

## 確率モデルによる多孔体内の流れのシミュレーション

### SIMULATION OF FLOW THROUGH POROUS MEDIA BY MEANS OF STOCHASTIC MODEL

武 内 等\*

By Hitoshi Takeuchi

#### 1. ま え が き

多孔体内の流れについては、Darcy<sup>1)</sup> を初めとして多くの研究成果が発表されているが、それらの多くは、Reynolds 数が小さい、いわゆる Darcy の法則の成立する領域における“流れの平均水理量”の研究である。もちろん、多孔体内の流れは、通常、空間平均値で表わされる水理量により解決される問題も多いが、平均水理量を支配する要素を知り、問題の本質により一歩でも近づくためには、流れの微視的な機構の研究によらなければならない。たとえば、地下水内での放射性物質の運動、地下水層への汚水の浸入過程、締め切り堤における流体の運動などである。

一般に、多孔体内の流れも Navier-Stokes の式<sup>2)</sup> で表わされるが、その式はごく単純な条件のもとでの解が求められるに過ぎず、多孔体の空げき構造を数式で表わすことも不可能である。したがって、実際には、Navier-Stokes の式からは流れの定性的な考察が期待されるだけであり、このような方法による流れの微視的な表現は容易でない。そこで空げき構造を解析可能なモデルにすることが重要な課題となる。ここで、多孔体の空げき構造の複雑さは多孔体流れを特性づける重要な要素であり、解析に用いられるモデルにおいてもその特性が保存されなければならない。したがって、空げき構造を確率変数を用いたモデル<sup>3), 4)</sup> により表わし、モデルにおける流体の運動を吟味すれば、流れの微視的特性が統計的に演繹される。これは多孔体内の流れの有効な解析法といえよう。もちろん、モデルの正しさおよび有用性は実験により検証されなければならない。特に、流体運動の力学的特性、すなわち、粘性力と慣性力のいずれが支配的であるか、あるいは、表面張力に支配される状態であるか、流体が多孔体の構成粒子に吸着された状態にあるか

などによって流れの性質はまったく異なるから、式の適用限界についての注意がなされなければならない。

本研究は、粘性流体で飽和された土粒子などの粒状体からなる多孔体の水理特性と流れの機構について考察したもので、つぎの 3 部から構成されている。

第一は、多孔体の空げき特性の検討と、そのシミュレーションである。

ついで、流れを力学的、運動学的特性により分類し、それぞれの場合における多孔体内の流れの平均流速について検討する。

第三は、シミュレートされた多孔体モデル内の流体素分の運動を追跡し流れの分散機構と多孔体の空げき特性についての考察を行ない、分散現象における水理定数と空げき特性との関係を明らかにする。

要約すると、本研究は、多孔体の構成粒子の粒度分布および空げき率を与えられたとき多孔体内の流れをシミュレートし、その微視的な挙動およびその積分・平均値としての平均水理量を予測する方法を検討しようとしたものである。

#### 2. 多孔体の空げき特性とシミュレーション

##### (1) 空げき系特性

多孔体内の流れは、その空げき構造の幾何学的特性に支配されるから、まず空げき構造の解明が必要となる。多孔体の定義は、一応、空げきを持つ固体ということができよう。本研究では、土粒子などの粒状体で構成される固体系において、粒子により囲まれる空間を空げきとよび、これらの空げきのうち互いに連なっているもの、すなわち、有効空げきの連なりにより多孔体の空げき系を定義する。

従来より、多孔体は、空げき率、空げきの表面積、あるいは、流路として考えた空げきの屈折度（流体素分が

\* 正会員 工修 鹿島建設(株) 土木工務部

実際に通過する流路の長さで多孔体内に流した色素などによってえがかれている、いわゆる平均的な流線の長さの比で表わされている) などによりその幾何学的特性を示されている<sup>9)</sup>が、これらは実際に測定が容易でなくまた空間平均値であるから、流れの水理機構を知るには十分とはいえない。

空げき系が十分大きく容器の形状による空げき構造への影響が無視されるとき、多孔体の空げき構造は、構成粒子の大きさ、粒度分布および粒子の形により決定される。

粒子の大きさ：粒子と単位空げきの大きさはほぼ比例する。一方、粒子が小さくなるにつれ比表面積が増加し粒子相互の摩擦が増すから、空げき率は大きくなる。

粒度分布：混合粒径からなる多孔体に比べて均一径では空げき率が大きくなる。後者の幾何学的に規則的な並べ方は6通り知られていて、空げき率の最大のものは47.6%、最小のものは26.0%である<sup>9)</sup>。

混合粒径の多孔体の空げき率を理論的に求めようとする研究には、C.C. Farnas<sup>9)</sup>、徳光<sup>9)</sup>の研究などがあるが、経験要素に頼らざるをえないようである。

粒子の形：空げき率は必ずしも粒子の角の鋭さに比例しないが、粒子の形が流れに対する抵抗に与える影響は大きい。

多孔体の構成粒子と空げき系の関係を定量的に表現することは容易でなく、実験による検討がなされてきたにすぎないが、今後の方向として、水理学的な意味での多孔体の等価性を示す要素を求め、確率変数を用いた統計的解析が考えられよう。

(2) 空げき系モデル

本節では確率の概念を用いて空げき系のモデル表示を行なう。すなわち、空げき空間の任意の位置における単位空げきを定義し、つぎにその3次元的な組立てを考える。

空げき系は、図-1に示されるように単位空げきの連なりと定義する。すなわち、空げき系モデルは、空げき

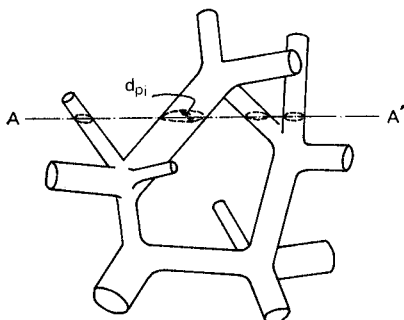


図-1 空げき系モデル

空間の任意の位置で多孔体の構成粒子に特性づけられる任意の直径、長さおよび方向をもつ中空円筒流路(以下では、単位流路とよぶ)の樹枝状結合体とする。

単位流路は、図-2に示されるように、直径  $d_i$ 、長さ  $l_i$  および傾き角度  $\theta_i, \varphi_i$  で表わされる ( $\theta$  は主流方向との角度であり、 $i$  は  $i$  番目の単位流路を示す)。

流路径  $d_i$ ：空げき系モデルの任意の断面(たとえば、図-1のA-A')での単位流路断面を円で近似し、その直径  $d_{pi}$  を求め、 $d_{pi}$  から  $d_i$  を与える。ここに、 $d_{pi}$  を流路径要素とよぶことにする。

図-3に示すように、多孔体断面にて各粒子の代表点を結ぶ三角形の空げき部と等しい面積の円の直径を  $d_{pi}$  とする<sup>9)</sup>。

しかし、実際には、図-4に示すように、断面を横切る直線を考え、連続する3組の空げき部分および粒子部分を、それぞれ

粒子部分の中央で折り、図-5に示す三角形を作り、それから  $d_{pi}$  を求める(十分長い直線について考えると、空げき系の局所的な特異性に影響されない)。このとき、モデル断面の全三角形において、与えられた空げき率  $\lambda$  が保たなければならないから、式(1)で与えられる値をもって単位空げきの面積とする。

$$S - (S_1 + S_2 + S_3) \cdot \frac{(1-\lambda) \sum S}{\sum (S_1 + S_2 + S_3)} \dots \dots \dots (1)$$

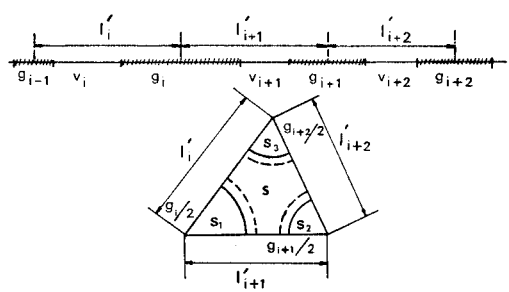


図-5 単位空げきモデル

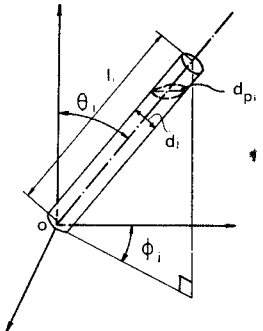


図-2 単位流路モデル

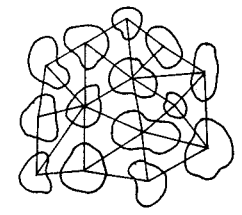


図-3 多孔体断面(1)

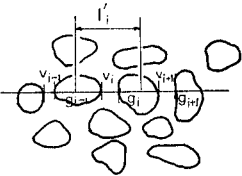


図-4 多孔体断面(2)

ここに、記号は 図-5 の通りであって、 $\Sigma$  はモデル断面にわたる合計を意味する。

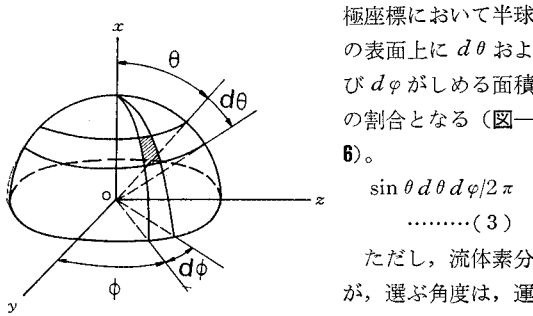
式(1)では、多孔体の断面における面積空げき率と体積空げき率が等しいことを用いているが、十分大きい等方等質の多孔体ではこの仮定は妥当と考えられる。

流路長  $l_i$ : 図-4 における粒子部分の中央からつぎの粒子部分の中央までの長さを流路長要素  $l'_i$  とすると、次式により  $l_i$  が与えられる。

$$l_i = c_i \cdot l'_i \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 $c_i$  は、後に流れの分散係数のシミュレート値と実験値により検討される。P.G. Saffman<sup>9)</sup> によれば、 $l_i$  は多孔体の構成粒子径に等しいと示唆されている。

傾き角  $\theta_i$  および  $\varphi_i$ : 多孔体が等方等質の場合には、 $\theta \sim \theta + d\theta$  および  $\varphi \sim \varphi + d\varphi$  の角度となる割合は、



極座標において半球の表面上に  $d\theta$  および  $d\varphi$  がしめる面積の割合となる (図-6)。

$$\sin \theta d\theta d\varphi / 2\pi \dots\dots\dots (3)$$

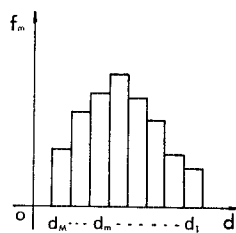
ただし、流体素分が、選ぶ角度は、運動学的要素を考慮し、後に流れのシミュレーションのところで述べる。

以上の考察により、単位流路が定められる。これを空間的に組み立てるには、ピエツ水頭勾配が与えられ、空げきモデル内の流体素分の動きに注目すると、乱数を用いてつぎのようにシミュレートすればよい。

すなわち、流体素分を流れの初期条件に合せて空げき空間に配置し、それぞれに、乱数により単位流路 ( $d_i$ ,  $l_i$ ,  $\theta$ ,  $\varphi_i$ ) を与え、流体素分が流路の出口に達したとき、新しい流路を与える操作を繰り返せばよい。したがって、このモデルが固定的なものでないことに注意すると、分岐点で確率的に複数の枝分れを考えていることになり、樹枝状結合体とよぶ。

(3) 単位流路要素のシミュレーション

多孔体が 図-7 で示される粒度分布の球形粒子からなり、空げき率が  $\lambda$  であるとき、流路長要素  $d_{pi}$  および流路長要素  $l'_i$  のシミュレーションについて述べる。



フローチャート I は、多

孔体の断面を通る直線が粒子と交わる位置およびその長さに関するシミュレーションを、またフローチャート II は、流路要素  $d_{pi}$  のそれを示すものである。

ここで、直線上に直径 1 の円を無作為に落すとき、その弦長の期待値は  $\pi/4$  となる。したがって、いま、直径  $d$  の粒子は、多孔体の切断面では期待値  $(\pi/4)d$  の直径の円となり、さらに、この切断面を通る直線が円と交わる線分の期待値は  $(\frac{\pi}{4} \cdot d) \cdot \frac{\pi}{4}$  となる。

上の事柄に留意し、フローチャート I および 図-8 について説明すると、以下の通りである。

1...多孔体構成粒子の粒度分布 (たとえば、図-7) について、ふるい分けられた数  $M$ , 各粒径  $d_m$  とその頻度  $f_m$ , 多孔体の空げき率  $\lambda$ , およびシミュレーションにおいて直線  $L$  上に配置する粒子の総数  $N$  を与える。 $d_m$  は大きい順に 1 から番号をつける。

2... $N$  および  $f_m$  から、粒径  $d_m$  の粒子数  $n_m$  を計算する。平均粒径  $\bar{d}$  および  $\lambda$ ,  $N$ , 求められた  $\bar{d}$  からシミュレーションに用いられる直線の長さ  $L$  を次式により計算する。

$$L = \frac{\pi^2 \cdot N \cdot \bar{d}}{4^2(1-\lambda)} \dots\dots\dots (4)$$

一様乱数  $R(0.0 \sim 1.0)$  を用いると、直線  $L$  と交わる球の長さ  $g_i$  は次式で与えられる。

$$g_i = d_m \sqrt{2R - R^2} \sqrt{2R' - R'^2} \dots\dots\dots (5)$$

ここで、 $R'$  は  $R$  とは異なる乱数の値を意味する。

3...最初に  $L$  上に配置する粒子は、式(5)に  $d_1$  を用いると弦長  $g_1$  が求められ、次式により位置  $x_1$  が求められる。

$$x_1 = (L - g_1) \cdot R \dots\dots\dots (6)$$

4~7 および 13, 14...粒子の総数  $N$  を直線  $L$  上に配置する操作である ( $L$  における粒子相互の位置の関係から  $N$  個全部を配置できないときは、その旨を output させるが、フローチャート I では省略している)。

8... $m$  番目の粒径  $d_m$  の粒子 (粒子番号は  $i$ ) が直線  $L$  に交わる長さ  $g_i$  を計算する。

9... $g_i$  の位置を定めるため、 $L$  上にすでに配置された粒子間の距離、すなわち、空げき長さ  $v_j (j=1 \sim i)$  を計算する。

10... $v_j$  のうち  $g_i$  より短いものを仮りに 0.0 として除き、それぞれ空げき長さ  $v$  の  $j$  番目までの和  $SGMv(j)$  を計算し、乱数  $R$  により  $g_i$  の入る空げき  $v_k$  を捜す。

11... $g_i$  を  $v_k$  のどこに配置するかを定め、 $L$  上の位置  $x_i$  を計算する。

12...新しく求めた  $g_i$  の位置  $x_i$  を含め、各粒子の位置を大きさの順に並べ、 $L$  上の粒子の番号をつけなお

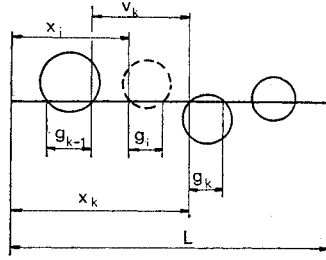
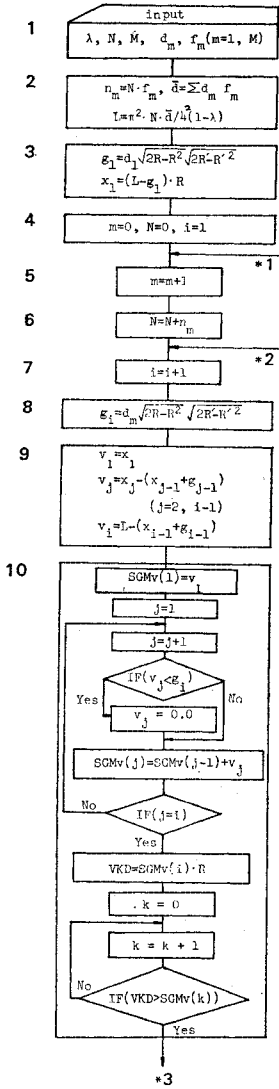
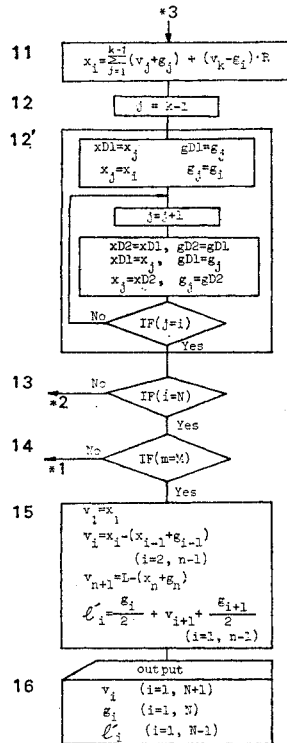


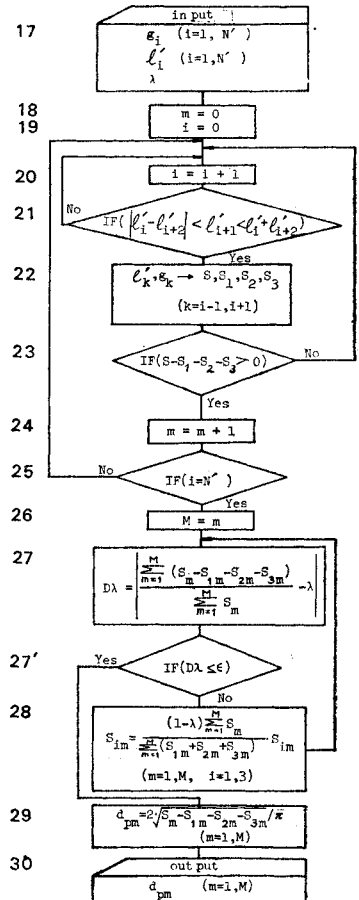
図-8 多孔体を横切る直線



フローチャート I



フローチャート I



フローチャート II

す。

15...以上の計算により、シミュレートされた  $v_i$  および流路長要素  $\ell'_i$  を求める。

16...つぎの計算に備えて  $v_i, g_i$  および  $\ell'_i$  を output する。

$v_i$  および  $g_i$  から  $d_{pi}$  を求めるフローチャートIIを説明すると、以下に示す通りである。

17... $\lambda$  およびフローチャート I の結果より、 $N'$  個の  $g_i, \ell'_i$  を与える ( $N'$  は  $N$  から両端のいくつかを除いた個数)。

18~20 および 25...すべての  $g_i, \ell'_i (i=1 \sim N')$  について計算をすすめる操作である。

21...連続する3つの  $\ell'_i$  により三角形が成立するかどうかを判定する。

うかを判定する。

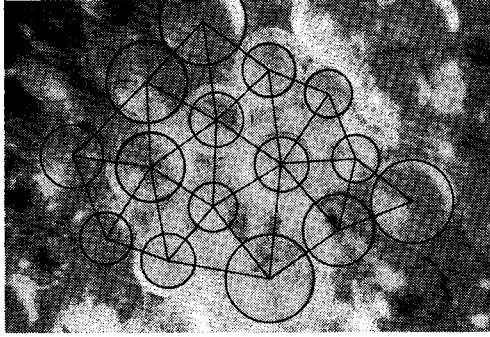
22...三角形の面積を求めるヘロンの公式により、たとえば図-5における三角形の面積  $S$ 、および各扇形の面積  $S_1, S_2, S_3$  を求める。

23...求められた三角形で、空げき部  $(S - S_1 - S_2 - S_3)$  が正になっているかを判定する。

26...有効な三角形の数を  $M$  個とする。

27, 28...多孔体断面において得られた有効な  $M$  組の三角形全体について、与えられた空げき率  $\lambda$  が保たれているかを判定し、誤差が  $\varepsilon$  より大きいときは、三角形の面積は変えないで、式(1)により空げき面積を修正する。

29, 30...三角形の空げき面積と等しい円の直径を流路径要素  $d_{pm} (m=1 \sim M)$  とする (フローチャートの表示



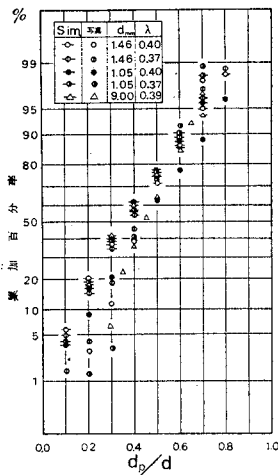
写真一 多孔体断面

の都合上、ここでは添字  $m$  を用いている)。

つぎに、シミュレートされた流路要素  $d_p$  および流路長要素  $l$ 、実際の多孔体断面から求められた  $d_p$  および  $l$  について検討する (ここでは、均一な粒子 (粒径  $d$ ) の多孔体が用いられた)。

写真一は、均一径のガラス球からなる多孔体を低粘性変成エポキシ樹脂により固化させた試料において、粒子の切断面の中心を相互に結び三角形の網目を作ったものである。各三角形について、先に述べた方法により流路要素  $d_p$  を求め、 $d_p/d$  の累加百分率を正規確率紙にプロットしたのが図

9の○印である。○印はシミュレーションにより求められた値を示す (シミュレーションの結果では、 $d_{pi}$  の平均値  $\bar{d}_p$  よりその標準偏差  $\sigma_{dp}$  の2倍以上大きいものを異常値として除いた)。資料の数はいずれも 200~300 個である (△印は、室田・佐藤<sup>9)</sup> の値である)。両者とも正規確率紙上でほぼ直線となり、 $d_p/d$  の分布は正規分布



図一 流路径要素の分布

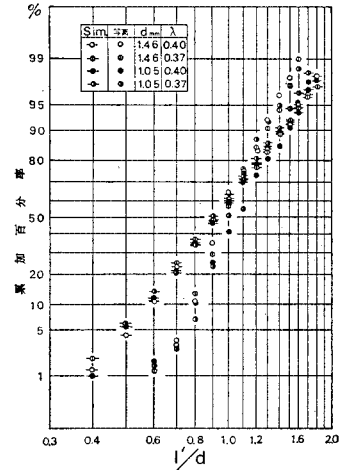
であることがわかる。シミュレーションにおいて  $d_p$  の大きいもの ( $d_p > \bar{d}_p + 2\sigma_{dp}$ ) を除くことは、i) 写真による値との比較、ii) その流路に連なる他の単位流路との関係、iii) モデルにおいて局所的に異常に大きい流速が現われるのを除くという意味で、シミュレーションの精度を向上させることになる。

図一10は、流路長要素  $l/d$  の累加百分率を対数正規分布紙にプロットしたもので、図一9に対応する資料が用いられた ( $l > \bar{l} + 2\sigma_l$  の資料は除かれた)。実際の多孔体からの分布も、シミュレーションによる分布も直

線となり、対数正規分布であることがわかるが、後者による直線の勾配はゆるく、分布形は平坦になるようである。

本研究では、変数相互の明確な関係は見い出せず、関数形を定めるにはいたらなかった。

$d_p$  および  $l$  の物理的な意味は、後に述べる流れのシミュレーションにより明らかにされ、ここでは、幾何学的特性を述べるにとどめる。



図一0 流路長要素の分布

### 3. 多孔体の空けき特性と平均流速

多孔体内の流れの特性は、空けき系の飽和度により著しく異なるが、本研究では、多孔体は、粘性流体により飽和され、流れは定常とする。また、流れの動水勾配が大きくなっても、多孔体構成粒子は流動しないとする。

一般に、多孔体内の流れは、空けき系の特性、流体の特性および流れの力学的運動学的特性により支配され、特に、多孔体構成粒子がごく小さくなり、流体の構成粒子表面への吸着効果が卓越する流れを、細孔流領域における流れと呼ぶことにすると、つぎの4つの場合に分類される。

1. 細孔流領域
2. 層流領域
3. せん移流領域
4. 乱流領域

吉田<sup>2)</sup> は、流れを微視的に論じ、多孔体内の流れの基礎方程式を誘導したが、最終的には、Darcy および Forchheimer の経験則に照らして表現するにとどまり、この種の研究の困難さを示すものと考えられる。したがって、本研究では、空けき系モデルの単位流路内の流れを上記の4つに分け、多孔体内の流れの平均流速について検討する。議論の都合上、層流領域、細孔流領域、乱流領域およびせん移流領域の順に考察をすすめよう。

#### (1) 層流領域における平均流速

多孔体の粒子特性および空けき率よりえられる空けき系モデルにおいて、単位流路の流路要素およびその方向の分布がわかれば、断面平均流速が求められる。

単位流路の直径を  $d_i$ , 流路の軸方向のピエゾ水頭勾配を  $(\partial h/\partial l)_i$  とすれば, 層流領域では, 流れは Hagen-Poiseuille の流れであって, 単位流路における平均流速  $u_i$  は, 次式で表わされる。

$$u_i = -c \frac{\rho g}{32 \mu} d_i^2 \left( \frac{\partial h}{\partial l} \right)_i \dots\dots\dots (7)$$

ただし, 係数  $c$  は, 多孔体構成粒子により特性づけられる定数,  $\rho$  は流体密度,  $g$  は重力加速度,  $\mu$  は流体の粘性係数である。

つぎに,  $\alpha_i$  を流路が  $x$  軸となす角度,  $\partial h/\partial x$  を  $x$  軸方向のピエゾ水頭勾配,  $d_{pi}$  を流路要素,  $A_{pi}$  をその断面積とし, 計算の便宜上  $d_i = d_{pi} \cdot \cos \alpha_i$ , 単位流路の断面積は  $A_{pi} \cos \alpha_i$  と近似されると仮定すれば, 単位流路の流量  $q_i$  は次式で与えられる。

$$q_i = -c \frac{\pi \rho g}{128 \mu} d_{pi}^4 \cos^4 \alpha_i \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (8)$$

多孔体の断面積を  $A$ , 空けき率を  $\lambda$  とすれば, 関係式  $\lambda A = \sum \pi d_{pi}^2/4$  が得られるから, 断面平均流速  $\bar{U}$  ( $= \sum q_i/A$ ) は, 次式で与えられる。

$$\bar{U} = -c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\sum d_{pi}^4 \cos^4 \alpha_i}{\sum d_{pi}^2} \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (9)$$

すなわち, 層流領域では, 断面平均流速について Darcy の法則が成り立ち, 透水係数  $K_x$  が次式で与えられたことになる。

$$K_x = c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\sum d_{pi}^4 \cos^4 \alpha_i}{\sum d_{pi}^2} \dots\dots\dots (10)$$

ここで,  $d_p$  および  $\alpha$  の生起確率密度関数を  $f(d_p, \alpha)$  で表わすと, 式 (10) はつぎのようになる。

$$K_x = c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\iint d_p^4 \cos^4 \alpha f(d_p, \alpha) dd_p d\alpha}{\iint d_p^2 f(d_p, \alpha) dd_p d\alpha} \dots\dots\dots (11)$$

上式右辺の分母における積分では,  $\alpha$  は単に助変数となるから, すべての  $\alpha$  にわたる積分  $\int f(d_p, \alpha) d\alpha$  は  $d_p$  だけの関数  $f_2(d_p)$  となることが用いられた。

多孔体が透水係数について異方性のとき,  $K_j$  ( $j=x, y, z$ ) は, 次式で表わされる。

$$K_j = c \frac{\lambda \rho g}{32 \mu} \frac{\iint d_p^4 \cos^4 \alpha f_j(d_p, \alpha) dd_p d\alpha}{\iint d_p^2 f_j(d_p, \alpha) dd_p d\alpha} \dots\dots\dots (12)$$

したがって, 異方性多孔体では,  $f_j(d_p, \alpha)$  により透水係数の特性が示される。しかし, 実際には, 空けき率特性を表わす  $f_j$  の関数形を定めることは容易でない。

つぎに, 等方等質多孔体について考察を行なう。この場合, 各密度関数は等しく,  $K_x = K_y = K_z = K$  であるから, 任意の方向に座標軸をとり, 軸と単位流路がなす角を新しく  $\theta$  とする。ここで,  $\theta$  と  $d_p$  の分布が独立とす

ると  $f(d_p, \theta) = f_1(\theta) \cdot f_2(d_p)$  とでき, 式 (3) を  $d_p$  について積分すれば  $f_1(\theta)$  が求められ  $\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta f_1(\theta) d\theta = 1/5$  となるから,  $K$  は次式で表わされる。

$$K = c \frac{\lambda \rho g}{160 \mu} \frac{\int d_p^4 f_2(d_p) dd_p}{\int d_p^2 f_2(d_p) dd_p} (= c \cdot K_s) \dots\dots (13)$$

式 (13) における  $f_2(d_p)$  も多孔体構成粒子特性の関数として一般的な数式で与えられないが, 粒度分布および空けき率を与えられると,  $d_{pi}$  の分布が求められるから, 透水係数  $K$  は予測可能となる。

つぎに, シミュレーション結果を実験により検証するとともに, 粒形特性と式 (13) における係数  $c$  について検討する。

図-11 は実験に用いられた球形ガラス粒子の累加百分率である。E~I はほぼ均一な粒子からなる多孔体のそれを表わし, 10~18 は E~I を混合して得られたも

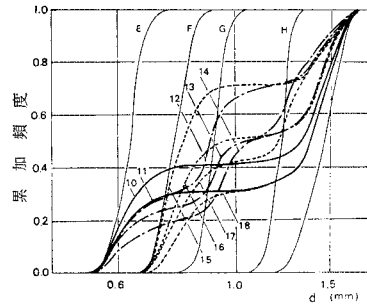


図-11 球形粒子粒度分布

のである。定水位透水試験による  $K_E$ , シミュレーションによる値  $K_s$  (式 (13) の右辺において  $c$  を除いた値), 両者の比 (すなわち, 式 (13) における係数  $c$ ) を一括して示したのが表-1 である。また, 角ばった砂に対しては, J. Donat<sup>10)</sup> の実験値を用いてシミュレーションの検証を行なったものが表-2 である。すなわち, 0.30~0.40 mm および 0.40~0.50 mm の 2 種の砂の混合比を変えて作られた Donat の多孔体における透水係数  $K_E$  と著者によるシミュレーション値  $K_s$  である。表-1 および表-2 より, シミュレーションは実験値をよく説明し, 粒子の形状特性がわかれば, 式 (13) における係数  $c$  を定数として与えることが明らかにされた。すなわち, 式 (13) における係数  $c$  の値は, 球形粒子では 0.92, 角ばった砂では 0.32 程度と考えられる。

多孔体が均一径  $d$  の粒子からなるときは, 式 (13) の積分は以下に示すように推定される。すなわち, 多孔体の切断面における円の直径が期待値  $(\pi/4)d$  をもち, 空けき率  $\lambda$  から  $l$  を  $(\pi/4)d/(1-\lambda)$  とし, 前節で述べた方法により一辺が  $l$  の正三角形を考え, その面積の  $\lambda$  倍

表-1 透水係数 (1) (ガラス球)

RUN	$\bar{d}$ (mm)	$d_{60}/d_{10}$	$\lambda$	$K_E$	$K_S$	$c(=K_E/K_S)$
E	0.620	1.10	0.38	0.288	0.294	0.979
F	0.774	1.13	0.38	0.383	0.429	0.894
G	0.915	1.09	0.38	0.575	0.716	0.802
H	1.200	1.08	0.38	1.03	1.10	0.938
I	1.464	1.14	0.38	1.46	1.54	0.947
10	1.12	2.41	0.356	0.466	0.605	0.775
11	1.20	2.50	0.346	0.567	0.619	0.918
12	0.981	1.63	0.361	0.500	0.551	0.901
13	1.04	2.33	0.364	0.530	0.617	0.863
14	1.12	2.00	0.346	0.596	0.565	1.054
15	0.971	1.24	0.356	0.438	0.506	0.863
16	1.11	1.90	0.351	0.551	0.562	0.980
17	1.10	1.74	0.360	0.610	0.593	1.020
18	1.25	1.89	0.368	0.749	0.832	0.901
平均						0.917

表-2 透水係数 (2) (砂・Donat<sup>10)</sup>による)

RUN	Sand I 0.35 mm	Sand II 0.45 mm	$\lambda$	$K_E$ (cm/s)	$K_S$ (cm/s)	$c(=K_E/K_S)$
1	1.00	0.0	0.392	0.0350	0.107	0.327
2	0.75	0.25	0.383	0.0358	0.115	0.312
3	0.50	0.50	0.397	0.0440	0.138	0.318
4	0.25	0.75	0.379	0.0452	0.143	0.316
5	0.15	0.85	0.379	0.0444	0.153	0.290
6	0.15	0.85	0.390	0.0561	0.181	0.310
7	0.10	0.90	0.385	0.0518	0.142	0.360
8	0.0	1.00	0.385	0.0577	0.179	0.322
平均						0.319

を空げきとすると、流路径要素  $d_p$  についてつぎの関係が得られる。

$$\pi(d_p/2)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ \frac{\pi}{4} \cdot \frac{d}{1-\lambda} \right\}^2 \lambda \dots\dots\dots(14)$$

したがって、 $\bar{d}_p \propto \sqrt{\lambda} \cdot d / (1-\lambda)$  となり、これを式 (13) に用いると、Casagrande 型<sup>11)</sup>の透水係数を与える式がえられる。

$$K = n \cdot \frac{\lambda^2}{(1-\lambda)^2} \frac{1}{\nu} d^2 \dots\dots\dots(15)$$

ただし、 $n$  は式 (13) における  $c$  を含む定数であり、式 (15) および (14) から求められる値を用いると、式 (15) は透水係数  $K_E$  の 0.7 倍程度となり、式 (13) において、 $\bar{d}_p^3$  は  $\bar{d}_p^4$  にくらべて大きいことを考慮すれば、均一粒径における流路径に対する上記の仮定が不都合でないと考えられる。

表-3 および表-4 は球形ガラス粒子および、角の少ない川砂について式 (15) における  $n$  を求めたもので、前者では 1.8 および後者では 1.1 程度となる。なお、Donat の実験<sup>10)</sup>を参照すると、角ばった砂では 0.80、角の鋭い砂では 0.35 程度と推定される。

したがって、層流領域において、多孔体構成粒子特性より透水係数を求めるには、粒径分布、空げき率および粒子の形状特性を考慮し、均一粒子のときには、式

表-3 透水係数 (3) (ガラス球・は均一径)

RUN	$d$ (mm)	$\lambda$	$K_E$ (cm/s)	$K_S$ (cm/s)	$n(=K_E/K_S)$
E	0.62	0.37	0.252	0.132	1.91
	0.62	0.38	0.288	0.144	2.00
	0.62	0.40	0.308	0.171	1.81
F	0.77	0.37	0.360	0.206	1.74
	0.77	0.38	0.383	0.225	1.70
	0.77	0.40	0.426	0.266	1.60
G	0.92	0.37	0.512	0.288	1.78
	0.92	0.38	0.575	0.314	1.83
	0.92	0.40	0.587	0.372	1.58
H	1.20	0.37	0.934	0.495	1.88
	1.20	0.38	1.03	0.541	1.90
	1.20	0.40	1.07	0.640	1.67
I	1.46	0.37	1.41	0.740	1.90
	1.46	0.38	1.46	0.809	1.81
	1.46	0.40	1.49	0.958	1.56
J	1.86	0.37	2.22	1.19	1.87
	1.86	0.38	2.66	1.30	2.04
平均					1.80

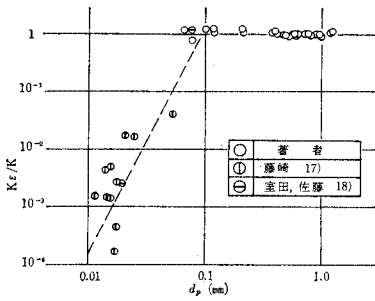
表-4 透水係数 (4) (川砂・は均一)

RUN	$d$ (mm)	$\lambda$	$K_E$ (cm/s)	$K_S$ (cm/s)	$n(=K_E/K_S)$
1	0.36	0.40	0.0633	0.0576	1.10
2	0.44	0.40	0.105	0.0862	1.22
3	0.62	0.40	0.161	0.171	0.94
4	0.62	0.42	0.225	0.202	1.11
5	0.75	0.39	0.217	0.233	0.93
6	0.75	0.40	0.294	0.250	1.17
7	0.92	0.40	0.471	0.376	1.25
8	0.97	0.38	0.374	0.354	1.08
9	1.3	0.375	0.591	0.655	0.91
10	1.3	0.40	0.813	0.752	1.08
平均					1.08

(15)、また、粒径分布のあるときは、シミュレーションによる  $d_p$  を式 (13) に用いればよい。

(2) 細孔流領域における平均流速

層流領域では、多孔体の空げき構造を空げき系モデルで表現し、単位流路の流れは Hagen-Poiseuille の法則にしたがうとすればよいことがわかった。しかし、多孔体構成粒子がしだいに小さくなり、流路径が一定値以下になると、流れは、いわゆる Darcy の法則で示される流れとは異なる特性を示すようになり、上のモデルは流れを説明しえない。図-12 は、式 (13) および (15) で求められる透水係数  $K$  と実験により求められた透水係数  $K_E$  の比を流路径要素  $d_p$  により整理したものを示している (⊙は藤崎<sup>12)</sup>、⊖は室田・佐藤<sup>9)</sup>による実験値から求められた値である)。流路径要素が一定値以下では、 $K_E/K \ll 1$  となることが明瞭に観察される。 $K_E/K \approx 1$  からはずれる領域が先に述べた細孔流領域である。この領域における流れの機構の解明は容易でなく、本研究では、二、三の定性的検討を試みるにとどめる。



図—12 流路径要素と透水係数

土粒子などからなる多孔体を乾燥させ、大気中に放置すると、大気に含まれる水分を吸着してその重量を増す。これは、一般に、鉱物粒子からなる多孔体表面が負の電荷を持ち、イオン化した水分子を吸着するため、吸着層厚さは  $0.1 \sim 0.5 \mu$ 、粒子表面から  $0.005 \mu$  ほどは固体に似た性質を示すといわれている<sup>11)</sup>。したがって、空げき系モデルの単位流路の壁面に吸着層を考えると、i) 吸着層厚さの一部  $t$  だけ流路径が小さくなり、また、ii) 吸着層におけるイオン化した水分子は流路における流れを引きもどすように作用し、流体のみかけの粘性を増大させることになる。しかし、図—12 によれば、単位流路の平均流路径要素  $\bar{d}_p$  が  $20 \sim 30 \mu$  であっても、 $K_E/K \ll 1$  となることは、i) および ii) だけでは説明されない。すなわち、この程度の流路径では、i) による影響は顕著ではない。たとえば、式 (14) で  $d$  の代わりに  $(d-t)$  を用いて計算しても実験値を説明しえないからである。また ii) によれば、粘性は  $10^2$  倍にもなる\* としなければその説明ができない。そこで、たとえば透水係数の急激な減少は、空げき系モデルを修正して以下のように考えると、都合よく説明される。

多孔体の吸着作用により、空げき流路のうち径の小さいものはまったく流体を通さなくなると考えられ、それに接続する流路も流れに対して無効となる。すなわち、孤立空げきが生じ、流路径要素  $d_p$  のすべてが有効とはならなくなる。さらに、ii) に述べた効果に加わり、単位流路の壁面近傍で流体のみかけの粘性が増加し、Hagen-Poiseuille の式により表わされる流量に比べて流量が少なくなる。しかし、これを定式化するのは容易でなく、たとえば、空げき系モデルにおいて、流体素分の流れを追跡し、それが無効流路に出合ったときに、その流れを無効とするシミュレーションなどが考えられよう。

(3) 乱流領域における平均流速

完全な乱流では、流れの粘性による影響は無視され、管路内の流れにおける運動量保存の関係から、ピエゾ水頭の変化  $\frac{\partial h}{\partial l}$  は、次式で表わされる<sup>13)</sup>。

\* 粘性係数 水 1.14, グリセリン 121 (センチポアズ, 0°C)

$$\frac{\partial h}{\partial l} = \frac{4 \tau_b}{\rho g d_p} \dots \dots \dots (16)$$

ここに、 $\tau_b$  は壁面におけるせん断力で、Darcy-Weisbach による摩擦損失係数を  $f$  とすれば、 $\tau_b = f \cdot \rho u^2 / 8$  である。乱流における摩擦損失係数  $f$  は経験的に定められ、完全な乱流では流路の壁面特性により定まる定数となる<sup>13)</sup>。したがって、乱流領域における単位流路内の平均流速は、次式で与えられよう。

$$u_i = c_f \cdot \sqrt{2g} \cdot d_i^{1/2} \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^{1/2} \dots \dots \dots (17)$$

ここに、 $c_f$  は摩擦損失係数  $f$  を含む係数 ( $c_f \propto 1/\sqrt{f}$ ) で、多孔体の構成粒子により特性づけられる。

式 (17) を空げき系モデルに適用すれば、層流領域におけると同様な考察が可能となり、乱流領域での平均流速式が求められる。

すなわち、多孔体内の流れの断面平均流速  $\bar{U} (= \sum q_i / A)$  は、次式で与えられる。

$$\bar{U} = c_f \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{\lambda \sum d_{pi}^{5/2} \cos \alpha_i}{\sum d_{pi}^2} \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^{1/2} \dots \dots (18)$$

したがって、乱流においては  $U \propto \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^{1/2}$  となり、たとえば  $x$  軸方向では次式が得られる。

$$\bar{U} = K_{ix} \left| \frac{\partial h}{\partial x} \right|^{1/2} \dots \dots \dots (19)$$

$$K_{ix} = c_f \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{\lambda \sum d_{pi}^{5/2} \cos^2 \alpha}{\sum d_{pi}^2} \dots \dots \dots (20)$$

また、空げき系モデルにおける流路径要素  $d_p$  と流路の方向角  $\alpha_j (j=x, y, z)$  の確率密度関数を用いると、異方性多孔体においては、次式が得られる。

$$K_{ij} = c_f \cdot \sqrt{2g} \cdot \frac{\iint \lambda d_p^{5/2} \cos^2 \alpha f_j(d_p, \alpha) dd_p d\alpha}{\iint d_p^2 f_j(d_p, \alpha) dd_p d\alpha} \dots \dots \dots (21)$$

ただし、 $j=x, y, z$ 。

多孔体が等方等質のときには、次式をうる。

$$K_i = c_f \cdot \frac{\sqrt{2g}}{3} \frac{\lambda \int d_p^{2.5} f_2(d_p) dd_p}{\int d_p^2 f_2(d_p) dd_p} \dots \dots \dots (22)$$

また、多孔体が均一粒径  $d$  の粒子からなるときは、式 (14) を用いると次式をうる。

$$K_i = n_f \cdot \lambda^{1.25} (1-\lambda)^{-0.5} d^{0.5} \dots \dots \dots (23)$$

ただし、 $n_f$  は  $c_f$  を含む実験定数である。

つぎに、上に述べた考察結果の実験による検討について述べよう。図—13 は、Reynolds 数が 1 より大きい場合の球形粒子の摩擦損失係数と Reynolds 数の関係を示したものである (● は G. Kovács<sup>14)</sup>, ● は G. Karadi および I.V. Nagy<sup>15)</sup> の値である)。ただし、摩擦損失係数  $f'$  および Reynolds 数  $R_e'$  における流速は空げ



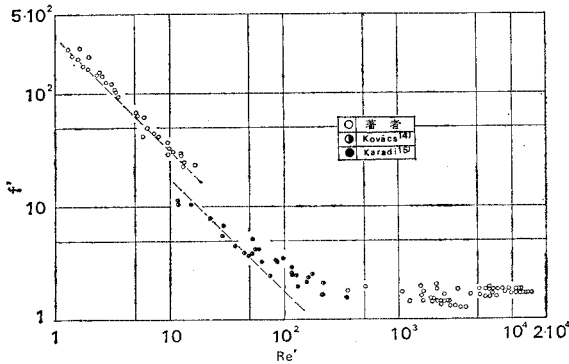


図-13 摩擦損失係数

き率を考慮した空けき内実流速, また, 流れの代表長さとしては式 (14) から求められる流路要素  $d_p$  が用いられた。したがって, 多孔体構成粒子の平均粒径  $\bar{d}$ , 断面平均流速  $v$  および空けき率  $\lambda$  との関係は次式でえられる。

$$f' = 0.459 \frac{\lambda^{2.5}}{1-\lambda} \frac{2g\bar{d}I}{\bar{U}^2} \dots\dots\dots (24)$$

$$Re' = 0.459 \frac{1}{(1-\lambda)\sqrt{\lambda}} \frac{\bar{U} \cdot \bar{d}}{v} \dots\dots\dots (25)$$

図-13 では, 著者による  $f'$  の実験値が, やや大きくなる傾向を示すが, 層流状態を示す 45° の直線を参照すると,  $Re'$  が 10 から 500~600 では層流から乱流へのせん移領域, これ以上では  $f'$  はほぼ一定で, 流れは完全に乱流となることが明らかになる。 $Re'$  が大きいところでは,  $f'$  が一定になることは, 式 (22) および (23) の誘導において,  $c_f$  および  $n_f$  を一定としたことが妥当といわれよう。

つぎに, 表-5 および 表-6 は, 磁器製の球および砕

表-5 乱流領域における透水係数 (1) (磁器球)

RUN	$d$ (mm)	$d_{60}/d_{10}$	$\lambda$	$K_E$ (cm/s)	$Re$	$n_f$	$c_f$
1	18.4	1.06	0.373	12.4	2 000 2 700	25.0	3.08
2	18.4	1.09	0.383	13.9	3 000 3 800	26.6	3.36
3	30.4	1.05	0.395	16.5	4 300 7 000	24.6	2.95
4	38.5	1.09	0.475	24.0	5 000 10 000	22.8	2.96
5	38.5	1.09	0.520	28.6	6 000 14 000	23.1	2.91
						24.4	3.05

表-6 乱流領域における透水係数 (2) (砕石)

RUN	$d$ (mm)	$d_{60}/d_{10}$	$\lambda$	$K_E$ (cm/s)	$Re$	$n_f$	$c_f$	備考
1	20.0		0.387	9.61	2 800 4 500	14.3		
2	40.0		0.511	17.3	3 300 8 900	14.0		
3	109.0		0.445	22.6	3 700 9 900	14.0		
4	45.4		0.433	10.6	1 800 2 600		1.34	*
5	49.0		0.465	18.0	3 700 5 100		2.02	*
6	109.0		0.445	22.6	3 700 9 900		1.86	*
7	133.8	3.3	0.383	13.8	3 500 6 200		1.41	*
平均						14.1	1.66	

石について,  $c_f$  および  $n_f$  を求めたものである (表中 \*印は, 建設省土木研究所報告<sup>16)</sup> による値である)。表から,  $n_f$  は球形粒子で 24, 砕石で 14, また,  $c_f$  は 3.1 および 1.7 とすれば, 乱流領域における平均流速は式 (19), (22) および (23) から推定されることがわかる。

(4) せん移流領域における平均流速

図-13 に示されるように,  $Re'$  が 1~10 から 500~600 では, 流れは層流から乱流へのせん移状態にある。多孔体内の流れのせん移流領域における平均流速は,  $|\partial h/\partial l| = au + bu^{2.5}$  などいくつかの経験式で与えられているが, ここでは, 空けき系モデルの単位流路における平均流速が, 層流では  $u_i \propto \frac{d_p^2}{\nu} \frac{\partial h}{\partial l}$ , 乱流では,  $u_i \propto d_p^{0.5} \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^{0.5}$  で与えられることから, せん移流領域では次式を仮定する。

$$u_i = a_i \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^s \quad 0.5 < s < 1.0 \dots\dots\dots (26)$$

しかし, 式 (26) における  $a_i$  および  $s$  は空けき系特性および Reynolds 数の関数と考えられ, その解析は容易でない。ここでは, 等方等質多孔体の空けき系モデルにおいて, すでに述べられてきた考察を適用すると次式が求められることを示すにとどめる。

$$\bar{U} = \frac{\iint \lambda d_p^2 \cos^{1+s} \theta f(d_p, \theta) dd_p d\theta}{\iint d_p^2 f(d_p, \theta) dd_p d\theta} \left| \frac{\partial h}{\partial l} \right|^s \dots\dots\dots (27)$$

ただし,  $0.5 < s < 1$  である。

4. 分散機構

淡水と塩水のように, 混合可能な流体の多孔体内における拡散現象は, 主として流体を構成する液体の分子の熱的擾乱による分子拡散と多孔体の複雑な流路の流過にともなう分散とに分けられる。前者は, 後者にくらべて省略されるほど小さく<sup>3)</sup>, 拡散は, 多孔体の幾何学的特性および流速に支配される<sup>17), 18)</sup>。

多孔体内の流れの分散に関する従来の研究は, 分散物質の保存側から導びかれる拡散方程式についての研究<sup>19)</sup>と多孔体構造あるいは流体素分の運動を統計的に検討し, 中心極限定理により分散物質が流れの場で正規分布することを導く研究<sup>20)</sup>とに大別されよう。前者の研究では, 流速ベクトルを  $v$ , 分散物質の濃度を  $S$  とする拡散方程式  $\partial S/\partial t + v \nabla S = \nabla(D \nabla S)$  において, 分散係数  $D$

ンソル  $D$  は異方多孔体では 9 つの成分  $D_{ij}(i, j=x, y, z)$  で表わされ、流速成分を  $v_i(i=x, y, z)$ 、多孔体の幾何学的特性を  $a$  で表わすと、それぞれ  $D_{ij}=a_{ijl}m v_l v_m / |v|(l, m=x, y, z)$  であり、結局、81 の成分で表わされる。A.E. Scheidegger<sup>(18)</sup> によると、等方等質多孔体において、 $D$  は流れ方向（縦方向）および横方向分散係数だけで表わしうる。ここで、質量保存則から拡散方程式への演算過程で空げき系特性をいかに考慮するか、また、上の  $a$  を空げき系特性といかに関係づけるかが問題となろう。

すでに述べたように、多孔体内の流れにおいて、運動の式が初期および境界条件を完全に満たす解を求めることは、一般に不可能であるから、ここでは、多孔体の空げき特性を考慮して、分散物質の運動を確率変数により表現し、統計的に解析する方法をとろう。この種の研究としては、ピエゾ水頭を確率変数により表わし、縦および横方向分散係数を求めた P.G. Saffman のもの<sup>(19)</sup> あるいは空げき系のモデル化により、同様な結果を得た J. Jong<sup>(2)</sup> の研究がある。これらにおいても、空げき特性の表現が十分とはいえないが、示唆に富み、興味深い結果がえられている。本節では、混合可能な中立浮遊子（分散要素とよぶ）の多孔体内の運動を追跡し、流れの分散機構について考察を行なう（ここで、分散要素により流れは影響を受けないとするが、この意味では流体素分そのものともいえよう）。第一に、多孔体構成粒子の特性と空げき率が既知のとき、たとえば、淡水流れへスリットから流入する塩水の分散パターンを乱数モデルによりシミュレートし、つぎに、多孔体内の分散要素の運動をマルコフ過程とすれば、その濃度分布が拡散方程式で表わされることを示す。第三に、両者の定常で、同一境界条件の下での解から、縦および横方向分散係数の推定を試みる。

ここで、単位流路における分散要素の流速は、流路内の流速分布および流路の幾何要素と分子拡散の関係から決められるが、これらを詳細に考慮することは、解析をいたずらに複雑にすることになり、本研究では、流路内の平均流速を用いる。また、流れは層流であるとする。

(1) 空げき系モデルと分散

分散要素の運動の場を座標  $(x, y, z)$  で表わし、解析を単純にするため、分散要素は、 $x=y=0$  の直線スリット ( $z$  方向には一様) から流入する場合について考察を行なう。流れは定常で、ピエゾ水頭  $h$  は  $x$  だけの関数とする。

したがって、流れは  $z$  方向に一様であり、 $x$  軸について対称となるから、 $x-y$  平面 ( $x \geq 0$ ) における分散要素の運動に注目すればよい。図-14 は流れの場 ( $x-y$

平面) を、 $x$  方向に  $i(i=1, 2, \dots, I)$ 、 $y$  方向に  $j(j=1, 2, \dots, J)$  と番号をつけ、単位空間 Cell  $(i, j)$  に分けたものである。

スリットから流入する分散要素の空げき系における運動はフローチャート III で示される。

1~31... フローチャート I および II により、空げき系モデルの流路径要素  $d_{pi}$  および流路長要素  $l_i'$  を与える。

32... 計算に必要な水理定数を与える。

33... 計算に必要な水理定数を与える。

$dh/dx$ : ピエゾ水頭勾配

$N_p$ : 単位時間に流入する分散要素の数

$c_l$ : 流路長さを定める係数 ( $l_i=c_l l_i'$ )

$c_k$ : 流速を与えるための係数 ( $c_f$  (12) 式)

$T$ : 分散要素を追跡する時間 (シミュレーション時間)

$DX, DY$ : 単位空間 Cell  $(i, j)$  の  $x$  および  $y$  方向長さ

$DT$ : 分散要素の位置を Cell  $(i, j)$  に記録する時間間隔

$I, J$ : 単位空間 Cell の  $x$  および  $y$  方向の数

ここに、 $c_l$  はシミュレーション値と実験値から定められる。

分散要素が単位流路の出口に達したとき、つぎの流路として選ぶ水理要素 ( $\theta, \varphi, d_p, l$ ) の基準は、その流路への流量に比例すると考える。

$\theta$ : 式 (8) で表わされる単位流路における流量  $q_i$ 、および傾き角が  $\theta \sim \theta + d\theta$  にある幾何学的な割合により、一様乱数  $R(0.0 \sim 1.0)$  から  $\theta$  を求めるには、つぎの関係が用いられる。

$$\frac{\int_0^\theta \cos^4 \theta \sin \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin \theta d\theta} = 1.0 - R \dots \dots \dots (28)$$

したがって、次式により  $\theta$  が与えられる。

$$\theta = \cos^{-1} R^{0.2} \dots \dots \dots (29)$$

$\varphi$ :  $\theta$  と同様な考察により、一様乱数  $R$  により与えられる。

$$\int_0^\varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi = R \dots \dots \dots (30)$$

$$\varphi = 2\pi \cdot R \dots \dots \dots (31)$$

$d_p$ : 式 (8) から、 $q_i \propto d_{pi}^4$  となるから、31 で与えられた  $d_p$  を大きさの順に並べ、それぞれ  $d_{pi}^4$  の  $m$  番目までの和  $DP(m) = \sum_{i=1}^m d_{pi}^4 (m=1, 2, \dots, M)$  を求め

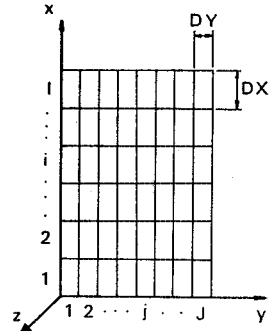
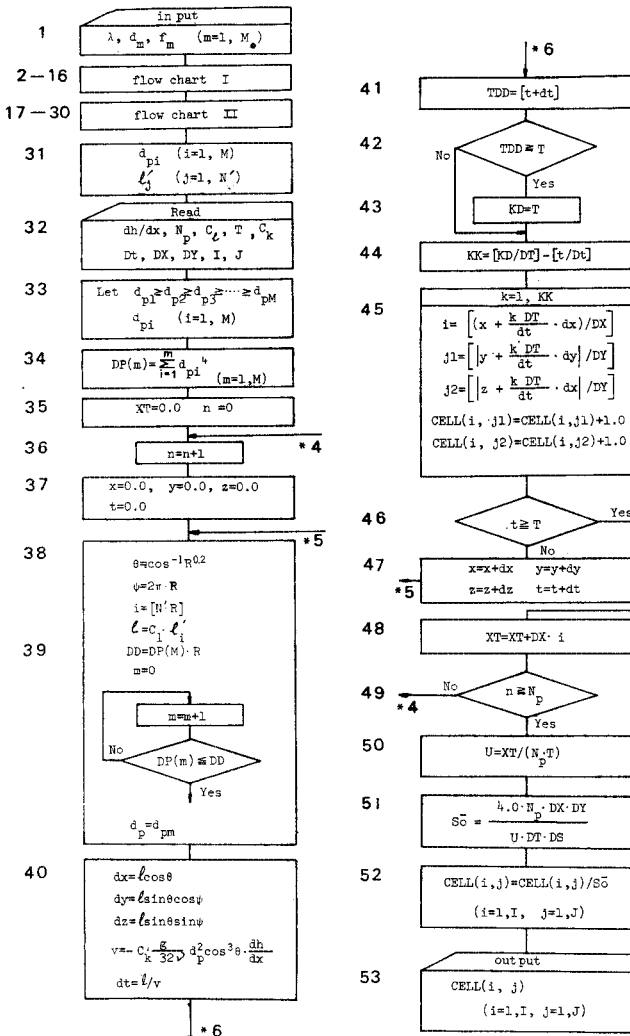


図-14 単位空間モデル



フローチャート III

ておくと、一樣乱数  $R$  により次式を満たす  $m$  番目の  $d_{pm}$  を  $d_{pi}$  とすればよい。

$$DP(m) \leq R \cdot DP(M) < DP(m+1) \dots (32)$$

$l$ : 流路と流路長さ  $l$  は独立と考えているから、任意に並べられた  $N'$  個の  $l'$  から次式で与えられる  $i$  番目の  $l'$  を用いればよい。

$$i = [N' \cdot R] \dots (33)$$

[ ] はガウス記号で、 $N' \cdot R$  を越えない最大の整数を表わす。

したがって、それぞれの流路要素およびピエゾ水頭勾配から、分散要素がその流路により移動する距離および通過に要する時間が与えられる。

$$v_i = -c_k \cdot \frac{g}{32\nu} \cdot d_{pi}^2 \cos^3 \theta_i \frac{dh}{dx} \dots (34)$$

$$dt_i = l_i / v_i \dots (35)$$

$$dx_i = l_i \cos \theta_i \dots (36)$$

$$dy_i = l_i \sin \theta_i \cos \varphi_i \dots (37)$$

$$dz_i = l_i \sin \theta_i \sin \varphi_i \dots (38)$$

33... 空けき径要素  $d_{pi}$  を大きさの順に並べる。

34... 一樣乱数  $R$  から、39 において  $d_{pm}$  を定める準備として、 $\sum_{i=1}^m d_{pi}^4 (m=1, 2, \dots, M)$  を求め  $DP(m)$  とする。

35...  $XT$ : 平均流速を求めるパラメーター

36 および 49...  $n: N_p$  個の分散要素を動かすためのパラメーター

37...  $x, y, z, t$ : 時刻  $t$  における分散要素の位置を示す変数

38, 39... 式 (29), (31), (32), (33) にそれぞれ一樣乱数  $R$  を与え、分散要素が通過する流路要素 ( $\theta, \varphi, l, d_p$ ) を定める。

40... 分散要素が与えられた流路を通過することにより移動する距離 ( $dx, dy, dz$ ) および通過に要する時間  $dt$  を求める。

41~44... 時間  $t$  に新しく  $dt$  を加えることにより、時間  $T$  を越えないかを判定し、 $t \sim t+dt$  を  $DT$  で分割し、45 における計算の準備をする。

$t+dt$  が  $T$  を越えるときは、ちょうど  $T$  になる位置を求め、つぎの分散要素についての計算にうつる。

空けき系モデルにおける多孔体内の流れは定常と考えているから、それぞれの分散要素について、 $DT$  ごとに分散要素の位置を記録していけば、スリットから時間  $DT$  ごとに連続的に分散要素を流入させると同じ効果になる。また、

流れは  $z$  軸方向に一樣であるから、空けき空間における分散要素を  $x-y$  平面 ( $z=0$ ) に投影した位置を  $Cell(i, j)$  に記録すればよい。このことは、 $z \neq 0$  におけるスリットからの分散要素の流入効果を考えたことになる。

一方、フローチャート III の 38~40 では点源からの分散要素の流入としているから、45 で  $Cell(i, j)$  へ分散要素の位置を記入するとき、 $z$  座標を  $x$  軸について  $90^\circ$  回転し  $y$  座標における値としてもよい。また、流れは  $x$  軸に対称であるから、 $y$  の負の領域での値を  $x$  軸について折り返して用いれば、スリットから  $4N_p$  個の分散要素を流入させたと同じ効果が  $Cell(i, j)$  に得られる。

45... 流路内を移動する分散要素の時間  $DT$  ごとの位置を  $Cell$  に記入する。

46, 47... 分散要素を  $T$  時間移動させるための操作である。

48…時刻  $T$  における、それぞれの分散要素の位置の和を求める。

50…分散要素全体の実平均流速  $U$  を求める。

51… $4N_p$  個の分散要素を平均流速  $U$  で動かしたときの濃度指標  $S_0$  を求める。 $DS$ : スリットが支配する流入源の幅により定められる値。

52…それぞれの単位空間の濃度を求める。

以上の手順により、スリットから定常的に流入する分散要素の分散パターンが得られる。

つぎに、流れの場が単純なとき、その分散パターンは、上の結果を重ね合わせ、平均操作することにより求められよう。

(2) 分散モデルと拡散方程式

$x$  軸方向を平均流向(ピエゾ水頭勾配  $h$  は  $x$  だけの関数)とする 2次元定常流れにおいて、分散要素が時刻  $t$  に、位置  $(x, y)$  にある条件付確率は、その前の時刻  $t'(=t-\Delta t)$  にあった位置  $\{x'(=x-\Delta x), y'(=y-\Delta y)\}$  および時間間隔  $\Delta t$  に従うとすると、これはマルコフ過程と考えられよう。

短い時間  $\Delta t$  に移動する距離  $\Delta x, \Delta y$  を運動の単位ステップと考え、定常で空間的に一様なマルコフ過程のせん移確率を  $P(x-x', y-y', t-t')$  で表わすと、次式が成り立つ<sup>21)</sup>。

$$P(x, y, t+\Delta t) = \iint P(x-\Delta x, y-\Delta y, t) \times P(\Delta x, \Delta y, \Delta t) d\Delta x d\Delta y \dots\dots\dots (39)$$

ここで、積分は  $\Delta x, \Delta y$  のすべてについて行なわれ、 $P$  について、 $\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t}, \langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t}$  の存在、時間について 1階、空間について 2階までの偏微分存在の仮定、および平均流向が  $x$  軸であることから、 $\langle \Delta y \rangle_{\Delta t} = 0, \langle \Delta x \cdot \Delta y \rangle_{\Delta t} \ll \langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t}, \langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t}$  となることに注意し、 $\Delta x, \Delta y$  に関する平均量について式 (40)~(42) を用いると、式 (43) をうる。ただし、 $\langle \rangle_{\Delta t}$  は、 $\Delta t$  に関する平均を示す。

$$\langle \Delta x \rangle_{\Delta t} = m \cdot \Delta t \dots\dots\dots (40)$$

$$\langle (\Delta x)^2 \rangle_{\Delta t} - \langle \Delta x \rangle_{\Delta t}^2 = \sigma_{\Delta x}^2 \cdot \Delta t \dots\dots\dots (41)$$

$$\langle (\Delta y)^2 \rangle_{\Delta t} - \langle \Delta y \rangle_{\Delta t}^2 = \sigma_{\Delta y}^2 \cdot \Delta t \dots\dots\dots (42)$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + m \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{2} \sigma_{\Delta x}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \sigma_{\Delta y}^2 \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} \dots\dots\dots (43)$$

上の考察では、 $P$  を 1つの分散要素のせん移確率としてきたが、局所的な意味での流れの場における平均物理量について、濃度  $S$  は  $P$  に比例するとし、また、 $m$  は流れの実平均流速  $U$  とすることができ、つぎの拡散方程式が求められる。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + D_2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \dots\dots\dots (44)$$

これまでの考察は、分散要素の運動の厳密な取り扱いとはいえないが、分散物質の濃度  $S$  の拡散方程式を得たものであり、次節の数値シミュレーションにおいて、分散係数  $D_1$  および  $D_2$  を求める水理学的根拠が得られたことになる。

(3) 分散機構のシミュレーション

同一のモデルに対する分散パターンおよび拡散方程式 (44) 式による濃度分布から縦方向分散係数  $D_1$  および横方向分散係数  $D_2$  が推定される。

縦方向分散

図-14 の  $y$  軸上に格子間隔  $DY$  ごとに分散要素の流入源を並べると、流れは  $y$  方向に一樣となるから、一次元分散パターンが得られる。実際の計算では、フローチャート III によるスリットから流入した分散物質の分布 Cell( $i, j$ ) を  $j$  について加え合わせればよい。

図-15 は数値シミュレーション例であり、計算は、多孔体構成粒子径  $d=0.096$  cm、空げき率  $\lambda=0.36$ 、実平均流速  $U=0.0940$  cm/s、 $DX=0.0584$  cm の下に行なわれた。

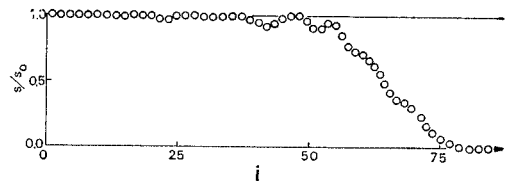


図-15 縦方向分散シミュレーション例

このモデルにおいて、拡散方程式は式 (45) となり、濃度分布  $S$  は式 (46) で示される条件の下での解、すなわち、一次元拡散方程式の解<sup>22)</sup>で与えられる。

$$\frac{\partial S}{\partial t} + U \frac{\partial S}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} \dots\dots\dots (45)$$

$$\left. \begin{aligned} S(0, t) &= S_0 \quad (t \geq 0) \\ S(x, 0) &= 0 \quad (x > 0) \\ S(\infty, t) &= 0 \quad (t \geq 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (46)$$

$$S/S_0 = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x-Ut}{2(D_1 t)^{1/2}} \right\} + \frac{1}{2} \exp \left( \frac{Ux}{D_1} \right) \operatorname{erfc} \left\{ \frac{x+Ut}{2(D_1 t)^{1/2}} \right\} \dots\dots (47)$$

通常、上式の右辺第 2 項は省略でき、濃度  $S$  は次式で近似される。

$$1 - 2 \cdot \frac{S}{S_0} = \operatorname{erf} \left\{ \frac{x-Ut}{2(D_1 t)^{1/2}} \right\} \dots\dots\dots (48)$$

ここで、 $\xi = (x-Ut)/2(D_1 t)^{1/2}$  とおくと、 $\xi_i$  は図-15 の  $x_i (=DX \cdot i)$  における  $(S/S_0)_i$  より、式 (48) から求められ、最小自乗法を用いれば次式により  $D_1$  が与えられる。

$$D_1 = \left\{ \frac{1}{4t} \frac{\sum \xi_i (x_i - Ut)^2}{\sum \xi_i^2} \right\}^2 \dots\dots\dots (49)$$

横方向分散

図-14 で  $y$  の  $-\infty \sim +\infty$  の領域について考え、 $y$  軸の正の部分に格子間隔  $DY$  ごとに分散要素の流入源を並べたモデルにより、横方向分散係数  $D_2$  が求められる。図-16 はその数値シミュレーション例で、分散パターンの計算条件は、 $i \leq 0$  の流入源で  $j \geq 0$  のとき  $S=100$  ( $=S_0$ )、 $j < 0$  で  $S=0$ 、 $DY=0.2$ 、 $DX$  および 図-15 の条件と同一である。

このとき、式 (44) で  $\partial^2 S / \partial x^2 \ll \partial^2 S / \partial y^2$  とおかれ、濃度分布  $S$  は、拡散方程式 (50) 式の境界条件式 (51) の下での解 (52) 式<sup>23)</sup>により与えられる (図-17)\*。

$$U \frac{\partial S}{\partial x} = D_2 \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \dots\dots (50)$$

$$\left. \begin{aligned} S(0, y) &= S_0 \quad (-\infty < y \leq 0) \\ S(0, y) &= 0 \quad (0 < y < \infty) \\ \partial S / \partial y &= 0 \quad (y = \pm \infty) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (51)$$

$$1 - \frac{S}{S_0} = \text{erf} \left\{ \frac{y}{2(D_2 \cdot x / U)^{1/2}} \right\} \dots\dots\dots (52)$$

ここで、 $\eta = y/2(D_2 \cdot x / U)^{1/2}$  とおくと、それぞれ  $i$  行 ( $x = DX \cdot i$ ) における ( $y = DY \cdot j$ ) の  $(S/S_0)_{ij}$  より  $\eta_{ij}$  が与えられ、縦方向分散係数と同様に  $D_{2i}$  が求められる。 $D_{2i}$  の  $i$  についての平均により、横方向分散係数  $D_2$  が求められる。

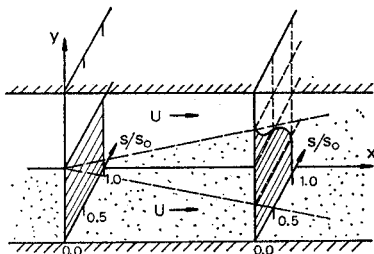


図-17 横方向分散モデル

\* 図-16 と 図-17 では  $y$  座標が逆であるが、分散係数  $D_2$  を求めるのに不都合はない。

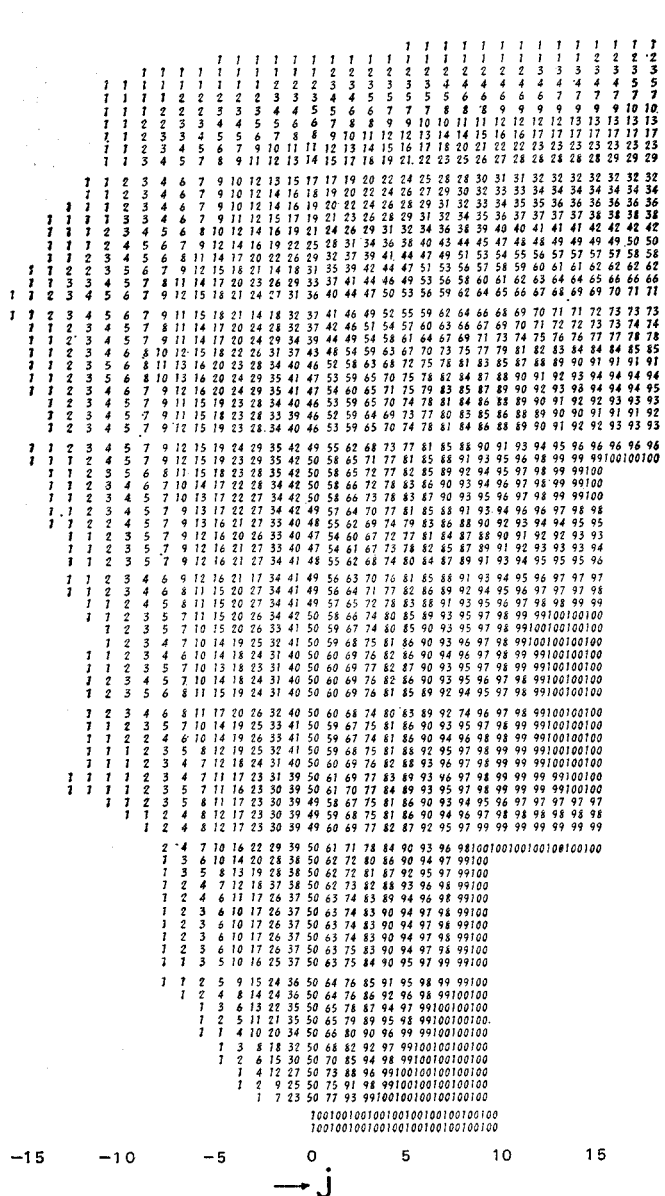


図-16 分散パターン例 (右の空白部は右端の値に同じ)

$$D_2 = \left\langle \frac{U}{4x_i} \left( \frac{\sum_j \eta_{ij} y_j}{\sum_j \eta_{ij}^2} \right)^2 \right\rangle \dots\dots\dots (53)$$

表-7 は、Harleman および Rumer<sup>22), 23)</sup> らの実験値  $D_E$  およびその水理条件 (表-8) を参考にしてシミュレーションにより分散係数  $D_S$  を求めたものである。

表より、縦方向分散係数  $D_{1s}$  は、流路長係数  $c_l$  の増加により大きくなるが、その関係は明らかとはいえない。一方、横方向分散係数  $D_{2s}$  と  $c_l$  は、ほぼ比例している。

図-18 は Harleman, Rumer<sup>22)</sup> らによる実験値  $D_{2E}$

表-7 シミュレーションによる分散係数

(\*  $d=0.039\text{ cm}$ ,  $\lambda=0.36$ , \*\*  $0.092, 0.36$ , 無印  $0.096, 0.37$ )

RUN	$U$ (cm/s)	$R_e$	$R_e'$	$C_l$	$D_1/\nu$	$D_2/\nu$	備考
1-A	0.0196	0.0759	0.0908	0.25	0.0528	0.00157	*
B	0.0189	0.0730	0.0873	0.5	0.0556	0.00312	*
C	0.0180	0.0695	0.0832	1.0	0.864	0.00491	*
2-A	0.0581	0.225	0.269	0.25	0.239	0.00455	*
B	0.0557	0.216	0.258	0.5	0.239	0.01004	*
C	0.0519	0.206	0.246	1.0	0.320	0.01762	**
3-A	0.197	0.765	0.913	0.25	0.642	0.0199	*
B	0.176	0.683	0.817	0.5	1.176	0.0306	*
C	0.167	0.645	0.772	1.0	1.496	0.0548	*
4-A	0.0513	0.469	0.562	0.25	0.406	0.0104	**
B	0.0493	0.451	0.540	0.5	0.349	0.0218	**
C	0.0466	0.426	0.509	1.0	0.453	0.0318	**
5-A	0.148	1.36	1.63	0.25	1.371	0.0294	**
B	0.134	1.23	1.47	0.5	1.747	0.0456	**
C	0.127	1.16	1.39	1.0	1.998	0.0849	**
6-A	0.0125	0.119	0.142	0.25	0.0627	0.00224	*
B	0.0118	0.113	0.135	0.5	0.0738	0.00435	*
C	0.112	0.107	0.128	1.0	0.1019	0.00863	*
7-A	0.0871	0.830	0.993	0.25	0.839	0.0225	*
B	0.0832	0.794	0.952	0.5	0.901	0.0280	*
C	0.0763	0.728	0.872	1.0	1.096	0.0600	*
8-A	0.320	3.05	3.65	0.05	2.47	0.0666	*
B	0.291	2.77	3.31	0.5	6.67	0.1172	*
C	0.275	2.62	3.14	1.0	7.58	0.2076	*

表-8 分散係数 (Harleman, Rumer<sup>22),23</sup>)による実験値

(\*  $d=0.039\text{ cm}$ ,  $\lambda=0.36$ , \*\*  $0.092, 0.36$ , 無印  $0.096, 0.37$ )

RUN	$U$ (cm/s)	$R_e$	$R_e'$	$D_1/\nu$	$D_2/\nu$	備考
70	0.0148	0.0607	0.0728	0.0208		*
71	0.0304	0.125	0.149	0.06		*
67	0.0406	0.167	0.200	0.0752		*
69	0.122	0.505	0.604	0.28		*
38	0.0532	0.81	0.97	0.555		**
36	0.144	2.17	2.59	1.58		**
5-L	0.0116	0.111	0.133		0.00925	
2-L	0.0802	0.769	0.920		0.0256	
11-L	0.284	2.72	3.25		0.0656	

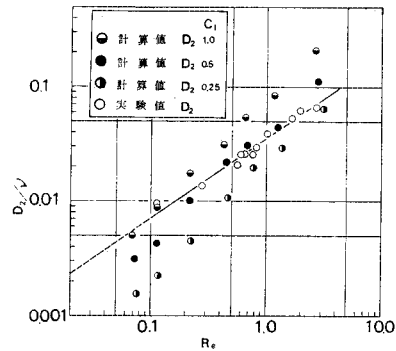


図-18 横方向分散係数

(○印), 実験曲線,  $c_l$  の値をパラメーターとしたシミュレーション値  $D_{2s}$  と Reynolds 数の関係である。図より, シミュレーション値  $D_{2s}$  の勾配は実験曲線のそれよりはやや急になるが,  $c_l=0.5$  のとき, 両者の値はほぼ一致している。一方,  $c_l=0.5$  のとき, 縦方向分散係数は, シミュレーション値が実験値の1~2倍となる。

一般に, 分散係数の値は, 高い精度が期待されないことを考えれば, 以上の考察により, 多孔体内の流れの分散現象がほぼ予測されるとしてよいであろう。

分散要素の追跡時間を変えて求められた分散パターン(200~1600秒)に有意な変化は認められず, シミュレーションの精度を向上させるには, 追跡時間を200秒程度とし, 流入源から単位時間に流入させる分散要素の数を増すほうが有利である。本研究では, 分散要素の数は流れの平均流速に応じ200~2000個が用いられた。

シミュレーションによる縦方向分散係数を実験値に近づけるには, 分散モデルにおける単位流路を表わす水理要素  $\theta, d_p, l$  の間に, たとえば,  $d_p$  が大きくなると  $\theta$  を大きくするなど何らかの関数関係を与えることが考えられる。しかし, これらの水理量相互の関係を見つけるのは容易でなく, 本研究では,  $\theta, d_p, l$  はそれぞれ独立とされた。

本節では, 均一粒子からなる多孔体の流れの層流領域についてのみ考察されたが, ほかに場合においても, 分散パターンが推定されよう。

また, 放射性物質を含んだ流体の運動について考える

とき, モデルにおける分散要素に対して放射性物質の半減期で代表される寿命を導入すればよく, この種の研究にも有効な解析方法といえよう。

## 5. あとがき

本研究では, 多孔体の空げき系を円筒流路の樹枝状結合体とし, 単位流路内の流れの吟味により, 流れの微視的特性と平均流速について, および空げき系モデルにおける分散要素の運動のシミュレーションにより多孔体内の流れの分散パターンが検討された。

前者では, 流れの特性を支配する要素について検討し, 多孔体内の流れを細孔流領域, 層流領域, せん移流領域, 乱流領域に分類するとともに, それぞれの流れについて検討し, 層流および乱流領域では多孔体の構成粒子特性および空げき率と平均流速の関係を明らかにし, またその実験による検討も行なわれた。

後者では, 多孔体内の流れについて, 乱数を用いた分散モデルを求めるとともに, 分散要素の運動をマルコフ過程とすると, その濃度分布が拡散方程式で表わされることを示し, 多孔体の構成粒子特性, 空げき率および Reynolds 数から縦および横方向分散係数の推定が可能なることを示した。

これらの考察は, 多孔体内の流れの微視的特性と平均水理量との関係を明らかにしようとした結果であり, 多

孔体構成粒子特性と流れの関係を示し、また多孔体内の流れが乱数モデルにより数値シミュレーションされることを示した点に意義をもつと考える。

最後に、本研究にあたり終始ご指導を賜った京都大学工学部教授 岩佐義朗先生に深甚の謝意を表します。

#### 参 考 文 献

- 1) H. Darcy : Les fontaines publiques de la Ville de Dijon, Paris, 1856.
- 2) 吉田昭治 : 浸透流の基礎方程式, 農業土木研究所別冊 1 号, 1960.
- 3) J. Jong : Longitudinal and transverse diffusion in granular deposits, Trans. AGU, Vol. 39, No. 1, 1958.
- 4) P.G. Saffman : A theory of dispersion in a porous media, Jour. Fluid Mech. 1959.
- 5) A.E. Scheidegger : The physics of flow through porous media, Univ. Tronto Press, 1960.
- 6) L.C. Graton and H.J. Fraser : Systematic packing of sphere—with particular relation to porosity and permeability, The Journal of Geology, Nove-Decem. 1955. Supplementary number.
- 7) C.C. Furnas : Mathematical relations for beds of broken solids of maximum density, Industrial and Engineering Chemistry, Vol. 23, No. 9, Sept. 1931.
- 8) 徳光善治 : 粒体のつめこみに関する研究, 材料, 第 13 卷 第 133 号.
- 9) 室田 明・佐藤邦明 : 空げき規模の分布による透水係数の評価について, 第 13 回水理講演会講演集, 1969.
- 10) J. Donat : Ein Beitrag zur Durchlässigkeit der Sand, Wasserkraft und Wasserwirtschaft, Heft 17, September 1929.
- 11) K. Terzaghi and P.B. Peck : Soil mechanics in engineering practice, John Wiley Sons, New York, 1948.
- 12) 藤崎忠俊 : 土の透水性に関する研究, 京都大学工学修士論文, 1969.
- 13) 岩佐義朗 : 水理学, 朝倉土木工学講座 3, 朝倉, 1969.
- 14) G. Kovács : Relationship between velocity of seepage and hydraulic gradient in the zone of high velocity, Proc. of 13th I.A.H.R. Kyoto Vol. 4 1969.
- 15) G. Karadi and I.V. Nagy : Investigations in to the validity of the linear seepage law, Proc. of 9th I.A.H.R. Dubrovnik 1961.
- 16) 土木研究所資料第 442 号, 有明海綿切堤防調査報告書, 建設省土木研究所, 昭和 44 年 3 月.
- 17) E.J. List and N.H. Brooks : Lateral dispersion in saturated porous media, Jour. of Geophysical Research, Vol. 72, No. 10, May 1967.
- 18) A.E. Scheidegger : General theory of dispersion in porous media, Jour. of Geophysical Research, Vol. 66, No. 10, Oct. 1961.
- 19) R.R. Rumer : Longitudinal dispersion in steady and unsteady flow, Proc. A.S.C.E., Hy. 4, July 1962.
- 20) J. Bear : On the tensor form of dispersion in porous media, Jour. of Geophysical Research, Vol. 66, No. 4, April 1961.
- 21) 寺本 英 : マルコフ過程と力学過程, 新物理学進歩シリーズ 2, 槇書店 1961.
- 22) D.R.F. Harleman and R.R. Rumer : Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic media, Jour. of Fluid Mechanics Part 3 Vol. 16 July 1963.
- 23) D.R.F. Harleman, P.F. Mehlhorn and R.R. Rumer : Dispersion-Permeability correlation in porous media, Proc. A.S.C.E. Hy. 2 March 1963.

(1970. 8. 26・受付)