条件

$$\max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sigma_1 + \sigma_2}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{\sigma_2 + \sigma_3}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{\sigma_3 + \sigma_1}\right) = k_a (= \sin \varphi_a) \dots\dots\dots(1.1)$$

または、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  として

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} = k_a \dots\dots\dots(1.1)'$$

(b) 拡張 Tresca の条件

$$\max\left(\frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}, \frac{|\sigma_2 - \sigma_3|}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}, \frac{|\sigma_3 - \sigma_1|}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}\right) = k_b \left(= \frac{2}{3} \sin \varphi_b\right) \dots\dots\dots(1.2)$$

または、 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$  として

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = k_b \dots\dots\dots(1.2)'$$

(c) 拡張 von Mises の条件

$$\frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = k_c \left(= \frac{2}{3} \sqrt{2} \sin \varphi_c\right) \dots\dots\dots(1.3)$$

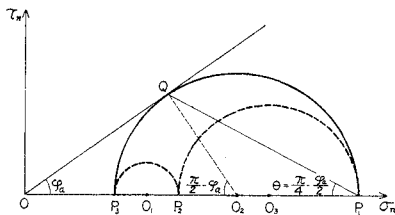


図-1

ここに、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  は三つの主応力で圧縮を正とし、 $k_a, \varphi_a$  等は材料固有の定数とする。

(a) の条件は、周知のように  $\sigma_n - \tau_n$  平面に三つの応力円を画き (図-1,  $\overline{OP}_1 = \sigma_1, \overline{OP}_2 = \sigma_2, \overline{OP}_3 = \sigma_3$ ), その最外側の (最大半径の) 円に原点から接線を引き、その傾き  $\varphi$  が限界値  $\varphi_a$  に達したとき降伏が起こるとするものであり、これは

$$\max \frac{\tau_n}{\sigma_n} = \tan \varphi \dots\dots\dots(1.4)$$

によって示される最大の摩擦係数が、限界値  $\tan \varphi_a$  に達するとすべりが生じ降伏が起こるという Coulomb の法則に基づいている (図-1 において限界の  $\tau_n/\sigma_n$  は Q 点に対応し、すべり面は主軸 I と  $\theta = \pm\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_a}{2}\right)$  の角度となすとされている)。(b) の条件は、図-2 において

$$\overline{OO'} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \dots\dots\dots(1.5)$$

とし ( $O'$  は  $\overline{P_i O_i}$  を 2:1 に内分する),  $\overline{OO_2'} = \overline{O'O_2}$  となるようにとった  $O_2'$  点から、(a) の場合と同様、円  $O_2$  に引いた接線の傾き  $\varphi_2$  が限界値  $\varphi_b$  に達すると降伏が起こるとするものである。また、(c) の条件は、同様に  $\overline{OO_i'} = \overline{O'O_i}$  として、 $O_i'$  点から円  $O_i$  に引いた三つの接線の傾き  $\varphi_i$  について

$$\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_3 = 2 \sin^2 \varphi_c \dots\dots\dots(1.6)$$

を降伏条件とするものである。注目すべきことは、(a) では中間主応力の影響が無視されているが、(b), (c) においてはこれが加味され、さらに (c) の条件式は応力テ

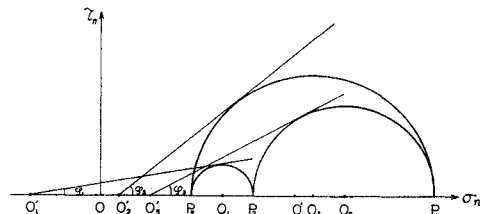


図-2

\* 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

ソルの不変量についての簡単な表現となっていることである(2. で説明)。

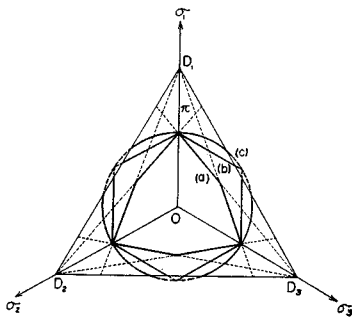
以上の3条件を主応力  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を座標軸とする3次元空間で考察すれば、降伏条件を表わす降伏曲面は、いずれも

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 \dots \dots \dots (1.7)$$

で示される直線  $\rho$  を軸線とし、原点を頂点とする錐面内で、(a), (b) は6角錐、(c) は円錐となる。 $\rho$  に直交する平面  $\pi$  は  $p$  をパラメーターとして

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p \dots \dots \dots (1.8)$$

と示され、上記3錐面の  $\pi$  による切り口は 図-3 に示すように、(a) 正3角形に近い6角形、(b) 正6角形、(c) 円となっている\*。



(a) Mohr-Coulomb  
(b) 拡張 Tresca  
(c) 拡張 von Mises

図-3

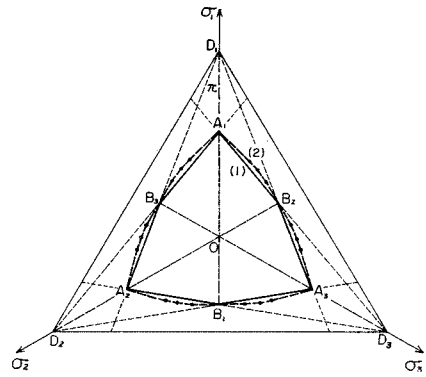
さて、3軸試験の圧縮 ( $\sigma_2 = \sigma_3$ ) および引張 ( $\sigma_2 = \sigma_1$ ) の場合の実験結果を有効応力について考察すると、図-1 に示した Mohr-Coulomb の条件がよく適合することが知られており、中間主応力の影響を考慮した (b), (c) の条件は適当でないことが示されている<sup>2)</sup> (しかし、このことについては Roscoe<sup>3)</sup> などの異論もある)。一方、塑性理論を展開するためには (c) の拡張 von Mises の条件が最も便利で合理性があり、Drucker と Prager<sup>4)</sup> や山口教授<sup>5)</sup> らによって応用されている。また、星埜教授<sup>6)</sup> の理論による降伏条件式も (c) と考えることができる。さらに最近、3軸試験における中間主応力の影響に関する研究が進み、Kirkpatrick<sup>7)</sup>, Wu<sup>8)</sup> は内外圧を変えられることのできる中空円筒供試体による3軸試験を行な

\* 図-3 は、3軸試験の圧縮の場合の条件が同一となるように画いてある。したがって、この場合

$$k_a = \frac{3k_b}{2+k_b} = \frac{3k_c}{2\sqrt{2}+k_c}$$

$$\sin \varphi_a = \frac{3 \sin \varphi_b}{3 + \sin \varphi_b} = \frac{3 \sin \varphi_c}{3 + \sin \varphi_c}$$

である。Bishop<sup>9)</sup> は、この図において (b), (c) の場合、主応力が負の領域に入り不合理としているが、 $k_a, k_b, k_c$  の間の関係は上記のものが必ずしも必然ではなく、事実後述する別の関係を仮定すれば、このようなことは起こらない。



(1) Mohr-Coulomb  
(2) 実験結果 (Kirkpatrick<sup>7)</sup> による)

図-4

い、また、柴田教授<sup>9)</sup> は立方体供試体に2方向から軸力を加える3軸試験を行なった。その結果は、材料の種類、実験や解析の方法などによって差異はあるが、一般に 図-4 に示すように、6角形の頂点以外の点ではわずかにふくらみをもち、Mohr-Coulomb の条件からややはずれることが見出された。これは中間主応力の影響の無視できないことを示すものと思われる。

著者は以前から Mohr-Coulomb の条件の意味が式 (1.4) によって明確ではあるが、単なる圧力とせん断力についてでなくテンソル量である応力の成分  $\sigma_n, \tau_n$  について成立することについては若干の疑問を抱いていた。また、後述するように、2次元の場合には (a) と (c) の条件が (b) の条件も全く等価となるのに3次元の場合に等価とならないのは、やはり中間主応力の影響を考慮する必要があり、(c) で考慮されていない3次元特有のテンソルの不変量を加えて (c) を修正した関係式が土の降伏条件として妥当なのではないかと考えてきた。ここに提示する一つの試案は、このような考えに立脚し2次元の場合の類推から導いたもので、上述の実験結果の傾向ともよく合致するものである。その合理性については、なお多くの検討の余地があると思われるが、この条件式から導いたひずみ速度場や特性方向などについての若干の考察を 3. に述べている。

## 2. 拡張 von Mises の条件の修正式の誘導

まず、2次元の場合の考察から始める。2次元に直した Mohr-Coulomb の条件は、図-5 ( $\overline{OP}_1 = \sigma_1, \overline{OP}_2 = \sigma_2$ ) に示すように、

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \frac{\overline{O'Q}}{\overline{OO'}} = \sin \varphi_0 \dots \dots \dots (2.1)$$

となる。2次元の場合、1. に説明した解釈にしたがえば、他の2条件 (b), (c) も式 (2.1) と全く同一式となるが、いま式 (2.1) の条件に次のような別の幾何学的表

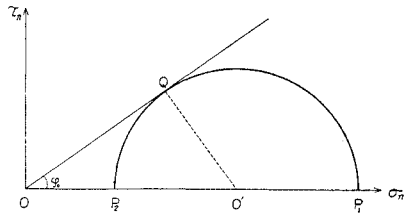


図-5

現を与えることを考える<sup>10)</sup>。

応力テンソル  $\sigma$  は, symbolic 表現によって

$$\sigma = pI + \sigma_D \dots\dots\dots(2.2)$$

$$p = \frac{1}{2} \text{tr } \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \dots\dots\dots(2.3)*$$

と分解され ( $I$  は単位テンソル),  $p$  は平均応力と呼ばれるスカラー不変量,  $\sigma_D$  は偏差応力と呼ばれそのトレースが 0 のテンソルである。 $p$  は体積変化に,  $\sigma_D$  は形状変化にそれぞれ対応している。また,  $\sigma_D$  について複内積\*\*をつくれれば,

$$\sigma_D \cdot \sigma_D = (\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 \dots\dots\dots(2.4)$$

となり, これは形状変化の弾性ひずみエネルギーに対応し, この値がある限界値に達すると降伏が起こるとするのが周知の von Mises の条件 (拡張でない) である。式 (2.4) を

$$\sigma_D \cdot \sigma_D = 2J_2 \dots\dots\dots(2.5)$$

とおけば,  $J_2$  は  $\sigma_D$  の (したがって  $\sigma$  の第 2 の) スカラー不変量であり,  $\sigma_D$  の 2 個の主応力 (偏差主応力) を

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - p = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - p = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} (= -\sigma_1') \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

とおけば,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2) = -\sigma_1' \sigma_2' \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 \dots\dots\dots(2.7) \end{aligned}$$

である。 $J_2$  を用いれば, 式 (2.4) は

$$(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 = 2J_2 \dots\dots\dots(2.8)$$

となり, 二つの不変量  $p, J_2$  をパラメーターと考えれば, これは  $\sigma_1 - \sigma_2$  平面で  $P(p, p)$  を中心とし  $R = \sqrt{2J_2}$  を半径とする円を示す。この円の中心  $P$  は, 図-6 に示すように, 原点から  $\sqrt{2} p$  の距離にあり, 原

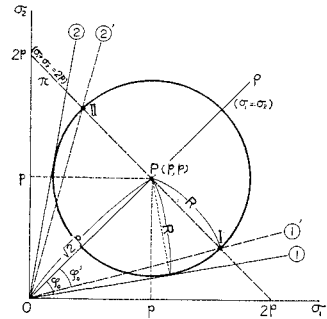


図-6

点から二つの接線を引けば (これは 2 次元的円錐面), その中心角 (接線と中心線  $p$  とのなす角度)  $\varphi$  が限界値  $\varphi_0$  に達することが式 (2.1) の条件と同等であることは明らかである。なぜなら

$$\sin \varphi = \frac{R}{OP} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} (\sigma_1 - \sigma_2)}{\sqrt{2} p} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \dots\dots(2.9)$$

したがって, 式 (2.1) の条件は,  $p$  をパラメーターとして

$$(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 = 2p^2 \sin^2 \varphi_0 \dots\dots\dots(2.10)$$

と記すことができる。ここで注意すべきことは,  $\varphi = \varphi_0$  の場合, 式 (2.10) を満足するすべての  $\sigma_1, \sigma_2$  が, すなわち 図-6 の円上のすべての点が降伏に達するのではないことである。 $\sigma_1, \sigma_2$  の間には式 (2.3) の従属関係があるので, 降伏に達するのはこの関係を満足する, すなわち 図-6 の直線  $\pi$  上にある, 円周上の 2 点 I, II だけである。したがって, 実際の降伏限界線は, 図-6 における ①, ② ではなく ①', ②' であり, その中心角は

$$\varphi_0' = \tan^{-1} (\sin \varphi_0) \dots\dots\dots(2.11)$$

となっている。このように,  $p$  を任意のパラメーターとして式 (2.10) を降伏条件と考える場合は, 式 (2.3) も連立させて考えなければならない。式 (2.10) を  $p$  と  $J_2$  との関係式として書き直せば,

$$\sqrt{J_2} = p \sin \varphi_0 \dots\dots\dots(2.12)$$

が降伏条件となる。

さて, 以上 2 次元の場合について行なった考察を, 3 次元の場合に移行させれば次のようになる。まず, 式 (2.2), (2.3) は

$$\sigma = pI + \sigma_D \dots\dots\dots(2.2)$$

$$p = \frac{1}{3} \text{tr } \sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} \dots\dots\dots(2.13)$$

となり (ただし  $I$  は 3 次元の単位テンソル),  $p, \sigma_D$  についての性質は前と同じである。式 (2.4) は

$$\sigma_D \cdot \sigma_D = (\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2 \dots\dots\dots(2.14)$$

となり, 前と同様, 式 (2.5) によってスカラー不変量  $J_2$  を定義すれば,  $\sigma_D$  の 3 個の主応力

\*  $\text{tr } \sigma$  は  $\sigma$  の対角線成分の和で,  $\sigma$  のトレースと呼ばれるスカラー不変量である。下の複内積を用いれば,

$$\text{tr } \sigma = \sigma \cdot I$$

と記すこともできる。

\*\* 二つのテンソル  $\alpha = (\alpha_{ij}), \beta = (\beta_{ij})$  に対し, その複内積は

$$\alpha \cdot \beta = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \beta_{ij}$$

ただし  $n$  は次元数, と定義され, 座標のとり方に関係しないスカラーとなる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - p = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - p = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{3} \\ \sigma_3' &= \sigma_3 - p = \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.15)$$

により,

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = -\sigma_1'\sigma_2' - \sigma_2'\sigma_3' - \sigma_3'\sigma_1' \\ &= \frac{1}{6} \{ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \} \end{aligned} \quad (2.16)$$

と書くことができる\*。式 (2.8) は

$$(\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2 = 2J_2 \dots\dots(2.17)$$

となり, これは  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  を座標軸とする 3 次元空間で,  $P(p, p, p)$  を中心とし  $R = \sqrt{2J_2}$  を半径とする球を示す。図-7 に示すように, この球の中心  $P$  は原点から  $\sqrt{3}p$  の距離にあるので, 式 (2.10) にならい

$$\begin{aligned} (\sigma_1 - p)^2 + (\sigma_2 - p)^2 + (\sigma_3 - p)^2 &= 3p^2 \sin^2 \varphi_0 \\ \dots\dots\dots(2.18) \end{aligned}$$

を降伏条件と考えれば, その幾何学的解釈は, 原点を頂点とし, 式 (1.7) で示される直線  $\rho$  を軸線,  $\varphi_0$  を中心角 (錐面の母線と軸線とのなす角度) とする円錐面に式 (2.17) で示される球が接するようになることが降伏条件と考えることができる (図-7 参照)。ただしこの場合も 2 次元の場合と同様,  $p$  を任意のパラメーターとして式 (2.18) を満足するすべての  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  が, すなわち 図-7 に示す球面上のすべての点が, 降伏状態にあるのではない。 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の間には式 (2.13) に示す従属関係があるので, 図-7 における平面  $\pi$  (式 (2.13) で示される) と球面との交線 (これは半径

$$R = \sqrt{3} p \sin \varphi_0 \dots\dots\dots(2.19)$$

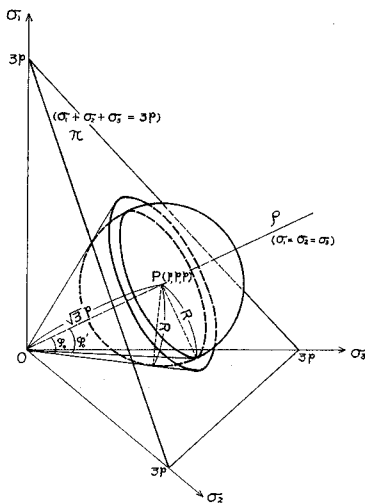


図-7

\*  $\tau_m = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$  は 8 面体せん断応力と呼ばれている。

の円周となる) 上の点だけが降伏状態にあるのである。したがって, 実際の降伏曲面は  $\rho$  を軸線とし,  $\varphi_0' = \tan^{-1}(\sin \varphi_0)$  を中心角とする円錐面となることに注意する。式 (2.18) は  $J_2$  を用いれば,

$$\sqrt{2J_2} = \sqrt{3} p \sin \varphi_0 \dots\dots\dots(2.20)$$

となり, 応力テンソル  $\sigma$  の二つの不変量  $p, \sqrt{J_2}$  の間の単純な比例関係を示す式である。式 (2.13), (2.16) によって書きあらためれば,

$$\frac{\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}}{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3} = \sin \varphi_0 \dots\dots(2.21)$$

となり, (c) の拡張 von Mises の条件式 (1.3) において  $k_c = \sin \varphi_0$  としたものにほかならない。

以上のように, 2 次元の場合から類推すれば,  $\pi$ -平面の降伏曲線は式 (2.19) で示される円となるが, ここで  $\pi$ -平面上の降伏曲線をさらに一般的に考察するため, 図-8 に示すような  $x$ - $y$  座標を導入する。この場合, 原点  $P$  は  $\rho$  との交点,  $y$  軸は  $\sigma_1$  軸の投影で, 図の  $D_i$  はそれぞれ  $\sigma_i$  軸との交点である。 $\pi$ -平面上にある  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  の値とこの  $x$ - $y$  座標との関係は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - p = \sqrt{\frac{2}{3}} y \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - p = -\frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{6}} y \\ \sigma_3' &= \sigma_3 - p = \frac{1}{\sqrt{2}} x - \frac{1}{\sqrt{6}} y \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.22)$$

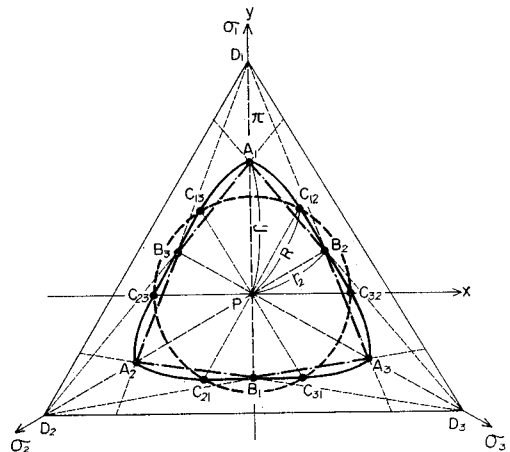
となるので, たとえば式 (1.1) の条件の一つ

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} = \sin \varphi_a$$

は,  $\pi$ -平面上では

$$\frac{1 + \sin \varphi_a}{\sqrt{2}} x + \frac{3 - \sin \varphi_a}{\sqrt{6}} y - 2p \sin \varphi_a = 0$$

(図-8 に示す直線  $A_1 B_2$ ) となり, (a) の Mohr-Coulomb の条件の限界線は 6 角形  $A_1 B_2 A_3 B_1 A_2 B_3$  に



—— 本論文の提案式  
 - - - 2次元の場合の類推から得られる拡張 von Mises  
 - - - Mohr-Coulomb

図-8

よって示されることがわかる。この6角形の頂点は原点から

$$\left. \begin{aligned} A_i: r_1 &= \frac{2\sqrt{6} p \sin \varphi_a}{3 - \sin \varphi_a}, \\ B_i: r_2 &= \frac{2\sqrt{6} p \sin \varphi_a}{3 + \sin \varphi_a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.23)$$

の距離にある。ここで、この限界線を先に求めた式(2.19)の円と比較するために、 $\varphi_a$ と $\varphi_0$ との対応を定めなければならないが、Mohr-Coulombの条件が、3軸試験の圧縮、引張いずれの場合にも実験値とよく適合することを考え、 $\varphi_a$ と $\varphi_0$ との対応を式(1.3)の $\varphi_c$ と式(2.21)と式(2.21)の $\varphi_0$ との対応と同一になるようにするのが最も適当であろう。このことは式(1.6)によって、3軸試験の圧縮( $\sigma_2 = \sigma_3$ )と引張( $\sigma_2 = \sigma_1$ )のいずれの場合にも同一の $\varphi_2 = \varphi_c$ を与えられるが、この $\varphi_2$ を $\varphi_a$ と等置したと同等である。こうして

$$\sin \varphi_a = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \varphi_0 \dots\dots\dots (2.24)$$

を得るが、この結果、式(2.23)は

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{\sqrt{3} p \sin \varphi_0}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \varphi_0} = \frac{R}{1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \varphi_0}, \\ r_2 &= \frac{\sqrt{3} p \sin \varphi_0}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \varphi_0} = \frac{R}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \varphi_0} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.25)$$

と書き直すことができる。この場合、Mohr-Coulombの6角形の3頂点 $A_i$ は式(2.19)の拡張 von Misesの円の外側に、他の3頂点 $B_i$ は内側にあることがわかる。

以上の考察から、降伏限界曲線として最も妥当なものは、Mohr-Coulombの6角形の頂点を通り、しかも、その他の点では図-4の実験結果の傾向に合致するように、式(2.19)の円を修正したものと考えられる。いま、 $\pi$ -平面に極座標 $r, \theta$ (ただし、 $\theta$ は $x$ 軸から時計と反対廻りにはかる)を導入すれば、式(2.25)から、上記の条件を満足する最も単純なものとして、

$$r = \frac{\sqrt{3} p \sin \varphi_0}{1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \sin \varphi_0 \sin 3\theta} \dots\dots\dots (2.26)$$

が得られ、これを降伏限界曲線と考えるのが適当であろう。ここで、式(2.22)も極座標に書きあらためれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sqrt{\frac{2}{3}} r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right), \\ \sigma_2' &= \sqrt{\frac{2}{3}} r \cos\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right), \\ \sigma_3' &= \sqrt{\frac{2}{3}} r \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.27)$$

となるが、 $\frac{\pi}{2}, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}$ は図-8において、それぞれ、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ 軸の投影が $x$ 軸となす角度であることに注意する。 $\sigma_D$ について、2次元では考えることができないが3次元の場合に始めて考えることのできる $\sigma_D$ の

(したがって $\sigma$ の第3の)スカラー不変量

$$\begin{aligned} J_3 &= \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' \\ &= \frac{1}{27} (2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3) (2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1) (2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2) \end{aligned} \dots\dots\dots (2.28)$$

を導入すれば、式(2.27)より

$$\begin{aligned} J_3 &= \left(\sqrt{\frac{2}{3}} r\right)^3 \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\theta + \frac{5}{6}\pi\right) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3}} r^3 \sin 3\theta \dots\dots\dots (2.29) \end{aligned}$$

を得るが、同様に式(2.16)から

$$J_2 = \frac{1}{2} r^2 \dots\dots\dots (2.30)$$

を得るので、

$$\frac{J_3}{J_2} = -\frac{1}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} r \sin 3\theta \dots\dots\dots (2.31)$$

また、

$$\left. \begin{aligned} r &= \sqrt{2J_2}, \\ \sin 3\theta &= -\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.32)$$

などを得る。式(2.32)を用いて式(2.26)を書きあらためれば、

$$\sqrt{2J_2} = \frac{\sqrt{3} p \sin \varphi_0}{1 - \frac{3}{4} \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \sin \varphi_0}$$

すなわち、

$$\boxed{\sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \sin \varphi_0 \left(p + \frac{3}{4} \cdot \frac{J_3}{J_2}\right)} \dots\dots\dots (2.33)$$

が得られる。

式(2.33)は、式(2.20)を3次元特有の不変量 $J_3$ によって単純に修正したもので、しかも図-8に示すように、Mohr-Coulombの6角形に外接し、実験結果の傾向ともよく適合する条件を与え、粘着力のない場合の土の降伏条件として妥当なものではないかと考えられる。式(2.33)は、一つの偏差主応力が0となる場合は

$$J_3 = 0, \sin 3\theta = 0 \dots\dots\dots (2.34)$$

となって、右辺の付加項がなくなり式(2.20)と一致するが、これは図-8の $C_{ij}$ 点( $\sigma_i > \sigma_k > \sigma_j, \sigma_k = 1/2(\sigma_i + \sigma_j)$ 、ただし $i, j, k$ は1, 2, 3の任意の順列)に対応している。

### 3. 考 察

前章で導いた降伏条件式(2.33)は、2次元の場合の式(2.12)から類推した3次元の場合の式(2.20)(拡張 von Misesの条件)を修正したものであるが、付加項 $3/4 \cdot J_3/J_2$ は3次元の場合に始めて考えられる量であるから、2次元の場合に存在しないのは当然である。以下、従来拡張 von Misesの条件に対して行なわれている塑

性理論の考察<sup>1),5)</sup>が、本論の式(2.33)の場合、いかに修正されるか、上記の付加項の影響を中心に述べることにする。

(1) 応力の特性方向

一般に3次元問題では特性方向は曲面群となるが、解析を容易にするため、2次元問題に直して特性方向の考察を行なう。

中間主応力を  $\sigma_2$ , すなわち

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \dots\dots\dots(3.1)$$

とし、 $\sigma_2$  に対応する主軸 II は固定して、これに垂直な平面(主軸 I, III を含む)内で2次元的応力

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.2)$$

ただし、

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma' & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(3.3)$$

を考察する。 $\sigma'$  の二つの不変量を  $p', J_2'$  とすれば、式(2.3), (2.7) より、

$$p' = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3) = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \dots\dots\dots(3.4)$$

$$\sqrt{J_2'} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \dots\dots\dots(3.5)$$

であるから、 $\alpha$  を一つのパラメーターとして次のようにおくことができる\*。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 &= p' + \sqrt{J_2'} \\ \sigma_2 &= p' + \sqrt{J_2'} \cos \alpha, \\ \sigma_3 &= p' - \sqrt{J_2'} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

ゆえに、式(2.13)の  $p$ , および式(2.15)の偏差主応力はそれぞれ

$$p = p' + \frac{1}{3} \sqrt{J_2'} \cos \alpha \dots\dots\dots(3.7)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1' &= \sigma_1 - p = \sqrt{J_2'} \left(1 - \frac{1}{3} \cos \alpha\right) \\ \sigma_2' &= \sigma_2 - p = \sqrt{J_2'} \frac{2}{3} \cos \alpha, \\ \sigma_3' &= \sigma_3 - p = \sqrt{J_2'} \left(-1 - \frac{1}{3} \cos \alpha\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

となり、式(2.16), (2.28)より、 $\sigma_D$  の二つの不変量  $J_2, J_3$  は

$$J_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2 + \sigma_3'^2) = J_2' \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right) \dots\dots\dots(3.9)$$

$$J_3 = \sigma_1' \sigma_2' \sigma_3' = -\frac{2}{3} J_2'^{\frac{3}{2}} \cos \alpha \left(1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha\right) \dots\dots\dots(3.10)$$

\*  $\cos \alpha = \frac{2\sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_3}$  は Lode のパラメーターと呼ばれている。

また、

$$\frac{J_3}{J_2} = -\frac{2}{3} \sqrt{J_2'} \cos \alpha \frac{1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha}{1 + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha} \dots\dots\dots(3.11)$$

と記すことができる。

これらの諸式を式(2.33)に代入すれば、式(2.33)は  $p', J_2'$  に関する次の関係式に書き改めることができる。

$$\sqrt{J_2'} = p' \sin \varphi_0' \dots\dots\dots(3.12)$$

ただし、

$$\sin \varphi_0' = \frac{\sqrt{3} \sin \varphi_0}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right) + \frac{\sqrt{3}}{6} \frac{\cos \alpha \sin^2 \alpha}{1 + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha}} \sin \varphi_0} \dots\dots\dots(3.13)$$

式(3.12)は式(2.12)と全く同形であるが、式(3.13)に示すように3次元的応力状態( $\alpha$ がそのパラメーター)が異なると  $\varphi_0'$  は変化することに注意する\*。たとえば、

i)  $\alpha=0$  または  $2\pi$  ( $\sigma_2=\sigma_1$  または  $\sigma_2=\sigma_3$  で軸対称の場合)：

$$\sin \varphi_0' = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \varphi_0 \dots\dots\dots(3.14)$$

ii)  $\alpha=\pi$  ( $\sigma_2 = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_3)$  の場合)：

$$\sin \varphi_0' = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \varphi_0 \dots\dots\dots(3.15)$$

となる。式(2.33)で付加項がない拡張 von Mises の条件式(2.20)の場合にも、同様の計算によって式(3.12)の形を導くことができるが、この場合の  $\varphi_0'$  は式(3.13)の代りに

$$\sin \varphi_0' = \frac{\sqrt{3} \sin \varphi_0}{\sqrt{2 \left(1 + \frac{1}{3} \cos^2 \alpha\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \alpha \sin \varphi_0}} \dots\dots\dots(3.16)$$

となる。式(3.16)によると、ii) の場合は式(3.15)と同一の結果となるが、i) の場合、 $\alpha=0$  と  $\alpha=2\pi$  とで異なった  $\varphi_0'$  の値を与え、実験結果と合致しない。

さて、式(3.12)を

$$\begin{aligned} f &= f(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = f(p', \sqrt{J_2'}) \\ &= \sqrt{J_2'} - p' \sin \varphi_0' = 0 \dots\dots\dots(3.17) \end{aligned}$$

とおいて、この条件の下に、平面ひずみの場合の応力の特性方向を求めよう。物体力を無視すれば、応力成分は Airy 関数  $F$  を用いて、

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots(3.18)$$

\* Bishop<sup>2)</sup> は式(3.13)の代りに、さらに簡単な修正式(本論文の記号に書きあらためれば、 $k$  を定数として)

$$\sin \varphi_0' = \frac{\frac{3}{2\sqrt{2}} \sin \varphi_0}{1 - k \sin \alpha \sin \varphi_0}$$

を提案している。

と表わせるから、式 (3.17) は  $F$  についての 2 階偏微分方程式となり、その特性方向  $dy/dx$  は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_y} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = 0 \dots (3.19)$$

から求められる。 $x$ - $y$  軸を主軸 I, III と一致させ、特性方向が主軸 I と  $\theta$  の角度をなすとすれば、式 (3.19) は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_3} (\tan \theta)^2 + \frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = 0 \dots (3.20)$$

となるが、式 (3.4), (3.5) および (3.17) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} &= \frac{\partial p'}{\partial \sigma_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial p'} + \frac{\partial \sqrt{J_2'}}{\partial \sigma_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2'}} \\ &= \frac{1}{2} (-\sin \varphi_0') - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} (1 + \sin \varphi_0') \end{aligned}$$

同様に

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_1} = \frac{1}{2} (1 - \sin \varphi_0')$$

であるから、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \varphi_0'}{1 + \sin \varphi_0'}} = \pm \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0'}{2} \right) \\ \therefore \theta &= \pm \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_0'}{2} \right) \dots (3.21) \end{aligned}$$

を得る。この結果は、最大の Mohr の応力円が限界線に接する点から得られるすべり面の方向と同一となる (図-1 参照)。

## (2) 塑性ポテンシャルとひずみ速度場

式 (2.33) を

$$f(p, J_2, J_3) = \sqrt{2J_2} - \sqrt{3} \sin \varphi_0 \left( p + \frac{3}{4} \cdot \frac{J_3}{J_2} \right) = 0 \dots (3.22)$$

とおき、この  $f$  を塑性ポテンシャルとして

$$D\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial \sigma} D\lambda \dots (3.23)^*$$

によって、ひずみ速度場

$$\dot{\varepsilon} = \frac{D\varepsilon}{Dt} \dots (3.24)$$

を求めてみよう。

$\sigma$  の 3 個のスカラー不変量を

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3p, \\ I_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 = 3p^2 - J_2, \\ I_3 &= \sigma_1\sigma_2\sigma_3 = p^3 - pJ_2 + J_3 \end{aligned} \right\} \dots (3.25)$$

とおけば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} &= I, \\ \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} &= I_1 I - \sigma, \\ \frac{\partial I_3}{\partial \sigma} &= I_3 \sigma^{-1} \end{aligned} \right\} \dots (3.26)^**$$

\*  $\partial f/\partial \sigma$  は、その  $ij$  成分が  $\partial f/\partial \sigma_{ij}$  で与えられるようなテンソルを示す。

\*\*  $\sigma^{-1}$  は  $\sigma$  の逆テンソルで、 $I_3 \neq 0$  の場合に一意に存在し、 $\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = I$  が成立する。

で、

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= pI + \sigma_D, \\ I_3 \sigma^{-1} &= p^2 I - p \sigma_D + J_3 \sigma_D^{-1}, \\ \sigma_D^{-1} &= -\frac{1}{3} \cdot \frac{J_3}{J_2} I + (\sigma_D^{-1})_D \end{aligned} \right\} \dots (3.27)^*$$

などが成立する。式 (3.25) より

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{1}{3} I_1, \\ J_2 &= 3p^2 - I_2, \\ J_3 &= -p^3 + pJ_2 + I_3 \end{aligned} \right\} \dots (3.28)$$

であるから、式 (3.26), (3.27) を用いれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \sigma} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial I_1}{\partial \sigma} = \frac{1}{3} I, \\ \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} &= 6p \frac{\partial p}{\partial \sigma} - \frac{\partial I_2}{\partial \sigma} = 2pI - (3pI - \sigma) = \sigma_D, \\ \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} &= (-3p^2 + J_2) \frac{\partial p}{\partial \sigma} + p \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial I_3}{\partial \sigma} \\ &= (-3p^2 + J_2) \frac{1}{3} I + p \sigma_D + I_3 \sigma^{-1} = J_3 (\sigma_D^{-1})_D \end{aligned} \right\} \dots (3.29)$$

となる。したがって、一般に

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \sigma} f(p, J_2, J_3) &= \frac{\partial f}{\partial p} \cdot \frac{\partial p}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_2} \cdot \frac{\partial J_2}{\partial \sigma} + \frac{\partial f}{\partial J_3} \cdot \frac{\partial J_3}{\partial \sigma} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\partial f}{\partial p} I + \frac{\partial f}{\partial J_2} \sigma_D + \frac{\partial f}{\partial J_3} \cdot J_3 (\sigma_D^{-1})_D \end{aligned} \dots (3.30)$$

が成立する。ここに、第 2, 第 3 項はいずれも純偏差テンソルとなり、しかも  $\sigma_D^{-1}$  も  $\sigma_D$  と同一主軸を有するから、こうして得られた  $\partial f/\partial \sigma$  は  $\sigma$  と同一主軸をもつものであることがわかる。式 (3.22) の場合は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial p} &= -\sqrt{3} \sin \varphi_0, \\ \frac{\partial f}{\partial J_2} &= \frac{1}{\sqrt{2} J_2} + \frac{3}{4} \sqrt{3} \sin \varphi_0 \frac{J_3}{J_2^2}, \\ \frac{\partial f}{\partial J_3} &= -\frac{3}{4} \sqrt{3} \sin \varphi_0 \frac{1}{J_2} \end{aligned} \right\} \dots (3.31)$$

であるから、式 (3.23), (3.30) より

$$\begin{aligned} D\varepsilon &= \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3} \sin \varphi_0 I + \frac{1}{\sqrt{2} J_2} \sigma_D \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{4} \sqrt{3} \sin \varphi_0 \frac{J_3}{J_2} \left\{ \frac{1}{J_2} \sigma_D - (\sigma_D^{-1})_D \right\} \right] D\lambda \end{aligned} \dots (3.32)$$

が得られる。このひずみ速度場は、前述のように  $\sigma$  と同一の主軸をもっている。さらにわかりやすく

$$D\varepsilon = \frac{1}{3} DeI + D\varepsilon_D \dots (3.33)$$

と分解すれば、 $De = \text{tr} D\varepsilon$  は体積変化を、 $D\varepsilon_D$  は純粋な変形 (せん断変形) を表わし、それぞれ

$$De = -\sqrt{3} \sin \varphi_0 D\lambda \dots (3.34)$$

$$D\varepsilon_D = \left[ \frac{1}{\sqrt{2} J_2} \sigma_D + \frac{3}{4} \sqrt{3} \sin \varphi_0 \frac{J_3}{J_2} \right]$$

\*  $\sigma_D^{-1}$  は  $\sigma_D$  の逆テンソル、 $(\sigma_D^{-1})_D$  はその偏差部分を示す。

$$\cdot \left\{ \frac{1}{J_2} \sigma_D - (\sigma_D^{-1})_D \right\} D \lambda \dots\dots\dots (3.35)$$

と記すことができる。\$D \lambda > 0\$ で圧縮を正としているから、式 (3.34) は体積の膨張を示し、これは土のダイレイタンシーと呼ばれる現象を説明している<sup>4)</sup>。また、上記の計算過程をたどってみれば、付加項 \$3/4 \cdot J\_3/J\_2\$ の影響は、式 (3.32) または (3.35) の \$3/4\$ 以下の項として現われており、ダイレイタンシー \$De\$ は、拡張 von Mises の条件式 (2.20) から出発した場合と差異はない。しかし、式 (3.35) の右辺は \$(\sigma\_D^{-1})\_D\$ を含むので、拡張 von Mises の条件から出発した場合のように、Reuss の関係式 (\$D \epsilon\_D\$ と \$\sigma\_D\$ とが比例する) は成立しないことに注意する。

式 (3.32) のひずみ速度場は、降伏条件式を塑性ポテンシャルとして求めたものであるから、もし、ひずみ速度を降伏曲面上の対応する応力の位置に図示すれば、当然、降伏曲面の法線ベクトルとなっている。このことは、対応する応力の位置における降伏曲面上での応力の任意の変化 \$d\sigma\$ に対し、

$$D \epsilon \dots d \sigma = \frac{\partial f}{\partial \sigma} D \lambda \dots d \sigma = df D \lambda = 0 \dots (3.36)$$

となることから明らかである。式 (3.32) のひずみ速度のもつこの性質から、最大塑性仕事の原理や解の唯一性などが、このひずみ速度場に対して成立することが保証される<sup>11)</sup>。

(3) ひずみ速度場の特性方向

前節で得られたひずみ速度場の特性方向について考察する。解析の容易のため、(1) の応力の場合と同様に、中間主ひずみ速度 \$D \epsilon\_2/D t\$ に対応する主軸 II を固定し、これに垂直な面内で 2 次元的な解析を行なうこととする<sup>12)</sup>。

ひずみ成分は、変位ベクトルの成分 \$u, v\$ により

$$\epsilon_x = -\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad r_{xy} = -\left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (3.37)$$

とおくことができ、ひずみ成分のテンソルとしての性質から

$$\sigma_D^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1'^{-1} \\ \sigma_2'^{-1} \\ \sigma_3'^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_2'}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \left( 1 + \frac{1}{3} \cos \alpha \right) \\ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right) \\ -\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \right) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.46)$$

$$\therefore (\sigma_D^{-1})_D = \frac{1}{\sqrt{J_2'}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos^2 \alpha \\ 1 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \\ -\frac{1}{2} - \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.47)$$

等を得、さらに式 (3.9)、(3.11) を用いることにより、式 (3.32) は

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x + \epsilon_y &= \epsilon_1 + \epsilon_3, \\ \epsilon_x - \epsilon_y &= (\epsilon_1 - \epsilon_3) \cos 2 \theta, \\ r_{xy} &= -(\epsilon_1 - \epsilon_3) \sin 2 \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.38)$$

が成り立つ。ここに、\$\epsilon\_1, \epsilon\_3\$ は二つの主ひずみ (\$\epsilon\_1 > \epsilon\_3\$)、\$\theta\$ は \$x\$ 軸が主軸 I となす角度 (時計廻り正) である。

$$\sin \psi = -\frac{\epsilon_1 + \epsilon_3}{\epsilon_1 - \epsilon_3} \dots\dots\dots (3.39)$$

とおけば、式 (3.37)、(3.38) より、\$u, v\$ に関する連立偏微分方程式

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \cot 2 \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} - \sin \psi \operatorname{cosec} 2 \theta \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.40)$$

が得られ、その特性方向 \$dy/dx\$ は

$$\begin{aligned} (\cot 2 \theta + \sin \psi \operatorname{cosec} 2 \theta) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 + 2 \left( \frac{dy}{dx} \right) \\ - (\cot 2 \theta - \sin \psi \operatorname{cosec} 2 \theta) = 0 \dots\dots\dots (3.41) \end{aligned}$$

で与えられる。\$x\$ 軸と主軸 I とを一致させれば (\$\theta = 0\$)、

$$(1 + \sin \psi) \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 - (1 - \sin \psi) = 0 \dots\dots\dots (3.42)$$

となり、

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{1 - \sin \psi}{1 + \sin \psi}} = \pm \tan \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\psi}{2} \right) \dots\dots\dots (3.43)$$

を得るから、ひずみの特性方向は、主軸 I と \$\pm(\pi/4 - \psi/2)\$ の角度をなす方向であることがわかる。上記の解析は \$D \epsilon\$ についても同様であるから、

$$\sin \psi = -\frac{D \epsilon_1 + D \epsilon_3}{D \epsilon_1 - D \epsilon_3} \dots\dots\dots (3.44)$$

を計算し、\$D \epsilon\$ の特性方向を与える \$\psi\$ を求めることとする。

座標軸を主軸にとれば、テンソルは対角線成分だけとなるから、式 (3.8) は

$$\sigma_D = \begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_3' \end{pmatrix} = \sqrt{J_2'} \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \\ \frac{2}{3} \cos \alpha \\ -1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.45)$$

と略記することができ、同様の略記法により

$$\sigma_D^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1'^{-1} \\ \sigma_2'^{-1} \\ \sigma_3'^{-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{J_2'}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right)} \begin{pmatrix} \cos \alpha \left( 1 + \frac{1}{3} \cos \alpha \right) \\ \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right) \\ -\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{3} \cos \alpha \right) \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.46)$$

$$\therefore (\sigma_D^{-1})_D = \frac{1}{\sqrt{J_2'}} \cdot \frac{1}{\cos \alpha \left( 1 - \frac{1}{9} \cos^2 \alpha \right)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} + \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos^2 \alpha \\ 1 - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha \\ -\frac{1}{2} - \cos \alpha + \frac{1}{6} \cos^2 \alpha \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.47)$$



$$D\varepsilon = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)}} \begin{pmatrix} 1-\frac{1}{3}\cos\alpha \\ \frac{2}{3}\cos\alpha \\ -1-\frac{1}{3}\cos\alpha \end{pmatrix} - \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{\sin\varphi_0}{\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(21+2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-4\cos^3\alpha \\ -3+10\cos^2\alpha+\cos^4\alpha \\ \frac{1}{2}(21+2\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)+4\cos^3\alpha \end{pmatrix} \right] D\lambda \dots\dots\dots(3.48)$$

と記すことができる。したがって

$$D\varepsilon_2 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)}} \cdot \frac{2}{3}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{18} \cdot \frac{\sin\varphi_0}{\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)^2} (-3+10\cos^2\alpha+\cos^4\alpha) \right\} D\lambda \dots\dots\dots(3.49)$$

また、簡単な計算により、

$$\left. \begin{aligned} D\varepsilon_1 + D\varepsilon_3 &= -\sqrt{3}\sin\varphi_0 D\lambda - D\varepsilon_2, \\ D\varepsilon_1 - D\varepsilon_3 &= \left\{ \sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha} \sin\varphi_0 \right\} D\lambda - D\varepsilon_2 \cos\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.50)$$

を得る。

平面ひずみの場合は、

$$D\varepsilon_2 = 0 \dots\dots\dots(3.51)$$

であるから、この場合の $\alpha$ は式(3.49)より

$$\frac{2\sqrt{6}\cos\alpha\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}{-3+10\cos^2\alpha+\cos^4\alpha} = \sin\varphi_0 \dots\dots(3.52)$$

を満足しなければならない。また、特性方向を示す $\psi$ は式(3.44)に式(3.50)を代入することにより、

$$\sin\psi = \frac{\sqrt{3}\sin\varphi_0}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha} \sin\varphi_0} \dots\dots\dots(3.53)$$

で与えられる。式(3.53)は $\varphi_0'$ を与える式(3.13)と全く同一の式であり、式(3.21)、(3.43)を参照すれば、応力とひずみ速度場の両者の特性方向が一致することが証明される。式(3.53)に式(3.52)を代入すれば、平面ひずみの場合の $\alpha$ を用いて、

$$\sin\psi = \frac{2\cos\alpha(3+\cos^2\alpha)}{-3+11\cos^2\alpha} \dots\dots\dots(3.54)$$

と記することもできる。

#### 4. 総 括

(1) 土の降伏条件としては、従来 (a) Mohr-Coulomb, (b) 拡張 Tresca, (c) 拡張 von Mises の3条件が考えられていたが、本論文は実験結果を検討し、次の新しい降伏条件式(簡単のため、粘着力は無視している)

$$\sqrt{2J_2} - \sqrt{3}\sin\varphi_0 \left( p + \frac{3}{4} \cdot \frac{J_3}{J_2} \right) = 0 \dots\dots(4.1)$$

を提案した。ここに、 $p$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  はそれぞれ式(2.13)、(2.16)、(2.28)で定義される応力テンソル $\sigma$ の3個の独立な不変量、 $\varphi_0$ は材料固有の定数である。

(2) 式(4.1)は、2次元の場合の拡張 von Mises

(これは Mohr-Coulomb と一致する)の条件

$$\sqrt{J_2} - p \sin\varphi_0 = 0 \dots\dots\dots(4.2)$$

のもつ幾何学的意味を考察し、3次元の場合に拡張した式

$$\sqrt{2J_2} - \sqrt{3} p \sin\varphi_0 = 0 \dots\dots\dots(4.3)$$

を実験結果に合致するように、3次元特有の不変量 $J_3$ によってさらに修正したものである。

(3) 式(4.1)によると、Mohr-Coulombの条件における限界角 $\varphi_0'$ は中間主応力によって変化し、その影響を示すパラメーター $\alpha$ (式(3.6)で定義)により、

$$\sin\varphi_0' = \frac{\sqrt{3}\sin\varphi_0}{\sqrt{2\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)} + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\cos\alpha\sin^2\alpha}{1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha} \sin\varphi_0} \dots\dots\dots(4.4)$$

と示される。特に、軸対称応力(通常の3軸試験)の場合には( $\alpha=0$ または $2\pi$ )、

$$\sin\varphi_0' = \frac{3}{2\sqrt{2}} \sin\varphi_0 \dots\dots\dots(4.5)$$

となる。

(4) 式(4.1)の左辺を塑性ポテンシャルとして、ひずみ速度場 $D\varepsilon/Dt$ を求めれば、

$$D\varepsilon = \left[ -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\varphi_0 I + \frac{1}{\sqrt{2}J_2}\sigma_D + \frac{3}{4}\sqrt{3}\sin\varphi_0 \frac{J_3}{J_2} \cdot \left\{ \frac{1}{J_2}\sigma_D - (\sigma_D^{-1})_D \right\} \right] D\lambda \dots\dots\dots(4.6)$$

が得られる(添字 $D$ はテンソルの偏差部分を示す)。このひずみ速度場は応力と主軸を共有し、また体積変化(膨張)

$$-De = \sqrt{3}\sin\varphi_0 D\lambda \dots\dots\dots(4.7)$$

を伴うが、これはダイレイタンスーとして知られている現象を説明している。このひずみ速度場は降伏曲面に垂直なベクトルとなるから、最大塑性仕事の原理や解の唯一性などが保証される。

(5) 平面ひずみの状態は、前記のパラメーター $\alpha$ が

$$\frac{2\sqrt{6}\cos\alpha\left(1+\frac{1}{3}\cos^2\alpha\right)^{\frac{3}{2}}}{-3+10\cos^2\alpha+\cos^4\alpha}=\sin\varphi_0 \dots\dots(4.8)$$

を満足する時に生じる。この場合、特性方向（すべり線の方向）は主軸 I と

$$\theta=\pm\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\varphi_0'}{2}\right)\dots\dots\dots(4.9)$$

の角度をなし、応力もひずみ速度も同一の特性方向をもつことが証明される。式 (4.8) の  $\alpha$  を用いれば、この  $\varphi_0'$  は

$$\sin\varphi_0'=\frac{2\cos\alpha(3+\cos^2\alpha)}{-3+11\cos^2\alpha}\dots\dots\dots(4.10)$$

と与えられる。

## 5. あとがき

本論文は、土の降伏条件について、2次元の場合の類推から出発し、最近の中間主応力の影響を検討した実験結果の傾向ともよく適合するような一つの新しい条件式を提案し、これから求められるひずみ速度場について若干の塑性論的考察を行なったものである。土の性質はきわめて複雑なものであり、その降伏条件や塑性理論も、当然、単純な理論のみから解明できるものとは思われないが、ここに提案した条件式がどういう物理的意味をもつか、その妥当性や適用について、さらに検討をすすめて行きたいと考えている。

本論文を草するに当たり、東北大学河上房義教授より全般についてのご教示を頂き、また同柳沢栄司講師より多くの有益な助言や資料の提供を頂いた。ここに、厚く

感謝の意を表する次第である。

## 参 考 文 献

- 1) 例えば、最上武雄(編)：土質力学，技報堂(1969)，492-506，747-758
- 2) Bishop, A.W. : The Strength of Soils as Engineering Materials, Geotech. **16**, No. 2 (1966), 91-130
- 3) Roscoe, K.H., Schofield, A.N. and Thurairajah, A. : An Evaluation of Test Date for Selecting a Yield Criterion for Soils, Laboratory Shear Testing of Soils, ASTM, STP No. 361 (1963), 111-128
- 4) Drucker, D.C. and Prager, W. : Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design, Quart. Appl. Math. **10**, No. 2 (1952), 157-165
- 5) 山口柏樹：塑性流動における速度場の理論，土木学会論文集第 63 号 (1959)，8-16
- 6) 星 堃 和：土の力学における塑性の基本理論と三軸試験への適用，土木学会論文集第 21 号 (1954)
- 7) Kirkpatrick, W.H. : The Condition of Failure for Sands, Proc. 4th. Int. Conf. SMFE 1 (1957), 172-178
- 8) Wu, T.H., Loh, A.K. and Malvern, L.E. : Study of Failure Envelope of Soils, Proc. ASCE **89**, No. SM 1 (1963), 145-181
- 9) Shibata, T. and Karube, D. : Influence of the Variation of the Intermediate Principal Stress on the Mechanical Properties of Normally Consolidated Clays. Proc. 6th Int. Conf. SMFE 1 (1965), 359-363
- 10) 佐武正雄：モールの円の拡張と降伏条件の幾何学的考察，日本材料強度学会誌 **6**, No. 1 (1971)，18-31
- 11) 例えば，吉村慶丸：塑性力学，応用力学講座 4-A，共立出版 (1957)，106-137
- 12) Davis, E.H. : Theories of Plasticity and the Failure of Soil Masses, Soil Mechanics Selected Topics (Edited by Lee I.K.), Butterworth London (1968), 341-380

(1970.10.28・受付)