

低レイノルズ数浸透流における吸着水の影響について

ON AN EFFECT OF ABSORBING WATER FOR MICRO-SEEPAGE

佐 藤 邦 明*

By Kuniaki Sato

1. 緒 言

浸透問題を論ずる場合、定常、非定常流の運動方程式としてダルシー則がもっぱら用いられており、連続方程式とあわせその解はおおむね有効であることは周知の通りである。

しかしながら、包括的に浸透流を扱う場合に非ダルシー流に遭遇することがしばしばある。すなわち、空げき規模の小さい微粒土（たとえば、粘土、シルト）中の低レイノルズ数浸透流、および空げき規模の大きい粗粒土、あるいは地層（たとえば、砂、砂利、割栗石、岩盤中のきれつ、破碎層など）における高レイノルズ数浸透流がこれに相当する。この非ダルシー流はダルシー流にくらべ取扱いが容易でなく、その記述自体にもかなり不明確な点が認められる。

特に、本研究で対象とする微粒土中のレイノルズ数の小さい微速浸透流 (micro-seepage) に関して、最近、水理、水文、土質、地球物理などの分野で興味もたれ、ダルシー則の妥当性の吟味にも関連して実験的、あるいは理論的研究が試みられている。

この領域の流れの究明に際し、もっともむずかしいことは微粒土中の空げき規模がミクロンオーダーであるという事実から、水分子と土粒表面で電気的に発生する吸着現象をいかにとらえ、これをモデル化し、定式化するかといった問題であろう。

従来、微速浸透流は浸透実験による実測事実^{1)~3)}から、ビンガム流動、あるいは非ニュートン流動であるとみる、いわゆるレオロジー的取扱い^{4)~6)}がなされてきた。

しかし、レオロジー的に微速浸透流をとらえると同時に、流体力学的に把握する必要もある。

本研究は、水分子の土粒子への吸着現象を明らかにし、それに基づき吸着水を若干の仮定から粘性によってモデル化し、吸着効果を受ける浸透流を理論的に究明しようとするものである。

一般に、浸透流は飽和、不飽和浸透流に分けて取扱うべきであるが、ここでは飽和浸透流に限定している。

2. 吸着水とモデル化

(1) 水 分 子

よく知られているごとく、水分子は酸素と水素の共有結合からなる。電子論の教えるところによれば、水の（電気的）極化現象はつぎのように説明される。

水素の核荷電は $+e$ であり、核外の 1 個の電子は $-e$ (e ; 単位電荷, $e=4.80 \times 10^{-10}$ e.s.u.) である。

酸素の核荷電は $+8e$ で、核外に 8 個の電子があり、 $-8e$ である。原子の相互の結合にあたっては、有効核外電子、水素 $-e$ 、酸素 $-6e$ が重要である。

いま、それぞれ水素、酸素の核の重量と核荷電に注目する。まず、酸素原子の重量は水素原子の重量の 16 倍であって、それらの重量比はほぼ、おのおのの核の比で決まる。つぎに、有効核荷電は水素 $+e$ 、酸素 $+6e$ である。

そこで、共有結合の結果、水素、酸素の核外電子は重量が大きく、有効核荷電の大きい酸素核のまわりに強く拘引され、共有結合の対称性がくずれる。

したがって、水分子は酸素核付近が負 ($-e$) に、水素核付近が正 ($+e$) に荷電した双極性分子 (bi-polar molecule) となる (e ; 荷電強度)。この双極性分子は図 1 の (a), (b), (c) 図のように示される。

図中、(a)⁷⁾ 図は水分子の形状を描いたもので、(b)⁸⁾ 図は双極化を示している。水分子の寸法はほぼ $1 \sim 2 \text{ \AA}$ である。さらに、(c) 図は電気的にみた慣習的簡略記号

* 正会員 工 修 大阪府立工業高等専門学校助教 土木工学科

である。

一般に水は図-1に示した分子の集合体と考えられるが、実際には水分子の全部が双極性分子でなく、無極性分子(non-polar molecule)、および双極性分子と無極性分子の中間的な分子の集合体であるとされている⁹⁾。

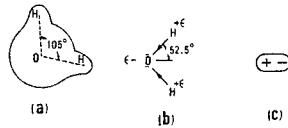


図-1 水分子

これらの水分子はある圧力、温度の下で高速振動している。

(2) 吸着水

前述した水分子が正、負いずれかに荷電した固体表面付近に電氣的に吸着されたものが通常、吸着水(adsorbed water)と呼ばれるものである。

一般に、粘土、シルトのごとき微粒土の表面は負に荷電しているといわれているから、その表面には多量の吸着水を保持しているのである。

当面問題としている微粒土中の浸透流において、この吸着水の存在は流れにきわめて重要な影響を与える。

図-2の(a)図は単一土粒子を球形と想定した場合の吸着水の様子であるが、この吸着水はつぎのような物理的性質がある。

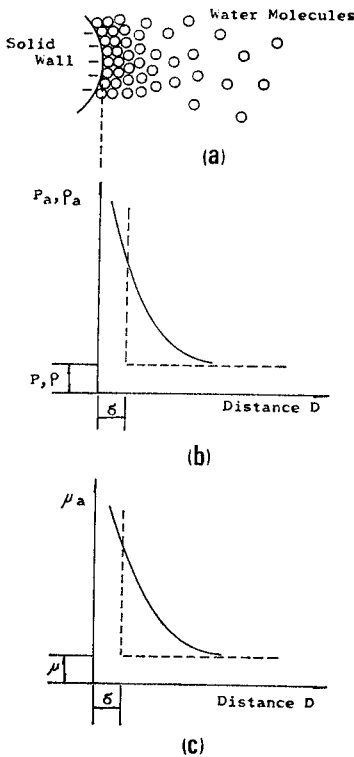


図-2 吸着効果

(a) 水分子相互間の引力は土粒子表面付近でもっとも強く、表面から遠ざかるにつれ減少し、十分離れたところで消失する。

(b) 吸着水は(a)の強弱によって、土粒子表面付近の吸湿水層(hygroscopic water layer)と吸着水層(adsorbed water layer)に分けられる。

(c) 吸湿水層内の水分子は高い圧力、密度を有し、また外力によってきわめて高い粘性を現わし、流動しない。

(d) 吸着水層内の水は通常の水の圧力、密度、粘性より大きい、外力によって流動する。

(e) 吸着力の強弱、吸湿、吸着水層の厚さはともに微粒土の鉱物成分、水中の溶解イオンなどに関係する。

以上の事柄をまとめて表わせば、図-2の(b),(c)図のようになり、(b)図は吸着効果による土粒子表面からの距離の増減による圧力、密度の変化を示したもので、(c)図は同様に粘性係数の変化を示したものである。

表-1 吸湿水層の厚さδと吸着水層の厚さβの値 (単位：ミクロン)

研究者または書名	吸湿水層の厚さ δ	吸着水層の厚さ β
A. J. Rutgers ¹⁰⁾	0.01~0.001	
G. Karádi & I.V. Nagy ¹¹⁾	0.1 ~0.15	0.5
P. Ya. Polubarinova-Kochina ¹²⁾		0.5
室田・佐藤 ¹³⁾		1.8
土質工学ハンドブック ¹⁴⁾	0.0005	
C. Migniot ¹⁵⁾	0.001	0.04
粘土ハンドブック ¹⁶⁾	0.005	0.1
農業土木ハンドブック ¹⁷⁾	0.0005	
船引・川村 ¹⁸⁾	0.0025 (石英 0.266)	

いま、吸着水の関連事項として、まず、吸湿水層の厚さδ、吸着水層の厚さβについては表-1に掲げる。おのおの値について研究者、書名によってかなり差異はあるがオーダー的に知ることができる(ここで注意したいのは、δ, βともにさほど厳密に表わせず、かなり便宜的なものであるということである)。

つぎに、界面付近の水の粘性係数は山内¹⁹⁾によれば、100倍以上、W.D. Kemper²⁰⁾によれば10倍以上とのべられている。さらに、水の密度は山内によって1.4 g/cm³であるとされている。

(3) モデル化

吸着水をモデル化するに当たって、図-2の(b),(c)図から吸着水層内の水が流動する場合、(吸着)粘性係数μ_aは、

$$\mu_a = \alpha \mu \dots \dots \dots (1)$$

$$\alpha \geq 1$$

$$\alpha = 1 + C \left(\frac{\delta}{D} \right)^n \dots \dots \dots (2)$$

$$n=1, 2, 3, \dots, C \geq 0, D \geq \delta$$

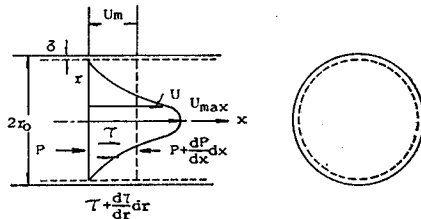
であると仮定する。

ここで、 α は吸着係数 (parameter of absorption) と呼ぶ。また、 δ は吸湿水層の厚さ、 μ は通常の水の粘性係数、 D は界面からの距離、さらに、 C は吸着強度に関する定数である (前記 (e) に関する)。

3. 微細円管内の流れ

吸着効果を受ける微細空けき内の低レイノルズ数浸透流を、微小半径をもつ円管内の流れで近似し、理論的に検討する。

流れの解析は 図-3 を参照し、つぎの基本仮定から出発する。



x : 下流方向の座標軸 r : 管中心からの距離
 r_0 : 円管半径 δ : 吸湿水層の厚さ
 u : x 方向の流速 u_m : 平均流速
 P : 圧力 τ : せん断力

図-3 微細円管内の流れ

仮定 1 円管内の任意点での (吸着) 粘性係数 μ_a は式 (1) から、

$$\mu_a = \alpha \mu \dots \dots \dots (3)$$

$$\alpha \geq 1$$

で与えられる。

仮定 2 吸着係数 α は式 (2) から、

$$\alpha = 1 + C \left(\frac{\delta}{r_0 - r} \right)^n \dots \dots \dots (4)$$

$$n=1, 2, 3, \dots, r \leq r_0 - \delta$$

$$C \geq 0$$

である。

仮定 3 円管内の中心から任意の距離におけるせん断力 τ は、筆者が提唱した表現²¹⁾ を採用し、

$$\tau = \mu_a \frac{du}{dr} \dots \dots \dots (5)$$

とする。

境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} r=0, \frac{du}{dr} &= 0 \\ r=r_0 - \delta, u &= 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

である。

a) 流速分布

流速分布は式 (3)~(6) から決定される。

せん断力と圧力のつり合いの式を立てると、

$$r \frac{dP}{dx} = \frac{d}{dr} (\tau r) \dots \dots \dots (7)$$

となり、1回積分し、境界条件 $r=0, \frac{du}{dr}=0$ から、

$$\frac{1}{2} r \frac{dP}{dx} = \tau \dots \dots \dots (8)$$

となる。

さらに、式 (8) に式 (3)~(5) を代入し、積分すれば、

$$u = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} \int \frac{r(r_0 - r)^n}{(r_0 - r)^n + C\delta^n} dr + A \dots \dots \dots (9)$$

ここで、 A は積分定数である。

式 (9) の積分を遂行するにあたり、 $n=1, n$ が偶数 ($n=2m, m=1, 2, 3, \dots$)、さらに、 n が奇数 ($n=2m+1, m=1, 2, 3, \dots$) の場合に分けて表現²²⁾ する。

① $n=1$ の場合

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \{r^2 + 2C\delta r + 2C\delta(r_0 + C\delta)\}$$

$$\times \log_e |r_0 - r + C\delta| + A_{(n=1)} \dots \dots \dots (10)$$

② $n=2m$ の場合

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[(r^2 - r_0^2) - \frac{1}{m} {}^{2m}\sqrt{C} r_0 \delta \right.$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot L(r, i) \right.$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot T(r, i) \left. \right\} + \frac{1}{m} {}^{2m}\sqrt{C^2} \delta^2$$

$$\times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot L(r, i) \right.$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot T(r, i) \left. \right\} \left. \right] + A_{(n=2m)} \dots \dots \dots (11)$$

③ $n=2m+1$ の場合

$$u = \frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[(r_0 - r)^2 - 2r_0(r_0 - r) \right.$$

$$+ \frac{2}{2m+1} {}^{2m+1}\sqrt{C} r_0 \delta \left\{ G(r) - \sum_{i=1}^m \cos \right.$$

$$\frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot L'(r, i) - 2 \sum_{i=1}^m \sin$$

$$\frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot T'(r, i) \left. \right\} + \frac{2}{2m+1} {}^{2m+1}\sqrt{C^2} \delta^2$$

$$\times \left\{ G(r) + \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot L'(r, i) \right.$$

$$+ 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot T'(r, i) \left. \right\} \left. \right] + A_{(n=2m+1)} \dots \dots \dots (12)$$

ここで、

$$L(r, i) = \log_e \left[\left(\frac{r_0 - r}{2m\sqrt{C}\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0 - r}{2m\sqrt{C}\delta} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1 \right],$$

$$T(r, i) = \tan^{-1} \frac{\cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} - \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right)}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}},$$

$$G(r) = \log_e \left| \frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} + 1 \right|,$$

$$L'(r, i) = \log_e \left| \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1 \right|,$$

$$T'(r, i) = \tan^{-1} \frac{\cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} - \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right)}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}.$$

つぎに、境界条件 $r=r_0-\delta$ で $u=0$ より、積分定数 $A_{(n)}$ はきまる。

$$A_{(n=1)} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \{ (r_0-\delta)^2 + 2C\delta(r_0-\delta) - 2C\delta(r_0+C\delta) \cdot \log_e |\delta(1+C)| \} \dots \dots \dots (13)$$

$$A_{(n=2m)} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[(r_0-\delta)^2 - r_0^2 - \frac{1}{m} 2m\sqrt{C} r_0\delta \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot L(r_0-\delta, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot T(r_0-\delta, i) \right\} + \frac{1}{m} 2m\sqrt{C^2} \delta^2 \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot L(r_0-\delta, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot T(r_0-\delta, i) \right\} \right] \dots \dots \dots (14)$$

$$A_{(n=2m+1)} = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[\delta^2 - 2r_0\delta + \frac{2}{2m+1} 2m\sqrt{C} r_0\delta \left\{ G(r_0-\delta) - \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot L'(r_0-\delta, i) - 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot T'(r_0-\delta, i) \right\} + \frac{2}{2m+1} 2m\sqrt{C^2} \delta^2 \left\{ G(r_0-\delta) - \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot L'(r_0-\delta, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot T'(r_0-\delta, i) \right\} \right] \dots \dots \dots (15)$$

ここで、

$$L(r_0-\delta, i) = \log_e \left| \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1 \right|,$$

$$T(r_0-\delta, i) = \tan^{-1} \frac{\cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} - \frac{1}{2m\sqrt{C}}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}},$$

$$G(r_0-\delta) = \log_e \left| \frac{1}{2m\sqrt{C}} + 1 \right|,$$

$$L'(r_0-\delta, i) = \log_e \left| \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1 \right|,$$

$$T'(r_0-\delta, i) = \tan^{-1} \frac{\cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} - \frac{1}{2m\sqrt{C}}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}.$$

そこで、式 (10)~(12) に式 (13)~(15) を代入し、流速分布はつぎのようになる。

① $n=1$ の場合

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left\{ (r_0-\delta)^2 - r^2 + 2C\delta(r_0-r-\delta) - 2C\delta(r_0+C\delta) \log_e \left| \frac{r_0-r+C\delta}{\delta(1+C)} \right| \right\} \dots \dots (16)$$

② $n=2m$ の場合

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[(r_0-\delta)^2 - r^2 - \frac{1}{m} 2m\sqrt{C} r_0\delta \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot E(r, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot F(r, i) \right\} + \frac{1}{m} 2m\sqrt{C^2} \delta^2 \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot E(r, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot F(r, i) \right\} \right] \dots \dots \dots (17)$$

③ $n=2m+1$ の場合

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \left[(r_0-\delta)^2 - r^2 + \frac{2}{2m+1} 2m\sqrt{C} r_0\delta \left\{ H(r) - \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot E'(r, i) - 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot F'(r, i) \right\} + \frac{2}{2m+1} 2m\sqrt{C^2} \delta^2 \times \left\{ H(r) + \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot E'(r, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot F'(r, i) \right\} \right] \dots \dots \dots (18)$$

ここで、

$$E(r, i) = L(r_0-\delta, i) - L(r, i)$$

$$= -\log_e \left| \frac{\left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1}{\left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right)^2 - 2 \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1} \right|,$$

$$F(r, i) = T(r_0-\delta, i) - T(r, i)$$

$$= \tan^{-1} \frac{\left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} - \frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}}{\left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} \right) \left(\frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) - \left(\frac{r_0-r}{2m\sqrt{C}\delta} + \frac{1}{2m\sqrt{C}} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1},$$

$$H(r) = G(r_0 - \delta) - G(r)$$

$$= \log_e \left| \frac{\delta(1 + 2^{m+1}\sqrt{C})}{r_0 - r + 2^{m+1}\sqrt{C}\delta} \right|,$$

$$E'(r, i) = L'(r_0 - \delta, i) - L'(r, i)$$

$$= -\log_e \left| \frac{\left(\frac{r_0 - r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0 - r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right)\cos\frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1}{\left(\frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}}\right)\cos\frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1} \right|,$$

$$F'(r, i) = T'(r_0 - \delta, i) - T'(r, i)$$

$$= \tan^{-1} \frac{\left(\frac{r_0 - r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta} - \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}}\right)\sin\frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\left(\frac{r_0 - r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right)\left(\frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}}\right) - \left(\frac{r_0 - r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta} + \frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}}\right)\cos\frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1}.$$

b) 平均流速

平均流速 u_m は

$$u_m = \frac{2\pi}{A_0} \int_0^{r_0 - \delta} r u dr \dots \dots \dots (19)$$

である。

式 (19) において、 $A_0 = \pi(r_0 - \delta)^2$ とすれば、管内の真の平均流速であり、 $A_0 = \pi r_0^2$ とすれば、見掛け上の平均流速となる。

u_m はそれぞれの場合に、式 (19) に式 (16)~(18) を代入して求めることができる。

$$u_m = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dx} \frac{\pi}{A_0} M(r_0, i) \dots \dots \dots (20)$$

① $n=1$ の場合

$$M(r_0, i) = \left\{ (r_0 - \delta)^4 + \frac{4}{3} C \delta (r_0 - \delta)^3 + 6 C \delta (r_0 + C \delta)^3 - 2 C \delta^2 (1 + C) \times (r_0 + C \delta) (4 r_0 + 3 C \delta - \delta) - 4 C \delta (r_0 + C \delta)^3 \log_e \left| \frac{r_0 + C \delta}{\delta(1 + C)} \right| \right\} \dots \dots \dots (21)$$

② $n=2m$ の場合

$$M(r_0, i) = \left[(r_0 - \delta)^4 - \frac{4}{m} 2^m \sqrt{C} r_0 \delta \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot E^*(r_0, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot F^*(r_0, i) \right\} + \frac{4}{m} 2^m \sqrt{C^2} \delta^2 \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot E^*(r_0, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot F^*(r_0, i) \right\} \right] \dots \dots \dots (22)$$

ここで、

$$E^*(r_0, i) = \frac{1}{2} (r_0 - \delta)^2 \log_e X - \left[2^m \sqrt{C} \delta J \times \left\{ Q(\log_e R - 2) - K(\log_e X - 2) + 2 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} (\tan^{-1} S - \tan^{-1} N) \right\} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} 2^m \sqrt{C^2} \delta^2 \{ (X \log_e X - K^2) - (R \log_e R - Q^2) \} \right],$$

$$F^*(r_0, i) = -\frac{1}{2} (r_0 - \delta)^2 \tan^{-1} N - 2^m \sqrt{C^2} \delta^2 \sin^2 \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot \left[\frac{1}{2} \{ N - (N^2 + 1) \tan^{-1} N \} - \frac{1}{2} \{ S - (S^2 + 1) \tan^{-1} S \} \right] - 2^m \sqrt{C} \delta \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot J \left\{ \left(N \tan^{-1} N - \frac{1}{2} \log_e |N^2 + 1| \right) - \left(S \tan^{-1} S - \frac{1}{2} \log_e |S^2 + 1| \right) \right\},$$

$$J = r_0 - 2^m \sqrt{C} \delta \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m},$$

$$K = \frac{1}{2^m \sqrt{C}} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m},$$

$$N = \frac{\frac{1}{2^m \sqrt{C}} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}},$$

$$Q = \frac{r_0}{2^m \sqrt{C} \delta} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m},$$

$$R = \frac{r_0^2}{2^m \sqrt{C^2} \delta^2} - 2 \frac{r_0}{2^m \sqrt{C} \delta} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1,$$

$$S = \frac{\frac{r_0}{2^m \sqrt{C} \delta} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}},$$

$$X = \frac{1}{2^m \sqrt{C^2}} - 2 \frac{1}{2^m \sqrt{C}} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1.$$

③ $n=2m+1$ の場合

$$M(r_0, i) = \left[(r_0 - \delta)^4 + \frac{8}{2m+1} 2^{m+1} \sqrt{C} r_0 \delta \left\{ H^*(r_0) - \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot E^*(r_0, i) - 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot F^*(r_0, i) \right\} \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{8}{2m+1} 2^{m+1} \sqrt{C^2} \delta^2 \left\{ H^*(r_0) + \sum_{i=1}^m \cos \right. \\
& \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot E^{*'}(r_0, i) + 2 \sum_{i=1}^m \sin \\
& \left. \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot F^{*'}(r_0, i) \right\} \dots \dots \dots (23)
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
H^*(r_0) &= \frac{1}{2} (r_0 - \delta)^2 \log_e W \\
& - \left\{ V(V \log_e V - V) - V(W \log_e W - W) \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} W^2 \left(\log_e W - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} V^2 \left(\log_e V - \frac{1}{2} \right) \right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E^{*'}(r_0, i) &= \frac{1}{2} (r_0 - \delta)^2 \log_e X' \\
& - \left[2^{m+1} \sqrt{C} \delta J' \left\{ Q'(\log_e R' - 2) \right. \right. \\
& - K'(\log_e X' - 2) + 2 \sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \\
& \times (\tan^{-1} S' - \tan^{-1} N') \left. \right\} + \frac{1}{2} 2^{m+1} \sqrt{C^2} \delta^2 \\
& \times \{ (X' \log_e X' - K'^2) - (R' \log_e R' - Q'^2) \},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{*'}(r_0, i) &= -\frac{1}{2} (r_0 - \delta)^2 \tan^{-1} N' \\
& - 2^{m+1} \sqrt{C^2} \delta^2 \sin^2 \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \\
& \times \left[\frac{1}{2} \{ N' - (N'^2 + 1) \tan^{-1} N' \} - \frac{1}{2} \right. \\
& \times \{ S' - (S'^2 + 1) \tan^{-1} S' \} \left. \right] - 2^{m+1} \sqrt{C} \delta \sin \\
& \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot J' \left\{ \left(N' \tan^{-1} N' - \frac{1}{2} \log_e \right. \right. \\
& \left. \left. |N'^2 + 1| \right) - \left(S' \tan^{-1} S' - \frac{1}{2} \log_e |S'^2 + 1| \right) \right\}.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
V &= r_0 + 2^{m+1} \sqrt{C} \delta, \\
W &= \delta(1 + 2^{m+1} \sqrt{C}), \\
J' &= r_0 - 2^{m+1} \sqrt{C} \delta \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}, \\
K' &= \frac{1}{2^{m+1} \sqrt{C}} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}, \\
N' &= \frac{1}{2^{m+1} \sqrt{C}} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \\
& \frac{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}},
\end{aligned}$$

ここで,

$$\frac{dE(r, i)}{dr} = \frac{2}{2^m \sqrt{C} \delta} \frac{r_0 - r - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\left(\frac{r_0 - r}{2^m \sqrt{C} \delta} \right)^2 - 2 \left(\frac{r_0 - r}{2^m \sqrt{C} \delta} \right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1},$$

$$\begin{aligned}
Q' &= \frac{r_0}{2^{m+1} \sqrt{C} \delta} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}, \\
R' &= \frac{r_0^2}{2^{m+1} \sqrt{C^2} \delta^2} - 2 \frac{r_0}{2^{m+1} \sqrt{C} \delta} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1, \\
S' &= \frac{\frac{r_0}{2^{m+1} \sqrt{C} \delta} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}, \\
X' &= \frac{1}{2^{m+1} \sqrt{C^2}} - 2 \frac{1}{2^{m+1} \sqrt{C}} \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1.
\end{aligned}$$

c) せん断力分布

円管内のせん断力分布は式(3)~(5)から, 式(16)~(18)を用いて計算することができ, それぞれの場合につきのように書ける.

① $n=1$ の場合

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \left\{ 1 + C \left(\frac{\delta}{r_0 - r} \right) \right\} \\
& \times \left\{ r + C \delta - \frac{C \delta (r_0 + C \delta)}{r_0 - r + C \delta} \right\} \dots \dots \dots (24)
\end{aligned}$$

② $n=2m$ の場合

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \left\{ 1 + C \left(\frac{\delta}{r_0 - r} \right)^{2m} \right\} \left[r + \frac{1}{m} 2^m \sqrt{C} r_0 \delta \right. \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot \frac{dE(r, i)}{dr} + 2 \sum_{i=1}^m \sin \right. \\
& \times \frac{(2i-1)\pi}{2m} \cdot \frac{dF(r, i)}{dr} \left. \right\} - \frac{1}{m} 2^m \sqrt{C^2} \delta^2 \\
& \times \left\{ \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot \frac{dE(r, i)}{dr} \right. \\
& \left. + 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m} \cdot \frac{dF(r, i)}{dr} \right\} \dots \dots (25)
\end{aligned}$$

③ $n=2m+1$ の場合

$$\begin{aligned}
\tau &= \frac{1}{2} \frac{dP}{dx} \left\{ 1 + C \left(\frac{\delta}{r_0 - r} \right)^{2m+1} \right\} \left[r - \frac{2}{2m+1} \right. \\
& \times 2^{m+1} \sqrt{C} r_0 \delta \left\{ \frac{dH(r)}{dr} - \sum_{i=1}^m \cos \right. \\
& \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot \frac{dE'(r, i)}{dr} - 2 \sum_{i=1}^m \sin \\
& \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} \cdot \frac{dF'(r, i)}{dr} \left. \right\} - \frac{2}{2m+1} 2^{m+1} \sqrt{C^2} \delta^2 \\
& \times \left\{ \frac{dH(r)}{dr} - \sum_{i=1}^m \cos \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot \frac{dE'(r, i)}{dr} \right. \\
& \left. - 2 \sum_{i=1}^m \sin \frac{(2i-1)2\pi}{2m+1} \cdot \frac{dF'(r, i)}{dr} \right\} \dots \dots (26)
\end{aligned}$$

$$\frac{dF(r, i)}{dr} = -\frac{1}{2^m \sqrt{C} \delta} \frac{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m}}{\left(\frac{r_0-r}{2^m \sqrt{C} \delta}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0-r}{2^m \sqrt{C} \delta}\right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m} + 1},$$

$$\frac{dH(r)}{dr} = -\frac{1}{(r_0-r+2^{m+1}\sqrt{C}\delta)},$$

$$\frac{dE'(r, i)}{dr} = \frac{2}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta} \frac{\frac{r_0-r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta} - \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\left(\frac{r_0-r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0-r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1},$$

$$\frac{dF'(r, i)}{dr} = -\frac{1}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta} \frac{\sin \frac{(2i-1)\pi}{2m+1}}{\left(\frac{r_0-r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right)^2 - 2\left(\frac{r_0-r}{2^{m+1}\sqrt{C}\delta}\right) \cos \frac{(2i-1)\pi}{2m+1} + 1},$$

d) 平均粘性係数

円管内の粘性係数は吸着水の存在によって通常の水より大きい。円管内の平均粘性係数 μ_{am} は、

$$\mu_{am} = \frac{2\pi}{A_0} \int_0^{r_0-\delta} r \mu_a dr \dots\dots\dots(27)$$

である。

式(27)において、 A_0 は平均流速の場合と同じく $A_0 = \pi(r_0 - \delta)^2$ とすれば、真の平均粘性係数であり、 $A_0 = \pi r_0^2$ とすれば見掛け上の平均粘性係数となる。

式(27)に式(3)、(4)を代入し、積分すれば $n=1, n=2, n \neq 2$ の場合に分けて、

$$\mu_{am} = \frac{\pi}{A_0} \mu \left[(r_0 - \delta)^2 - 2\sqrt[2m]{C} r_0 \delta \right. \\ \times \left. \begin{cases} \frac{1}{(n-1)\left(\frac{r_0}{\sqrt[2m]{C}\delta}\right)^{n-1}} - \frac{1}{(n-1)\left(\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)^{n-1}}; & (n \neq 1) \\ -\log_e \left| \frac{r_0}{\delta} \right| & ; (n=1) \end{cases} \right. \\ \left. + 2\sqrt[2m]{C} \delta^2 \right. \\ \times \left. \begin{cases} \frac{1}{(n-2)\left(\frac{r_0}{\sqrt[2m]{C}\delta}\right)^{n-2}} - \frac{1}{(n-2)\left(\frac{1}{\sqrt[2m]{C}}\right)^{n-2}}; & (n \neq 2) \\ -\log_e \left| \frac{r_0}{\delta} \right| & ; (n=2) \\ -\frac{1}{\sqrt[2m]{C}\delta} (r_0 - \delta) & ; (n=1) \end{cases} \right] \dots\dots\dots(28)$$

e) 抵抗係数とレイノルズ数の関係

円管内の流れにおいて、レイノルズ数 Re , 抵抗係数 f はそれぞれつぎのように定義される。

$$Re = \frac{d \cdot u_m}{\nu} \dots\dots\dots(29)$$

$$i = \frac{f}{d} \frac{u_m^2}{2g} \dots\dots\dots(30)$$

ここで、 d は管径で $2r_0$ であり、 ν は水の動粘性係数、 i は動水勾配、 g は重力の加速度である。

一般に抵抗係数とレイノルズ数の関係は

$$Re f = a \dots\dots\dots(31)$$

が認められており、 a は層流の場合 64 となり、一定である。

いま、吸着効果を受ける流れの $Re-f$ 関係を考える。

平均流速 u_m は式(20)で与えられるから、式(29)、(30)を用いて、

$$Re f = \frac{64 A_0 r_0^2}{\pi M(r_0, i)} \dots\dots\dots(32)$$

となる。

式(31)と式(32)を比較して、

$$a = \frac{64 A_0 r_0^2}{\pi M(r_0, i)} \dots\dots\dots(33)$$

となる。

以上、a) から e) までにおいて、吸着効果をうける場合の流速分布、平均流速、せん断力分布、平均粘性係数、抵抗係数とレイノルズ数の関係を求めたが、いずれの場合も $C=0, \delta=0$ なら、円管内の粘性流体の流れに関するポアジューユ則と一致する。

4. 理論結果の検討

(1) n の仮定

前述した流れの解析において、吸着効果を表わすファクター、 n, C, δ の決定はきわめて重要である。

ここで、筆者はつぎの単純な仮定から n を決める。

周知のごとく、電気工学における基本的な法則の一つにクーロン則がある。これは荷電を帯びた二物体間に作用する力がそれぞれの荷電強度の積に比例し、相互の距離の二乗に逆比例するというものである。だから、この法則に立脚すれば、ある荷電をもつ土粒子表面に吸着される水分子は土粒子表面の荷電強度と水分子の極化強度の積に比例し、表面からの距離の二乗に逆比例した力を受けることになる。これは別の観点からすれば、吸着水層内部の圧力分布(図-2, (b) 図参照)が土粒子表面か

らの距離の二乗に逆比例しているということになる。

筆者はこの考えに立って、土粒子表面からの（吸着）粘性係数の分布（図-2, (c) 図参照）をつぎのように仮定する。

すなわち、水分子間の吸着力に比例した粘性が存在すると仮定すれば、つぎの結論が得られる。

吸着圧力の分布が粒子表面からの距離の二乗に逆比例して減少するから、粘性係数の分布もまた距離の二乗に逆比例して減少する。

ここで、上記の仮定のように吸着力に比例した粘性が発生するという立場を認めるなら、つぎのことを留意したい。

一般に、 n の値は Coulomb 力、van der Waals 力をも含めて、2~7 程度の値をとり、範囲をもち、一義的に決めたいと考えるのが妥当である。

クーロン力の仮定から、式(2)で $n=2$ となるから、流速分布、平均流速、せん断力分布、平均粘性係数はそれぞれ、式(17), (22), (25), (28)へ $n=1$ を代入し、つぎようになる。

a) 流速分布

$$u = -\frac{1}{4\mu} \frac{dP}{dx} \cdot Y(r) \dots\dots\dots(34)$$

$$Y(r) = \left\{ (r_0 - \delta)^2 - r^2 - 2\sqrt{C} r_0 \delta \tan^{-1} \frac{\sqrt{C}(r_0 - r - \delta)}{r_0 - r + C\delta} + C\delta^2 \log_e \left| \frac{(r_0 - r)^2 + C\delta^2}{\delta^2(1+C)} \right| \right\} \dots\dots\dots(35)$$

b) 平均流速

$$u_m = -\frac{1}{8\mu} \frac{dP}{dx} \frac{\pi}{A_0} M(r_0) \dots\dots\dots(36)$$

$$M(r_0) = \left\{ (r_0 - \delta)^4 + 12Cr_0\delta^3 - 10Cr_0^2\delta^2 - 2C\delta^4 - 4\sqrt{C}\delta(r_0^3 - 3Cr_0\delta^2) \tan^{-1} \frac{\sqrt{C}(r_0 - \delta)}{r_0 + C\delta} + 2(3C\delta^2r_0^2 - C^2\delta^4) \log_e \left| \frac{r_0^2 + C\delta^2}{\delta^2(1+C)} \right| \right\} \dots\dots(37)$$

c) せん断力分布

$$\tau = \frac{dP}{dx} Z(r) \dots\dots\dots(38)$$

$$Z(r) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + C \left(\frac{\delta}{r_0 - r} \right)^2 \right\} \times \left\{ r - \frac{C\delta^2 r}{(r_0 - r)^2 + C\delta^2} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

d) 平均粘性係数

$$\frac{\mu_{am}}{\mu} = \frac{\pi}{A_0} I(r_0) \dots\dots\dots(40)$$

$$I(r_0) = \left\{ (r_0 - \delta)^2 + 2C\delta(r_0 - \delta) - 2C\delta^2 \log_e \left| \frac{r_0}{\delta} \right| \right\} \dots\dots\dots(41)$$

(2) 数値計算

式(34)から式(41)を用いて、流速分布、平均流速、せん断力分布、平均粘性係数について具体的に検討する。

まず、流速分布の数値計算として、式(35)において、吸湿水層の厚さ δ を表-1の諸値を参考に $\delta = 0.04$ ミクロン、また、 C の値を 1.0, 2500 とし、円管の半径 $r_0 = 2.0, 5.0, 500$ ミクロンのそれぞれの場合の $Y(r)$ の値をプロットしたものが図-4である。図中、(a), (b), (c) 図は $C=2500$ の場合を、また (d), (e) 図は $C=1.0$ の場合を示したもので、吸着効果は無視した場合 ($\delta=0, C=0$) の分布（ポアジューユ則）を同時に示している。

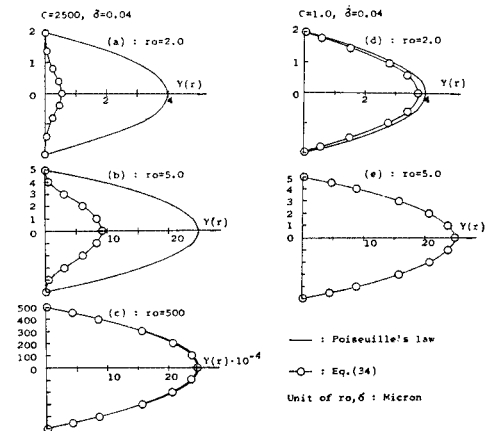


図-4 流速分布

この結果から、円管の半径が小さいほど吸着効果は顕著であり、ポアジューユ則からの分布と差異を生ずることがわかる。また、分布形に着目して、吸着力によって円管壁面付近で速度勾配が極端に小さくなっている。

さらに、初めに述べたように、 C は土粒子表面の荷電強度に関係する定数であるから、 C が小さければ吸着効果は小さく、また、 C が大きければ吸着効果が大きいことを図-4は明確に示している。

いま、注目すべきことは、 $C=2500$ の場合でも円管の半径が 500 ミクロンの場合には、吸着効果はほとんど無視できるということである。したがって、 C にもよるが、通常のパイプフローでは、水分子の吸着について考える必要はないのである。

つぎに、この場合のせん断力分布は式(39)からの計算値が図-5に示してある。

図中、実線はポアジューユ則のせん断力分布であり、流速分布の速度こう配が全体的に小さいから、式(39)のプロットとほとんど同一であることがわかる。

流速分布とせん断力分布をあわせ、流れに対する吸着

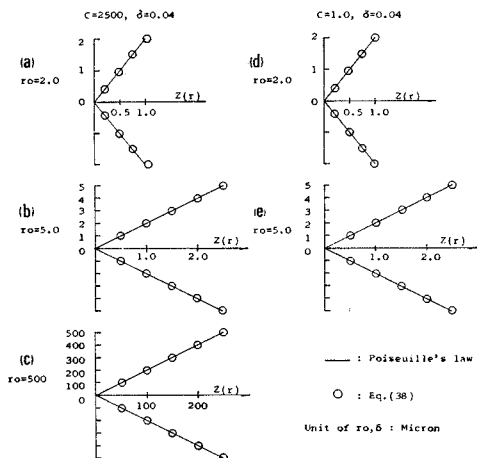


図-5 せん断力分布

効果を十分把握することができる。

さらに、平均流速について、式 (36), (37) から $A_0 = \pi(r_0 - \delta)^2$ を用いて検討する。

まず、種々の円管径に対する u_m とポアジューユ則からの u_m^* を計算する。そこで、 u_m と u_m^* の比を縦軸に、横軸に円管半径 r_0 および、 r_0 と δ の無次元量を同時にとり、 $\delta=0.04$ ミクロン、 $C=1.0$, $C=2500$ の場合の計算値をプロットしたものが 図-6 である。

$C=1.0$ の場合より $C=2500$ の場合のほうが同一管半径でも吸着効果が著しく、円管半径が小さくなるにつれその傾向が顕著となる。

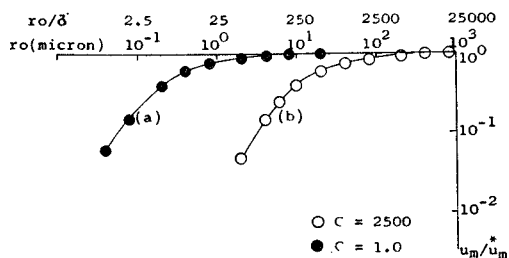


図-6 r_0/δ , r_0 と u_m/u_m^* の関係

流れに関与する C の影響を平均粘性係数の立場から調べてみる。

式 (40), (41) から、 $A_0 = \pi(r_0 - \delta)^2$, $\delta=0.04$ ミクロン、 $C=10, 100, 1000$ として、 μ_{am}/μ と r_0/δ の計算値をプロットすれば 図-7 のようになる。明らかに、 C が大きいほど管内の平均粘性係数は大きくなり、吸着効果が流れに大きく影響することになる。

結果的に、流れに対する吸着効果の影響を的確に知るためには抵抗係数とレイノルズ数の関係から検討するのがよい。

抵抗係数とレイノルズ数の関係は式 (32) で与えられ

ているから、容易に計算することができる。

式 (32) において、 $A_0 = \pi(r_0 - \delta)^2$ とすれば、 $C=1.0$ 2500 の場合に $M(r_0)$ の値はすでに平均流速を計算した際、種々の円管半径について得られているから、 $Re f$ 関係が計算できる。

計算結果をプロットしたものが 図-8 である。図中、点線は吸着効果のない場合、つまり $Re f=64$ の関係である。

円管半径が小さくなれば、吸着効果が卓越し、 $Re f=64$ の関係から徐々にはずれることが知れる。

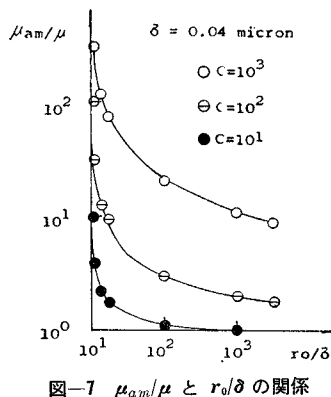


図-7 μ_{am}/μ と r_0/δ の関係

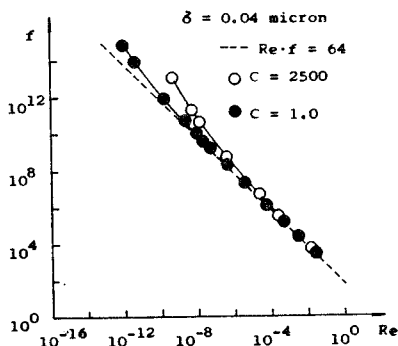


図-8 f と Re の関係

5. 微粒土中の浸透流の表現

前述した理論結果に基づき、吸着効果を受ける浸透流の表現を考える。

従来、浸透流のモデル化に細円管モデル (capillary model) がしばしば用いられ、浸透流の抵抗の問題を論

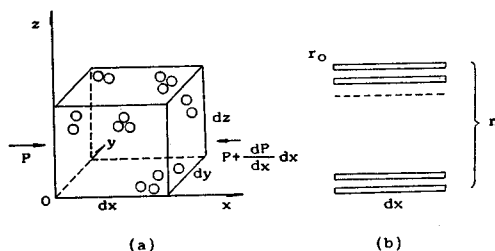


図-9 多孔体モデル

ずる場合有用である。

ここでは簡単のため、図-9の(a)図のように x, y, z 座標系に三辺それぞれ dx, dy, dz , ボリューム dv , 空げき率 λ , 平均粒径 \bar{d} の任意多孔体中の浸透流を考え、そこでの圧力の x 方向作用線は多孔体の重心を通るとする。

そうすれば、浸透流は図-9の(b)図のように、半径 r_0 , 長さ dx の n 本の細円管中の流れにおき変えることができる。

n 本の細円管中、個々の細円管について、すでに述べた理論結果が成立するものと考えれば、吸着効果を受ける浸透流の表現を知ることができよう。ここで、注意すべきは、浸透流の場合、細円管の半径 r_0 は平均粒径 \bar{d} によって評価するほうが実用的であるということである。だから、 $r_0 = \xi \bar{d}$ (ξ ; 定数) とおいて、浸透流速 U_m は式(20)から、

$$U_m = -\frac{1}{8\mu} \frac{\pi}{A_0} M(\xi \bar{d}, i) \frac{dP}{dx} \dots\dots\dots(42)$$

となる。ここで、 $M(\xi \bar{d}, i)$ は式(21)~(23)の r_0 を $\xi \bar{d}$ と置き変えたものとなる。

無論、 $A_0 = \pi(\xi \bar{d} - \delta)^2$ とすれば、真の浸透流速、 $A_0 = \pi \xi^2 \bar{d}^2$ とすれば、見掛け上の流速(浸透流でいう見掛け流速ではない)である。

浸透流量 q は、 $q = nA_0 U_m$ だから、

$$q = -\frac{n\pi}{8\mu} M(\xi \bar{d}, i) \frac{dP}{dx} \dots\dots\dots(43)$$

である。

また、浸透流でしばしば用いる見掛けの流速 $U (= q/dydz)$ は

$$U = -\frac{n\pi}{8\mu} \frac{M(\xi \bar{d}, i)}{dydz} \frac{dP}{dx} \dots\dots\dots(44)$$

となる。

さらに、式(44)は(体)空げき率 λ を用いて書けば、 $dydz = nA_0/\lambda$ となるから、

$$U = -\frac{\pi\lambda}{8\mu} \frac{M(\xi \bar{d}, i)}{A_0} \frac{dP}{dx} \dots\dots\dots(45)$$

となる。

いま、もし、式(42)はダルシー則の形でかけば、 $I = -\frac{1}{w} \frac{dP}{dx}$ とおいて、

$$U_m = kI \dots\dots\dots(46)$$

$$k = \frac{w}{8\mu} \frac{\pi}{A_0} M(\xi \bar{d}, i) \dots\dots\dots(47)$$

ここで、 w は水の単位体積重量であり、 I は動水勾配である。

同様に、式(45)は

$$U = \lambda kI \dots\dots\dots(48)$$

と書ける。

いうまでもないが、式(46)、(48)から、

$$U = \lambda U_m \dots\dots\dots(49)$$

が成立し、Dupuit-Forchheimerの仮定と呼ばれているものである。

つぎに、式(46)、(47)において、吸着効果を考えなければ、 $A_0 = \pi \xi^2 \bar{d}^2$ とおき、通常のダルシー則であり、

$$U_m^* = k^* I \dots\dots\dots(50)$$

$$k^* = \frac{w}{8\mu} \xi^2 \bar{d}^2 \dots\dots\dots(51)$$

であるから、式(46)と式(50)から I を消去し、

$$U_m = \frac{k}{k^*} U_m^* \dots\dots\dots(52)$$

また、式(47)と式(51)から、

$$\frac{k}{k^*} = \frac{\pi}{A_0 \xi^2 \bar{d}^2} M(\xi \bar{d}, i) \dots\dots\dots(53)$$

$$\frac{k}{k^*} < 1$$

となる。

さらに、式(49)から、

$$U = \lambda \frac{k}{k^*} U_m^* \dots\dots\dots(54)$$

である。

したがって、理論上、吸着効果を含む透水係数 k と通常の吸着効果を含まない透水係数 k^* の比 k/k^* が分れば、浸透流速 U_m , 見掛けの流速 U ともに決定することができる。

無論、 $k/k^* < 1$ だから、吸着効果を含む U_m は U_m^* より小さくなるはずである。

しかしながら、實際上、式(52)、(54)は定数の導入を余儀なくされる。

最後に、抵抗係数とレイノルズ数の関係についてのべる。

浸透流の場合、しばしばレイノルズ数 R_e は、

$$R_e = \frac{U \cdot \bar{d}}{\nu} \dots\dots\dots(55)$$

また、抵抗係数 ζ は

$$I = \frac{\zeta}{d} \frac{U^2}{2g} \dots\dots\dots(56)$$

と定義されることが多い。

いま、式(55)、(56)、(45)から、 $R_e - \zeta$ 関係は

$$R_e \zeta = \frac{16 A_0 \bar{d}^2}{\pi \lambda M(\xi \bar{d}, i)} \dots\dots\dots(57)$$

となる。

また、式(57)は式(53)を用いれば、

$$R_e \zeta = \frac{16}{\xi^2} \frac{k^*}{k} \dots\dots\dots(58)$$

となる。

式(58)において、 $k^*/k > 1$, また $\xi^2 < 1$ である。

6. 結 論

低レイノルズ数浸透流において、吸着水の取扱いを単純なモデル化によって理論的に考察したのであるが、吸着効果を的確に説明することができた。しかし、吸着現象そのものがよくわかっていないため、その定量化に未だ若干のあいまいさを伴う。たとえば、本論文で採用した吸着効果を記述する特性値 δ, n, C は、 δ について研究者の間で統一見解がなく、また、 n, C についても本質的な妥当性を立証しにくい。

しかしながら、少なくともつぎのことは結論的に要約しうらと思う。

(1) ダルシー則は低レイノルズ数において吸着効果を考え補正されなければならないが、これは筆者の提唱する吸着係数 α の導入によって形式的に表現しうる。

(2) 低レイノルズ数について、平均浸透流速 U_m 、見掛けの流速 U はそれぞれ式(52)、(54)によって表わされる。

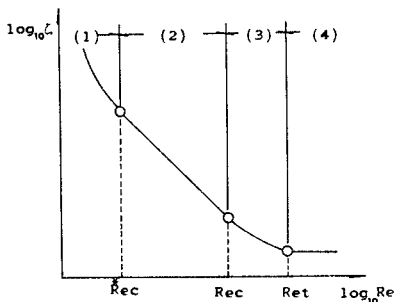
(3) 抵抗係数 k とレイノルズ数 Re の関係は 図一10 のようになる。すなわち、従来の層流、乱流に関する知識を含めて、限界レイノルズ数 Re_c 、遷移流から完全乱流への移行レイノルズ数 Re_t のほかに、層流下限レイノルズ数 Re^*_{ec} の存在を認めなければならない。

(4) 流場内のせん断力 τ の表現は 図一10 を参照して各領域 (1)~(4) について、

$$(1); \tau = \mu_a D_{ij} \quad (3); \tau = (\mu + \epsilon) D_{ij}$$

$$(2); \tau = \mu D_{ij} \quad (4); \tau = \epsilon D_{ij}$$

としなければならない。ここで、 ϵ ; 渦度粘性係数、 D_{ij} ; 流体変形テンソル ($i, j=1, 2, 3, i \neq j$) である。



図一10 抵抗係数とレイノルズ数の関係

最後に、本研究に当たり、大阪大学工学部の室田教授から終始、卓越した示唆、指導を賜ったことを記して深く謝意を表わしたい。

参 考 文 献

- 1) S. Hansbo : Consolidation of Clay, With Special Reference to Influence of Vertical Sand Drains, Swed. Geotech. Inst. Proc. No. 18, 1960, pp. 46-47.
- 2) M. Kutflex : Temperature and Non-Darcian Flow of Water, Internat. Soil Water Symp., Praha, 1967, pp. 44-46.
- 3) R.J. Miller and P.F. Low : Threshold Gradient for Water Flow in Clay Systems, Proc. Soil Sci. Soc. Amer. Vol. 27, pp. 607-608.
- 4) J. Habib and C. Thirriot : Ecart à la Loi de Darcy pour les Ecoulements d'Eau à Faible Vitesse dans les Argiles, 13th Congress of I.A.H.R., Japan, Sept., 1969, p. 455.
- 5) D. Swartzendruber : Modification of Darcy's Law for the Flow of Water in Soils, Soil Sci., Vol. 98, 1962, pp. 22-29.
- 6) D. Swartzendruber : Non-Darcy Flow Behavior in Liquid-Saturated Porous Media, J. Geophysical Research, Vol. 67, No. 13, 1962, pp. 5205-5213.
- 7) 崎川 : 物性論, 共立出版, S. 43, p. 101.
- 8) 井本 : 有機電子論, 共立出版, S. 38, p. 33.
- 9) 井本 : 前出, pp. 33-34.
- 10) A.R. Jumikis : Soil Mechanics, D. Van Nostrand Company, 1962, p. 219.
- 11) G. Karádi & I.V. Nagy : Investigation into the Validity of the Linear Seepage Law, 9th Convention of I.A.H.R., Belgrade, 1961, p. II-10-7.
- 12) P. Ya. Polubarinova-Kochina : Theory of Ground Water Movement, Princeton Univ. Press, 1962, p. 8.
- 13) 室田・佐藤 : 第18回土木学会年次学術講演会講演集, S. 38, p. 5-2
- 14) 土質工学ハンドブック : 土質工学会, 技報堂, S. 40, p. 47.
- 15) C. Migniot : Étude des Propriétés Physiques de Différents Sédiments très Fins et de Leur Comportement sous de Actions Hydrodynamiques, La Houille Blanche, No. 7, 1968, p. 594.
- 16) 粘土ハンドブック : 日本粘土学会, 技報堂, S. 42, p. 828.
- 17) 農業土木ハンドブック : 農業土木学会, 丸善出版, S. 44, p. 1083.
- 18) 船引・川村 : 農業土壌学, 養賢堂, S. 44, p. 166.
- 19) 山内 : 土質力学 (最上武雄編著), 技報堂, S. 44, p. 12.
- 20) W.D. Kemper : マサツ土の工学的性質とその取扱い指針, 土質工学会, S. 45, p. 34.
- 21) 佐藤 : 高レイノルズ数浸透流の流れの計測, 第14回水理講演会講演集, S. 45, p. 51.
- 22) 森口・宇田川・一松 : 数学公式集 (その1), 岩波全書, S. 42, p. 91.

(1970. 7. 14・受付)