

箱型断面に作用する二次元定常空気力に関する  
自由流線理論の応用についてON THE APPLICATION OF THE FREE STREAM LINE THEORY  
ON TWO-DIMENSIONAL AEROSTATIC FORCES ACTING  
ON THE RECTANGULAR CYLINDER

白石 成人\*・小川 一志\*\*

By Naruhito Shiraiishi and Kazushi Ogawa

## 1. ま え が き

構造物の耐風応答の問題は、長大つり橋、斜張橋を始め、構造物の長大化高層化とともに次第に重要なものとなってきている。最近では長大つり橋補剛桁構造について活発な研究が行なわれており、耐風特性<sup>1)~4)</sup>、なかでも、不安定振動の発振機構も解明されつつあるように思われる<sup>5)</sup>。しかし長大つり橋の耐風応答についても補剛桁、ケーブル、タワーなどでは断面形状、振動性状、空力特性が異なり、不安定振動もすべて同じ範ちゅうに入るものではなく、それぞれ特有の応答を示すことはよく知られているところである。特に断面形状についてみれば、薄肉構造物ではしばしば箱型閉断面が主要部材あるいは補助部材として用いられ、その優れた力学特性が設計上利用されるが、一方このような形状に働く流体力からみれば、この種の断面は非流線型断面であり、形状によっては負勾配の揚力曲線部分を生じ、跳躍振動現象を生起せしめる危険性がある。非流線型断面に作用する流体力は、従来の翼理論では不十分であり、現在のところまだ十分に解明されていないように思われる。G.V. Parkinson ら<sup>6),7)</sup>は擬定常理論に基づき、実験的に求めた定常空気力を用いて、たわみ一自由度振動系の非定常空気力を近似し、箱型断面の非線型振動として、耐風応答をある程度解明している。この計算値は実験結果ともよく一致しており、この方面でのきわめて重要な成果であると思われる。箱型構造物に作用する流体力が平板状構造物のそれと著しく異なることは実験的にも指摘されてきたところであるが、著者らはその特性を不連続流理論で求めることを試みた。まず 2. においては自由流線理論におけるモデル化についてのべ、3. においては、

自由流線理論による箱型断面に作用する流体力を Levi-Civita の方法で求め、4. ではこれらの基本的性質について数値計算例を示し、5. では実験値との比較を行なう。

## 2. 自由流線理論

自由流線理論<sup>8)~11)</sup>は、周知のように古典流体力学の範囲内で D'Alembert の背理に反して、抗力の存在を説明しようとしたもので、角張った物体の後に発達する後流域を圧力のみの場合として表現するものである。これは当初 H. Helmholtz, G. Kirchhoff らによって研究されたが、いわゆる Helmholtz 理論では、後流域を定義する不連続流線（自由流線）は無遠点まで拡がり、その圧力は、不攪乱流れにおける圧力に等しいと仮定している。しかし後流域における圧力は渦などの乱れのため、圧力降下し、仮定した値よりも低く、Helmholtz 理論では十分に実際の流れの後流状態を表現できないようである。後流圧力が不攪乱流圧力よりも低いという現象を考慮するために、Helmholtz モデルを修正したいくつかのモデルが考えられている。すなわち、

(i) Riabouchinsky モデル<sup>12)</sup>

(ii) 巻き込みジェット・モデル (re-entrant jet model).

(iii) Roshko モデル<sup>13),14)</sup>

などである。これらの理論はいずれも後流変数を導入して、ポテンシャル流理論のもとで、後流におけるエネルギーの散逸を表現しようとしている。

さて、これらの理論における後流変数は次式のように定義される<sup>11)</sup>。

$$\sigma = \frac{p_\infty - p_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} \dots \dots \dots (1)$$

ただし、 $p_\infty$  は不攪乱流における圧力、 $p_w$  は後流圧

\* 正会員 D. Eng., Sc. 京都大学助教授 工学部土木工学教室

\*\* 正会員 工修 川崎重工業(株)

力、 $\rho$  は流体密度、 $U$  は流速である。

キャビテーションの場合、後流変数が等しければ、幾何学的に相似な条件にある二つのキャビテーション流は、動的にも相似であり、定常空気力係数などは、後流変数のみの関数であるといえるが、後流については Reynolds 数などが影響すると考えられるため、後流変数  $\sigma$  はそれぞれの場合について実験的に決定されなければならない。

### 3. 自由流線理論の箱型断面への応用

#### (1) 箱型断面まわりの流れ

一般に物体のまわりの流れは、後流域とその外部とに分けられるが、後流域における流れの様子はかなり複雑であり、詳細な考察は現在のところまだ十分に行われていないようである。ここでは自由流線理論を応用して、後流域は圧力一定の領域とみなすが、後流域が十分に発達したとき、後流域に接する物体の部分は流れになら影響をおよぼさないと考えられるので、箱型断面は、きょう角  $90^\circ$  のくさびとみなすことができる。したがって流れの形式より箱型断面まわりの流れはつぎのように分類できる。

- 1) 流線はくさび形の両端ではく離する (図-1)。
  - 1-1 停留点が角部と一致する。
  - 1-2 停留点が角部以外にある。
- 2) 流線はくさびの角部および一端ではく離する。
  - 2-1 角部ではく離した流線はそのまま自由流線を形成し、傾いた平板のまわりの流れの状態と一致する。
  - 2-2 角部ではく離した流線はまき込んで re-entrant jet を形成する。

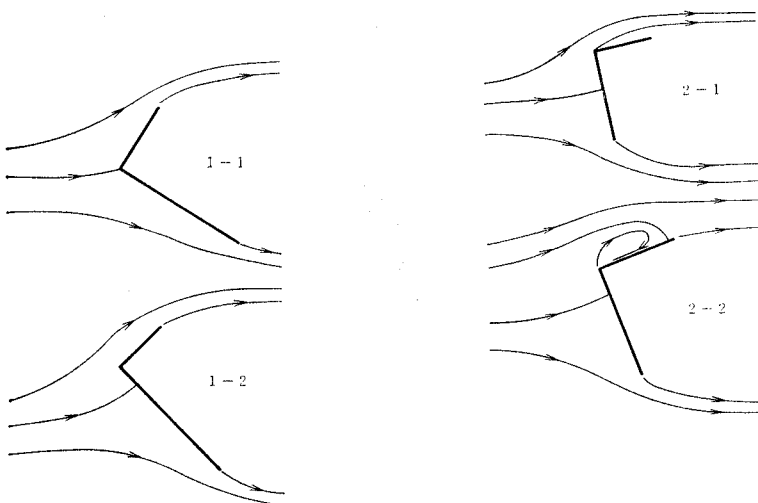


図-1 流れの型

このように、くさびのまわりの流れは停留点、はく離点に注目して分類することが可能であるが、いま、迎え角として、断面の底板と不攪乱流とのなす角をとれば、これをパラメーターとして流れの型の推移をつぎのように表わすことができると思われる。すなわち、迎え角が微小なとき、自由流線は、角部ではく離し、流れの型は傾いた平板のまわりの流れで近似される。迎え角が大きくなるにつれて、停留点は角部に近づき、ある迎え角でこれと一致する。さらに迎え角が大きくなると停留点は断面の底板側に移動する。したがって、くさびのまわりの流れはつぎのように分類することができる。

- (i) 平板のまわりの流れ
  - (ii) 停留点が角部にあり、流線がくさびの端部ではく離する。
  - (iii) 停留点が角部以外の点にあり、流線がくさびの端部ではく離する。
- (iii) の流れについてはいくつかの数学モデルが考えられるが、以下の考察では、角部ではく離せず、流れはくさびの上流側二辺に沿って流れるものとする。この場合、角部で流線ははく離しないため、その向きは急変し、流速は無有限大となって、物理的には不適当であるが、ある迎え角の範囲では流れの状態をかなり表現できるようである。このモデルの妥当性については 5. の実験値との比較に際して検討する。

#### (2) Roshko モデルで近似した後流域およびその複素ポテンシャル<sup>13)</sup>

ここでは十分に発達した後流域をもつ物体のまわりの定常二次元流れに関する Roshko モデル<sup>13)</sup> について簡単に説明する。図-2 に流れの状態を示すが、後流域外の流れを非回転ポテンシャル流であると仮定すれば、複素ポテンシャル  $w(z)$  が存在し、

$$w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

$$\frac{dw}{dz} = u - iv \dots \dots (2)$$

となる。  
さて、流線が物体からはく離するときの流速を  $q=1$  とすれば、自由流線に沿って、点  $D, D'$  に達するまで、流速は  $q=1$  で、点  $D, D'$  で流線は  $x$  軸と平行となり、そのまま下流に流れ、流速は  $q=1$  から無限遠点における流速  $U = (1+\sigma)^{-1/2}$  に減少していく。  
式(2)で定義される複素ポテンシャルを求めるために、図-2 の  $z$  平面を  $w$ -平面で示せば、 $\phi$

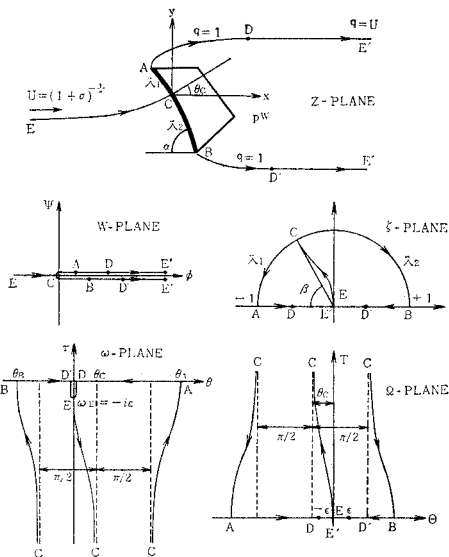


図-2

軸の正側に沿う二直線となるが、これは次式により  $\zeta$ -平面上の単位円の上半分に等角写像される<sup>9)</sup>。

$$\sqrt{w} = -b \left\{ \cos \beta + \frac{1}{2} \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} \right) \right\} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、

$$b = \frac{1}{2} (b_1 + b_2), \quad \cos \beta = \frac{b_2 - b_1}{b_1 + b_2} \dots \dots \dots (4)$$

であり、 $b_1, b_2$  は  $w$  平面における点  $A, B$  に対応するポテンシャル  $w_A, w_B$  で定義される二正数である。

$$w_A = b_1^2, \quad w_B = b_2^2 e^{2\pi i} \dots \dots \dots (5)$$

また  $\zeta$  平面で、流線  $EC$  は実数軸に垂直に  $\zeta=0$  を離れ、方向  $\arg \zeta = \pi - \beta$  に沿って、 $C$  に近づく。物体  $ACB$  は、半円  $|\zeta|=1, 0 \leq \arg \zeta \leq \pi$  に対応し、自由流線  $ADE'$  と  $BD'E$  は実数軸上の半径に対応する。

さていま関数  $\omega(\zeta)$  を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} e^{i\omega(\zeta)} &\equiv \frac{dw}{dz} = u - iv \equiv qe^{i\theta} \\ \therefore \omega(\zeta) &= \theta - i \log q \equiv \theta + i\tau \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

ここに、 $q$  は流速、 $\theta$  は流れの方向を示す。 $\omega$ -平面での流れは 図-2 に示すようであるが、点  $C$  で  $\omega$  の実数成分  $\theta$  が跳躍しているのは、 $z$  平面における点  $C$  で流線が分岐することによる。裂け目  $DED'$  は Roshko モデルで仮定した自由流線の速度の変化によるもので、点  $E$  において  $w_E = -i\varepsilon$  となる。この裂け目はつぎの変換、すなわち、

$$\omega(\zeta) = -\sqrt{\omega^2(\zeta) + \varepsilon^2} \dots \dots \dots (7)$$

ただし、

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \log(1 + \sigma) \dots \dots \dots (8)$$

により除かれる。式 (7) で定義される関数  $\omega(\zeta)$  により物体のまわりの流れの状態はすべて決定される。

### (3) 箱型断面に作用する流体力

物体に作用する流体力は、そのまわりの流れの状態により決定されるが、二次元ポテンシャル流れにおかれた箱型断面について、(1)での流れの型に基づき、迎え角、後流変数、断面の縦横比などの影響を考慮して、その流体力を解析する。

#### a) 傾いた平板のまわりの流れ (TYPE-1).

箱型断面の迎え角が小さな場合が、傾いた平板に対応することは前述の考察でのべたが、いま定常二次元流れのなかでの後流域は十分に発達しているとすれば、流れの様子は 図-3 のようである。すでに  $w, \zeta, \omega, \Omega$  平面についてのべたが、この流れを決定することは、未知関

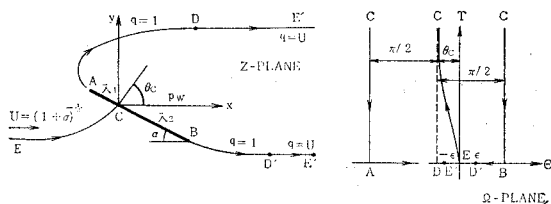


図-1 TYPE 1 の流れ

数  $\Omega$  を決定することに帰せられる。関数  $\Omega(\zeta)$  は  $\zeta = e^{i(\pi-\beta)}$  において、対数特異点をもち、 $\zeta$ -平面での単位円内の他の点ではすべて正則でなければならないから、これらの条件を満たす関数  $\Omega(\zeta)$  は、

$$\Omega(\zeta) = i \log \left( \frac{1 + \zeta e^{-i\beta}}{1 + \zeta e^{i\beta}} \right) + \sum_{n=1}^3 A_n \zeta^n \dots \dots \dots (9)$$

のように与えられる。 $\zeta$  平面で、物体上では  $\zeta = e^{i\eta}$ ,  $0 \leq \eta \leq \pi$  であるから、

$$\begin{aligned} T(\eta) &\equiv \text{Im } \Omega(\zeta) = \frac{1}{2} \log \left( \frac{1 + \cos(\eta - \beta)}{1 + \cos(\eta + \beta)} \right) \\ &+ \sum_{n=1}^3 A_n \sin n\eta \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

$$\Theta(\eta) \equiv \text{Re } \Omega(\zeta) = \beta_0 + \beta + \sum_{n=1}^3 A_n \cos n\eta \dots \dots \dots (11)$$

ただし、

$$0 \leq \eta \leq \pi - \beta \text{ のとき } \beta_0 = 0$$

$$\pi - \beta < \eta \leq \pi \text{ のとき } \beta_0 = -\pi$$

さて、式 (3) および式 (6) より  $z$ -平面の要素  $dz$  は、

$$\begin{aligned} dz &= e^{i\omega} dw = \frac{b^2}{2} e^{-i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2}} \\ &\times \left( \zeta + \frac{1}{\zeta} + 2 \cos \beta \right) \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) \frac{1}{\zeta} d\zeta \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

であり、物体上で  $\zeta = \exp(i\eta)$  であるから、式 (12) より、

$$z = 2b^2 \int_{\eta}^{\pi-\beta} e^{-i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2}} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \dots \dots \dots (13)$$

となる。したがって、停留点の位置は  $CA, CB$  の長さであるから次式で与えられることになる。

$$S = \lambda_1, \lambda_2 = \int_{0, \pi}^{\pi - \beta} \frac{|dz|}{d\eta} d\eta = 2b^2 \times \int_{0, \pi}^{\pi - \beta} e^{-\tau(\eta)} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \dots (14)$$

ただし、

$$\tau = \text{Im } \omega = -\text{Im}(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2} \dots (15)$$

また、物体に沿う流れではその曲率半径は、

$$R = \frac{ds}{d\theta} = 2b^2 e^{-\tau(\eta)} |\cos \eta + \cos \beta| \sin \eta \frac{d\eta}{d\theta} \dots (16)$$

である。

つぎに、平板に作用する定常流体力について考察するが、不連続流問題ではいわゆる Levi-Civita の式<sup>9)</sup>で示すことができる。すなわち抗力  $X$ , 揚力  $Y$ , ピッチング・モーメント  $M$  (停留点  $C$  まわりに頭下げを正とする) は次式で与えられる。

$$X + iY = -\frac{i\rho}{2} \oint_{\Gamma} e^{i\omega} \frac{dw}{d\zeta} d\zeta = -\frac{i\rho b^2}{4} \oint_{\Gamma} \exp\{-i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2}\} \times \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2\cos\beta\right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{d\zeta}{\zeta} \dots (17)$$

ただし、式 (17) の積分は  $\Gamma$  (単位円  $|\zeta|=1$ ) 上で行なう。また、ピッチング・モーメント  $M$  は、

$$M = \frac{\rho}{2} \text{Re} \int_{(BCA)} \{e^{-i\omega(\zeta)} - e^{-i\omega(\bar{\zeta})}\} \zeta \frac{dw}{d\zeta} d\zeta \dots (18)$$

ただし、積分は半円  $|\zeta|=1, 0 \leq \eta \leq \pi$  上で行なう。

さて、 $|\Omega|$  が、単位円  $|\zeta|=1$  上で、つねに微小量  $\varepsilon^2$  より大きいことに留意して、指数関数  $e^{i\omega}$  をつぎのように近似する。

$$e^{i\omega} = e^{-i(\Omega^2 - \varepsilon^2)^{1/2}} = e^{-i\Omega + \frac{i\varepsilon^2}{2\Omega} + 0(\varepsilon^4)} = e^{-i\Omega} \left(1 + \frac{i\varepsilon^2}{2\Omega} + 0(\varepsilon^4)\right) \dots (19)$$

また、 $\Omega(0)=0$  より、式 (19) を Maclaurin 展開すれば、

$$e^{-i\Omega} \left(1 + \frac{i\varepsilon^2}{2\Omega}\right) = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - i\zeta \Omega'(0) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{1}{2} \zeta^2 \left\{ -i\Omega''(0) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) - \Omega'(0)^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\right) \right\} + \dots (20)$$

となり、これを式 (17) に代入すれば、留数定理より、

$$X + iY = \frac{\pi\rho b^2}{2} \left[ i2\Omega'(0) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \cos\beta + \frac{i}{2}\Omega''(0) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) + \frac{1}{2}\Omega'^2(0) \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\right) \right] \dots (21)$$

をうるが、これは後流変数  $\sigma=0$  のとき、古典的な Levi-Civita の式に帰着する。一方式 (9) より  $\Omega'(0), \Omega''(0)$  は、

$$\left. \begin{aligned} \Omega(\zeta) &= i \frac{e^{-i\beta} - e^{i\beta}}{(1+\zeta e^{i\beta})(1+\zeta e^{-i\beta})} \\ &\quad + A_1 + 2A_2\zeta + 3A_3\zeta^2 \\ \Omega''(\zeta) &= -i \frac{(e^{-i\beta} - e^{i\beta})(e^{-i\beta} + 2\zeta + e^{i\beta})}{(1+\zeta e^{i\beta})^2(1+\zeta e^{-i\beta})^2} \\ &\quad + 2A_2 + 6A_3\zeta \end{aligned} \right\} \dots (22)$$

したがって、

$$\Omega'(0) = 2\sin\beta + A_1, \Omega''(0) = -2\sin 2\beta + 2A_2 \dots (23)$$

となるから、抗力  $X$ , 揚力  $Y$  は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} X &= \pi\rho b^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\right) \left(\sin\beta + \frac{A_1}{2}\right)^2 \\ Y &= \pi\rho b^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \left(\sin\beta \cos\beta + A_1 \cos\beta + \frac{A_2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

ピッチング・モーメント  $M$  に関する式 (18) は、2, 3 の場合について、T. Wu<sup>14)</sup>, S. Brodetsky<sup>15)</sup> が解析解を与えているが、計算が非常に複雑である。そこで、式 (18) を数値計算するためにつぎのような変換を行なう。

まず、式 (6) および式 (3) より、

$$e^{-i\omega(\zeta)} - e^{-i\omega(\bar{\zeta})} = e^{-i\theta} (e^{-\tau} - e^{\tau}) \dots (25)$$

$$\frac{dw}{d\zeta} = \frac{b^2}{2} \left(\zeta + \frac{1}{\zeta} + 2\cos\beta\right) \left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) \frac{1}{\zeta} \dots (26)$$

物体上では、 $\zeta = \exp(i\eta), 0 \leq \eta \leq \pi$  であるから、

$$\frac{dw}{d\zeta} = -2b^2 (\cos\eta + \cos\beta) \sin\eta d\eta \dots (27)$$

となる。また、 $\omega = \theta + i\tau, \Omega = \theta + iT$  であるから、式 (19) よりつぎのような近似式をうる。

$$\left. \begin{aligned} e^{i\theta} &\sim e^{-i\theta} \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{i\theta}{\theta^2 + T^2}\right) \\ e^{-i\theta} &\sim e^{i\theta} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{i\theta}{\theta^2 + T^2}\right) \\ e^{\tau} &\sim e^{-T} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{T}{\theta^2 + T^2}\right) \\ e^{-\tau} &\sim e^T \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{T}{\theta^2 + T^2}\right) \end{aligned} \right\} \dots (28)$$

式 (25), (27), (28) を式 (18) に代入すれば、

$$M = -b^2 \rho \text{Re} \int_0^\pi e^{i\theta} \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{i\theta}{\theta^2 + T^2}\right) \times (e^{\tau} - e^{-\tau}) \zeta (\cos\eta + \cos\beta) \sin\eta d\eta \dots (29)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq \eta \leq \pi - \beta \text{ のとき} \\ z &= 2b^2 \int_{\eta}^{\pi - \beta} e^{i\omega} (\cos\eta + \cos\beta) \sin\eta d\eta \\ \pi - \beta \leq \eta \leq \pi \text{ のとき} \\ z &= -2b^2 \int_{\pi - \beta}^{\eta} e^{i\omega} (\cos\eta + \cos\beta) \sin\eta d\eta \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

また、

$$e^{i\omega} = e^{i(\theta+i\tau)} \sim e^{i\theta} \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{i\theta}{\theta^2+T^2} \right) e^{-\tau} \dots (31)$$

であるから、式 (30), (31) を式 (29) に代入し、積分の実数部をとれば、つぎのようにピッチング・モーメントが求められる。

$$\begin{aligned} M = & -2b^4\rho \int_0^{\pi-\beta} \{ (e^\tau - e^{-\tau}) (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta \} \\ & \times \left\{ \left( \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \sin \theta \right) \right. \\ & \times \int_\eta^{\pi-\beta} \left( \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \sin \theta \right) \\ & \times (\sin \eta + \cos \beta) \sin \eta \cdot e^{-\tau} d\eta \\ & + \left( \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \cos \theta \right) \\ & \times \int_\eta^{\pi-\beta} \left( \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \cos \theta \right) \\ & \times (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta \cdot e^{-\tau} d\eta \} d\eta \\ & + 2b^4\rho \int_{\pi-\beta}^\pi \{ (e^\tau - e^{-\tau}) (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta \} \\ & \times \left\{ \left( \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \sin \theta \right) \right. \\ & \times \int_{\pi-\beta}^\eta \left( \cos \theta + \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \sin \theta \right) \\ & \times (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta \cdot e^{-\tau} d\eta \\ & + \left( \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \cos \theta \right) \\ & \times \int_{\pi-\beta}^\eta \left( \sin \theta - \frac{\varepsilon^2}{2} \frac{\theta}{\theta^2+T^2} \cos \theta \right) \\ & \times (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta \cdot e^{-\tau} d\eta \} d\eta \dots (32) \end{aligned}$$

ただし、関数  $T(\eta)$ ,  $\theta(\eta)$  は式 (10), (11) から決定される。

さて関数  $\varrho(\zeta)$  を決定する 4 個の係数  $A_n (n=1, 2, 3)$  および  $\beta$  は物体の幾何学的条件より求められ、ここではつぎのような境界条件を考慮する。

- (i)  $\theta_A = \pi - \alpha$
- (ii)  $\theta_B = -\alpha$
- (iii) 点 A, B で曲率半径は無限大である。

ここに  $\alpha$  は迎え角であるが、条件 (i), (ii) を式 (7),

(11) に適用すれば、

$$\left. \begin{aligned} \theta_B = (\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{1/2} = (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} = \beta \\ + A_1 + A_2 + A_3 \\ \theta_A = -(\theta_A^2 + \varepsilon^2)^{1/2} = -\{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} = \\ -\pi + \beta - A_1 + A_2 - A_3 \end{aligned} \right\} (33)$$

となり、これらより次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} A_1 + A_3 = -\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} + \frac{1}{2} \{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} \\ \beta + A_2 = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} \end{aligned} \right\} (34)$$

つぎに、点 B で  $\tau=0$  であるから、

$$\frac{d\theta}{d\eta} = \frac{(\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{1/2}}{\theta_B} \frac{d\theta}{d\eta} \dots (35)$$

$$\frac{d\theta}{d\eta} = -A_1 \sin \eta - 2A_2 \sin 2\eta - 3A_3 \sin 3\eta \dots (36)$$

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\theta}{d\eta} = \lim_{\eta \rightarrow 0} - (A_1 + 4A_2 + 9A_3) \sin \eta \dots (37)$$

となる。式 (35), (37) を曲率半径を示す式 (16) に代入すれば、

$$A_1 + 4A_2 + 9A_3 = -\frac{2b^2}{R} \frac{\theta_B(1 + \cos \beta)}{(\theta_B^2 + \varepsilon^2)^{1/2}} \dots (38)$$

となるから、点 B における境界条件 (iii) を適用して、

$$A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 0 \dots (39)$$

をうる。同様にして点 A における境界条件より、

$$A_1 - 4A_2 + 9A_3 = 0 \dots (40)$$

となり、式 (34), (39), (40) で示される 4 個の条件式より、4 個の係数  $A_n (n=1, 2, 3)$ ,  $\beta$  が求められる。すなわち、

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} - \frac{1}{2} \{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} \dots (41)$$

$$\begin{aligned} A_1 = & -\frac{9}{16} \pi + \frac{9}{16} (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \\ & + \frac{9}{16} \{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} \dots (42) \end{aligned}$$

$$A_2 = 0 \dots (43)$$

$$\begin{aligned} A_3 = & \frac{\pi}{16} - \frac{1}{16} (\alpha^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \\ & - \frac{1}{16} \{(\pi - \alpha)^2 + \varepsilon^2\}^{1/2} - \frac{1}{9} A_1 \dots (44) \end{aligned}$$

いま抗力係数  $C_D$ , 揚力係数  $C_L$ , ピッチング・モーメント係数  $C_{M_0}$  (重心軸まわり頭下げを正とする) を、

$$\begin{aligned} X = & \frac{1}{2} \rho U^2 l C_D, \quad Y = \frac{1}{2} \rho U^2 l C_L, \\ M_0 = & \frac{1}{2} \rho U^2 l^2 C_{M_0} \dots (45) \end{aligned}$$

とすれば、 $U = (1 + \sigma)^{-1/2}$  なることに留意して、

$$C_D = \frac{2\pi}{J} (1 + \sigma) \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{6} \right) \left( \sin \beta + \frac{A_1}{2} \right)^2 \dots (46)$$

$$\begin{aligned} C_L = & \frac{2\pi}{J} (1 + \sigma) \left( 1 + \frac{\varepsilon^2}{4} \right) \\ & \times \left( \sin \beta \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2} \right) \dots (47) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{M_0} = & \frac{4\pi}{J^2} (1 + \sigma) K + \left( \mu - \frac{1}{2} \right) \\ & \times (C_L \cos \alpha + C_D \sin \alpha) \dots (48) \end{aligned}$$

をうる。ただし、

$$J = S b^{-2} \dots (49)$$

$$K = M / 2 \pi \rho b^4 \dots (50)$$

$$\mu = S_0 / S \dots (51)$$

$$S = 2b^2 \int_0^\pi e^{-\tau(\eta)} [\cos \eta + \cos \beta] \sin \eta d\eta \dots (52)$$

$$S_0 = 2b^2 \int_0^\beta e^{-\tau(\eta)} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \dots (53)$$

であり、 $M$  は式 (32)、係数  $A_n$  ( $n=1, 2, 3$ )、 $\beta$  は式 (41)~(44) より求められる。

b) 停留点が角部にあり、流線がくさびの端部ではく離する流れ (TYPE-2)

十分に発達した後流域をもつ、くさびまわりの定常二次元流において、停留点  $C$  が角部と一致する流れの様子は図-4 に示すようである。この場合くさびのきょう角は  $90^\circ$  であり、角の 2 等分線が  $x$  軸となす角を  $\theta_c$  とす

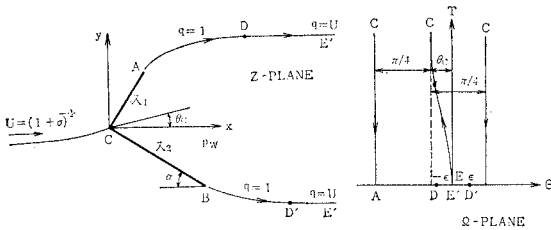


図-4 TYPE 2 の流れ

るとき、くさびの一片  $\lambda_1$  に沿って停留点  $C$  に近づけば、 $\theta \rightarrow (\pi/4) + \theta_c$ 、他方の一片  $\lambda_2$  に沿って  $C$  に近づけば、 $\theta \rightarrow -(\pi/4) + \theta_c$  となる。このような境界条件をみたす関数  $\varrho(\zeta)$  としては、

$$\varrho(\zeta) = \frac{i}{2} \log \frac{1 + \zeta e^{-i\beta}}{1 + \zeta e^{i\beta}} + \sum_{n=1}^3 A_n \zeta^n \dots (54)$$

が考えられる。くさび  $\lambda_1$  上では  $\zeta = \exp(i\eta)$ 、 $\pi - \beta < \eta \leq \pi$  であり、

$$\left. \begin{aligned} T(\eta) &= \text{Im } \varrho = \frac{1}{4} \log \frac{1 + \cos(\eta - \beta)}{1 + \cos(\eta + \beta)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 A_n \sin n\eta \\ \theta(\eta) &= \text{Re } \varrho = \frac{1}{2} \beta - \pi + \sum_{n=1}^3 A_n \cos n\eta \end{aligned} \right\} \dots (55)$$

一方、くさび  $\lambda_2$  上では  $\zeta = \exp(i\eta)$ 、 $0 \leq \eta < \pi - \beta$  であり、

$$\left. \begin{aligned} T(\eta) &= \text{Im } \varrho = \frac{1}{4} \log \frac{1 + \cos(\eta - \beta)}{1 + \cos(\eta + \beta)} \\ &\quad + \sum_{n=1}^3 A_n \sin n\eta \\ \theta(\eta) &= \text{Re } \varrho = \frac{1}{2} \beta + \sum_{n=1}^3 A_n \cos n\eta \end{aligned} \right\} \dots (56)$$

となる。

抗力  $X$ 、揚力  $Y$  は Levi-Civita の式 (21) で与えられるが、この場合、

$$\varrho'(0) = \sin \beta + A_1, \quad \varrho''(0) = -\sin 2\beta + 2A_2 \dots (57)$$

であるから、

$$\left. \begin{aligned} X &= \pi \rho b^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{6}\right) \left(\frac{1}{2} \sin \beta + \frac{A_1}{2}\right)^2 \\ Y &= \pi \rho b^2 \left(1 + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) \left(\frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

となる。ピッチング・モーメント  $M$  (停留点まわりで、頭下げを正とする) は式 (32) で与えられるが、 $T(\eta)$ 、 $\theta(\eta)$  は式 (55)、(56) で与えられる関数を代入すればよいことになる。

係数  $A_n$  ( $n=1, 2, 3$ )、 $\beta$  はつぎの境界条件より求められる。

(i)  $\theta_A = \theta_c + \frac{\pi}{4}$

(ii)  $\theta_B = \theta_c - \frac{\pi}{4}$

(iii) 点  $A, B$  で曲率半径は無限大

境界条件 (i), (ii) を式 (7)、(55)、(56) に用いれば、

$$\beta + 2A_2 = \frac{\pi}{2} + \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} - \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots (59)$$

$$A_1 + A_3 = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots (60)$$

また、境界条件 (iii) を式 (16) に用いれば、

$$A_1 + 4A_2 + 9A_3 = 0 \dots (61)$$

$$A_1 - 4A_2 + 9A_3 = 0 \dots (62)$$

となる。すなわち、

$$\beta = \frac{\pi}{2} + \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} - \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots (63)$$

$$A_1 = -\frac{9}{32} \pi + \frac{9}{16} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} + \frac{9}{16} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots (64)$$

$$A_2 = 0 \dots (65)$$

$$A_3 = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{16} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} = -\frac{A_1}{9} \dots (66)$$

くさびを構成する片長  $\lambda_1, \lambda_2$  の長さは、式 (14) より、

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2b^2 \int_\pi^{\pi-\beta} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \\ S_2 &= 2b^2 \int_0^{\pi-\beta} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \end{aligned} \right\} (67)$$

となる。

さて、式 (45) で定義された抗力係数  $C_D$ 、揚力係数  $C_L$ 、ピッチング・モーメント係数  $C_M$  (箱型断面重心軸まわり頭下げを正とする) は、この TYPE-2 の流れ

についてはつぎのようになる。

$$C_D = \frac{2\pi}{J} (1+\sigma) \left(1 + \frac{\epsilon^2}{6}\right) \left(\frac{1}{2} \sin \beta + \frac{A_2}{2}\right)^2 \dots\dots\dots (68)$$

$$C_L = \frac{2\pi}{J} (1+\sigma) \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2} \sin \beta \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2}\right) \dots\dots\dots (69)$$

$$C_{M_0} = \frac{4\pi}{J^2} (1+\sigma) K - C_L (\mu_2 \cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha) - C_D (\mu_2 \sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha) \dots\dots\dots (70)$$

ただし、 $\alpha$  は  $\lambda_2$  が  $x$  軸となす角であり、 $\alpha = (\pi/4) - \theta_c$ 、かつ、

$$J = S b^{-2}$$

$$K = M/2 \pi \rho b^4, \mu_1 = S_1/2 S, \mu_2 = S_2/2 S$$

$$S = 2 b^{-2} \int_0^\pi e^{-\tau(\eta)} |\cos \eta + \cos \beta| \sin \eta d \eta$$

ここで、 $M$  は式 (32)、係数  $A_n (n=1, 2, 3)$ 、 $\beta$  は式 (63)~(66) により決定される。

これより、くさびの長さ  $S_1, S_2$  は式 (67) で求められ、明らかに、その比  $S_1/S_2$  は任意ではなく、もしこれらが与えられた場合には、くさびが適当な迎え角をもつ場合に限り、停留点が角部と一致することを意味する。

c) 停留点が角部以外の点にあり、流線がくさびの端部ではく離する流れ (TYPE-3)

停留点が角部以外の点にある場合、くさびのまわりの流れに対していくつかの数学モデルが考えられるが、流線が角部ではく離せず、くさびの辺に沿って流れるとすれば、流れの様子は図-5 に示すようになる。また、くさびのきょう角を  $90^\circ$ 、角の2等分線が  $x$  軸となす角を  $\theta_c$ 、 $\lambda_2$  が  $x$  軸となす角を迎え角  $\alpha$  とする。

いま、くさびの一边  $\lambda_1$  に沿って、角部 C に近づくとき  $\theta = (\pi/4) + \theta_c$ 、他方の辺  $\lambda_2$  に沿って、C に近づくとき、 $\theta = -(\pi/4) + \theta_c$  となる。さらに停留点 B が  $\lambda_2$  上にあるとすれば、点 A から停留点 B に近づくとき  $\theta \rightarrow \theta_c - (\pi/2)$  となり、角部 C から停留点 B に近づくとき  $\theta \rightarrow \theta_c + (\pi/2)$  となる。これらの境界条件をみたま関数  $\Omega(\zeta)$  は、 $\Omega$  平面での C, B 点に対応するパラメーターを  $\beta, \beta'$  とすれば次式のようになる。

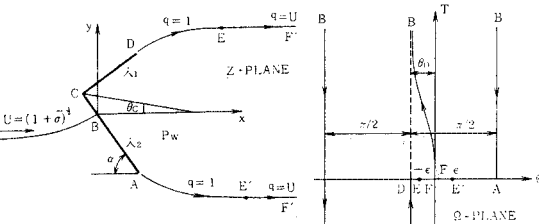


図-5 TYPE 3 の流れ ( $0 < \beta'/\beta \leq 1$ )

$$\Omega(\zeta) = i \log \frac{1+\zeta e^{-i\beta}}{1+\zeta e^{i\beta}} - \frac{i}{2} \log \frac{1+\zeta e^{-i\beta'}}{1+\zeta e^{i\beta'}} + A_1 \zeta + A_2 \zeta^2 + A_3 \zeta^3 \dots\dots\dots (71)$$

くさび上で、 $\zeta = \exp(i\eta)$ 、 $0 \leq \eta \leq \pi$  であるから、

$$T(\eta) = \text{Im } \Omega = \frac{1}{2} \log \frac{1+\cos(\eta-\beta)}{1+\cos(\eta+\beta)} - \frac{1}{4} \log \frac{1+\cos(\eta-\beta')}{1+\cos(\eta+\beta')} + \sum_{n=1}^3 A_n \sin n \eta$$

$$\theta(\eta) = \text{Re } \Omega = \beta_0 + \beta - \frac{\beta'}{2} + \sum_{n=1}^3 A_n \cos n \eta \dots\dots\dots (72)$$

ただし、 $\beta \geq \beta'$  の場合、

$$0 \leq \eta \leq \pi - \beta \text{ のとき } \beta_0 = 0$$

$$\pi - \beta < \eta < \pi - \beta' \text{ のとき } \beta_0 = -\pi$$

$$\pi - \beta' < \eta \leq \pi \text{ のとき } \beta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

また  $\beta < \beta'$  の場合

$$0 \leq \eta < \pi - \beta' \text{ のとき } \beta_0 = 0$$

$$\pi - \beta' < \eta < \pi - \beta \text{ のとき } \beta_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\pi - \beta < \eta \leq \pi \text{ のとき } \beta_0 = -\frac{\pi}{2}$$

となる。抗力  $X$ 、揚力  $Y$  は Levi-Civita の式 (21) で与えられるが、この場合、

$$D'(0) = 2 \sin \beta - \sin \beta' + A_1,$$

$$D''(0) = -2 \sin 2\beta + \sin 2\beta' + 2 A_2 \dots\dots\dots (73)$$

であるから、

$$X = \pi \rho b^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{6}\right) \left(\sin \beta - \frac{1}{2} \sin \beta' + \frac{A_1}{2}\right)^2$$

$$Y = \pi \rho b^2 \left(1 + \frac{\epsilon^2}{4}\right) \left(\sin \beta \cos \beta + \frac{1}{2} \sin \beta' \cos \beta' - \sin \beta' \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2}\right) \dots\dots\dots (74)$$

となる。ピッチング・モーメント  $M_0$  (停留点まわりで、頭下げを正とする) は式 (32) で与えられるが、 $T(\eta)$  はこの場合式 (72) で与えられる。

係数  $A_n (n=1, 2, 3)$ 、 $\beta, \beta'$  はつぎの境界条件から決定される。

- (i)  $\theta_A = \theta_c - \frac{\pi}{4}$
  - (ii)  $\theta_D = \theta_c + \frac{\pi}{4}$
  - (iii) 点 A, D で曲率半径は無限大
  - (iv) 点 C で曲率半径は無限小
- 条件 (i), (ii) を式 (7), (72) に用いれば、

$$\beta - \frac{\beta'}{2} + A_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\theta_c - \frac{\pi}{4}\right)^2 + \epsilon^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\theta_c + \frac{\pi}{4}\right)^2 + \epsilon^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (75)$$

$$A_1 + A_3 = -\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (76)$$

条件 (iii) を式 (16) に用いれば,

$$A_1 + 4 A_2 + 9 A_3 = 0 \dots\dots\dots (77)$$

$$A_1 - 4 A_2 + 9 A_3 = 0 \dots\dots\dots (78)$$

また点 C において速度は無有限大であるから  $\tau = \log q = \infty$  となり, 式 (16) は,

$$R = 2 b^2 e^{-\tau} [\cos \eta + \cos \beta] \sin \eta \frac{d\eta}{d\theta} = 0$$

となり, 条件 (iv) は自ら満足されることになる。式 (75)~(78) より, 係数  $A_n (n=1, 2, 3)$ ,  $\beta - (\beta'/2)$  はつぎのようになる。

$$\beta - \frac{\beta'}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{2} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (79)$$

$$A_1 = -\frac{9}{32} \pi + \frac{9}{16} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} + \frac{9}{16} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} \dots\dots\dots (80)$$

$$A_2 = 0 \dots\dots\dots (81)$$

$$A_3 = \frac{\pi}{32} - \frac{1}{16} \left\{ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} - \frac{1}{16} \left\{ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right\}^{1/2} = -\frac{A_1}{9} \dots\dots\dots (82)$$

くさびを構成する辺  $\lambda_1, \lambda_2$  の長さは式 (14) よりつぎのようになる。

$\beta \geq \beta'$  の場合

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2 b^2 \int_{\pi}^{\pi-\beta'} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \\ S_2 &= 2 b^2 \int_0^{\pi-\beta} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta + S_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (83)$$

$\beta < \beta'$  の場合

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= 2 b^2 \int_{\pi}^{\pi-\beta} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta + S_0 \\ S_2 &= 2 b^2 \int_0^{\pi-\beta'} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (84)$$

ただし,

$$S_0 = 2 b^2 \int_{\pi-\beta'}^{\pi-\beta} e^{-\tau} (\cos \eta + \cos \beta) \sin \eta d\eta \dots\dots\dots (85)$$

である。

さて,  $\beta, \beta'$  を決定するために, くさびの長さ  $S_1, S_2$  に注目する。迎え角  $\alpha$ , 後流変数  $\sigma$  が定められれば,  $\beta'/\beta$  と  $S_1/S_2$  は 1 対 1 の対応を示すため,  $S_1/S_2$  より  $\beta'/\beta$  が求められ (図-6, 7, 8 参照), 式 (79) より  $\beta, \beta'$  はつぎのように求められる。

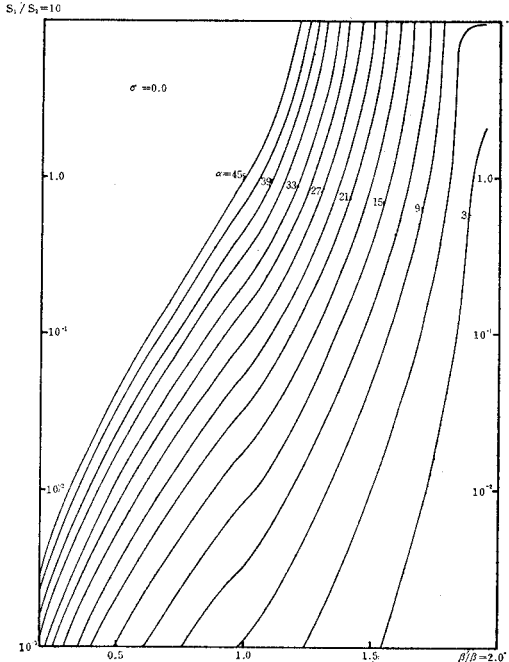


図-6  $S_1/S_2 - \beta'/\beta$  曲線 ( $\sigma=0.0$ )

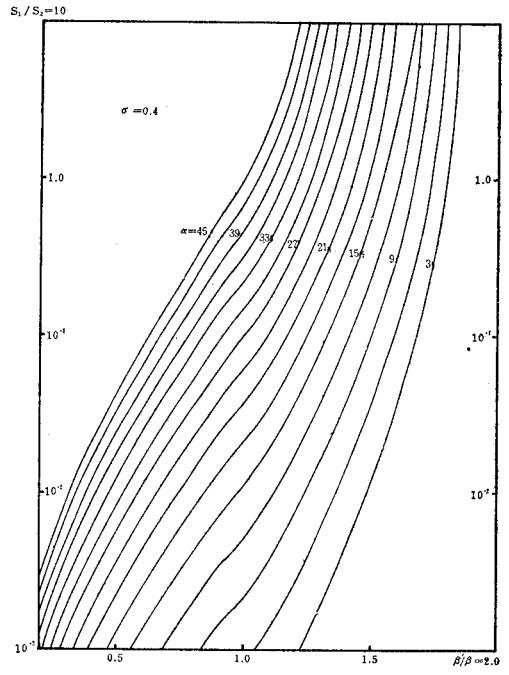


図-7  $S_1/S_2 - \beta'/\beta$  曲線 ( $\sigma=0.4$ )

$$\beta = \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta'}{\beta} \right) \right\}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \left[ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{1/2} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

$$\beta' = \left\{ \left( \frac{\beta'}{\beta} \right) - \frac{1}{2} \right\}^{-1} \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \left[ \left( \theta_c - \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{1/2} - \frac{1}{2} \left[ \left( \theta_c + \frac{\pi}{4} \right)^2 + \varepsilon^2 \right]^{1/2} \right\} \dots\dots\dots (87)$$



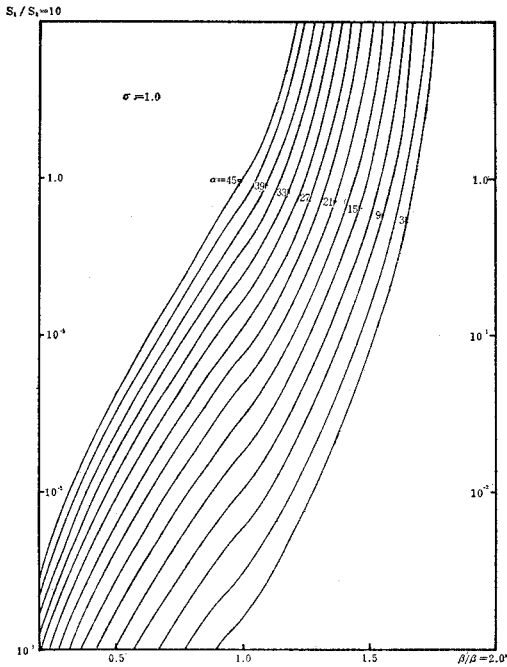


図-8  $S_1/S_2 - \beta'/\beta$  曲線 ( $\sigma \sim 1.0$ )

以上の関係式より、式 (45) で定義された抗力係数  $C_D$ 、揚力係数  $C_L$ 、ピッチング・モーメント  $C_{M_0}$  (重心軸まわり頭下げを正) はこの流れについて次式のようになる。

$$C_D = \frac{2\pi}{J} (1 + \sigma) \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{6} \right) \times \left( \sin \beta - \frac{1}{2} \sin \beta' + \frac{A_1}{2} \right)^2 \dots (88)$$

$$C_L = \frac{2\pi}{J} (1 + \sigma) \left( 1 + \frac{\epsilon^2}{4} \right) \times \left( \sin \beta \cos \beta + \frac{1}{2} \sin \beta' \cos \beta' - \sin \beta' \cos \beta + A_1 \cos \beta + \frac{A_2}{2} \right) \dots (89)$$

$0 < \beta'/\beta \leq 1$  のとき

$$C_{M_0} = \frac{4\pi}{J^2} (1 + \sigma) K \left[ -C_L (\mu_2 \cos \alpha + \mu_1 \sin \alpha - \mu \cos \alpha) - C_D (\mu_2 \sin \alpha - \mu_1 \cos \alpha - \mu \sin \alpha) \right] \dots (90)$$

$1 < \beta'/\beta < 2$  のとき

$$C_{M_0} = \frac{4\pi}{J} (1 + \sigma) K \left[ -C_L (\mu_1 \sin \alpha + \mu_2 \cos \alpha - \mu \sin \alpha) - C_D (-\mu_1 \cos \alpha + \mu_2 \sin \alpha + \mu \cos \alpha) \right] \dots (91)$$

ただし、

$$J = Sb^{-2}, \quad K = M(2\pi\rho b^4)^{-1}, \quad \mu_1 = S_1/2S, \quad \mu_2 = S_2/2S, \quad \mu = S_0/S$$

$$S = 2b^2 \int_0^\pi e^{-\tau(\eta)} |\cos \eta + \cos \beta| \sin \eta d\eta$$

である。

また、 $M$  は式 (32)、 $S_1, S_2, S_0$  は式 (83)~(85)、係数  $A_n (n=1, 2, 3)$ 、 $\beta, \beta'$  は式 (80)~(82) および式 (86)、(87) により与えられる。

#### 4. 数値計算例

##### (1) 傾いた平板のまわりの流れ (TYPE-1)

前節でのべた TYPE-1 の流れについて、平板に作用する揚力係数  $C_L$  は式 (47) より求められるが、これを図示すれば、図-9 のようになる。後流変数  $\sigma$  を考慮するとき、ある迎え角 ( $\equiv \alpha_p$ ) より小さな迎え角では、自由流線理論による  $C_L$  の値が、翼理論による  $C_L$  の値、 $C_L = 2\pi \sin \alpha$  より大きくなる。このようなことは物理的に不適当であると考えられ、微小迎え角の範囲では平板周辺ではく離流を生ずることなく、ある限界値  $\alpha_p$  以上ではく離流を想定するのが妥当のようであり、この限界値近傍は遷移領域と考える必要があると思われる。式 (46) より抗力係数  $C_D$  を、また、式 (32) より  $K = M(2\pi\rho b^4)^{-1}$  を求めれば、それぞれ図-10, 11 のようである。いま  $\sigma = 0.4$  として、計算結果を、Roshko モデルを用いて翼に作用する空気力を求めた Wu<sup>(4)</sup> の研究結果ならびに G. Birkhoff らの近似式<sup>(5)</sup> を、

$$C(\sigma, \alpha) = (1 + \sigma) C(0, \alpha)$$

と比較すれば、図-12, 13, 14 のようである (ただし、 $C = C_D, C_L, C_{M_0}$ )。

また  $\sigma = 0$  の場合は Helmholtz 理論に帰着するが、

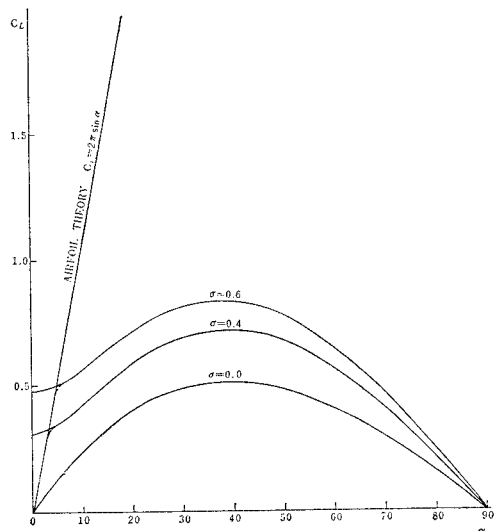


図-9  $C_L - \alpha$  曲線 (TYPE 1)

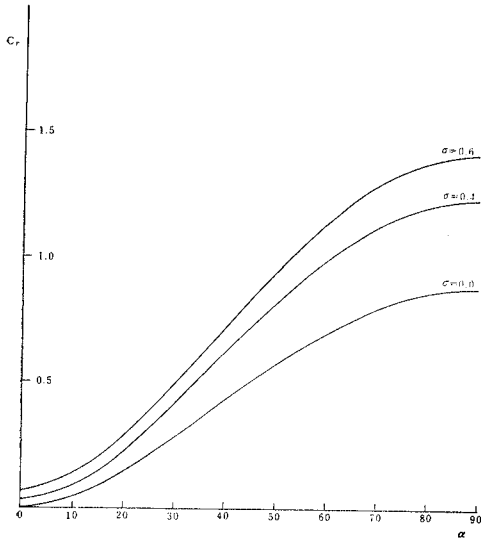


図-10  $C_D$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 1)

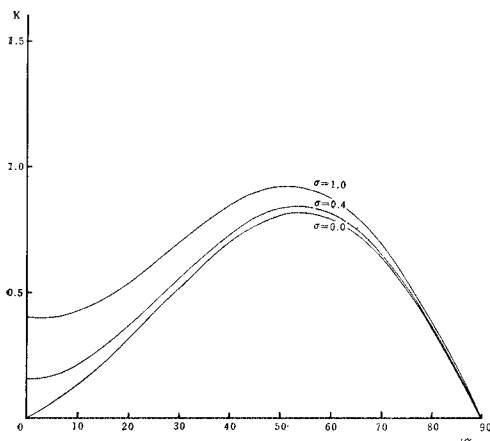


図-11  $K$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 1)

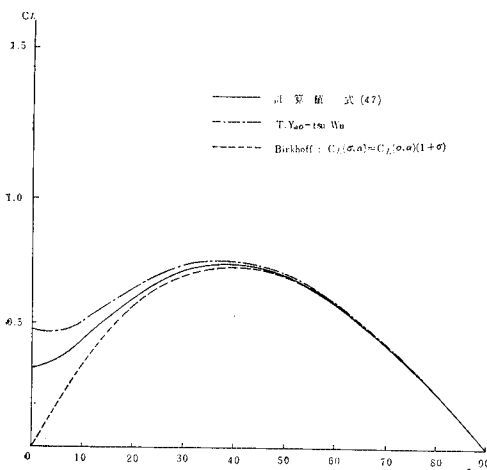


図-12  $\sigma=0.4$  のときの  $C_L$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 1)

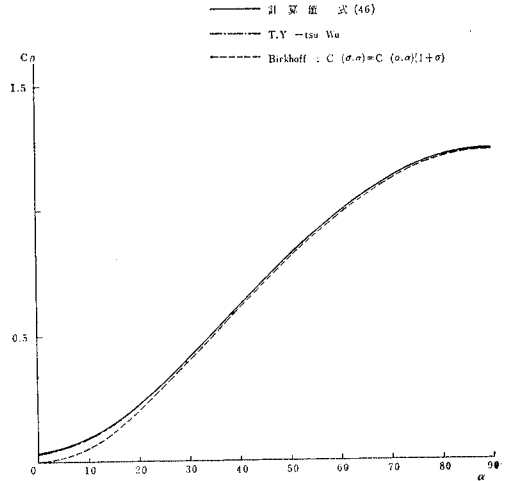


図-13  $\sigma=0.4$  のときの  $C_D$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 1)

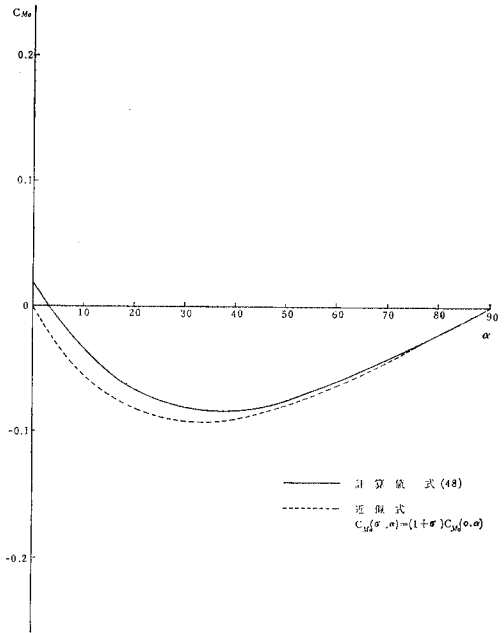


図-14  $\sigma=0.4$  のときの  $C_{M0}$ - $\alpha$  曲線

ここでの  $C_L$ ,  $C_D$ ,  $C_M$  の計算値は Kirchhoff-Rayleigh の結果<sup>10)</sup>とまったく一致した。

(2) 停留点が角部にあり、流線がくさびの端部ではく離する流れ (TYPE-2)

きょう角  $90^\circ$  のくさびに関する  $C_D$ ,  $C_L$ ,  $C_{M0}$  は式 (68), (69), (70) より求められるが、その結果は 図-15, 16, 17 に示すようであり、また 図-18 は  $K=M(2\pi\rho b^4)^{-1}$  を後流変数  $\sigma$ , 迎え角  $\alpha$  に対して示したものである。しかしながら TYPE-2 の流れ、すなわち停留点が角部に一致するには、くさびを構成する辺の長さ

$S_1, S_2$  の比が任意ではなく、迎え角  $\alpha$  と後流変数  $\sigma$  の関数として決められなければならない。図-19 は、 $\sigma=0, 1.0$  の場合、TYPE-2 の流れとなる、迎え角  $\alpha$  に対する辺比  $S_1/S_2$  の値を示すものである。

(3) 停留点が角部以外の点にあり、流線がくさびの端部ではなく離する流れ (TYPE-3)

停留点が角部以外にあるとき、停留点の位置は未定である。もし停留点 B または  $B'/\beta$  の値がわかれば ( $\zeta$  平面で点 B は  $\exp(i(\pi-\beta))$  で表わされる)、係数  $A_n (n=1, 2, 3), \beta, \beta'$  は式 (80)~(82), (86), (87) より求まり、この流れに対する特性、すなわち  $C_L, C_D, C_{M_0}$  さらに  $S_1/S_2$  値などが決定される。逆にくさびを構成する辺長の比  $S_1/S_2$  を定めると、停留点の位置が求められる。そこで、TYPE-3 の流れについての計算では、まず  $S_1/S_2$  の値を迎え角  $\alpha$ 、後流変数  $\sigma$ 、および停留点に関するパラメーター  $\beta'/\beta$

の関数として解析する (図-6, 7, 8 参照)。この図よりある比  $S_1/S_2$  をもつくさびにおける  $\beta'/\beta$  を求め、これより空気力係数を求めることができる。図-20 には式 (89) より計算した正方形断面の揚力係数  $C_L$  を示す。ある迎え角  $\alpha_p$  より小さな迎え角では、TYPE-3 における  $C_L$  の値は TYPE-1 における  $C_L$  の値より、絶対値が大きくなるが、TYPE-1 は傾いた平板まわりの流れであり、TYPE-3 はもう一辺の存在を考慮した流れであるから、このようなことは物理的にはつぎのように考えるのが妥当のようである。すなわち、迎え角が微小な領域では TYPE-1 の流れであるものが、迎え角の増大とともに TYPE-3 の流れに移行し、この中間にはいわば遷移領域がある。

さて、 $C_D$  値は式 (88) より求められ、図-21 に示すようである。式 (32), (72) より  $K=M(2\pi\rho b')^{-1}$  は後流変数  $\sigma$ 、迎え角  $\alpha$  に対して 図-22 に示すようになる。また、断面の辺比  $S_1/S_2$  が空気力係数におよぼす影響をみるために、 $\sigma=0$  のとき、 $S_1/S_2=1, 1/2, 1/5,$

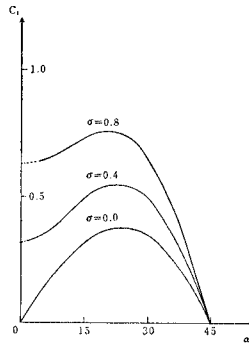


図-15  $C_L$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 2)

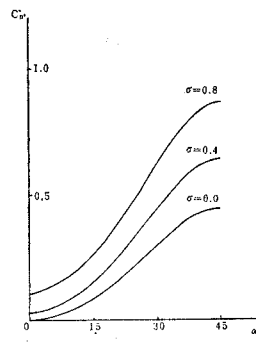


図-16  $C_D$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 2)

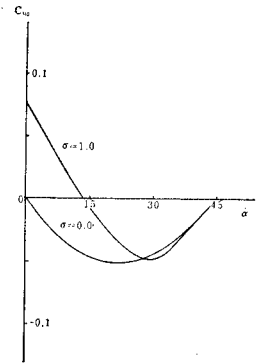


図-17  $C_{M_0}$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 2)

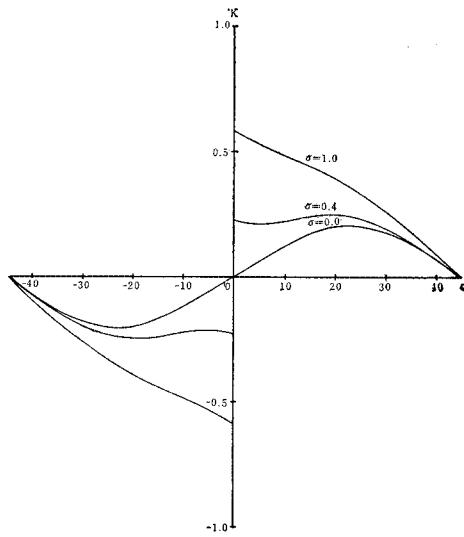


図-18  $K$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 2)

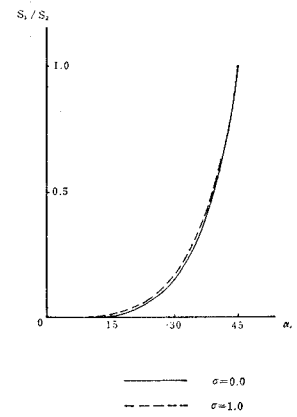


図-19  $S_1/S_2$ - $\alpha$  曲線 (TYPE 2)

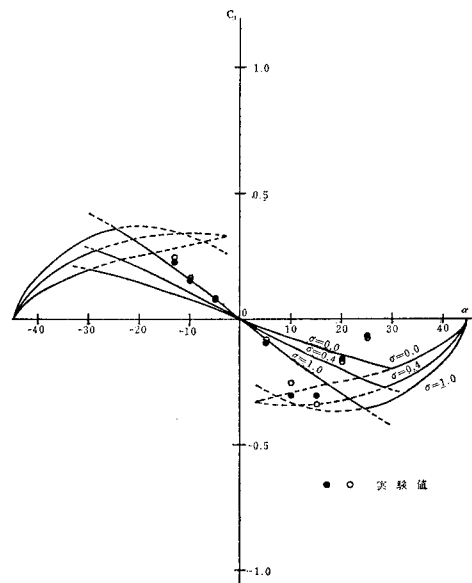


図-20 正方形断面における  $C_L$ - $\alpha$  曲線

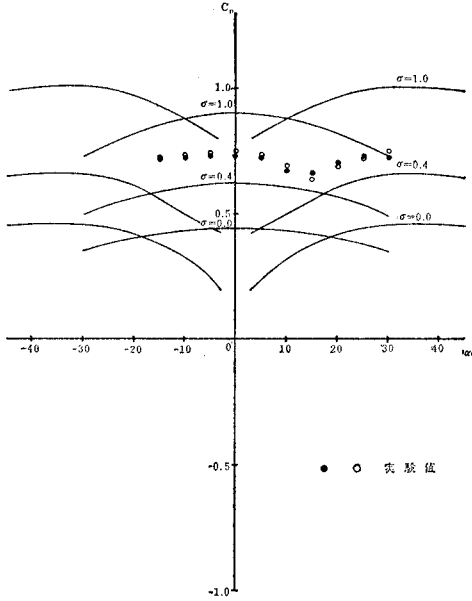


図-21 正方形断面における  $C_D-\alpha$  曲線

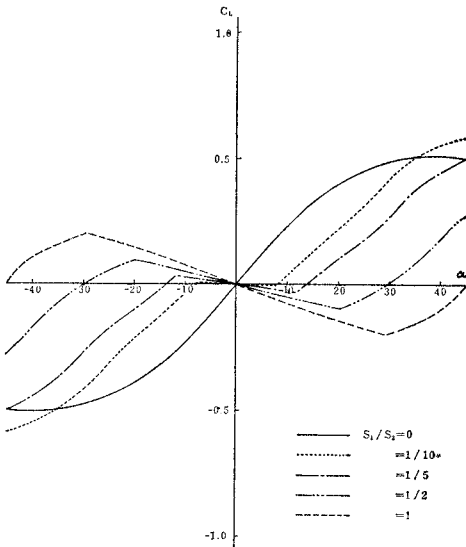


図-22  $\sigma_w=0.0$  における  $C_L-\alpha, S_1/S_2$  曲線

1/10, 0の断面形について  $C_L, C_D$  を求めたが、この結果は 図-23 のようである。ただし、 $S_1/S_2=1$  は正方形断面に、 $S_1/S_2=0$  は平板に対応する。

(なお、図-20, 21 に示す実験値で、黒点は風速 11.9 m/sec, 白点は風速 19.9 m/sec で計測した空気力より求めた空気力係数である)。

### 5. 風洞実験結果との比較検討

以上のように Roshko モデルを対象に、いわゆる矩形断面に作用する流体力について考察したが、その特性と

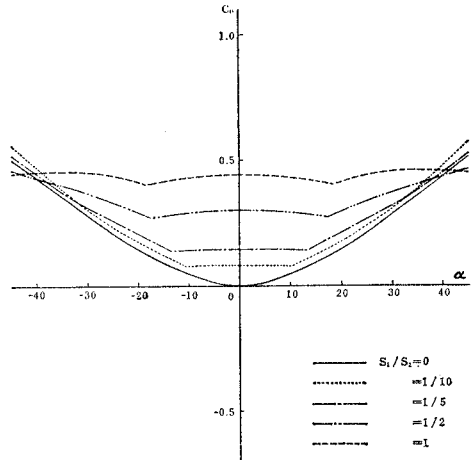


図-23  $\sigma_w=0.0$  における  $C_D-\alpha, S_1/S_2$  曲線

しては、迎え角が小さいとき流れの型は傾いた平板のまわりの流れ (TYPE-1) に対応し、迎え角が大きくなると TYPE-3 の流れに移行すると考えられる。またある迎え角 (たとえば正方形断面では迎え角  $\alpha=\pm 45^\circ$ ) で停留点は角部と一致し、流れの型は TYPE-2 になると考えられる (図-20, 21 参照)。

さて箱型断面に作用する空気力を実験的に把握するために、つぎのような風洞実験を行なった。

風洞：京都大学工学部設置のエッフェル型風洞 (測定部断面 1500×2500, 最大風速 25 m/sec)

空気力計測：島津 6 分力ピラミッド型天びん装置

模型：アクリル酸樹脂材正方形断面 (200×200×940)

ここでは上記の装置を用いて定常流に対する三分力の計測を行なったが、これを前述の理論値と比較すれば、図-20, 21 のようである。図-20 は揚力係数曲線を表わしているが、迎え角が正の領域で、理論値と実験値はともに負の  $C_L$  となり、いわゆる翼理論による揚力係数  $C_L=2\pi \sin \alpha$  が正値をもつことと逆の傾向を示している。しかし理論値は  $\alpha=25^\circ$  近辺で最小値、 $\alpha=45^\circ$  で  $C_L=0$  となるのに対して、実験値は  $\alpha=15^\circ$  近辺で最小値、 $\alpha=30^\circ$  近辺で  $C_L=0$  となり、迎え角に対する特性のずれが求められた。図-21 は抗力係数曲線を表わしているが、理論値、実験値ともに  $C_D$  の値は、迎え角の変化にかかわらず、ほぼ一定の値をもつ。理論値としては  $\alpha=15^\circ$  あたりまでは TYPE-1 の流れ、それ以上の迎え角では TYPE-3 の流れを適用したが、実験値においても  $\alpha=15^\circ$  近辺で不連続な勾配変化が見られ、流れの型の移行が認められ、後流変数  $\sigma=0.6$  程度の理論値が実験値をよく説明するものと考えられる。

今回の実験結果では抗力については比較的よくその特性をとらえることが明らかになったと思われる。揚力係数については、理論値と実験値はいわゆる負勾配の傾向

を示すが、定量的には若干のずれがある。これは、Roshko モデルの流れより求められる流体力が、ポテンシャル流として求められるものであり、模型表面における境界層等の力学的効果を含んでいないためと考えられる。

## 6. 結 び

本研究は箱型断面まわりの流れを Roshko モデルにより解析し、Levi-Civita の方法を応用して流体力を求めたが、この結果つぎのような結論をうることができると考えられる。

(1) 非流線型断面の一つとしての箱型断面に作用する流体力(揚力, 抗力, ピッチング・モーメント)はしばしば迎え角に対して負勾配の揚力係数, モーメント係数を与え, 跳躍型不安定振動をもたらすが, 揚力係数の負勾配は Roshko モデル等自由流線理論により把握することができ, このことは断面の上流側面および迎え角に対して形成されるくさび二側面が流れの型を決定し, 流体力として重要なファクターとなる。

(2) 箱型断面まわりの流れとして, ここでは前述の Type 1, Type 2, Type 3 を考え, 迎え角が小さいときは Type 1, 迎え角が大きくなると Type 3, 特別な場合としてある迎え角で停留点が角部と一致するとき Type 2 を適用して解析したが, 実験的にも流れの型が迎え角により移行することが認められた。

(3) 傾いた平板 (Type 1 の流れ) に対する空気力係数は T. Wu の式, G. Birkhoff らの近似式と非常によく一致した。

(4) 正方形断面に対する空気力係数の実験値を理論値と比較したが, 迎え角が正の領域で  $C_L$  は負であり, 迎え角の変化にかかわらず,  $C_D$  がほぼ一定であることは理論的に推定されたことと一致する。また Roshko モデルでは, 後流変数  $\sigma$  が変わっても空気力係数の傾向は大体同じであるが, 後流変数の増加とともに, 係数の絶対値は増大する。今回の実験結果からは  $\sigma=0.6$  程度が現実の特性をよく説明しているように考えられる。しかしながら今回の実験は正方形断面のみを対象としているため, これより後流係数等について議論することは困難である。後流係数は自由流線理論においてはもっとも重要なパラメーターであるが, 今回の計測結果からみれば, 抗力係数の実測結果と理論値を比較することにより決定するのが現状ではもっとも妥当のようである。特に揚力, ピッチング・モーメントに関する空気力係数は理論と実験値との間にはかなりの差があり, 今後の検討が必要である。

(5) 断面の縦横比  $S_1/S_2$  が空気力係数におよぼす影

響は 図-23 に示すとおりである。平板 ( $S_1/S_2=0$ ) と正方形断面 ( $S_1/S_2=1$ ) とが両極端にあって, 長方形断面 ( $0 < S_1/S_2 < 1$ ) は両者の影響を受けているが, 一般に  $S_1/S_2$  が大きくなるにつれて, 正方形断面に近い特性をおびてくる。すなわち  $C_L$  の負の領域は拡がり,  $C_D$  曲線の勾配はゆるやかになる。

(6) 本研究では数値計算と実験値との比較を正方形断面について行なったが, 一般非流線型断面の定常空気力特性は, ここにのべた方法を応用することにより, Roshko モデルに対応する挙動を把握することができると思われる。

以上のように, 本研究では, G.V. Parkinson らが非流線型応答を研究するにあたり, 実験的な負勾配の空気力特性を対象とした点に注目し, 自由流線理論によりこれらがどのように把握されるかを考察したが, 今後さらにいくつかの流体力学的パラメーターを加味しての研究が必要であると考えられる。本研究は京都大学工学部土木工学教室橋梁研究室の諸兄に負うところ大である。また終始ご指導を賜った小西一郎教授に深く感謝するしだいである。なお本研究は昭和 44 年度科学研究費(一般研究 C)により実施されたことを記し, 関係方面に感謝の意を表する。

## 記 号

- $A_n$ : 複素関数  $\varrho(\zeta)$  の  $n$  に関する係数 (式 (9) で定義)
- $\alpha$ : 迎え角
- $b, b_1, b_2$ : 式 (4), (5) で定義するパラメーター
- $\beta$ :  $\zeta$  平面単位円上停留点に対応する角度パラメーター
- $\beta'$ :  $\zeta$  平面単位円上角部に対応する角度パラメーター
- $C_L, C_D, C_M$ : 式 (45) で定義する定常空気力係数
- $\epsilon$ :  $(1/2) \log(1+\sigma)$  (式 (8) で定義)
- $\varphi$ : 速度ポテンシャル
- $\psi$ : 流れ関数
- $\theta$ :  $\text{Re } \omega(\zeta)$
- $\Theta$ :  $\text{Re } \varrho(\zeta)$
- $J, K, \mu, S, S_0$ : 式 (49)~(53) で定義する諸量
- $\lambda_1, \lambda_2$ : くさびの辺長
- $\eta$ :  $\text{Arg } \zeta$
- $n$ : 整数
- $p_\infty$ : 無限遠における静圧
- $p_w$ : 後流における静圧
- $\rho$ : 流体密度
- $q$ : 速度の絶対値

- $R$ : 式 (16) で定義する曲率半径  
 $S_1, S_2$ : くさびの長さ  
 $\sigma$ : 後流変数  
 $T$ :  $\text{Im } \varrho(\zeta)$   
 $\tau$ :  $\text{Im } \omega(\zeta)$   
 $v$ : 無限遠における流速  
 $w$ : 複素ポテンシャル ( $\varphi + i\psi$ )  
 $X, Y, M$ : 流体力成分 (揚力, 抗力, ピッチング・モーメント)  
 $z$ :  $x + iy$   
 $\zeta$ :  $r \exp(i\eta)$   
 $\varrho$ : 式 (7) で定義する複素関数 ( $\theta + iT$ )  
 $\omega$ : 式 (6) で定義する複素関数 ( $\theta + i\tau$ )

## 参 考 文 献

- 1) Bleich, F. et al: The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges, U.S. Government Printing Office, Washington, D.C., 1950.
- 2) Bleich, F.: Dynamic Instability of Truss-Stiffened Suspension Bridges under Wind Action, Trans. ASCE, Vol. 114, 1949.
- 3) Steinman, D. B.: Aerodynamic Theory of Bridge Oscillations, Trans. ASCE, Vol. 115, 1950.
- 4) 田中 宏・伊藤 学: 充腹構造物の自励振動における空気力特性, 土木学会論文報告集 No. 168, 1969-8.
- 5) 宮田利雄・岡内 功: 吊橋の風による自励振動に関する一考察, 土木学会論文報告集 No. 173, 1970-1.
- 6) Parkinson, G.V.: On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders, Trans. ASCE, June, 1961.
- 7) Parkinson, G.V.: The Square Prism as an Aeroelastic Non-linear Oscillator, Quart. J. Mech. & Appl. Math., Vol. 17, Pts 2, 1964.
- 8) Birkhoff, G. & Zarantonello, E.: Jet, Wakes & Cavities, Academic Press, 1957.
- 9) Milne-Thomson, L.M.: Theoretical Hydrodynamics, 3rd Ed., Macmillan, 1956.
- 10) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed., Cambridge Univ. Press, 1932.
- 11) Truesdell, C.: Handbuch der Physik, Bd. 9 (Fluid Dynamics 3) Springer-Verlag, 1960.
- 12) Riabouchinsky, D.: On Steady Fluid Motions with Free Surfaces, Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 19 (2).
- 13) Roshko, A.: A New Hodograph for Free-Stream Line Theory, NACA, TN 3168, July, 1954.
- 14) Wu, T. Yao-tsu: A Free Stream line Theory for Two Dimensional Fully Cavitated Hydrofoils, J. Math. Phys. 35, 1956.
- 15) Brodetsky, S.: The Line of Action of the Resultant Pressure in Discontinuous Fluid Motion, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 102, 1922.

(1970. 5. 27・受付)