

断面変形を考慮した曲線箱桁の応力解析

ON THE STRESS ANALYSIS OF A THIN WALLED CURVED GIRDER WITH DEFORMABLE RECTANGULAR CROSS SECTION

能町 純雄*・吉田 紘一**

By Sumio G. Nomachi and Koichi Yoshida

1. ま え が き

薄肉曲線桁については従来数多くの研究がなされ、これらの諸結果が実施設計上大きな貢献をしている。しかし、ほとんどが桁の断面形は不変であるという仮定に立って議論が進められている。一方、直の箱桁については、断面変形を考慮した応力解析の結果は断面形不変を仮定した場合の結果にくらべて大きなそり応力の生じることが知られており、実験的にも確認されている^{1)~3)}。単純な鉛直荷重によっても、内部に大きなねじれモーメントを生ずる曲線桁の場合には断面変形の影響はさらに大きく表われることが予想される。したがってこれを考慮した曲線薄肉桁の応力性状の検討は興味のある問題である。この問題については、Daorowski⁴⁾が薄肉矩形断面について近似的な理論計算をしているのと、奥村・落合⁵⁾による直交関係数を利用した研究以外見当らないようである。能町・尾崎は帯板要素の短辺方向で各ひずみを直線分布とする「変位せん断方程式」を用いて、断面変形を考慮した矩形断面直桁の曲げねじれを検討しているが、ここではその手法を曲線薄肉箱桁に適用して、断面変形を考慮した解析を行なう。

まず、曲線箱桁を曲線帯板と扇形帯板に分離しそれぞれの変位せん断方程式を誘導し、各帯板の接合する頂点での力のつりあいと、断面のラーメン変形抵抗の条件式を用いて解析をすすめる。

2. 変位せん断方程式

曲線桁を構成する「曲率のある帯板」と「扇形帯板」について変位とせん断力の二次元応力の関係式である変位せん断方程式および変位の式を誘導する。

* 正会員 工博 室蘭工業大学教授 土木工学科
** 正会員 工修 北海道開発局土木試験所構造研究室

(1) 曲率のある帯板

図-1 のように極座標をとり、 r, θ, z 方向の変位を u, v, w とする。 θ, z 方向の法線方向断面力を p_θ, p_z 、また $\theta z, rz$ 方向のせん断力をそれぞれ $q_{\theta z}, q_{rz}$ とし、 $r\theta$ 方向のせん断力は無視するものとする、力のつりあい式は、

$$\frac{\partial p_z}{\partial z} + \frac{q_{\theta z}'}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{p_\theta'}{r} + \frac{\partial q_{\theta z}}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial q_{rz}}{\partial z} + \frac{p_\theta}{r} = 0 \quad \dots\dots\dots (3)$$

ひずみと各力の関係は

$$p_\theta = Et \epsilon_\theta \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$q_{\theta z} = Gt \left(\frac{w'}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし、' は θ についての一度微分を表わす。変位 v について平面保持を仮定し、 u についても同様に z 方向に一次変化を仮定すると、

$$u = u_A \left(1 - \frac{z}{h} \right) + u_B \frac{z}{h} \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$v = v_A \left(1 - \frac{z}{h} \right) + v_B \frac{z}{h} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\epsilon_\theta = \frac{1}{r} (v' + u) = \epsilon_A \left(1 - \frac{z}{h} \right) + \epsilon_B \frac{z}{h} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ただし、

$$\epsilon_A = (v_A' + u_A)/r, \quad \epsilon_B = (v_B' + u_B)/r$$

式(4)に式(8)を代入し、式(2)に用い、 $z=0$

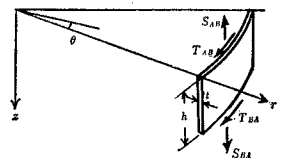


図-1

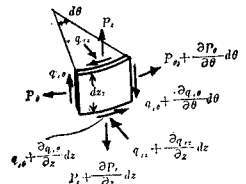


図-2

で $q_{\theta z} = T_{AB}$ を考慮して積分すると、

$$q_{\theta z} = -\frac{Et}{r} \left(\epsilon_A \frac{2hz - z^2}{2h} + \epsilon_B \frac{z^2}{2h} \right) + T'_{AB} \dots\dots\dots (9)$$

また、 $z=h$ で $q_{\theta z} = -T_{BA}$ であるから、

$$T_{AB} + T_{BA} = \frac{Eth}{2r} (\epsilon_A' + \epsilon_B') \dots\dots\dots (10)$$

T_{AB} , T_{BA} は 図-1 の方向を正とする。さらに式 (9) を式 (1) に代入し p_z の境界条件を 図-1 のように S_{AB} , S_{BA} として積分すると、

$$\frac{T'_{AB}}{r} = \frac{Eth}{6r^2} (2\epsilon_A'' + \epsilon_B'') + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{h} \dots\dots\dots (11)$$

式 (10) と式 (11) より、

$$\frac{T'_{BA}}{r} = \frac{Eth}{6r^2} (2\epsilon_B'' + \epsilon_A'') + \frac{S_{BA} - S_{AB}}{h} \dots\dots\dots (12)$$

式 (11), (12) を「曲率のある矩形帯板の変位せん断方程式」と名づける。

z 方向変位 w は桁理論の仮定を用いて、帯板の深さ方向で変化しないとすると式 (5) に式 (7) を代入して、

$$q_{\theta z} = Gt \left(\frac{w'}{r} + \frac{v_B - v_A}{h} \right) \dots\dots\dots (13)$$

式 (13) を式 (2) に代入して、 v を ϵ_θ と u で表わすと、

$$Gt \frac{w''}{r^2} = \frac{Gt}{h} \left(\epsilon_A - \epsilon_B - \frac{u_A - u_B}{r} \right) + \frac{S_{AB} - S_{BA}}{h} \dots\dots\dots (14)$$

(2) 扇形帯板

図-3 のように座標 r, θ をとり、それぞれの方向の変位を u, v 、法線方向力を p_r, p_θ とし、 q をせん断力とすると、力のつりあいは 図-4 にしたがって、

$$p_\theta' + \frac{\partial(r^2 q)}{r \partial r} = 0 \dots\dots\dots (15)$$

$$\frac{\partial(r p_r)}{\partial r} + q' - p_\theta = 0 \dots\dots\dots (16)$$

また、

$$p_\theta = Et \cdot \epsilon_\theta \dots\dots\dots (17)$$

$$q = Gt \left(\frac{u'}{r} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \right) \dots\dots\dots (18)$$

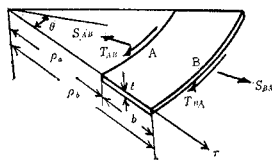


図-3

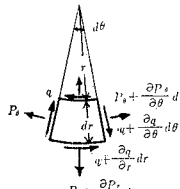


図-4

ひずみ ϵ_θ を r 方向に一次変化と仮定する。

$$\epsilon_\theta = \epsilon_A \frac{\rho_b - r}{b} + \epsilon_B \frac{r - \rho_a}{b} \dots\dots\dots (19)$$

ただし、

$$\epsilon_\theta = \frac{v'}{r} + \frac{u}{r}$$

ρ_a, ρ_b : 部材の内側、外側の辺の曲率半径

半径方向変位 u は桁理論の仮定を用いて r 方向に一定すると、 θ 方向変位 v は、

$$v' = r \epsilon_\theta - u \dots\dots\dots (20)$$

式 (15), (17), (19) より、

$$r^2 q = -\frac{Et}{6b} [\epsilon_B' \{2(r^3 - \rho_a^3) - 3\rho_a(r^2 - \rho_a^2)\} + \epsilon_A' \{3\rho_b(r^2 - \rho_a^2) - 2(r^3 - \rho_a^3)\}] + \rho_a^2 T_{AB} \dots\dots\dots (21)$$

$r = \rho_b$ で $q = -T_{BA}$ を考慮すると、

$$\rho_a^2 T_{AB} + \rho_b^2 T_{BA} = \frac{Eth}{6} \{ \epsilon_B' (2\rho_b + \rho_a) + \epsilon_A' (2\rho_a + \rho_b) \} \dots\dots\dots (22)$$

p_r の境界値を 図-3 にしたがって S_{AB} , S_{BA} とし、式 (16), (21), (17) より

$$\rho_a T'_{AB} = \frac{Eth}{6} (2\epsilon_A'' + \epsilon_B'') + Et \rho_b \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} + \frac{\rho_b(\rho_a S_{AB} - \rho_b S_{BA})}{b} \dots\dots\dots (23)$$

式 (22), (23) より、

$$\rho_b T'_{BA} = \frac{Eth}{6} (2\epsilon_B'' + \epsilon_A'') - Et \rho_a \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} + \frac{\rho_a(\rho_b S_{BA} - \rho_a S_{AB})}{b} \dots\dots\dots (24)$$

式 (23), (24) を「扇形帯板の変位せん断方程式」と呼ぶ。

r 方向変位 u と S の関係式は式 (18) と式 (17) を式 (16) に代入し ρ_a から ρ_b まで積分すると、

$$\rho_b S_{BA} - \rho_a S_{AB} = -Gt \left\{ (u'' + u) \log \frac{\rho_b}{\rho_a} + \frac{\rho_a + \rho_b}{2} (\epsilon_B - \epsilon_A) \right\} + Etb \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2}$$

ここで、

$$\log \frac{\rho_b}{\rho_a} \approx \frac{b}{\rho}$$

ただし、

$$\rho = (\rho_a + \rho_b) / 2$$

を用いて、

$$Gt (u'' + u) \frac{1}{\rho} = -Gt \frac{\epsilon_B - \epsilon_A}{b} + \frac{Et}{\rho} \frac{\epsilon_A + \epsilon_B}{2} - \frac{\rho_b S_{BA} - \rho_a S_{AB}}{b} \dots\dots\dots (25)$$

3. 二軸対称箱形断面曲線桁

いま、図-5 に示すような二軸対称箱断面曲線桁に変位せん断方程式を適用する。

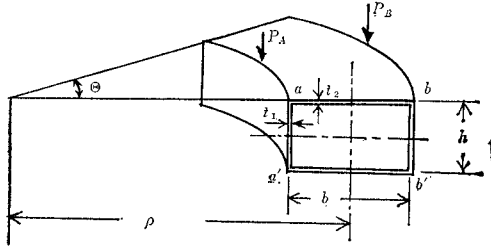


図-5

断面の対称性より、 $\epsilon_a = -\epsilon'_a$, $\epsilon_b = -\epsilon'_b$ を考慮して変位せん断方程式を立てると、

$$\rho_a T'_{aa'} = \frac{N_1}{6} \epsilon_a'' + \frac{\rho_a^2}{h} (S_{aa'} - S_{a'a}) \dots (27 a)$$

$$\rho_b T'_{bb'} = \frac{N_1}{6} \epsilon_b'' + \frac{\rho_b^2}{h} (S_{bb'} - S_{b'b}) \dots (27 b)$$

$$\rho_a T'_{ab} = \frac{N_2}{6} (2\epsilon_a'' + \epsilon_b'') + N_2 \frac{\rho_b}{b} \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} + \frac{\rho_b(\rho_a S_{ab} - \rho_b S_{ba})}{b} \dots (27 c)$$

$$\rho_b T'_{ba'} = \frac{N_2}{6} (2\epsilon_b'' + \epsilon_a'') - N_2 \frac{\rho_a}{b} \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2} + \frac{\rho_a(\rho_b S_{ba} - \rho_a S_{ab})}{b} \dots (27 d)$$

上式中、

$$N_1 = \frac{Et_1 h}{6}, \quad N_2 = \frac{Et_2 b}{6}$$

変形の式は、

$$\frac{w_a''}{\rho_a^2} + \frac{\varphi_1}{\rho_a} = \frac{2\epsilon_a}{h} + \frac{1}{Gt_1 h} (S_{aa'} - S_{a'a}) \dots (28 a)$$

$$\frac{w_b''}{\rho_b^2} + \frac{\varphi_1}{\rho_b} = \frac{2\epsilon_b}{h} + \frac{1}{Gt_1 h} (S_{bb'} - S_{b'b}) \dots (28 b)$$

$$\frac{\varphi_1'' + \varphi_1}{\rho^2} = \frac{4\epsilon_w}{bh} + \frac{2N_2}{Gt_2 bh} \frac{\epsilon_0}{\rho} + \frac{2(\rho_a S_{ab} - \rho_b S_{ba})}{Gt_2 bh \rho} \dots (28 c)$$

ただし、上式中、

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon_a + \epsilon_b}{2}$$

$$\epsilon_w = \frac{\epsilon_a - \epsilon_b}{2}$$

$$\varphi_1 = \frac{u_a - u_{a'}}{h} = \frac{u_b - u_{b'}}{h}$$

$$\varphi_2 = \frac{w_b - w_a}{b}$$

4. 頂点における力のつりあいと断面変形

各頂点における力のつりあいを図-6 にしたがってとる。ただし、 p_A , p_B はそれぞれ頂点 a , b に作用する鉛直荷重。

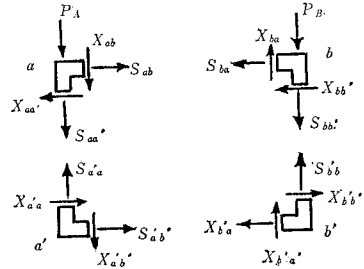


図-6

水平方向力のつりあい

$$S_{ab} = X_{aa'}$$

$$S_{ba} = -X_{bb'}$$

$X_{aa'}$, $X_{bb'}$ は箱桁の断面変形に抵抗するラーメン作用により生じるせん断力と、側壁の曲率によって生じる軸方向力の半径方向分力をこれに加えると、

$$X_{aa'} = \frac{N_1 \epsilon_a}{6 \rho_a} - \frac{1}{h} (M_{aa'} + M_{a'a})$$

$$X_{bb'} = \frac{N_1 \epsilon_b}{6 \rho_b} - \frac{1}{h} (M_{bb'} + M_{b'b})$$

鉛直方向力のつりあい

$$S_{aa'} = -p_A - X_{ab}$$

$$S_{a'a} = X_{a'b'}$$

$$S_{bb'} = -p_B - X_{ba}$$

$$S_{b'b} = -X_{b'a'}$$

上式中の X もラーメン作用により生じるせん断力であるが床板の半径方向の広がりを考慮して、

$$\rho_a X_{ab} = \rho_b X_{ba} = -\frac{1}{b} (\rho_a M_{ab} + \rho_b M_{ba})$$

$$\rho_a X_{a'b'} = \rho_b X_{b'a'} = -\frac{1}{b} (\rho_a M_{a'b'} + \rho_b M_{b'a'})$$

断面の対称性と頂点におけるモーメントのつりあいより、

$$M_{ab} + M_{aa'} = 0, \quad M_{ba} + M_{bb'} = 0$$

上式を考慮すると、

$$\rho_a S_{ab} - \rho_b S_{ba} = \frac{N_1}{3} \epsilon_0 + \rho b \zeta \dots (29 a)$$

$$S_{aa'} - S_{a'a} = -p_A + \frac{\rho}{\rho_a} h \zeta \dots (29 b)$$

$$S_{bb'} - S_{b'b} = -p_B + \frac{\rho}{\rho_b} h \zeta \dots (29 c)$$

式 (29) で ζ は、

$$\zeta = \frac{2(\rho_a M_{ab} + \rho_b M_{ba})}{\rho h b}$$

節点モーメントにラーメンのたわみ角公式を用いる。ただし扇形帯板については半径方向の広がりを考慮して、

$$\begin{aligned} M_{aa'} &= 2 K_1 (3 \beta_a - 3 \varphi_1) \\ M_{bb'} &= 2 K_1 (3 \beta_b - 3 \varphi_1) \\ M_{ab} &= 2 K_2 \left\{ 2 \beta_a + \beta_b - 3 \varphi_2 + \frac{b}{\rho_a} (\beta_a + \beta_b - 2 \varphi_2) \right\} \\ M_{ba} &= 2 K_2 \left\{ 2 \beta_b + \beta_a - 3 \varphi_2 - \frac{b}{\rho_b} (\beta_a + \beta_b - 2 \varphi_2) \right\} \end{aligned}$$

上式をモーメントのつりあいを考慮して解くと ζ は、
 $\zeta = G_0 \cdot \gamma$ (30)

ただし、

$$r = \varphi_1 - \varphi_2 \text{ (断面変形度)}$$

$$G_0 = \frac{24}{hb} \cdot \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

$$K_1, K_2: \text{部材剛度} \left(K_1 = \frac{Et_1^3}{12b}, K_2 = \frac{Et_2^3}{12h} \right)$$

隔壁の変形抵抗せん断力は、 t_d を隔壁の厚さとする
 と $\theta = \theta_i$ において、

$$Z_i = G t_d r \text{ (31)}$$

ζ にこの項を加えると式 (29 a~c) は次式のごとくなる。

$$\rho_a S_{ab} - \rho_b S_{ba} = \frac{N_1}{3} \epsilon_0 + \rho b \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) \text{ (32 a)}$$

$$S_{aa'} - S_{a'a} = -p_a + \frac{\rho}{\rho_a} h \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) \text{ (32 b)}$$

$$S_{bb'} - S_{b'b} = -p_b + \frac{\rho}{\rho_b} h \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) \text{ (32 c)}$$

ただし、 U_i は unit function でつぎのように定義する。

$$U_i = \begin{cases} 1 & \theta = \theta_i \\ 0 & \theta \neq \theta_i \end{cases}$$

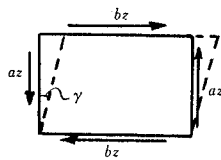


図-7

5. 基本微分方程式

頂点 a, b でせん断力のつりあいをとると、

$$T_{aa'} + T_{ab} = 0$$

$$T_{bb'} + T_{ba} = 0$$

式 (27) に式 (29), (32) を代入して上式を用いると、

$$\begin{aligned} \left(\frac{N_1}{6} + \frac{N_2}{6} \right) \epsilon_a'' + \frac{N_2}{3} \epsilon_0'' + \frac{\rho b}{b} \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \epsilon_0 \\ + 2 \rho^2 \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) = \frac{\rho_a^2}{h} p_A \text{ (34 a)} \end{aligned}$$

$$\left(\frac{N_1}{6} + \frac{N_2}{6} \right) \epsilon_b'' + \frac{N_2}{3} \epsilon_0'' - \frac{\rho_a}{b} \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \epsilon_0$$

$$- 2 \rho^2 \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) = \frac{\rho_b^2}{h} p_B \text{ (34 b)}$$

式 (34 a) + (34 b) より、

$$h \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) (\epsilon_0'' + \epsilon_0) = \rho_a^2 p_A + \rho_b^2 p_B \text{ (35)}$$

式 (34 a), (34 b) より

$$\begin{aligned} \frac{bh}{6} (N_1 + N_2) \epsilon_w'' + \rho h \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \epsilon_0 \\ + 2 bh \rho^2 \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) = \frac{b}{2} (\rho_a^2 p_A - \rho_b^2 p_B) \text{ (36)} \end{aligned}$$

式 (28 a), (28 b) に式 (29) を代入して、

$$\varphi_2'' = (w_b'' - w_a'') / b$$

を作ると、

$$\varphi_2'' = -\varphi_1 + \frac{4\rho}{h} \epsilon_0 - \frac{4\rho^2}{hb} \epsilon_w$$

$$-\frac{\rho^2}{G} \frac{2}{bt_1} \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) - \frac{\rho_b^2 p_B - \rho_a^2 p_A}{G h b t_1}$$

上式と式 (28 c) より $r'' = \varphi_1'' - \varphi_2''$ を求めると、

$$\begin{aligned} r'' = \frac{8\rho^2}{hb} \epsilon_w - \left\{ \frac{4}{h} - \frac{2}{G h b t_2} \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \right\} \rho \epsilon_0 \\ + \frac{2\rho^2}{G} \left(\frac{1}{h t_2} + \frac{1}{b t_1} \right) \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) \\ + \frac{\rho_b^2 p_B - \rho_a^2 p_A}{G h b t_1} \text{ (37)} \end{aligned}$$

式 (37) に式 (30) を代入して、

$$\begin{aligned} \frac{\zeta''}{G_0} - \frac{8\rho^2}{hb} \epsilon_w + \left\{ \frac{4}{h} - \frac{2}{G h b t_2} \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \right\} \rho \epsilon_0 \\ - \frac{2\rho^2}{G} \frac{h t_2 + b t_1}{h b t_1 t_2} \left(\zeta + \sum_i Z_i U_i \right) = \frac{\rho_b^2 p_B - \rho_a^2 p_A}{G h b t_1} \text{ (38)} \end{aligned}$$

式 (38) に式 (36) を用いて ζ を消去し、さらに $\sigma_w = E \epsilon_w$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho^4} \sigma_w'''' - k_1 \frac{1}{\rho^2} \sigma_w'' + k_2 \sigma_w \\ = -A \frac{M}{\rho} - B \left\{ -\frac{M''}{\rho^3} + \frac{b(\rho_b^2 p_B'' - \rho_a^2 p_A'')}{2\rho^4} \right\} \\ + C \left\{ \frac{M}{\rho} + \frac{b(\rho_b^2 p_B - \rho_a^2 p_A)}{2\rho^2} \right\} \\ - 2B \cdot h b \sum_i z_i u_i'' \frac{1}{\rho^2} \text{ (39)} \end{aligned}$$

ただし、上式中

$$k_1 = \frac{G_0}{G} \frac{2(ht_2 + bt_1)}{h b t_1 t_2}$$

$$k_2 = \frac{G_0}{E} \frac{96}{h b (h t_1 + b t_2)}$$

$$A = \frac{G_0}{E} \frac{144}{h^2 (h t_1 + b t_2) (3 b t_2 + h t_1)}$$

$$B = \frac{6}{h b (h t_1 + b t_2)}$$

$$C = B \cdot \frac{G_0}{G} \frac{2(b t_1 - h t_2)}{h b t_1 t_2}$$

断面変形を考慮した曲線箱桁の応力解析

$$M = -h \left(N_2 + \frac{N_1}{3} \right) \epsilon_0$$

M は箱桁の曲げモーメントで、これを用いると式 (35) は、

$$M'' + M = -(\rho_b^2 p_B + \rho_a^2 p_A) \dots \dots \dots (40)$$

ζ は式 (36) より、

$$\zeta = -\sum_i Z_i U_i - \frac{ht_1 + bt_2}{12} \frac{\sigma_w''}{\rho^2} + \frac{1}{2bh} \left(\frac{M}{\rho} - \frac{\rho_b^2 p_B - \rho_a^2 p_A}{2\rho^2} \right) \dots \dots \dots (41)$$

式 (40) は曲線桁の曲げモーメントの周知の式と一致する。式 (39) で $\rho \rightarrow \infty$ とすると曲げモーメント M の影響がなくなり断面変形を考慮した直線箱桁の式²⁾と一致する。式 (38)~(41) が基本微分方程式となる。

6. 両端単純支持の場合の解

桁の両端で軸方向応力、回転および断面変形のない単純支持* で、 $\theta = \theta_0$ に集中荷重があり、両端以外に N 個の中間隔壁が $\theta = \theta_i$ ($i=1, 2, 3, \dots, N$) にある場合について解く。

境界条件は $\theta=0, \theta$ で $M=\sigma_w=\varphi=r=0$, M, σ_w, r および荷重 p_A, p_B をフーリエサイン級数に展開すると、式 (39), (40) は、

$$(n^4 + K_1 \cdot n^2 + K_2) \cdot S_n[\sigma_w] = -\frac{1}{\rho} (F_1 + F_2 n^2) S_n[M] + (F_2 n^2 + F_3) S_n[\mathfrak{M}] + 2bhF_2 n^2 \sum_i S_n[Z_i U_i] \dots \dots \dots (42)$$

$$\left(\frac{n^2}{\lambda^2} - 1 \right) S_n[M] = \rho^2 S_n[q] \dots \dots \dots (43)$$

上式中 $S_n[f]$ は f のフーリエ係数で

$$S_n[f] = \int_0^\theta f(\theta) \sin \frac{n\pi\theta}{\theta} d\theta$$

さらに

$$K_1 = \rho^2 \lambda^2 k_1, \quad K_2 = \rho^4 \lambda^4 k_2 \\ F_1 = \rho^4 \lambda^4 (A - C), \quad F_2 = \rho^2 \lambda^2 B, \quad F_3 = \rho^4 \lambda^4 C \\ \lambda = \theta/\pi$$

荷重は集中荷重を考えるから、

$$\mathfrak{M} = \frac{b}{2} \frac{1}{\rho} (\rho_b p_B - \rho_a p_A)$$

$$S_n[\mathfrak{M}] = \frac{1}{\rho} \mathfrak{M} \cdot \sin(n\pi\epsilon_0)$$

$$q = \frac{1}{\rho} (\rho_a p_A + \rho_b p_B), \quad S_n[q] = \frac{1}{\rho} q \sin(n\pi\epsilon_0)$$

* 単純支持：桁の両端の隔壁が、それ自身の面内変形に対しては剛度無限大で、面外変形に対しては剛性がなく、外的には断面の回転を起こさず、曲げモーメント、そりモーメントが生じないような支持条件である。このような支持条件にしたのは、実際の場合にはこれで十分であると考えられることと、ほかの文献でも同様の支持条件をとっているためである。

$$S_n[Z_i U_i] = \frac{1}{\rho} Z_i \sin(n\pi\epsilon_i)$$

$$\xi = \frac{\theta}{\theta}, \quad \epsilon_0 = \frac{\theta_0}{\theta}, \quad \epsilon_i = \frac{\theta_i}{\theta}$$

式 (43) より、

$$M = \frac{2}{\theta} \sum_n S_n[M] \sin(n\pi\zeta) = \rho q \cdot g(\xi, \epsilon_0) \dots \dots \dots (44)$$

ただし、

$$g(\xi, \epsilon_0) = \begin{cases} \frac{\sin \pi\lambda(1-\xi_0) \sin \pi\lambda\xi}{\sin \pi\lambda} & \xi \geq \epsilon_0 \\ \frac{\sin \pi\lambda(1-\xi) \sin \pi\lambda\epsilon_0}{\sin \pi\lambda} & \xi < \epsilon_0 \end{cases} \dots \dots \dots (45)$$

式 (42), (43) より、

$$\sigma_w = \frac{2}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} S_n[\sigma_w] \sin(n\pi\zeta) = \frac{q}{\lambda} \left[\frac{1}{4\alpha} \left\{ \frac{F_1}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{F_1 + F_2 \lambda^2}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \right\} \times \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} - \lambda^2 \right) \right] \phi(\xi_0, \xi) + \frac{1}{4\beta} \left\{ \frac{F_1}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{F_1 + F_2 \lambda^2}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \right\} \times \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \lambda^2 \right) \psi(\xi_0, \xi) - \frac{F_1 + F_2 \lambda^2}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \lambda g(\xi, \epsilon_0) \left. \right] + \frac{\mathfrak{M}}{\rho\lambda} \frac{1}{4\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{F_3}{\alpha^2 + \beta^2} + F_2 \right) \cdot \beta \phi(\xi_0, \xi) + \left(\frac{F_3}{\alpha^2 + \beta^2} - F_2 \right) \cdot \alpha \psi(\xi_0, \xi) \right\} + \sum_{i=1}^N \left[\frac{Z_i b h F_2}{\rho\lambda} \frac{1}{4\alpha\beta} \{ \alpha \Psi(\xi_i, \xi) - \beta \Psi(\xi_i, \xi) \} \right] \dots \dots \dots (46)$$

上式中、

$$\alpha^2 - \beta^2 = K_1/2$$

$$(\alpha^2 + \beta^2)^2 = K_2$$

$$\phi(\xi_0, \xi) = \begin{cases} P_1(\xi - \xi_0) + P_1(\xi_0 + \xi) & \xi \geq \epsilon_0 \\ P_1(\xi_0 - \xi) + P_1(\xi_0 + \xi) & \xi < \epsilon_0 \end{cases} \dots \dots \dots (47)$$

$$\psi(\xi_0, \xi) = \begin{cases} P_2(\xi - \xi_0) + P_2(\xi_0 + \xi) & \xi \geq \epsilon_0 \\ P_2(\xi_0 - \xi) + P_2(\xi_0 + \xi) & \xi < \epsilon_0 \end{cases} \dots \dots \dots (48)$$

$$P_1(x) = \frac{\sinh \pi\alpha(2-x) \cdot \cos \pi\beta x + \sinh \pi\alpha x \cos \pi\beta(2-x)}{2(\cosh^2 \pi\alpha - \cos^2 \pi\beta)} \dots \dots (49 a)$$

$$P_2(x) = \frac{\cosh \pi\alpha(2-x) \cdot \sin \pi\beta x + \cosh \pi\alpha x \sin \pi\beta(2-x)}{2(\cosh^2 \pi\alpha - \cos^2 \pi\beta)} \dots \dots (49 b)$$

ζ は式 (38), (39) のフーリエ級数より $S_n[\sigma_w]$ を消去して、

$$S_n[\zeta] = -\sum_{i=1}^N \frac{K_1 n^2 + K_2}{n_1 + K_1 n_2 + K_2} S_n[Z_i] + \frac{2\rho^2 \lambda^2}{hb^2 t_1} \frac{G_0}{G} \left\{ \frac{J - F_4 n^2}{n^4 + n^2 K_1 + K_2} \frac{1}{\rho} \cdot S_n[M] - \frac{J + n^2}{n^4 + K_1 n^2 + K_2} S_n[\mathfrak{M}] \right\} \dots (50)$$

よって、

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{2}{\theta} \sum_{n=1}^{\infty} S_n[\zeta] \sin(n\pi\xi) \\ &= -\sum_{i=1}^N \left[\frac{Z_i}{\rho\theta} \frac{\pi}{2\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} + K_1 \right) \beta\phi(\xi_i, \xi) + \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} - K_1 \right) \alpha\psi(\xi_i, \xi) \right\} \right. \\ &\quad - \frac{q \cdot \rho^2 \lambda}{hb^2 t_1} \frac{G_0}{G} \left[\frac{1}{2\alpha} \frac{J}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{J - F_4 \lambda^4}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \right. \\ &\quad \times \left. \left. \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} - \lambda^2 \right) \right\} \psi(\xi_0, \xi) + \left. \left. \frac{1}{2\beta} \frac{J}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{J - F_4 \lambda^4}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \left(\frac{K_2}{\alpha^2 + \beta^2} + \lambda^2 \right) \right\} \phi(\xi_0, \xi) \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{J - F_4 \lambda^4}{\lambda^4 + \lambda^2 K_1 + K_2} \cdot \lambda g(\xi_0, \xi) \right] \\ &\quad - \frac{\mathfrak{M} \cdot \rho \lambda}{hb^2 t_1} \frac{1}{2\alpha\beta} \left\{ \left(\frac{J}{\alpha^2 + \beta^2} + 1 \right) \beta\phi(\xi_0, \xi) + \left(\frac{J}{\alpha^2 + \beta^2} - 1 \right) \alpha\psi(\xi_0, \xi) \right\} \dots (51) \end{aligned}$$

上式中、 $J = 4GF_2 b t_1$

$$F_4 = \frac{\partial Ghb^2 t_1}{h^2(3N_1 + N_2)} - \frac{bt_1}{ht_2}$$

隔壁の変形抵抗せん断力 Z_i は $\theta = \theta_i$ において、

$$\zeta = G_0 r = \frac{G_0}{G_{t_d}} \cdot Z_i \dots (52)$$

となることより式 (51) を用いて N 元の連立方程式を立てて求めることができる。

7. 数値計算例

以上の結果を用いて、隔壁のない場合および中央に1個ある場合について図-8に示すようなコンクリート断面の桁を用いた計算例を示す。

ただし、支間長

$$l = 30.0 \text{ m}$$

曲率半径 $\rho = 60.0 \text{ m}$

ポアソン比 $\nu = 0.2$

一荷重は、 $P = 1.0 \text{ t}$ が桁の内側に作用する場合 (Case 1)、外側に作用する場合 (Case 2) について示す。

図-9, 10は隔壁のない場合の $l/2$ 点のそり応力 σ_w の影響線である。Case 1, Case 2 の場合ともに直桁の

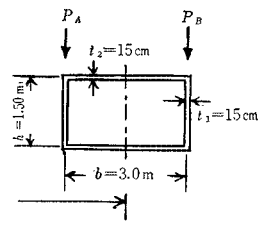


図-8

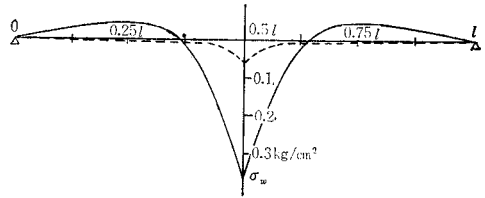


図-9 そり応力影響線 (Case 1)

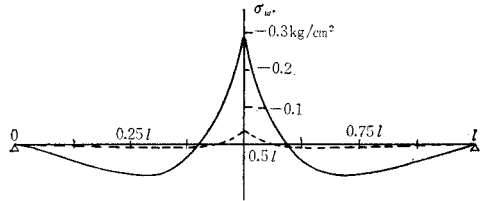


図-10 そり応力影響線 (Case 2)

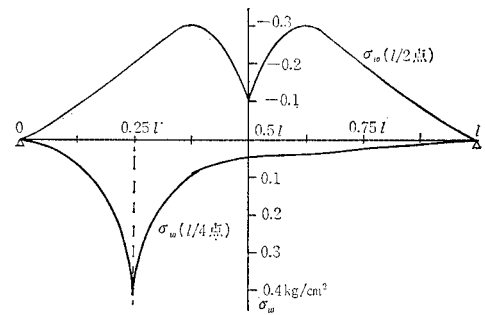


図-11 そり応力影響線 (Case 1, 隔壁あり)

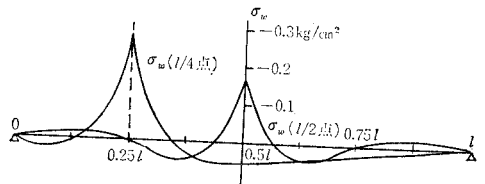


図-12 そり応力影響線 (Case 2, 隔壁あり)

場合と同様な分布をしているが、Case 1 の荷重が桁の内側にある場合のほうが Case 2 より大きいそり応力を示しているのが注目される。また点線で $G_0 = \infty$, すなわち断面変形のない場合を示したが、これとくらべると6倍程度の差がみられる。

図-11, 12には隔壁 ($t_d = 30 \text{ cm}$) が桁の中央にある場合についてのそり応力影響線である。これを隔壁のない場合に比べると、中央点の影響線に差がみられ、特に Case 1 の場合に大きな差がみられる。これは断面の変形は荷重が外側にある場合のほうが大きいことを示している。しかし $l/4$ 点のそり応力の影響線を見ると Case 1, Case 2 の場合ともに隔壁の影響はほとんどないようである。

つぎに隔壁に作用するせん断力は図-13, 14に示す

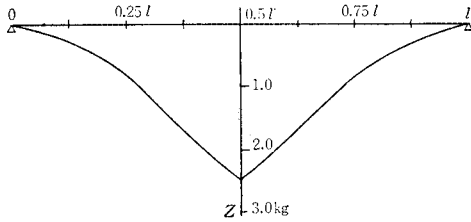


図-13 隔壁せん断力影響線 (Case 1)

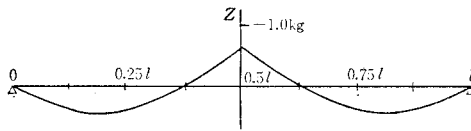


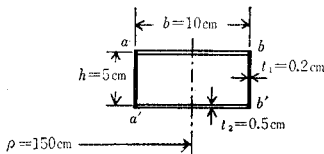
図-14 隔壁せん断力影響線 (Case 2)

ように断面変形の大きな Case 1 の場合に大きな値を示している。

8. 模型実験

以上の理論解析の結果の妥当性を検討するため、模型による実験を行なった。

模型はアクリル樹脂 ($E=3.77 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.35$) で作成し、桁は中間隔壁のない場合について行なった。模型は 図-15 に示すような断面形状で、端部は断面の変形を起こさないように 1.0 cm 厚の隔壁を入れた。支点部はそり、曲げモーメント、断面の回転を生じないように桁の軸方向に動くローラーで支持した。



$$\theta = \frac{l}{\rho_0} = \frac{102 \text{ cm}}{150 \text{ cm}} = 0.68$$

図-15

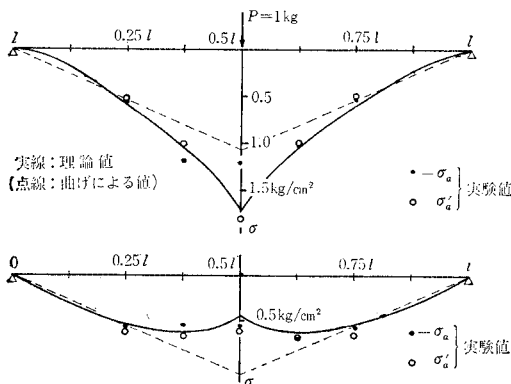


図-16 支間中央載荷 Case 1 の場合の応力分布

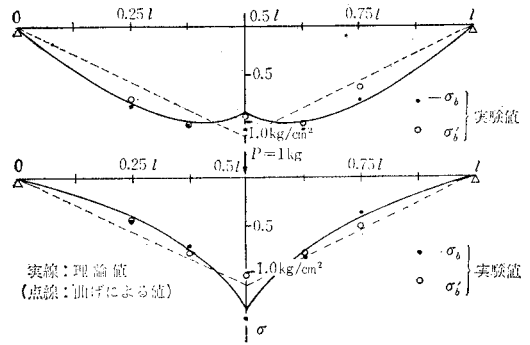


図-17 支間中央載荷 Case 2 の場合の応力分布

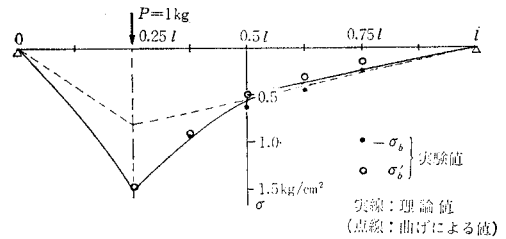


図-18 支間の 1/4 点載荷 Case 1 の場合の応力分布

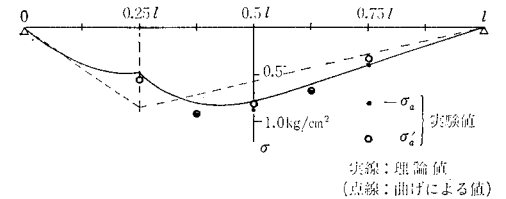


図-19 支間の 1/4 点載荷 Case 2 の場合の応力分布

測定はストレインゲージによりひずみを測定した。実験結果は荷重 $P=1 \text{ kg}$ の値に換算して 図-16~19 に示す。図-16, 17 はスパンの中央に載荷した場合で、Case 1 は荷重が桁の内側に使用した場合、Case 2 は外側に作用した場合である。図-18, 19 はスパンの 1/4 に載荷した場合である。ただし、図中点線で示したのは桁の曲げによる曲げ応力の理論値であって、点線と実線

の差がそり応力の部分である。なお、実験値は曲げとそり応力の和である。

以上の結果をみるに実験結果は本理論値とよく一致している。ただ荷重点については集中荷重による局部応力の影響を受けて理論値とよく一致しているとは言えない。しかし全体として理論の妥当性を示している。さらに中間隔壁のある場合についても本理論の妥当性を推測できよう。

9. む す び

以上、曲線帯板の変位せん断方程式を誘導し、これを二軸対称断面曲線箱桁に適用し、断面の変形を考慮した解析について述べ、さらに数値計算例を示した。これによると断面変形の影響は荷重が桁の内側にある場合のほうが桁の外側にある場合より大きいこと、さらに隔壁の影響も同様の性質のあることが明らかになった。

ここでは二軸対称断面の場合について解析を行なったが、実際上の問題による一軸対称断面についてしかも多隔壁の場合も同様の手法で解析することができる。

なお、この研究は文部省科学技術研究費を受けて行なったものである。

参 考 文 献

- 1) 岡田 清・吉竹孝之：PC箱げたの設計に関する基礎的研究，土木学会年次学術講演会，概要-IV，1967年。
- 2) 能町純雄・尾崎 諒：断面の変形を考慮した矩形箱桁のねじりについて，土木学会北海道支部研究発表会，技術資料 22号，1966年。
- 3) 能町純雄：剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱桁の曲げねじりについて，土木学会論文集 146号，1967年。
- 4) Dabrowski, R. : Näherungsberechnung der gekrümmten Kastenträger mit verformbaren Querschnitt. Prem. Pub. 7th Cong. I.A.B.S.E., 1964年。
- 5) 奥村敏恵・落分重俊：曲線箱桁の断面変形について，第20回土木学会年次講演会概要-I，1965年。
- 6) 小西一郎・小松定夫：薄肉曲線桁の基礎理論，土木学会論文集，第87号，1962年。
- 7) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論，土木学会論文集，第110号，1964年。
- 8) 能町純雄・吉田紘一：断面変形を考慮した曲線箱桁の曲げについて，第23回土木学会年次学術講演会概要-I，1968年。
- 9) 能町純雄・松岡健一・吉田紘一：曲線折板による「」形曲線桁の解法，土木学会北海道支部研究発表会論文集，1969年。
- 10) 尾崎 諒：折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて，土木学会論文報告集第179号，1970年。

(1969. 9.30・受付)
(1970.11. 5・再受付)