

ケーソン基礎周辺地盤の応力状態および変形挙動†

BEHAVIOR OF DEFORMATION AND STRESS DISTRIBUTION OF THE SUBGROUND AROUND THE CAISSON TYPE FOUNDATION

多田 浩彦*・山根 哲雄*・大山 峰**・田中 昭博**

By Hirohiko Tada, Tetsuo Yamane, Mine Ōyama and Akihiro Tanaka

1. ま え が き

一般に地盤は、圧縮力に対しては耐力をもつものであるが、引張力に対してはほとんど抵抗しえないものと考えられる。従前の地盤を完全弾性体と仮定した基礎周辺地盤の応力解析では、荷重の大きさまたは方向によって、地盤に相当大きな引張応力領域が発生していた。しかし、地盤は引張抵抗が小さいために、引張応力が発生した領域では、ゆるみのような現象が生じているはずであり、線型弾性解析では地盤のもつこの特性を十分に考慮したことにはならなかった。

本論文は、地盤は圧縮力に対しては弾性的に支えるものであるが、引張力にはほとんど抵抗できないものとして、ケーソン基礎が根入れされた場合の応力解析を行ない、ケーソン基礎周辺地盤の力学的挙動を明らかにしようとするものである。このため解析の基本仮定として、地盤モデルは圧縮主応力方向には弾性挙動するものとするが、引張主応力方向にはまったく引張力は伝達しないものとし、地盤に発生した引張主応力の再配分を行なうものとした。

従来このような異方性的挙動を示す材料からなる構造物の解析は、異方性の方向に対応する 2 つの弾性係数を、反復のたびごとに定める反復計算法によっていた。しかし、この反復計算法では、一般に解の収束性が保証されず、収束してもその収束速度が遅いことが多い¹⁾。本解析では、その基本原理が O. C. Zienkiewicz の論文²⁾ に紹介されていて、収束が比較的良好であると思われる stress transfer 法を用いた。

数値計算の対象とした構造物は、本州四国連絡橋基礎のうち代表的なケーソン基礎が、神戸層および明石層に

† 第 5 回土質工学研究発表会 (昭和 45 年 6 月) において一部発表

* 正会員 本州四国連絡橋公団

** 正会員 大阪設計コンサルタンツ (株)

根入れされた場合であり、数値計算の結果から、ケーソン基礎周辺地盤の力学的挙動について 2, 3 の検討を行なった。

2. 引張りに抵抗しない地盤の応力解析

圧縮力に対しては耐力をもつが、引張力に対しては抵抗しない地盤の応力解析を行なうために、本解析では stress transfer 法を用いるので、この基本的な考え方および二次元有限要素法への適用について述べ、さらに数値計算法の概要と計算手順をフローチャートで示す。

(1) Stress transfer 法²⁾

stress transfer 法の基本的な考え方を簡単に紹介する。いま、図-1 (a) に示すように、引張りに抵抗しない部材から成りたつ簡単なトラス構造に荷重 P が作用した場合、stress transfer 法を適用すると、図-1 (b) のようになる。

step 1) は、弾性計算の結果で、垂直材に引張応力 $k \cdot P$ が発生する。step 2) では、垂直材は引張りに抵抗しないから、生じた引張応力を消去し、つりあいを保つために拘束力を節点に作用させる。step 3) では、このような拘束力は実際には存在しないものであるから、拘束解除力 (等価節点力) を作用させ、この状態で再解析を行なう。この計算過程を n iteration くり返した結果が最終 step) のようであり、 $n \rightarrow \infty$ とすれば、 $|k| < 1$ のときには圧縮応力は収束し、垂直材の応力は 0 になる。

以上の推移からもわかるように、stress transfer 法とは、結局発生した引張応力を余剰応力とみなして、これを再配分する方法であり、 $|k| < 1$ であれば必ず収束し、しかも引張応力が k のべき乗で減衰するため、きわめて速い収束を示すと思われる。

次に、stress transfer 法を用いた場合の収束性および収束速度を確かめるために、簡単なトラス構造を例題と

表-1 部 材 応 力 値

	作 用 力 ($\times P$)	部 材 応 力 S ($\times P$) ① ② ④	部 材 応 力 S ($\times P$) ③	部 材 応 力 S ($\times P$) ⑤	部 材 応 力 S ($\times P$) ⑥
基本図の解 $i=0$	1	0.3964	-0.6036	-0.5607	0.8536
K	—	0.2071	-0.2071	-0.2929	0.7071
iteration No. 1	Q_i ($\times P$)	$S_i \leftarrow S_i + S_{i-1}$	$S_i \leftarrow S_i + S_{i-1}$	$S_i \leftarrow S_i + S_{i-1}$	$S_i \leftarrow S_i + S_{i-1}$
1	0.8536	0.5732	-0.4268	-0.8107	0.6036
2	0.6036	0.6982	-0.3018	-0.9875	0.4268
4	0.3018	0.8491	-0.1509	-1.2009	0.2134
7	0.1067	0.9466	-0.0534	-1.3389	0.0754
11	0.0267	0.9866	-0.0134	-1.3954	0.0189
16	0.0047	0.9976	-0.0024	-1.4100	0.0033
理論収束解 $i \rightarrow \infty$	0	1	0	$-\sqrt{2}$	0
(c) の解	0	1	0	$-\sqrt{2}$	0

$S_i = K, S_{i-1}$ S_i : iteration No. i における部材応力

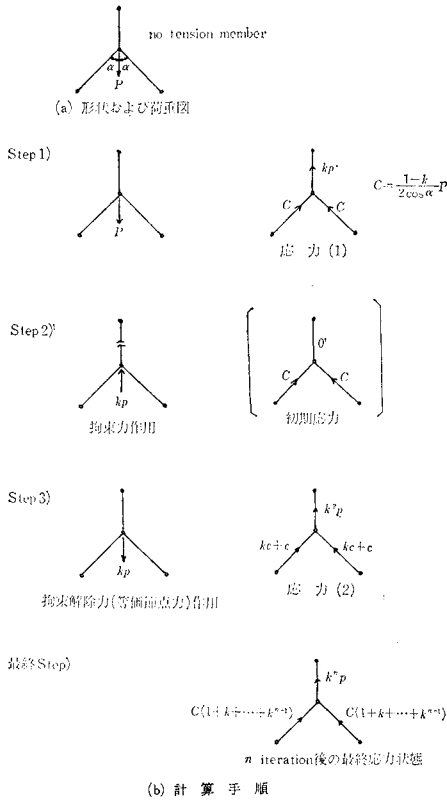


図-1 Stress transfer 法

して、これに stress transfer 法を適用した数値計算例を示す。図-2 に示すトラス構造において、⑥部材が引張りに抵抗しないものとし、その計算結果を表-1 に示す。これより、収束した最終値は 図-2 (c) の⑥部材のない構造の計算結果と同値であることがわかるが、16 回のくり返し計算の結果で工学的に収束したと結論してもよいと思われる。

(2) 二次元有限要素法への適用

a) 線形弾性二次元有限要素法の概要

三角形要素の剛性マトリクスは、次のように表わされ

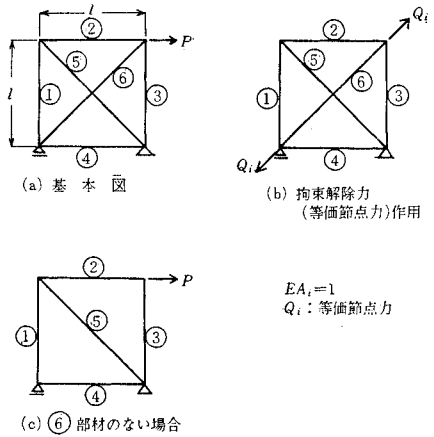


図-2 トラス構造

る。

$$[K]^e = \int [B]^T \cdot [D] \cdot [B] dV \dots \dots \dots (1)$$

さらに、ひずみおよび応力は次のように表わされる。

$$\{\epsilon\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{\delta\}^e \dots \dots \dots (2)$$

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\epsilon\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 $[B]$ マトリクスは三角形要素の形状によってきまるマトリクスである。また、 $[D]$ 平面ひずみ状態のときは、

$$[D] = \frac{E \cdot (1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ 1-\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (4)$$

$\{\delta\}^e$ は、三角形要素の節点変位で、節点力を $\{F\}^e$ とすれば、次の関係式が成り立つ。

$$\{F\}^e = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \\ X_j \\ Y_j \\ X_k \\ Y_k \end{Bmatrix} = [K]^e \cdot \{\delta\}^e \dots \dots \dots (5)$$

ここに、 i, j, k は三角形要素の節点を表わす。

構造物全体は、三角形要素の集合とみなしているから、式(1)に示される三角形要素の剛性マトリクスの集合が、構造物全体の剛性マトリクスを形成し、次式が成り立つ。

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{P\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $[K]$: 構造物全体の剛性マトリクス

$\{\delta\}$: 節点における変位ベクトル

$\{P\}$: 外力ベクトル

式(6)より、

$$\{\delta\} = [K]^{-1} \cdot \{P\} \dots \dots \dots (7)$$

ひずみおよび応力は、

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \{\delta\} = [B] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P\} \dots \dots \dots (8)$$

$$\{\sigma\} = [D] \cdot \{\varepsilon\} = [D] \cdot [B] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P\} \dots \dots \dots (9)$$

主応力 σ_1, σ_2 は、

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \dots \dots \dots (10)$$

で表わせる。

b) 等価節点力の解析

要素内の主応力方向における応力を $\{\sigma^n\}^e$ とすると、この応力は2つの部分に分けられる。

$$\{\sigma^n\}^e = \{\sigma_1^n\}^e + \{\sigma_2^n\}^e$$

ここに、 $\{\sigma_1^n\}^e$ は圧縮応力部分を、 $\{\sigma_2^n\}^e$ は引張応力部分を表わす。 $\{\sigma_2^n\}^e$ に対しては等価節点力を作用させ、再解析する必要がある。

いま、節点の仮想変位を $\{\delta^*\}^e$ で表わすと、要素内のひずみは式(2)より、

$$\{\varepsilon^*\} = [B] \cdot \{\delta^*\} \dots \dots \dots (11)$$

である。また、引張主応力のベクトル $\{\sigma_2^n\}^e$ の (x, y) 座標系におけるベクトル表示を $\{\sigma_0\}^e$ とし、要素に働く引張応力 $\{\sigma_0\}^e$ と静的に等価な節点力を $\{F\}^e$ とすれば、節点力のなす外部仕事と応力による内部仕事の要素の全容積にわたる積分値は等値であるから、

$$(\{\delta^*\}^e)^T \cdot \{F\}^e = \int \{\varepsilon^*\}^T \cdot \{\sigma_0\}^e dV \dots \dots \dots (12)$$

となり、 $\{\varepsilon^*\}$ に式(11)を代入して $\{\delta^*\}^e$ を両辺で消去すれば、等価節点力 $\{F\}^e$ は結局、

$$\{F\}^e = \int [B]^T \cdot \{\sigma_0\}^e dV \dots \dots \dots (13)$$

となる。すなわち、引張応力 $\{\sigma_0\}^e$ が決まれば、等価節

点力 $\{F\}^e$ は決定される。

e) 引張応力 $\{\sigma_0\}^e$ の算定

いま、主応力 σ_1, σ_2 がともに引張主応力の場合には、

$$\{\sigma_0\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

であり、等価節点力は式(13)より、

$$\{F_0\}^e = \int [B]^T \cdot \{\sigma_0\}^e dV = \int [B]^T \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dV \dots \dots \dots (15)$$

となる。次に、 σ_1, σ_2 のうちいずれか一方が引張主応力で他が圧縮主応力の場合、引張主応力のスカラーを σ_t とし、 σ_t が x 軸となす角を θ とすれば、

$$\{\sigma_0\}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_t \cdot \cos^2 \theta \\ \sigma_t \cdot \sin^2 \theta \\ \sigma_t \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (16)$$

となり、等価節点力は、

$$\{F_0\}^e = \int [B]^T \cdot \{\sigma_0\}^e dV = \int [B]^T \begin{Bmatrix} \sigma_t \cdot \cos^2 \theta \\ \sigma_t \cdot \sin^2 \theta \\ \sigma_t \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \end{Bmatrix} dV \dots \dots \dots (17)$$

となる。

(3) 数値計算法およびフローチャート

有限要素法の計算式は最終的に式(6)で表わされ、多元連立一次方程式を解く問題に帰着される。三角形要素の1節点で2自由度をもつため、節点数が n のとき全体で $2n$ 元の連立一次方程式であり、一般に非常に大きな元数となるため、数値計算上種々の困難な問題が生じてくる。すなわち、節点数 n が大きい場合、多元連立一次方程式を解くことによる演算誤差および解の安定性の問題、さらに演算時間の節減などの問題が生じる。したがって、多元連立一次方程式の解法の開発が大きな課題となる。ここでは、構造物を unit 分割し部分構造ごとに解を求めていく、いわゆるマトリクス分割法(直列圧縮法)³⁾を用いた。

いま、構造物を unit 分割し、2つの部分構造1および2にわたたとすれば、式(6)は次のように表わしうる。

$$\begin{bmatrix} K_{AA} & K_{AB} & 0 \\ K_{BA} & K_{BB} & K_{BC} \\ 0 & K_{CB} & K_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_A \\ P_B \\ P_C \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (18)$$

ここに、 A : 部分構造1に含まれる節点

B : 部分構造1と2の境界の節点

C : 部分構造2に含まれる節点

を示す。

式(18)を分解すれば、

$$[K_{AA}] \cdot \{\delta_A\} + [K_{AB}] \cdot \{\delta_B\} = \{P_A\} \dots\dots (19a)$$

$$[K_{BA}] \cdot \{\delta_A\} + [K_{BB}] \cdot \{\delta_B\} + [K_{BC}] \cdot \{\delta_C\} = \{P_B\} \dots\dots (19b)$$

$$[K_{CB}] \cdot \{\delta_B\} + [K_{CC}] \cdot \{\delta_C\} = \{P_C\} \dots\dots (19c)$$

式 (19a) より、

$$\{\delta_A\} = [K_{AA}]^{-1} \cdot (\{P_A\} - [K_{AB}] \cdot \{\delta_B\}) \dots (20)$$

式 (20) を式 (19b) に代入して $\{\delta_A\}$ を消去し整理すると、

$$[K_{BB}]^* \cdot \{\delta_B\} + [K_{BC}] \cdot \{\delta_C\} = \{P_B\}^* \dots\dots (21)$$

ここに、 $[K_{BB}]^* = [K_{BB}] - [K_{BA}] \cdot [K_{AA}]^{-1} \cdot [K_{AB}]$

$$\{P_B\}^* = \{P_B\} - [K_{BA}] \cdot [K_{AA}]^{-1} \cdot \{P_A\}$$

同様に、 $\{\delta_B\}$ を式 (21) から解けば、

$$\{\delta_B\} = [K_{BB}]^*^{-1} \cdot (\{P_B\}^* - [K_{BC}] \cdot \{\delta_C\}) \dots\dots (22)$$

式 (22) を式 (19c) に代入して整理すると、

$$[K_{CC}]^* \cdot \{\delta_C\} = \{P_C\}^* \dots\dots (23)$$

ここに、 $[K_{CC}]^* = [K_{CC}] - [K_{CB}] \cdot [K_{BB}]^*^{-1} \cdot [K_{BC}]$

$$\{P_C\}^* = \{P_C\} - [K_{CB}] \cdot [K_{BB}]^*^{-1} \cdot \{P_B\}^*$$

ここで、未知変位 $\{\delta_C\}$ が式 (23) より求められる。

$$\{\delta_C\} = [K_{CC}]^*^{-1} \cdot \{P_C\}^* \dots\dots (24)$$

最後に、式 (22)、(20) に逆向きに代入することによって、それぞれ変位 $\{\delta_B\}$ と $\{\delta_A\}$ が計算される。

次に、引張りに抵抗しない地盤の応力解析の計算手順を示すフローチャートを図-3に示す。ここで、くり返し計算の途上における計算終了の判定は、次の2つのうちいずれかを満足した場合に限った。

- ① 全要素についてもはや主応力方向に引張応力の発生が認められない場合
- ② 全要素について、iteration No. i と iteration No. $i+1$ における主応力の差が収束判定許容値 ϵ_0 以下になる場合

さらに、図-3のフローチャートをもとにして、引張りに抵抗しない地盤の応力解析の数値計算のためのプログラムを開発した。使用する電子計算機は I.B.M. システム 360 モデル 75I であり、この機種を対象にしてプログラム作成を行なった。なお、その規模は節点数が最大 1000、要素数の最大が 2000 のものである。

3. 数値計算結果およびその考察

(1) ケーソン基礎および周辺地盤のモデル化および解析条件

解析の対象構造物として、本州四国連絡橋基礎の中で代表的なケーソン基礎が、神戸層および明石層に根入れされた場合を想定し、外荷重として上部荷重が載荷され、水圧をとまらぬ地震力が作用した場合に、ケーソンの自

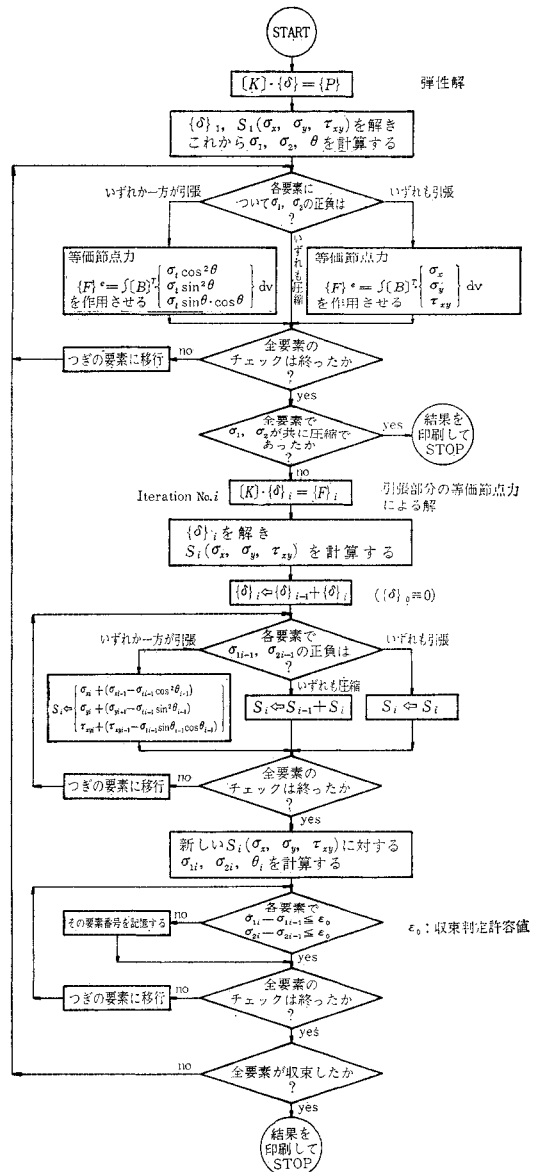


図-3 二次元有限要素法解析のフローチャート

重を考慮した静的計算を行なった。計算の規模および構造モデルは図-4に示す。ケーソン基礎の形状、および作用力を図-5に示し、ケーソンおよび地盤の力学的特性をあらわす諸数値を表-2に示す。

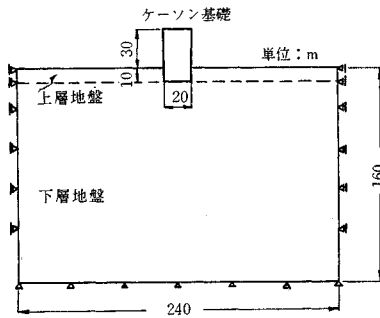
(2) 変位、主応力の収束状態

本解法の収束性の検討を行なうために、図-6~9にケース1および2の適当な節点における変位、主応力の収束曲線を示した。ここで、ケース1は収束判定許容値 $\epsilon_0 = 1.0 \text{ t/m}^2$ とした場合であり、10回のくり返し計算により収束した。また、収束曲線から明らかなように、3回程度のくり返し計算で最終的な変位および応力分布の

傾向はつかみうると判断されるから、ケース2は5回のくり返し計算でもって計算を終了させたものである。

収束状態図から明らかなように、節点変位、主応力ともに収束は順調であり、3回のくり返し計算でおおよその収束値を示していると結論してよいと思われる。

なお、計算には I.B.M. システム 360 モデル 75 I を使用し、ケース1の計算所要時間は線型弾性解と10回のくり返し計算の合計で約78分であった。



- △ 固定支承
- ◁ 鉛直方向に可動，水平方向に固定

総節点数	379 点
要素数	694 要素
分割数	11 分割

図-4 計算の規模および構造モデル

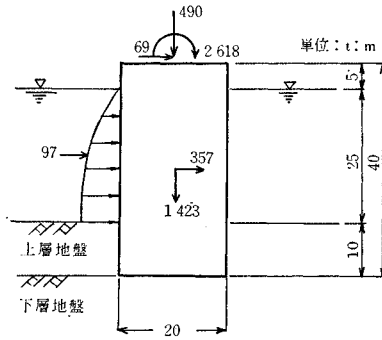


図-5 形状および作用力

表-2 ケーソンおよび地盤の力学的特性

計算 ケース	1	2	
弾性係数 $10^3(t/m^2)$	上層地盤	45	9
	下層地盤		150
	ケーソン		2100
ポアソン比	上層地盤	0.25	0.30
	下層地盤		0.25
	ケーソン		0.15
単位体積重量 (t/m^3)	上層地盤	2.0	1.9
	下層地盤		2.2
	ケーソン		2.23
浮力 (%)	50	50	
地震力	0.20	0.20	
最終 iteration	10	5	

(3) 地盤内の変位，応力状態および引張領域

地盤内の変位図，主応力の分布図および引張領域を，図-10~17 に示した。線型弾性解と比較するために，

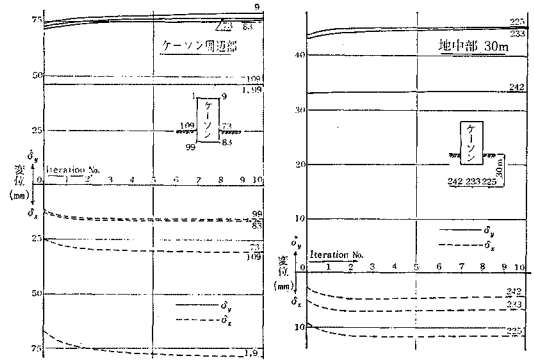


図-6 変位収束状態図 (ケース 1)

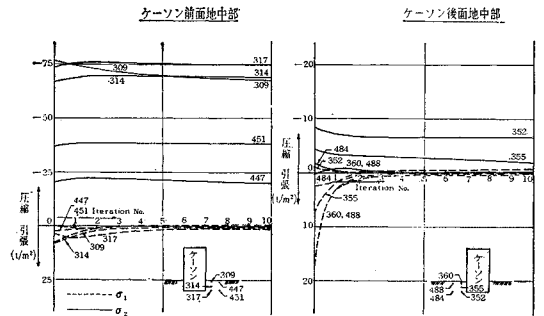


図-7 主応力収束状態図 (ケース 1)

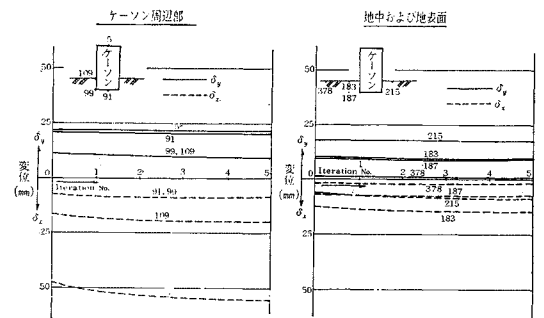


図-8 変位収束状態図 (ケース 2)

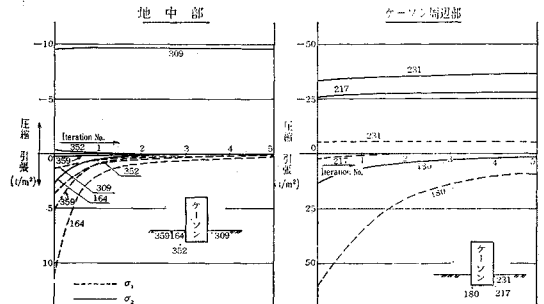


図-9 主応力収束状態図 (ケース 2)

線型弾性解である iteration No. 0 と、くり返し計算の最終状態図をあわせて示した。

変位については、ケース 1, 2 のいずれも線型弾性解と比較して、最終状態で水平方向変位の増加が認められ、特にケーソン天端については、ケース 1 の場合で 20% 程度、ケース 2 の場合で 15% 程度大きい値を示した。

主応力分布については、ケース 1, 2 のいずれについても、線型弾性解で生じていた引張主応力はほとんどなくなり、圧縮主応力が増大している。これをくわしく観

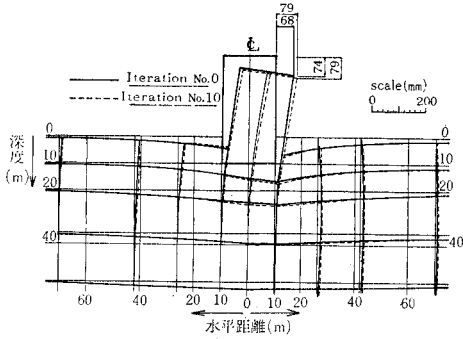


図-10 変形図 (ケース 1)

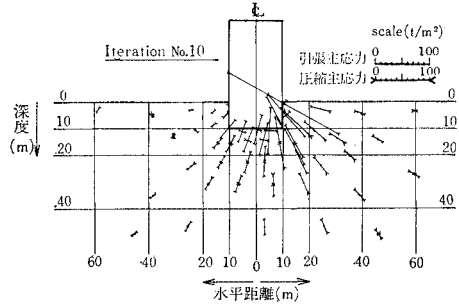
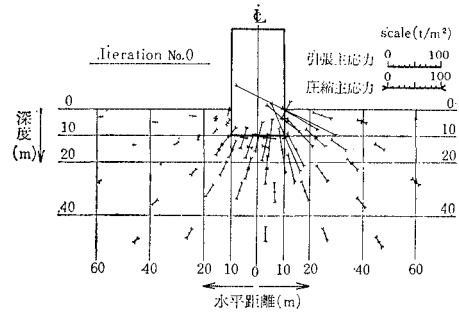


図-11 主応力図 (ケース 1)

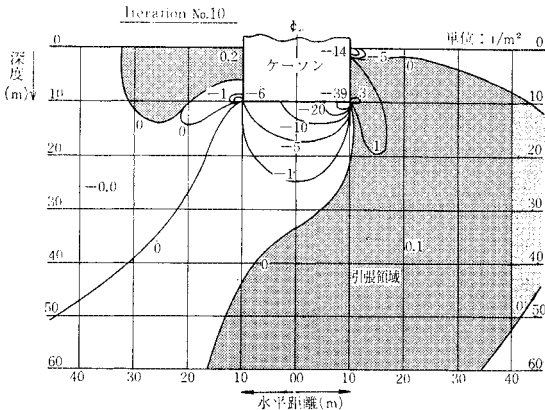
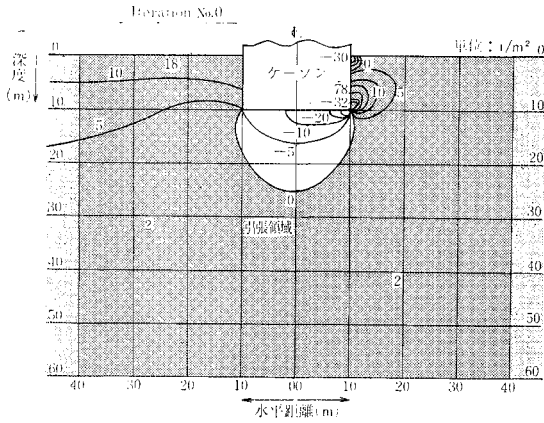


図-12 引張領域図 σ_1 (ケース 1)

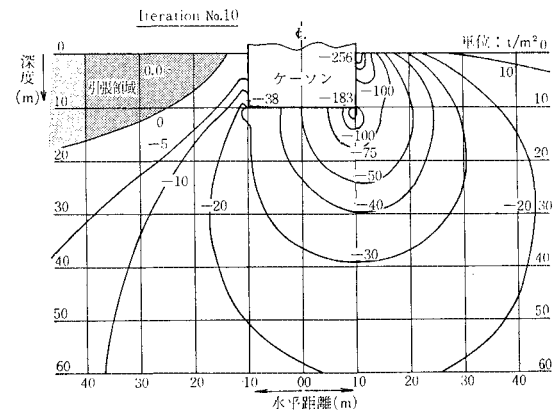
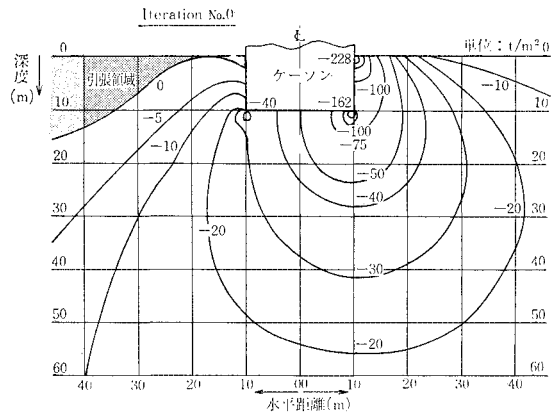


図-13 引張領域図 σ_2 (ケース 1)

察するために、引張領域図では最大主応力と最小主応力について、応力等高線を描き、さらに、引張応力を生じている領域をハッチングで示した。最終解は線型弾性解にくらべて、応力分布状態は若干異なっており、引張主応力は無視し得るほど小さくなっている。

4. ケーソン基礎周辺の地盤反力および変形係数の分布

基礎周辺の地盤反力分布を、図-18, 19 に示した。

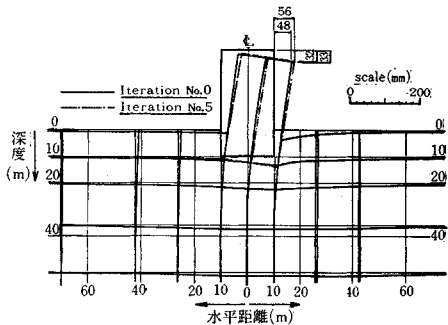


図-14 変形図 (ケース 2)

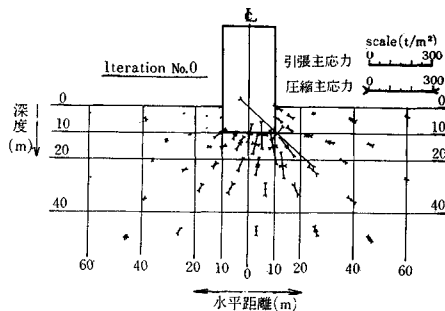


図-15 主応力図 (ケース 2)

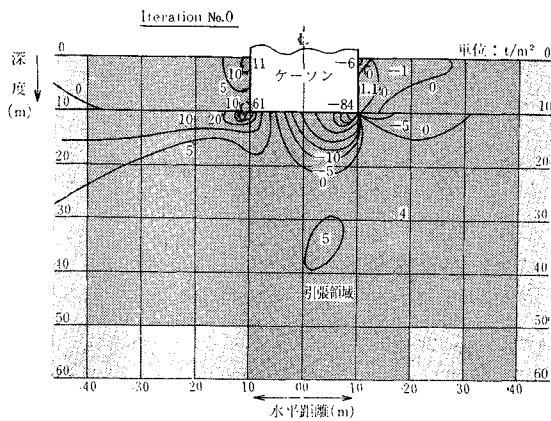


図-16 引張領域図 σ_1 (ケース 2)

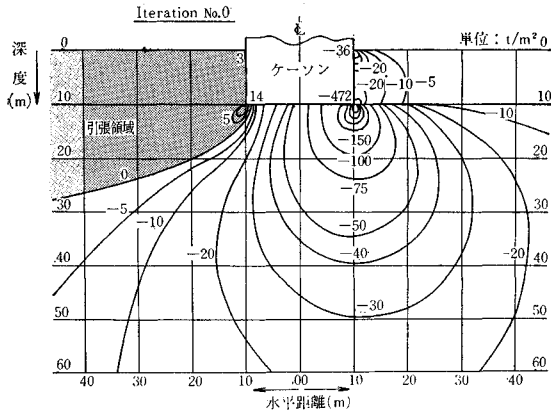
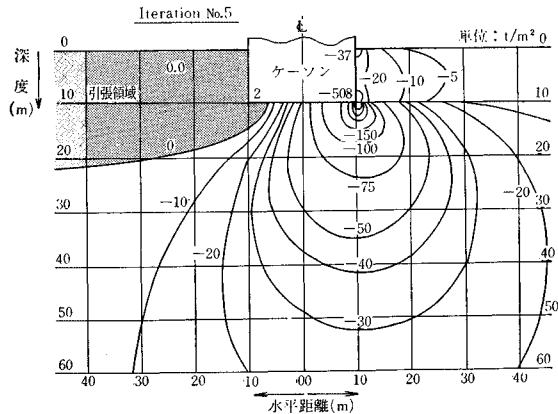
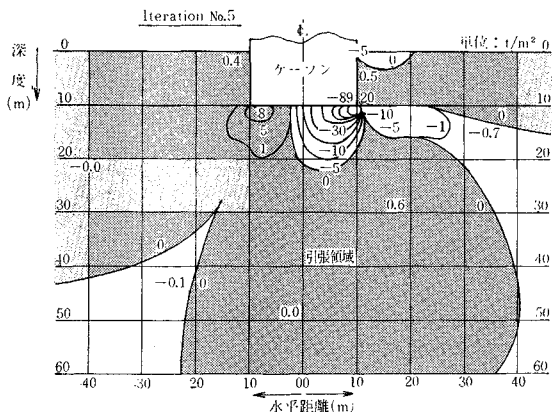


図-17 引張領域図 σ_2 (ケース 2)



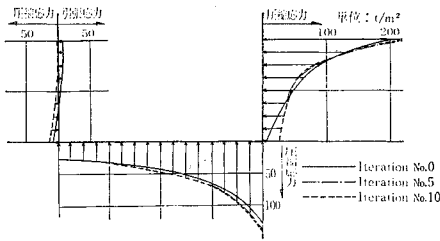


図-18 地盤反力分布 (ケース 1)

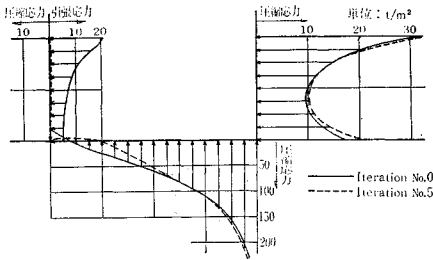


図-19 地盤反力分布 (ケース 2)

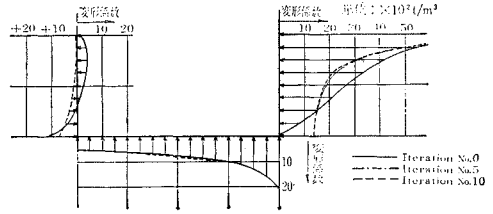


図-20 変形係数の分布 (ケース 1)

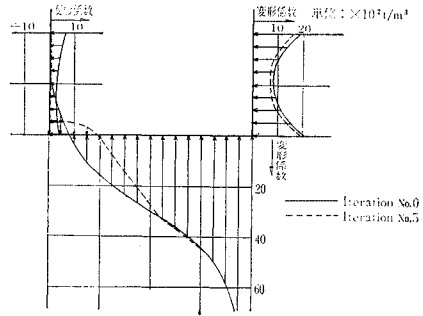


図-21 変形係数の分布 (ケース 2)

ここでケーソン底面に対しては、垂直方向の反力分布図であり、ケーソン側面に対しては、水平方向の反力分布図である。線型弾性解に比べて地盤の引張抵抗がないものとした解では、基礎前面隅角部周辺の圧縮反力が若干増加しているのが認められた。

変形係数を、図-20、21 に示した。ここで変形係数を、

$$K = \frac{\sigma}{\delta} \dots\dots\dots (25)$$

のように定義した。

ここに、 δ : 変位

σ : 変位方向応力

を示す。変形係数の分布形状は、地盤反力の分布に類似した曲線形状を示している。

5. あとがき

従前まで、解析がほとんど不可能であった任意形状の基礎が根入れされた場合の、地盤応力解析を行なったもので、特に地盤は圧縮力に対しては弾性的に支えるものであるが、引張力にはほとんど抵抗しえないものとし、この異方性的挙動を考慮した計算を行なった。このため、本論文では、stress transfer 法を有限要素法に適用して、発生した引張応力の再配分解析を行なった。更に、数値計算のためのプログラムを開発し、ケーソン基礎が根入れされた場合の地盤の応力解析を行ない、線型弾性解の結果と stress transfer 法による非線型弾性解

の結果との比較から、次のことが明らかになった。

- ① 数値計算の結果、線型解と非線型解において、変位、応力ともかなり異なった分布を示しており、特に、ケーソン天端の水平変位では、非線型解で線型解の15~20%の増加が認められた。
- ② 本論文に用いた解析法を用いた場合、本数値計算の対象とした構造モデルに対しては、大体3~5回のくり返し計算でおおむね収束したとみなしてよいと思われる、本解析法の収束性はきわめて良好であった。

最後に本研究を進めるにあたって、終始変わらぬご指導を賜った名古屋大学 川本助教、およびプログラム作成にご助力をお願いした日本 I.B.M. 大阪データセンター 山口、石井両氏に深甚なる感謝の意を表します。

参考文献

- 1) O.C. Zienkiewicz, Y.K. Cheung : "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw Hill 1967.
- 2) O.C. Zienkiewicz, S. Valliapan, I.P. King : "Stress Analysis of Rock as a 'No Tension' Material", Géotechnique 18, 1968, pp. 56~66.
- 3) W. ウィンバー著、山本善之訳 : "構造物解析のプログラム、共立出版、pp. 197~208.
- 4) 多田浩彦・福永耕三・大山 峰・田中昭博 : "橋脚基礎周辺地盤の力学的特性", 第4回土質工学研究発表会講演集, IV-23, pp. 543~548.
- 5) 多田浩彦・山根哲雄・大山 峰・田中昭博 : "ケーソン基礎周辺地盤の力学的特性", 第5回土質工学研究発表会講演集, III-6, pp. 269~272.

(1970. 11. 25・受付)