

## ダンパーをもつはりのたわみ振動

### VIBRATION ANALYSIS OF BEAMS WITH DAMPING AT DISCRETE LOCATION

倉西 茂\*・高橋 龍夫\*\*

By Shigeru Kuranishi and Tatsuo Takahashi

#### まえがき

多くの場合、粘性抵抗を有するはりのたわみ振動は、種々の仮定のもとに近似的な解として得られている。簡易なモデル（たとえば 1 質点ばね系）に置き換えられている場合すらある。しかし、これらの解はいずれも粘性抵抗力が比較的小さい場合にのみ適用が限られていたり、あるいは、はりの振動性状の一部分を定性的に説明しているに過ぎない。

本論文は、はりの特定の位置に比較的大きな粘性抵抗力（以後はポイントダンパーという）を与えた場合のはりのたわみ振動を扱ったものである。はりのたわみ振動性状は、ポイントダンパーを取り付けることにより、かなり複雑に変化し、従来の解では満足されない点も多い。すなわち、はりのたわみ振動において振動形の変化、減衰性の変化、振動数の変化および位相おくれなどがポイントダンパーを取り付けることにより生じるが、従来の近似解ではこれらを正しく評価しがたいし、振動形の変化、位相おくれなどを考慮していない近似解が多い。本論文は、はりを多自由度系に置き換え、ラプラス変換法を用いて、ポイントダンパーをもつはりのたわみ振動における振動数、減衰率、振動形、位相おくれなどの解を導いたものである。また、この解法を基本的なはり、すなわち、両端単純支持ばり、両端固定ばり、片持ばりに応用して、これらのはりの低次の粘性減衰たわみ振動における粘性減衰振動数、対数減衰率とポイントダンパーのダンピング力係数および取り付け位置との関係を求め、さらに、正弦波外力による定常振動での共振曲線、位相おくれの定量的な近似値を求めたものである。なお、定常振動における位相ずれおよび振動形についても若干の例をあげ考察を加えた。

本論文はダンパーを用いて構造物の防振、制振作用を増大させようとする着想のもとに書かれたものである。従来、構造物の耐震用としてオイルダンパーなどが用いられた例も多く見られるが、これらの多くは自由度の低い構造物の場合か、あるいは自由度の低い系に置き換えられて論じられたり、計算上の便宜を計るために多くの仮定を設けてダンピング効果のみに注目している。著者らはダンパーによる振動性状の変化を確かめる意味においても、基本的なはりについて、その振動性状の変化を求め、あわせて、ダンパーの振動制御に対する効果を定量的に図示しようと試みたものである。応用例においては、計算の複雑さをさける意味で、ダンパーが対称に取り付けられている場合を扱っている。

#### 記号

- $M_k$ : 格点  $k$  における曲げモーメント
- $y_k$ : 格点  $k$  の鉛直方向変位
- $l_k$ : 格点  $(k-1)$ ,  $k$  の間長
- $EI_k$ : 格点  $(k-1)$ ,  $k$  間のはりの曲げ剛性
- $m_k$ : 格点  $k$  の集中質量
- $C_k$ : 格点  $k$  に作用する粘性抵抗係数（ポイントダンパーのダンピング力係数）
- $K_k$ : 格点  $k$  に作用するばね係数
- $P_k(t)$ : 格点  $k$  に作用する外力
- $\mathcal{L}[\ ]$ : ラプラス変換記号
- $\mathcal{L}^{-1}[\ ]$ : ラプラス逆変換記号
- $Y_{1,k}$ : 格点  $k$  の初期変位
- $Y_{2,k}$ : 格点  $k$  の初期速度
- $\omega_{B_0}$ : はりの固有円振動数
- $\omega_C$ : はりの粘性減衰円振動数
- $C_C$ : 臨界減衰係数
- $C_{B,C}$ : ポイントダンパーの臨界ダンピング力係数
- $W$ : はりの全重量
- $l$ : はりの支間長

\* 正会員 工博 東北大学助教授 工学部土木工学科  
\*\* 正会員 東北工業大学助教授 工学部土木工学科

- $w : W/l$
- $m_B$  : はりの全質量
- $\delta$  : 対数減衰率
- $\varphi_k$  : 外力に対する質点  $k$  の位相おくれ
- $\theta_k$  : 基準質点と質点  $k$  間の位相ずれ

1. 運動方程式とその解法

(1) 変形と応力の関係

はりを図-1に示すように、曲げ剛性  $EI_k$  をもつ連続した棒と考え、その質量は間隔  $l_k$  で並べられた集中

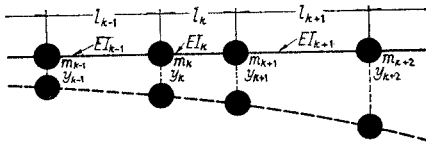


図-1

質量とする。各質量  $m_k$  は図-2で示されるように、はりの曲げ剛性とポイントダンパーで支えられており、さらに一般性を持たせる意味でばね  $K_k$  でも支えられているものとする。格点  $k$  での曲げモーメントおよびたわみをそれぞれ  $M_k, y_k$  とすれば3連モーメントの定理よりつぎの式を得る。

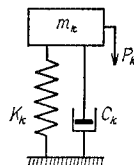


図-2

$$\begin{aligned}
 & -\frac{l_{k-1}}{6EI_{k-1}}(-M_{k-1}-2M_k) \\
 & +\frac{l_k}{6EI_k}(2M_k+M_{k+1}) \\
 & =\frac{y_k-y_{k-1}}{l_{k-1}}-\frac{y_{k+1}-y_k}{l_k} \dots\dots\dots(1)
 \end{aligned}$$

$I_k$  および  $l_k$  を一定とすれば式(1)はつぎようになる。

$$\begin{aligned}
 M_{k-1}+4M_k+M_{k+1} & =\frac{6EI_k}{l_k^2}(-y_{k-1}+2y_k-y_{k+1}) \\
 & \dots\dots\dots(2)
 \end{aligned}$$

(2) 運動方程式とその解法

たわみ振動をしているはりの格点  $k$  でのたわみを  $y_k$  とすれば、鉛直方向の力のつりあいより次式が得られる。

$$\begin{aligned}
 m_k\ddot{y}_k+C_k\dot{y}_k+K_k y_k+\frac{1}{l_k}(-M_{k-1}+2M_k-M_{k+1}) \\
 =P_k(t) \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

ここで、はりの曲げ剛性および格点間隔は一定とし、 $P_k(t)$  は格点  $k$  に働く外力である。式(3)は一般に式(1)、(2)を用いてつぎのように書かれる。

$$[m]\{\ddot{y}\}+[C]\{\dot{y}\}+[K]\{y\}=\{P(t)\} \dots\dots(4)$$

ここで  $[K]$  ははりの曲げ剛性および格点に働くばね係数より表わされる。式(4)を時間の変数  $t$  についてラプラス変換して複素行列で表示すれば次式になる。

$$[a(s)]\{y(s)\}=\{q(s)\} \dots\dots\dots(5)$$

$$\begin{aligned}
 \text{ただし、} \mathfrak{L}[y(t)]=\eta(s), \mathfrak{L}[\dot{y}(t)]=S\eta(s)-Y_1, \\
 \mathfrak{L}[\ddot{y}(t)]=S^2\eta(s)-SY_1-Y_2, \mathfrak{L}[P(t)]=q(s)
 \end{aligned}$$

$$[a(s)]=\begin{bmatrix} (a_{1,0}), (S^2+\mu_1S+a_{1,1}), (a_{1,2}), \dots (a_{1,n+1}) \\ (a_{2,0}), (a_{2,1}), (S^2+\mu_2S+a_{2,2}), \dots (a_{2,n+1}) \\ \vdots \\ (a_{n,0}), \dots (a_{n,n-1}), (S^2+\mu_nS+a_{n,n}), (a_{n,n+1}) \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

ここで、 $a_{1,0}, a_{1,1}, \dots$  は、はりの曲げ剛性、格点に働くばね係数、はりの質量および格点間隔で決まる。

$$\{q(s)\}=\begin{cases} q_1(s)+Y_{1,1}(1+\mu_1)+Y_{1,2} \\ q_2(s)+Y_{2,1}(1+\mu_2)+Y_{2,2} \\ \vdots \\ q_n(s)+Y_{n,1}(1+\mu_n)+Y_{n,2} \end{cases} \dots\dots(7)$$

$\mu_k=C_k/m_k, Y_{k,1}$  = 格点  $k$  の初期変位  
 $Y_{k,2}$  = 格点  $k$  の初期速度

式(6)を0とおいた行列式、 $[a(s)]=0$  は特性方程式であり、系の複素数  $S$  で表わされた振動数 ( $C_k=0$  の場合は固有振動数) 方程式である。特性方程式は複素数  $S$  に関する  $2n$  次の高次方程式であり、一般に次式のように、 $n$  個の2次因子の積の形で表わされる。

$$\begin{aligned}
 (S^2+\alpha_1S+\beta_1)(S^2+\alpha_2S+\beta_2)\dots\dots \\
 \dots\dots(S^2+\alpha_nS+\beta_n)=0 \dots\dots\dots(8)
 \end{aligned}$$

式(5)、(6)、(7)、(8)を用いて質点  $m_k$  の変位  $y_k$  の像関数  $\eta_k(s)$  は、

$$\begin{aligned}
 \eta_k(s) & =\frac{Q_{kii}(s)}{Q_{kij}(s)}+\frac{A_{k1}S+B_{k1}}{S^2+\alpha_1S+\beta_1} \\
 & +\frac{A_{k2}S+B_{k2}}{S^2+\alpha_2S+\beta_2}+\dots\dots+\frac{A_{kn}S+B_{kn}}{S^2+\alpha_nS+\beta_n} \\
 & \dots\dots\dots(9)
 \end{aligned}$$

と書ける。

式(9)の右辺第1項は狭義の意味での強制振動の像関数であり、外力が衝撃関数または単位階段関数の場合にはそれぞれ  $D_1, D_2/S$  の形で表わされる。また外力が正弦波などの調和関数であれば、 $(D_2S+D_1)/(S^2+\omega^2)$  で表わされ、この実像は定常状態を表わすことになる。ただし  $D_1 \sim D_4$  は定数とする。右辺第2項より第  $(n+1)$  項は自由振動の像関数である。各分子の係数  $A_1 \sim A_n, B_1 \sim B_n$  は外力の大きさ、はりの曲げ剛性、質量、ダンパーのダンピング力係数および各質点の初期値を用いて決められるものである。一般に右辺第2項～第  $(n+1)$  項までの自由振動の実像はつぎに示す関係より求められる。

$$\Omega^{-1} \left[ \frac{A_{ki}S + B_{ki}}{S^2 + \alpha_i S + \beta_i} \right] = \frac{e^{-\frac{\alpha_i}{2}t}}{\left[ 1 - \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i} \right]^{1/2}} \left\{ A_{ki} \sin \left[ \left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} \right)^{1/2} t + \varphi_1 \right] + \frac{B_{ki}}{\sqrt{\beta_i}} \sin \left[ \left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} \right)^{1/2} t \right] \right\} \dots (10)$$

$$\left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} > 0 \right)$$

$$= e^{-\sqrt{\beta_i}t} \{ A_{ki}(1 - \sqrt{\beta_i}t) + \beta_{ki}t \} \dots (11)$$

$$\left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} = 0 \right)$$

$$= \frac{e^{-\frac{\alpha_i}{2}t}}{\left[ \frac{\alpha_i^2}{4\beta_i} - 1 \right]^{1/2}} \left\{ A_{ki} \sinh \left[ \left( \frac{\alpha_i^2}{4} - \beta_i \right)^{1/2} t + \varphi_2 \right] + \frac{B_{ki}}{\sqrt{\beta_i}} \sinh \left[ \left( \frac{\alpha_i^2}{4} - \beta_i \right)^{1/2} t \right] \right\} \dots (12)$$

$$\left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} < 0 \right)$$

$$\varphi_1 = \arctg \frac{-2\sqrt{\beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4}}}{\alpha_i} \dots (13)$$

$$\varphi_2 = \arctg \frac{-2\sqrt{\frac{\alpha_i^2}{4} - \beta_i}}{\alpha_i} \dots (14)$$

式 (10) は系が粘性減衰振動をする場合の質点  $k$  の変位の実像を表わし、式 (11), (12) は過減衰の場合を表わしている。式 (10) より系の粘性減衰振動における円振動数  $\omega_i$ 、および対数減衰率  $\delta_i$  は系の初期値に関係なく求められる。すなわち、はり固有の諸定数 (曲げ剛性、ばね係数、質量、径間長) とダンパーのダンピング力係数により決定できる。 $\alpha_i, \beta_i$  を用いて  $\omega_i, \delta_i$  を表わすと次式のようになる。

$$\omega_i = \left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} \right)^{1/2} \dots (15)$$

$$\delta_i = \pi \alpha_i / \left( \beta_i - \frac{\alpha_i^2}{4} \right)^{1/2} = \pi \alpha_i / \omega_i \dots (16)$$

ポイントダンパーを取りつけることにより、はりの振動数がどの程度変化するか、あるいは減衰率ほどの程度であるかを知るには、これらの式の計算をすればよいことになる。

## 2. 両端単純支持ばり、両端固定ばり、片持ばりへの応用

ポイントダンパーは両端単純支持ばり、両端固定ばりにおいては対称に取り付けられているものとし、はりにはなんらばねは取り付けられていない、すなわち、式

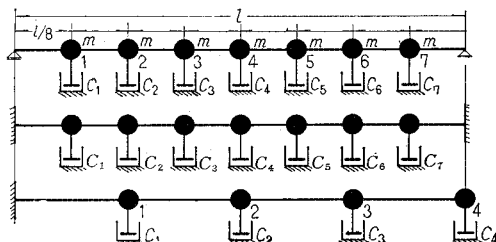


図-3

(3) のばね係数  $K_k$  は、 $K_k=0$  とする。はりは 図-3 で示されるように、両端単純支持ばり、両端固定ばりにおいては 7 質点系、片持ばりにおいては 4 質点系に置き換え格点間長  $l_k$ 、質点質量  $m_k$ 、ダンパーのダンピング力係数  $C_k$  はそれぞれ一定とする。

### (1) 粘性減衰振動における円振動数と対数減衰率

応用例ではポイントダンパーが対称に取り付けられていることから解を簡明にするために対称振動と逆対称振動とに分けて考える (片持ばりの場合を除く)。

対称振動には sym., 逆対称振動には asym. の添字を用いて区別することにする。

式 (6) をこれらのはりに適用すれば次式を得る。

$$[a_{\text{sym.}}] = \begin{bmatrix} (S^2 + \mu_1 S + a_{1,1}), & (-a_{1,2}), & (a_{1,3}), & (-a_{1,4}) \\ (-a_{2,1}), & (S^2 + \mu_2 S + a_{2,2}), & (-a_{2,3}), & (a_{2,4}) \\ (a_{3,1}), & (-a_{3,2}), & (S^2 + \mu_3 S + a_{3,3}), & (-a_{3,4}) \\ (-a_{4,1}), & (a_{4,2}), & (-a_{4,3}), & (S^2 + \mu_4 S + a_{4,4}) \end{bmatrix} \dots (17)$$

$$[a_{\text{asym.}}] = \begin{bmatrix} (S^2 + \mu'_1 S + a_{1,1}'), & (-a_{1,2}'), & (a_{1,3}') \\ (-a_{2,1}'), & (S^2 + \mu'_2 S + a_{2,2}'), & (a_{2,3}') \\ (a_{3,1}'), & (-a_{3,2}'), & (S^2 + \mu'_3 S + a_{3,3}') \end{bmatrix} \dots (18)$$

$$\mu_1 \sim \mu_4 = \mu'_1 \sim \mu'_4 = 8 Cg / l_k \tau w$$

$$\text{(片持ばり: } \mu_1 \sim \mu_4 = 4 Cg / l_k \tau w \text{)}$$

### 対称振動

両端単純支持ばり:  $a_{1,1}=160 N, a_{3,1}=72 N,$   
 $a_{1,2}=155 N, a_{3,2}=191 N,$   
 $a_{1,3}=72 N, a_{3,3}=304 N,$   
 $a_{1,4}=18 N, a_{3,4}=173 N,$   
 $a_{2,1}=155 N, a_{4,1}=36 N,$   
 $a_{2,2}=232 N, a_{4,2}=144 N,$   
 $a_{2,3}=191 N, a_{4,3}=346 N,$   
 $a_{2,4}=72 N, a_{4,4}=232 N$

ただし、 $N=24576 EI_k g / 97 l_k^4 \tau w$

両端固定ばり:  $a_{1,1}=264 N, a_{3,1}=72 N,$   
 $a_{1,2}=168 N, a_{3,2}=168 N,$   
 $a_{1,3}=72 N, a_{3,3}=264 N,$

$$\begin{aligned}
 a_{1,4} &= 18 N, a_{3,4} = 150 N \\
 a_{2,1} &= 168 N, a_{4,1} = 36 N, \\
 a_{2,2} &= 210 N, a_{4,2} = 126 N, \\
 a_{2,3} &= 168 N, a_{4,3} = 300 N, \\
 a_{2,4} &= 63 N, a_{4,4} = 201 N, \\
 \text{ただし, } N &= 24\,576 EI_k g / 84 l_k^4 w
 \end{aligned}$$

逆対称振動

両端単純支持ばり：  
 $a_{1,1}' = 92 N, a_{3,1}' = 36 N,$   
 $a_{1,2}' = 88 N, a_{3,2}' = 88 N,$   
 $a_{1,3}' = 36 N, a_{3,3}' = 92 N,$   
 $a_{2,1}' = 88 N,$   
 $a_{2,2}' = 128 N,$   
 $a_{2,3}' = 88 N,$

ただし,  $N = 24\,576 EI_k g / 56 l_k^4 w$

両端固定ばり：  
 $a_{1,1}' = 304 N, a_{3,1}' = 72 N,$   
 $a_{1,2}' = 191 N, a_{3,2}' = 155 N,$   
 $a_{1,3}' = 72 N, a_{3,3}' = 160 N,$   
 $a_{2,1}' = 191 N,$   
 $a_{2,2}' = 232 N,$   
 $a_{2,3}' = 155 N,$

ただし,  $N = 24\,576 EI_k g / l_k^4 w$

片持ばり：  
 $a_{1,1} = 304 N, a_{3,1} = 72 N,$   
 $a_{1,2} = 191 N, a_{3,2} = 155 N,$   
 $a_{1,3} = 72 N, a_{3,3} = 160 N,$   
 $a_{1,4} = 12 N, a_{3,4} = 59 N,$   
 $a_{2,1} = 191 N, a_{4,1} = 12 N,$   
 $a_{2,2} = 232 N, a_{4,2} = 42 N,$   
 $a_{2,3} = 155 N, a_{4,3} = 59 N,$   
 $a_{2,4} = 42 N, a_{4,4} = 26 N$

ただし,  $N = 1\,920 EI_k g / 97 l_k^4 w$

式 (13), (14) を用いて両端単純支持ばり, 両端固定ばり, 片持ばりの粘性減衰振動における対数減衰率および

表-1

図番号	ポイントダンパー位置						
	1	2	3	4	5	6	7
$S_{sym-1}$	○						○
" -2		○					○
" -3			○		○		
" -4				○		○	
" -5	○	○	○	○	○	○	○
$B_{sym-1}$	○						○
" -2		○				○	
" -3			○		○		
" -4				○		○	
" -5	○	○	○	○	○	○	○
C-1	○						
C-2		○					
C-3			○				
C-4				○			
C-5	○	○	○	○			

○: ポイントダンパー

び円振動数を求めたものが図-4( $S_{sym.-1-d}$ )~図-21(C-5-f)である。図の名称のなかの“ポイントダンパー位置”とは表-1で示されるようにポイントダンパーの取り付けられている質点の位置を意味している。図-4( $S_{sym.-1-d}$ )~図-12(C-5-d)は対数減衰率とポイントダンパーのダンピング力係数の関係を表わしたものであり、縦軸に対数減衰率  $\delta$ , 横軸にダンピング力係数  $C$  ととってある。図-13( $S_{sym.-1-f}$ )~図-21(C-5-f)は円振動数の変化とポイントダンパーのダンピング力係数

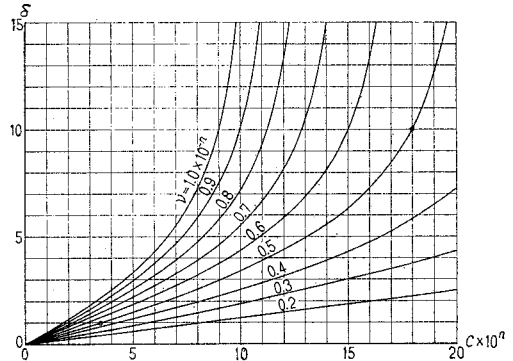


図-4  $S_{sym-1-d}$  両端単純支持ばり 対称振動ポイントダンパー位置(1.7)対数減衰率~ダンピング力係数図

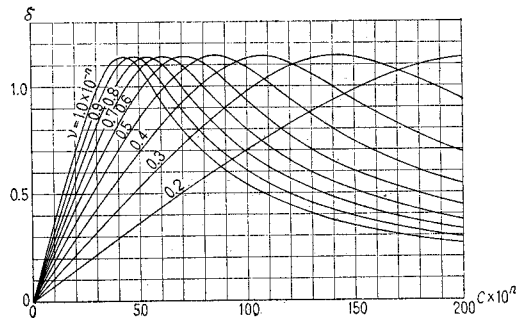


図-5  $B_{sym-1-d}$  両端固定ばり 対称振動ポイントダンパー位置(1.7)対数減衰率~ダンピング力係数図

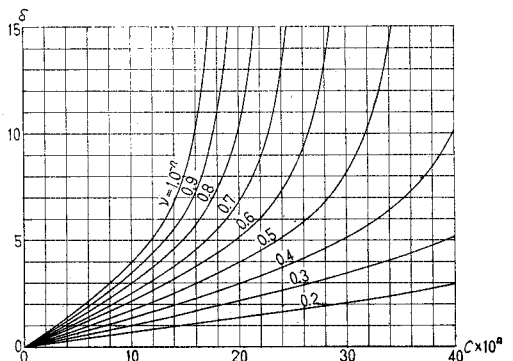


図-6  $B_{sym-2-d}$  両端固定ばり 対称振動ポイントダンパー位置(2.6)対数減衰率~ダンピング力係数図

の関係を表わしたものであり、縦軸にはポイントダンパーの取り付けられていない場合の円振動数、すなわちはりの固有振動数  $\omega_{B_0}$  とポイントダンパーの取り付けられた場合の円振動数  $\omega_C$  との比、 $\omega_{B_0}/\omega_C$  をとり、横軸にはダンピング力係数がとってある。図中の係数  $\nu$  は表-2 でそれぞれ与えられる。たとえば 図-4 ( $S_{sym}-1-d$ ) ではりの全重量  $W=100t$ 、固有振動数  $\omega_{B_0}=19.6 \text{ rad/sec}$  とすれば  $\nu=0.5 \times 10^{-2}$  となり、対数減衰率  $\delta =$

1.0 (図中の○印) にとればダンピング力係数  $C$  は  $C=3.5 t \cdot \text{sec/cm}$  となり、 $\delta=10.0$  (図中の●印) にとれば、 $C=18 t \cdot \text{sec/cm}$  になる。図-13 ( $S_{sym}-1-f$ ) は、この場合の円振動数の変化とダンピング力係数の関係を示しているから、図の中で  $\nu=0.5 \times 10^{-2}$  の曲

表-2

	$\nu$
$S_{sym}$	$4.96 \cdot \left(\frac{g}{\omega_{B_0} W}\right)$
$S_{asym}$	$15.07 \cdot \left(\frac{g}{\omega_{B_0} W}\right)$
$B_{sym}$	$10.46 \cdot \left(\frac{g}{\omega_{B_0} W}\right)$
$B_{asym}$	$30.99 \cdot \left(\frac{g}{\omega_{B_0} W}\right)$
$C$	$3.95 \cdot \left(\frac{g}{\omega_{B_0} W}\right)$

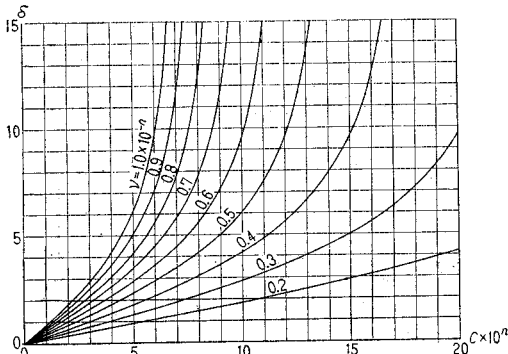


図-7  $B_{sym}-3-d$  両端固定ばり 対称振動  
ポイントダンパー位置 (3.5) 対数減衰  
率～ダンピング力係数図

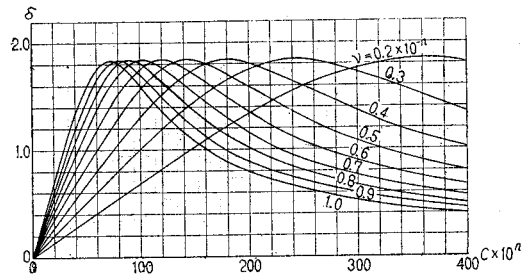


図-10  $C-1-d$  片持ばり  
ポイントダンパー位置 (1) 対数減衰率～  
ダンピング力係数図

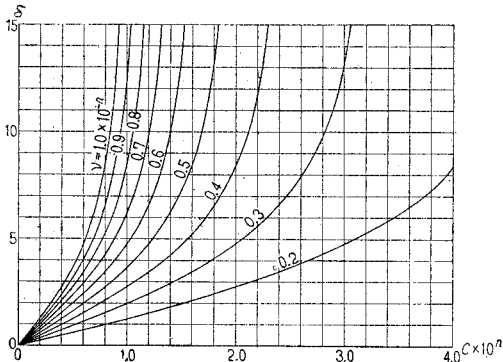


図-8  $B_{sym}-4-d$  両端固定ばり 対称振動  
ポイントダンパー位置 (4) 対数減衰  
率～ダンピング力係数図

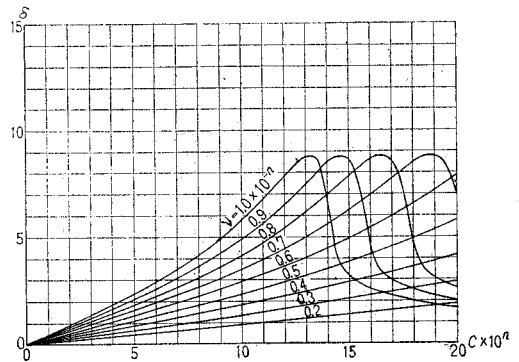


図-11  $C-2-d$  片持ばり  
ポイントダンパー位置 (2) 対数減衰率～  
ダンピング力係数図

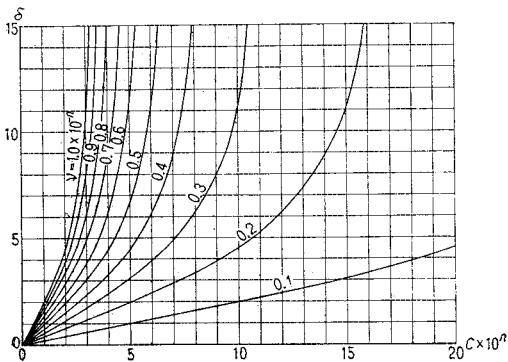


図-9  $B_{sym}-5-d$  両端固定ばり 対称振動  
ポイントダンパー位置 (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)  
対数減衰率～ダンピング力係数図

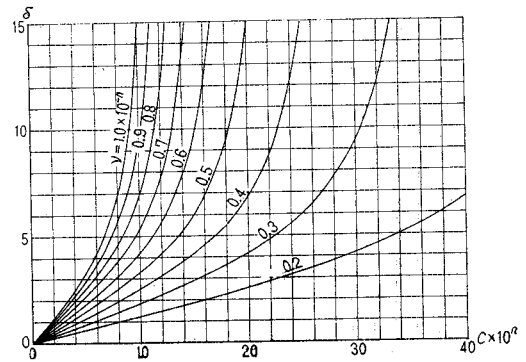


図-12  $C-5-d$  片持ばり  
ポイントダンパー位置 (1, 2, 3, 4) 対数減  
衰率～ダンピング力係数図

線で、 $C=3.5$  または  $18 \text{ t}\cdot\text{sec}/\text{cm}$  をとれば、 $\omega_{B_0}/\omega_C$  はそれぞれ  $1.0, 1.7$  になる。いい換えれば、全重量  $100 \text{ t}$  の単純支持ばりで固有振動数が  $19.6 \text{ rad}/\text{sec}$  であれば、ポイントダンパーを表-2の ( $S_{\text{sym}}-1$ ) で示される個所にとりつけ、ダンピング力係数を  $3.5 \text{ t}\cdot\text{sec}/\text{cm}$ 、あるいは  $18 \text{ t}\cdot\text{sec}/\text{cm}$  にすれば、対数減衰率がそれぞれ  $1.0$  あるいは  $10.0$  になる減衰自由振動を行ない、その

円振動数はそれぞれ  $1.0 \omega_{B_0}, 1.7 \omega_{B_0}$  に変化することを示している。

(2) 正弦波外力を受けた場合の定常振動

はり～ダンパー系に外力が作用する場合には式 (5)

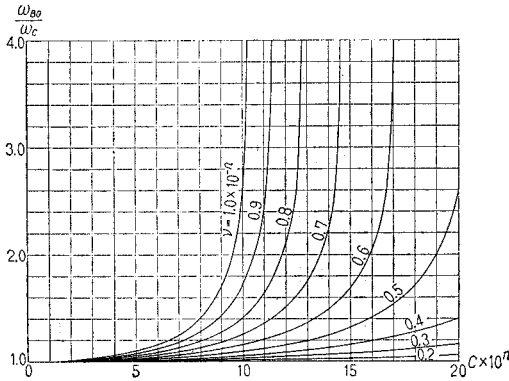


図-13  $S_{\text{sym}}-1-f$  両端単純支持ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (1,7) 振動数～ダンピング力係数図

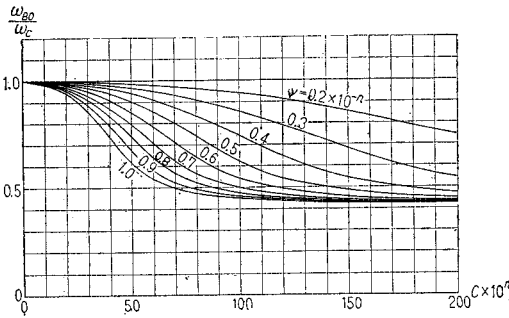


図-14  $B_{\text{sym}}-1-f$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (1,7) 振動数～ダンピング力係数図

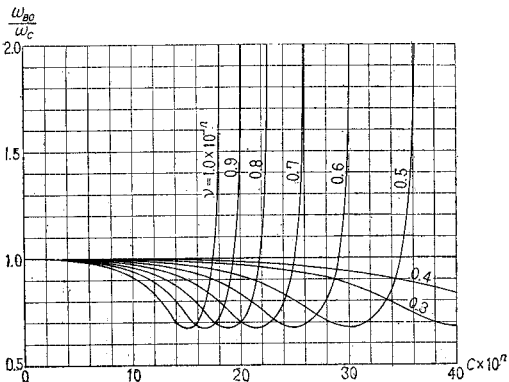


図-15  $B_{\text{sym}}-2-f$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (2,6) 振動数～ダンピング力係数図

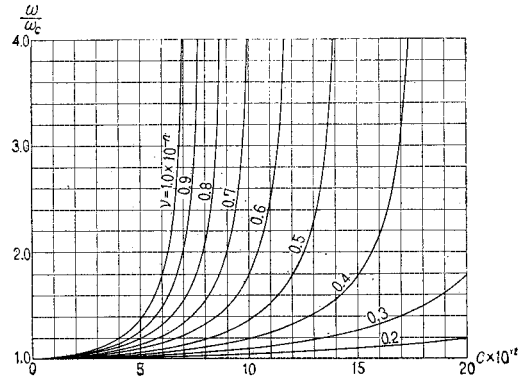


図-16  $B_{\text{sym}}-3-f$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (3,5) 振動数～ダンピング力係数図

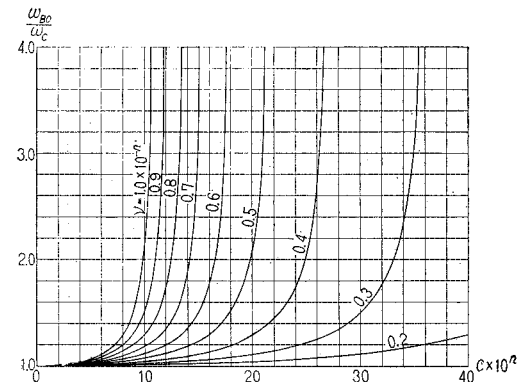


図-17  $B_{\text{sym}}-4-f$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (4) 振動数～ダンピング力係数図

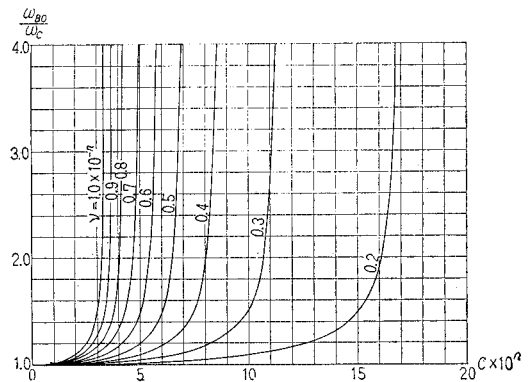


図-18  $B_{\text{sym}}-5-f$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置 (1,2,3,4,5,6,7) 振動数～ダンピング力係数図

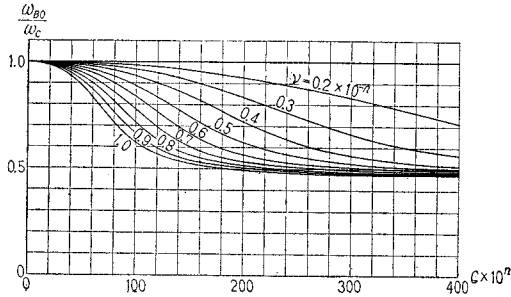


図-19 C-1-f 片持ばり  
ポイントダンパー位置 (2) 振動数～  
ダンピング力係数図

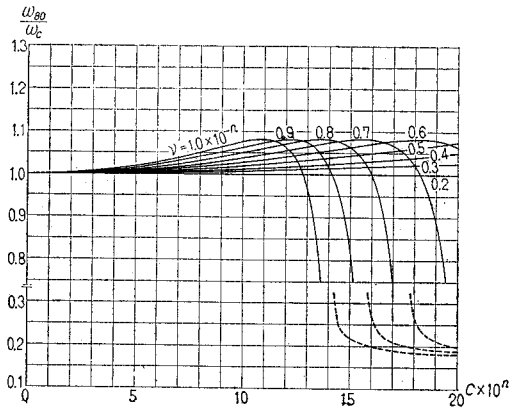


図-20 C-2-f 片持ばり  
ポイントダンパー位置 (2) 振動数～  
ダンピング力係数図

を用いればよい。定常振動の解は式(9)の右辺第1項の実像のみを求めることになる。いま 図-22 で示されるようにはりの中央に(片持ばりの場合には自由端)に  $F \sin \omega t$  なる正弦波外力が作用した場合の定常振動解を求める。

各質点の初期変位および初期速度を0とすれば、すなわち、式(7)で、 $Y_{k,1} = Y_{k,2} = 0$  とおけば式(7)はつぎのように書ける。

$$\{q_{\text{sym.}}\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{F\omega}{m(S^2 + \omega^2)} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (19)$$

式(9)の右辺第1項の分母項は、 $Q_{ki}(s) = S^2 + \omega^2$  になる。これらの式を用いて、各質点の定常振動における応答振幅を  $y_k$  求める。 $y_k$  は一般につぎの式の形で書き表わされる。↗

$$\begin{aligned} \phi_1 &= b^4 - \{928 + a(n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_1 n_4 + n_2 n_3 + n_2 n_4 + n_3 n_4)\} b^3 + \{181\,196 + a(536 n_1 n_2 + 1\,000 n_1 n_3 + 1\,536 n_1 n_4 \\ &\quad + 1\,928 n_2 n_3 + 2\,392 n_2 n_4 + 2\,784 n_3 n_4)\} b^2 - \{4\,817\,408 + a(10\,670 n_1 n_2 + 43\,456 n_1 n_3 + 34\,047 n_1 n_4 + 36\,472 \\ &\quad n_2 n_3 + 43\,456 n_2 n_4 + 13\,095 n_3 n_4)\} b + 1\,825\,346 \\ \phi_2 &= (n_1 + n_2 + n_3 + n_4) b^3 - (768 n_1 + 696 n_2 + 624 n_3 + 696 n_4) b^2 + \{88\,173 n_1 + 90\,598 n_2 + 93\,023 n_3 + 90\,598 n_4 \\ &\quad + a(232 n_1 n_2 n_3 + 304 n_1 n_2 n_4 + 160 n_2 n_3 n_4)\} b - (376\,360 n_1 + 1\,204\,352 n_2 + 203\,234 n_3 + 1\,204\,352 n_4) \end{aligned}$$

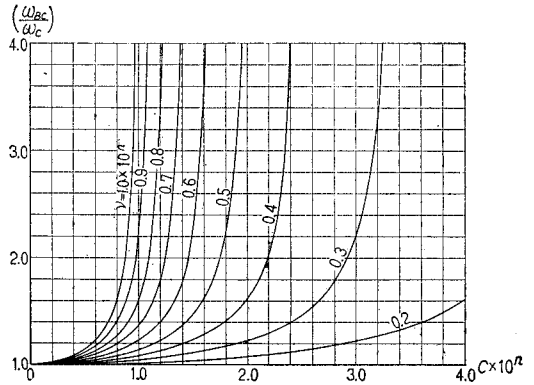


図-21 C-5-f 片持ばり  
ポイントダンパー位置 (1,2,3,4)  
振動数～ダンピング力係数図

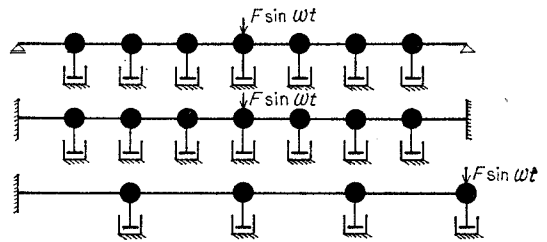


図-22

$$y_k = \frac{F}{m \cdot N} \frac{[ab(\phi_1 D_{k1} + \phi_2 D_{k2})^2 + (\phi_1 D_{k,2} - ab\phi_2 D_{k,1})^2]^{1/2}}{(\phi_1)^2 + ab(\phi_2)^2} \cdot \sin(\omega t + \varphi_k) \dots\dots\dots (21)$$

$$\varphi_k = \arctg \frac{-\sqrt{ab}(\phi_1 D_{k1} + \phi_2 D_{k2})}{\phi_1 D_{k,2} - ab\phi_2 D_{k,1}} \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 $a = \frac{C^2}{Nm^2}$ 、 $b = \frac{\omega^2}{N}$ 、また  $\varphi_k$  は質点  $k$  の位相おくれを表わしている。

ポイントダンパーの取り付けられていない場合、すなわち、 $C=0$  の場合には、 $y_k$  はつぎのように書ける。

$$y_k = \frac{F}{m \cdot N} \cdot \frac{D_{k,2}}{\phi_1} \sin \omega t \dots\dots\dots (23)$$

$\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $D_{k,1}$ 、 $D_{k,2}$  はパラメーター  $a$ 、 $b$  で表わされる関数であり、 $C=0$  のとき、 $\phi_1=0$  とおいたパラメーター  $b$  に関する高次方程式はこの系の固有振動数方程式になる。

参考のために単純支持ばりについての  $\phi_1$ 、 $\phi_2$ 、 $D_{k,1}$ 、 $D_{k,2}$  を列記すればつぎようになる。ただし、 $n_k$  は質点  $k$  にポイントダンパーが取り付けられているとき、 $n_k=1$ 、ポイントダンパーのないとき、 $n_k=0$  となる。

$$\begin{aligned}
 D_{1,1} &= -6984(n_2+n_3) - 18(n_2+n_3)b \\
 D_{1,2} &= 442223 - (-13968 + 18n_2n_3a)b + 18b^2 \\
 D_{2,1} &= -11155n_1 + 8730n_2 - 72(n_1+n_3)b \\
 D_{2,2} &= 827992 + (2425 - 72n_1n_3a)b + 72b^2 \\
 D_{3,1} &= 26384n_1 + 13928n_3 - 173(n_1+n_3)b \\
 D_{3,2} &= 1100853 - (52768 + 173n_1n_3a)b + 173b^2 \\
 D_{4,1} &= 34047n_1 + 43456n_2 + 13095n_3 \\
 &\quad - (536n_1 + 464n_2 + 392n_3 + n_1n_2n_3a)b \\
 &\quad + (n_1+n_2+n_3)b^2 \\
 D_{4,2} &= 1204352 - \{90598 - (304n_1n_2 + 232n_1n_3 \\
 &\quad + 160n_2n_3)a\}b + \{696 + (n_1n_2 + n_1n_3 \\
 &\quad + n_2n_3)a\}b^2 - b^3
 \end{aligned}$$

質点の応答振幅および位相おくれを示したものが図-23 ( $S_{sym}-1-a$ )~図-33 (C-2-p) である。図-23 ( $S_{sym}-1-a$ )~図-27 (C-5-a) は応答振幅を示すものであり、縦軸に振動たわみと静たわみの比、 $y_k/y_{ks}$  をとり、横軸には外力の円振動数  $\omega$  と、はりの固有振動数  $\omega_{B0}$  の比の2乗  $(\omega/\omega_{B0})^2$  がとってある。図中のパラメーター  $a$  はつぎの表-3に示されている。また、図中の○印は最大値を示している。図-28 ( $S_{sym}-1-p$ )~図

-33 (C-2-p) は位相おくれを示すものであり、縦軸に位相おくれ、 $\varphi$  をとり、横軸には  $(\omega/\omega_{B0})^2$  がとってある。これらの図はいずれも外力の作用している質点についての

表-3

	$a$
$S_{sym}$	$24.606 \cdot \left(\frac{g}{W} \cdot \frac{C}{\omega_{B0}}\right)^2$
$B_{sym}$	$109.49 \cdot \left(\frac{g}{W} \cdot \frac{C}{\omega_{B0}}\right)^2$
$C$	$9.992 \cdot \left(\frac{g}{W} \cdot \frac{C}{\omega_{B0}}\right)^2$

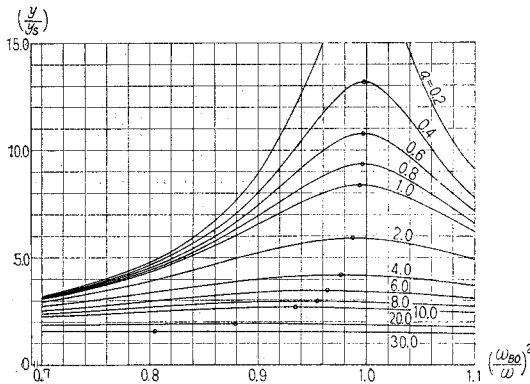


図-23  $S_{sym}-1-a$  両端単純支持ばり. 対称振動ポイントダンパー位置(1,7)共振曲線

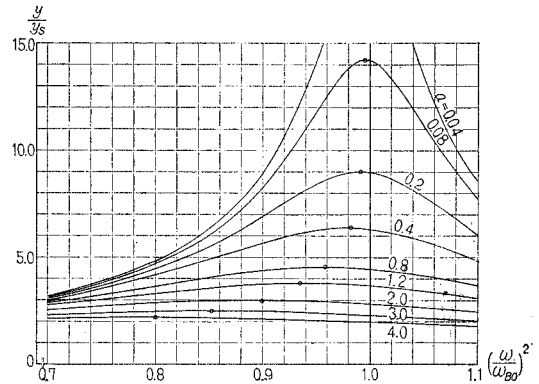


図-25  $B_{sym}-5-a$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置(1,2,3,4,5,6,7)共振曲線

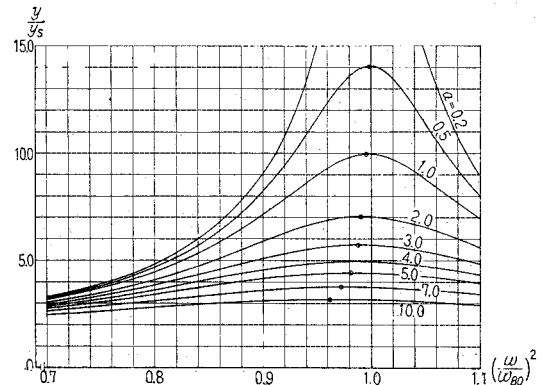


図-26 C-2-a 片持ばりポイントダンパー位置(2)共振曲線

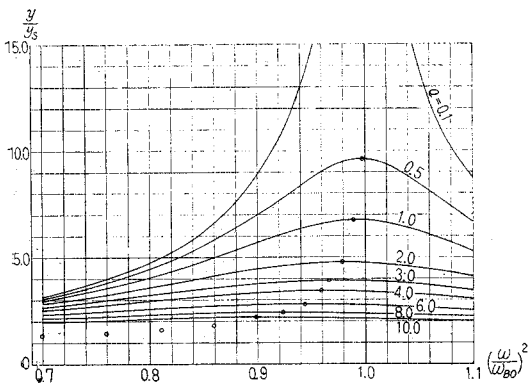


図-24  $B_{sym}-2-a$  両端固定ばり. 対称振動ポイントダンパー位置(2,6)共振曲線

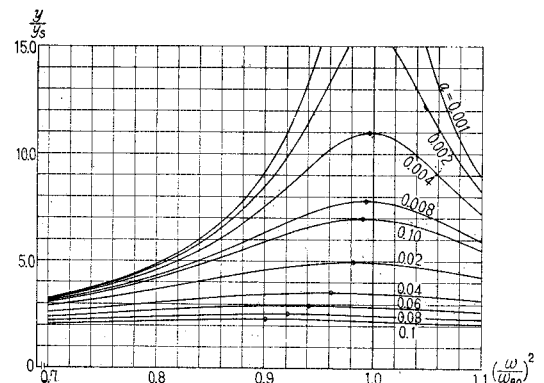


図-27 C-5-a 片持ばりポイントダンパー位置(1,2,3,4)共振曲線



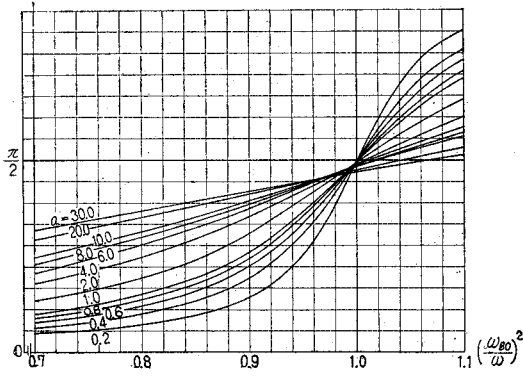


図-28  $S_{sym}-1-p$  両端単純支持ばり. 対称振動  
ポイントダンパー位置 (1,7) 位相おくれ

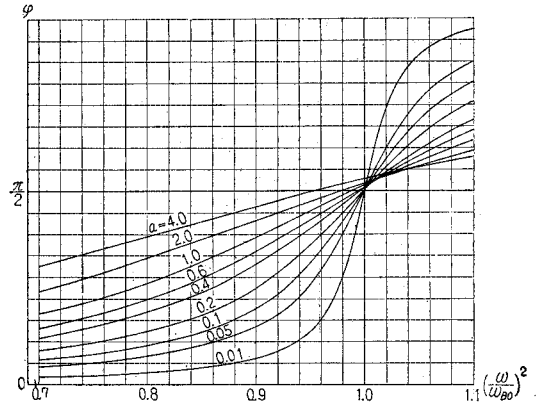


図-31  $B_{sym}-5-p$  両端固定ばり. 対称振動  
ポイントダンパー位置 (1,2,3,4,5,6,7)  
位相おくれ

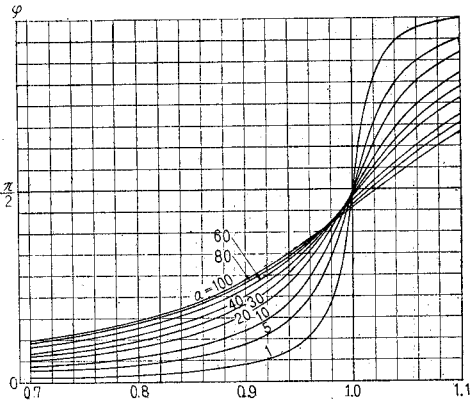


図-29  $B_{sym}-1-p$  両端固定ばり. 対称振動  
ポイントダンパー位置 (1,7) 位相おくれ

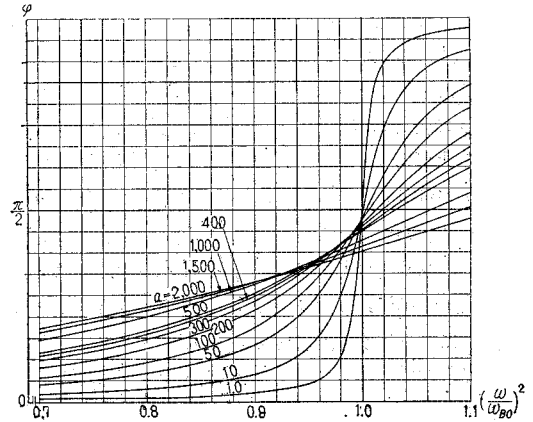


図-32  $C-1-p$  片持ばり  
ポイントダンパー位置 (1) 位相おくれ

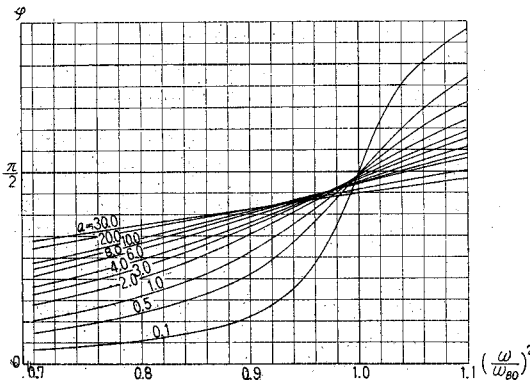


図-30  $B_{sym}-2-p$  両端固定ばり. 対称振動  
ポイントダンパー位置 (2,6) 位相おくれ

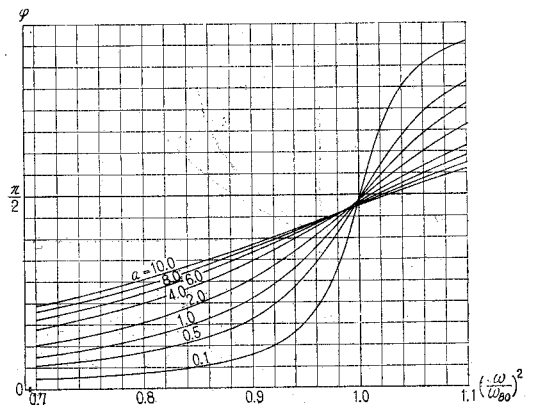


図-33  $C-2-p$  片持ばり  
ポイントダンパー位置 (2) 位相おくれ

ものである。

### 3. 考察および結論

#### (1) 粘性減衰振動

円振動数の変化とポイントダンパーのダンピング力係

数およびその取り付け位置との関係を表わす計算値は前節の 図-13~図-21 に示した。この関係を大別してまとめると 図-34 に示されるような4種類の曲線  $A_f$ ,  $B_f$ ,  $D_f$  および  $E_f$  で表わされる。単純支持ばりでは

$A_f$  曲線, 両端固定ばりでは  $A_f$ ,  $B_f$ ,  $D_f$  曲線, 片持ばりでは  $A_f$ ,  $D_f$ ,  $E_f$  曲線である。 $D_f$  曲線は両端固定ばりおよび片持ばりにおいて固定端にもっとも近い質点にポイントダンパーを取り

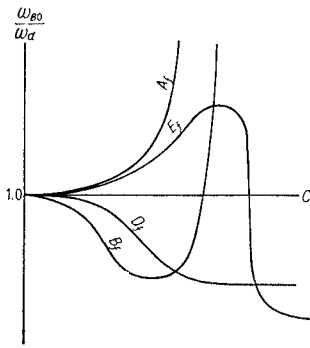


図-34

付けた場合であり, ダンパーのダンピング力係数の増加に伴い, 円振動数は大きくなり, 一定値に近づく。 $E_f$  曲線は片持ばりにおいてポイントダンパーが質点2 (図-3) に取り付けられている場合であり, ダンピング力係数の増加にともない  $A_f$  曲線と同様の変化を示すが, ダンピング力係数がある値を越すと  $D_f$  曲線と同様に円振動数は大きくなり一定値に近づく。はりの固有振動数は, はりの長さの2乗に逆比例する。長さだけが異なり, その比が 1: (3/4) の二つのはりの円振動数の比は 1: (3/4)<sup>2</sup> ≒ 0.563 であり,  $D_f$  曲線の終局値 (図-14, 図-19) に近い値である。すなわち, 固定端がポイントダンパーの取り付け位置に移動することが考えられる。しかし, 実際には, ポイントダンパーの取り付けられている個所に一種の支点が生じるかたちになる。 $E_f$  曲線についても同様の考察がなされる。対数減衰率とポイントダンパーのダンピング力係数およびその取り付け位置との関係は 図-4 ( $S_{sym-1-d}$ )~図-11 ( $C-5-d$ ) に示してある。これら

らの関係を円振動数と同様に大別してまとめると 図-35 で示される2種類の曲線  $F_d$ ,  $G_d$  になる。 $F_d$  曲線は 図-34 で示される  $A_f$ ,  $B_f$  曲線の場合に相当

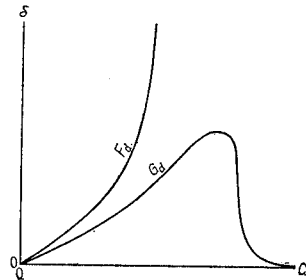


図-35

し,  $G_d$  曲線は  $D_f$ ,  $E_f$  曲線の場合に相当する。 $F_d$  曲線はダンピング力係数がある値 (臨界ダンピング力係数) に達すれば無限大にいたり, 系の振動が臨界減衰の状態になることを示している。 $G_d$  曲線はダンピング力係数がある値を越すと下降する傾向にあり, 終局的には  $\delta=0$  に近づく。この場合には臨界ダンピング力係数は存在しないで「有効ダンピング力係数」というべき値が存在することになる。この有効ダンピング力係数はポイントダンパーの特性の一つである。 $G_d$  曲線が  $\delta=0$  に

近づいた状態は 図-34 の  $D_f$ ,  $E_f$  曲線が一定値に近づく状態でもあり, はりの振動は当初の振動 (計算値の場合は一次振動) から別の振動に移り変わって行くことを示している (ポイントダンパーの取り付け位置に支点が生じるようになることは前に述べたが, この性質は実験的にも確かめられる。この種の問題については別の機会に発表を予定している)。

粘性抵抗力を有する質点~ばね系 (ケルビン体) においては臨界粘性抵抗力  $C_C$  は,  $C_C=2m\omega_0$  ( $m$  および  $\omega_0$  はそれぞれこの系の質量および固有円振動数) で表わされる。計算したはりのなかで対数減衰率とダンピング力係数の関係が  $F_d$  曲線で表わされるとき, 臨界ダンピング力係数  $C_{BC}$  は  $\epsilon_C$  を係数として,  $C_{BC}=\epsilon_C m_B \omega_{B0}$  で表わされる。ここで  $m_B$ ,  $\omega_{B0}$  はそれぞれはりの全質量および固有円振動数である。係数  $\epsilon_C$  の計算値は表-4 に示すようになる。

表-4

	$\epsilon_C$		$\epsilon_C$		$\epsilon_C$
$S_{sym-1}$	2.14	$B_{sym-1}$	—	$C-1$	—
2	0.63	2	1.76	2	—
3	0.36	3	0.69	3	0.92
4	0.63	4	1.05	4	0.39
5	0.045	5	0.33	5	0.25
$S_{asym-1}$	1.72	$B_{asym-1}$	—		
2	0.95	2	1.67		
3	1.72	3	2.19		
4	0.45	4	0.84		

つぎに, はりの振動形を仮定して振動エネルギーにより対数減衰率を求める。

はりのたわみ振動形を  $y(x)$  としてはりはつぎの式で表わされるように減衰振動を行なうものと仮定する。

$$Y(x, t) = y(x)e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \dots (24)$$

はりが1サイクルに消費する振動エネルギーはポイントダンパーが1サイクルに吸収したエネルギーに等しい。ポイントダンパーの変位は式 (24) を用いてつぎのように書ける。ただし,  $x_i$  はポイントダンパーの取り付け位置である。

$$Y(x_i, t) = y(x_i) \cdot e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) \dots (25)$$

ゆえに前記のエネルギーの条件より次式を得る。

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{2\pi/\omega} C \cdot \left( \frac{\partial Y}{\partial t} \right)^2 dt = \int_0^l \frac{m_B}{2l} \omega^2 \times (1 - e^{-\frac{4\pi D}{\omega}}) \{y(x)\}^2 dx \dots (26)$$

式 (24), (25), (26) を用いて対数減衰率  $\delta$  とポイントダンパーのダンピング力係数  $C$  との関係の求めるとつぎのようになる。

$$\delta = \frac{\pi \cdot l \sum_{i=1}^n \{y(x_i)\}^2}{m_B \cdot \omega \int_0^l \{y(x)\}^2 dx} \cdot C \dots (27)$$

振動形および振動数が一定であるとすれば対数減衰率はダンピング力係数に比例する。しかし、ポイントダンパーを取り付けることにより、振動数および振動形に変化が生じるため対数減衰率はダンピング力係数に一次的な比例はしない。

一般にダンピング力係数の比較的小さい範囲では振動数および振動形の変化は小さいと思われるがこの変化量を無視できるダンピング力係数の大きさは決めがたい。

単純支持ばりにおいてたわみ振動形  $y(x)$  をつぎのように仮定する。

$$y(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x \dots\dots\dots (28)$$

$\int_0^l \{y(x)\}^2 dx = \frac{A^2}{2} l, \sum_{i=1}^n \{y(x_i)\}^2 = \sum_{i=1}^n \left\{ A \sin \frac{\pi}{l} x_i \right\}^2$  であるから式 (27) はつぎのように書ける。

$$\delta = \frac{2\pi \sum_{i=1}^n \left\{ \sin \frac{\pi}{l} x_i \right\}^2}{m_B \omega} C \dots\dots\dots (29)$$

また、

$$y(x) = A_i \frac{2\pi}{l} x \dots\dots\dots (28)'$$

とすれば式 (27) はつぎのようになる。

$$\delta = \frac{2\pi \sum_{i=1}^n \left\{ \sin \frac{2\pi}{l} x_i \right\}^2}{m_B \omega} C \dots\dots\dots (29)'$$

式 (29), (29)' を用いて 2. で計算したと同じ位置にポイントダンパーを取り付けたときの対数減衰率とダンピング力係数の関係を係数  $\varepsilon$  を用いて、 $C = \varepsilon m_B \omega \delta$  とおくと係数  $\varepsilon$  は表

表-5

$S_{sym-1}$	$\varepsilon$	$S_{sym-1}$	$\varepsilon$
1	0.543	1	0.159
2	0.159	2	0.0796
3	0.0932	3	0.159
4	0.159	4	0.040
5	0.040	5	

5 のようになる。ただし、ポイントダンパーによる振動形の変化は考慮しないものとする。これまでに求めてきた対数減衰率とダン

パーのダンピング力係数の関係をまとめると 図-36 のようになる。図-36 は縦軸に対数減衰率  $\delta$ 、横軸にはダンピング力係数と臨界ダンピング力係数の比  $C/C_{BC}$  がとってある。ただし、図-34 における  $G_d$  曲線の場合には有効ダンピング力係数を臨界ダンピング力係数として扱ってある。図中、 $F'$  曲線および  $G'$  曲線は

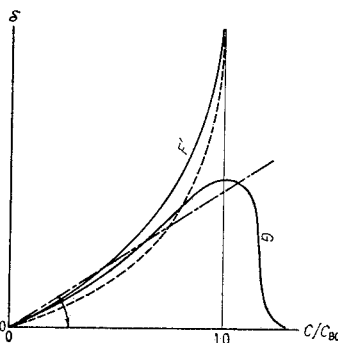


図-36

図-34 における  $F$  曲線および  $G$  曲線の場合に相当し、点線は 1 質点系、一点破線はエネルギー法で振動形、振動数を不変と仮定した場合である。ダンピング力係数の小さい場合には、 $F'$ 、 $G'$  曲線、点線および一点破線で表わされる値はそれぞれ近い値を取り得る場合もあるが、ダンピング力係数が大きくなれば、特に、臨界減衰の状態に近い範囲ではエネルギー法、1 自由度系への置き換え等に適用されない。

(2) 正弦波外力による強制振動

正弦波外力をうけた場合の共振曲線の一部は 図-23 ( $S_{sym-1-a}$ )~図-27 ( $C-5-a$ ) に示してある。ポイントダンパーを取り付けることにより応答振幅は顕著に減少されている。図示されている共振曲線は外力の作用する質点のものである。ほかの質点の共振曲線もほぼこれと一致するが外力の作用する質点の振幅比  $y_1/y_{s1}$  とほかの質点の振幅比の間には若干、 $y_1/y_{s1} > y_2/y_{s2} > y_3/y_{s3} > y_4/y_{s4}$  なる傾向にある。

定常状態においては外力が 1 サイクルに供給するエネルギーはポイントダンパーにより 1 サイクルに吸収されるエネルギーに等しい。外力を  $F \sin \omega t$  とし、外力の作用点の変位を、 $y(x_0) \sin(\omega t - \varphi_0)$ 、ポイントダンパーの変位を、 $y(x_i) \sin(\omega t - \varphi_i)$  とすればエネルギーの条件より次式を得る。

$$\int_0^{2\pi/\omega} F \sin \omega t \cdot y(x_0) \omega \cos(\omega t - \varphi_0) dt = \int_0^{2\pi/\omega} \sum_{i=1}^n C \{y(x_i) \omega \cos(\omega t - \varphi_i)\}^2 dt \dots\dots (30)$$

$y(x_i) = n_i y(x_0)$  とおいて式 (30) を整理すればつぎの式のようになる。

$$y(x_0) = \left( \frac{E}{C \omega} \right) \left( \frac{\sin \varphi_0}{\sum_{i=1}^n (n_i)^2} \right) \dots\dots\dots (31)$$

ダンピング力係数が比較的小さい範囲では式 (31) において、 $\varphi_0 = \pi/2$ ,  $\sin \varphi_0 = 1$  となり、 $\omega = \omega_{B_0}$  で応答振幅は最大になる。 $F$  を一定とすれば最大応答振幅はダンピング力係数  $C$  に逆比例する。計算値においても  $C$  が小さい範囲ではこの傾向を示している。しかし、ダンピング力係数  $C$  が大きくなれば  $\varphi_0 \neq \pi/2$  であり、共振点における外力の円振動数は  $\omega \neq \omega_{B_0}$  となりまた  $n_i \neq \text{constant}$  である。このためダンピング力係数  $C$  と応答振幅の関係は式 (31) における  $\varphi_0$ ,  $\omega$ ,  $n_i$  を決定しなければ求められない。すなわち、ポイントダンパーによる位相おくれ、共振点の変化および振動形の変化を考えなければならない。定常状態における外力の位相に対する質点の位相おくれ (図示されているのは外力の作用している質点の位相おくれ) は 図-28 ( $S_{sym-1-p}$ )~図-33 ( $C-2-p$ ) に示されている。パラメーター  $a$

$\left(=k_0 \left(\frac{C}{m_B \omega_{B_0}}\right)^2\right)$  が小さい範囲では、すなわちダンピング力係数  $C$  が小さい範囲では、位相おくれは  $\omega/\omega_{B_0} \approx 1.0$  で  $\pi/2$  であるが、 $a$  が大きくなれば  $\omega/\omega_{B_0} = 1.0$  で  $\pi/2$  にはならない。また、各質点の位相おくれは一定ではない。すなわち、各質点は同一位相で振動しているのではなく各質点間に位相のずれ(質点位相ずれ)が生じる。この質点位相ずれの大きさはポイントダンパーのダンピング力係数およびその取り付け位置により異なる。共振点における質点位相ずれの数列を 図-37~図-40 に示した。図示されている質点位相ずれは外力の作用し

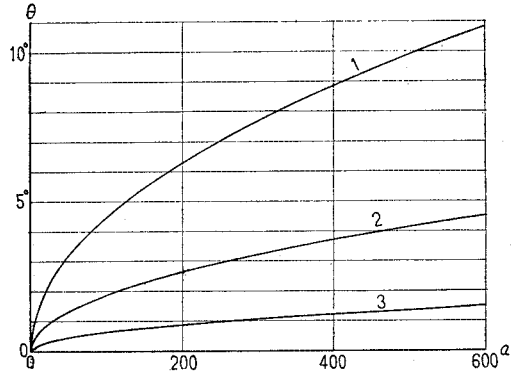


図-40 C-1- $\pi$ 片持ばり  
ポイントダンパー位置(1)  
質点間位相ずれ

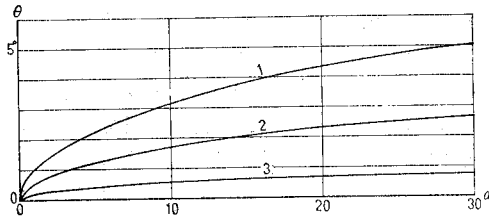


図-37  $S_{sym}$ -1- $\pi$  両端単純支持ばり  
ポイントダンパー位置(1,7) 質  
点間位相ずれ

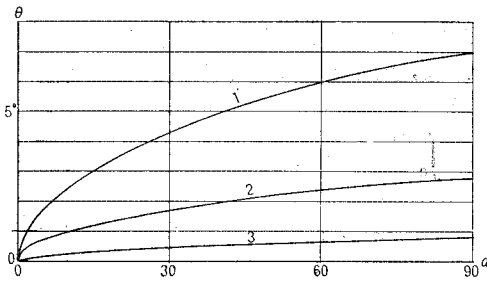


図-38  $B_{sym}$ -1- $\pi$  両端固定ばり  
ポイントダンパー位置(1,7)  
質点間位相ずれ

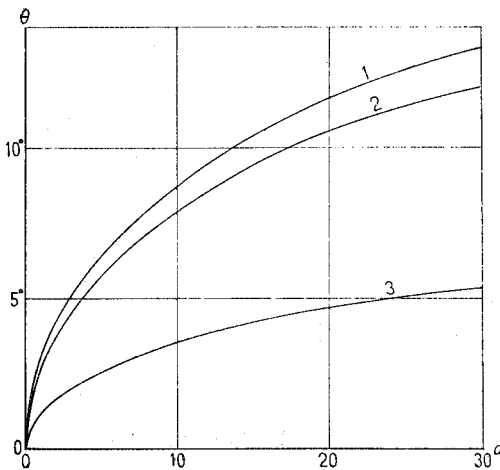


図-39  $B_{sym}$ -2- $\pi$  両端固定ばり  
ポイントダンパー位置(2,6)  
質点間位相ずれ

ている質点の位相に対する他の質点の位相ずれであり、縦軸に位相ずれ(度)、横軸にパラメーター  $a$  がとってある。図中の番号は質点番号を表わしている。この質点間位相ずれはポイントダンパーが外力の作用する質点からより離れた質点に取り付けられている場合に大きくなる傾向にあり、外力の作用する質点にのみポイントダンパーが取り付けられている場合には質点間位相ずれは生じなく各質点の位相おくれは  $\omega/\omega_{B_0} = 1.0$  で  $\pi/2$  になる。この質点間位相ずれに注目してはりの定常状態で振幅比が最大になるときの振動の様子を数列、図-41~図-43 に示す。図-41 は単純支持ばりでポイントダンパ

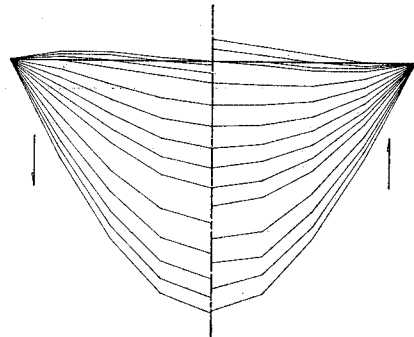


図-41 単純支持ばりの振動形

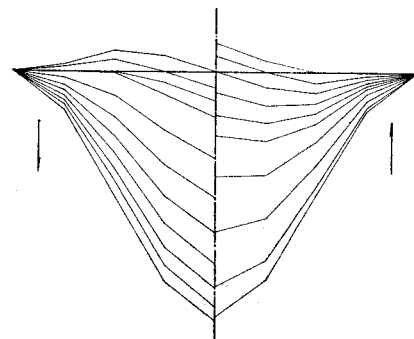


図-42 両端固定ばりの振動形

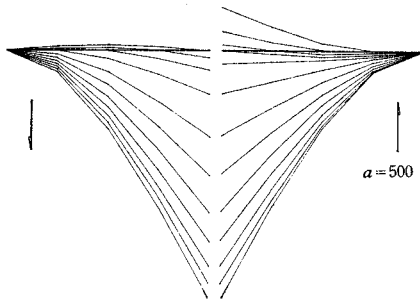


図-43 片持ばりの振動形

一が質点1と質点7に取り付けられており、パラメータ、 $a=30$ 、図-42は両端固定ばりでポイントダンパーが質点2と質点6に取り付けられており、 $a=15$ 、図-43は片持ばりでポイントダンパーが質点1に取り付けられており、 $a=500$ の場合をそれぞれ示した。なお、これらのポイントダンパーのダンピング力係数はそれぞれ  $1.10 m_B \omega B_0$ 、 $0.37 m_B \omega B_0$ 、 $7.07 m_B \omega B_0$  である。位相ずれを考慮すればポイントダンパーが取り付けられたはりでは定常振動形をつぎのような式で表わさなければならない。

$$Y(x, t) = y(x) \sin(\omega t + \varphi(x))$$

すなわち、位相おくれは  $x$  の関数で与えなければならない。

以上、単純支持ばり、両端固定ばり、片持ばりの粘性減衰振動および正弦波外力に強制振動（いずれも低次）について第1節で導いた方法を用い対数減衰率、振動数の変化、曲線および位相おくれなどを定量的に求めた。ポイントダンパーを取り付けることによりはりの振動性状がどのように影響をうけ、また変化するかを定義することは計算例の不足とはりの置換モデルの分割質点数の不足のため完全にはできないにしても、ダンパーのダンピング力係数の値いかんによっては振動性状の変化を考慮しなければならないことを明示できたと思われる。また、ダンパーの制動効果を量的に表わし、その有効性を改めて実証し得たものと考えられる。ポイントダンパーの制動効果は結局ダンパーの吸収できるエネルギーの問題に還元されることになろう。ダンパーの吸収するエネルギーは式(26)の表現を用いて、 $C \left( \frac{\partial Y}{\partial t} \right)^2$  で表わされる。すなわち、変位の2乗に比例し、ダンピング力係数に比例する。それゆえダンパーの制動効果はそれを取り付ける位置に大きく関係する。より高次のたわみ振動に対するダンピング効果を大きくするためには複数個のダンパーの取り付けも考えられる。例題については、高次のたわみ振動(2~7次)についても計算を行なったがはりを少数のばね質点系に置き換えたことによる誤差(特にダンパーの取り付けられた質点の変位についての)の大きいことを考慮して割愛した。計算に用いたダンパ

一のダンピング力係数の大きさは一応低次のたわみ振動が臨界減衰の状態にいたるまでとし、正弦波外力による強制振動においてはダンパーにより振幅比がどの程度減少するかを示すことができる範囲にとどめた。ダンピング力係数をさらに大きくした場合またはポイントダンパーを非対称に取り付けた場合などの解析は粘性支点を有するはりの問題として別に取り扱う予定である。

## あ と が き

構造物自体のもつ振動減衰力は材料の粘性減衰、部材の継手や接触面におけるエネルギーの逸散、支承などにおけるクーロン減衰、空気抵抗などの多くのものが考えられる。しかし、これらにはいずれも限度があり、大きな値を期待することはむずかしい。著者らは構造物にダンパーを取り付けられることにより構造物の振動減衰力をたかめ、防振および制振効果を増大させることを考えている。ダンパーとしては速度比例型、速度2乗比例型、摩擦型およびダイナミックダンパーなどが考えられるが解析に比較的簡易な速度比例型ダンパーをとりあげている。いままでに模型実験や簡易計算法によりダンパーによる防振、制振効果を確かめている<sup>1)~3)</sup>が、これらは主としてダンピング効果のみに重点をおいてダンパーによる構造物の振動形、振動数などの振動特性の変化について詳細には考慮していなかった。自由度の低い構造物、特に可撓性の小さい構造物においてはダンパーによる振動形、位相おくれなどの変化は比較的小さいと考えられる場合もあるが、可撓性の大きい構造物ではこれらの変化を考慮しないでダンパーを用いることには疑問があるように思われるし、また考慮しないで用いる場合もその実態を少なからず把握した後でなければならぬと思われる。いずれにしてもダンパーと振動特性との関係を明確にしなければならない。電子計算機の使用が容易にできるのでダンパーによる構造物の振動制御の解析も比較的簡単になった。より高次の振動、過渡現象、ランダム外力による構造物の応答などがダンパーによりどのように変化するかまたダンピング効果はどの程度であるかを知ることが今後の課題であろうが、本論文はこれらの問題を解決する一方針を示したものである。本論文の一部は文部省科学研究費の補助をうけてなされたものであり、土木学会第23回年次学術講演会で発表したものである。

## 参 考 文 献

- 1) Jerome E. Ruzicka : Structural Damping.
- 2) Seireg, A. and L. Howard : An Approximate Nomal Mode Method for Damped Lamped Parameter Systems, ASME Publication.
- 3) 互理 厚 : 「機械振動」, 丸善.
- 4) 倉西・高橋 : ダンパーを有するはりの振動について, 土

- 木学会第 23 回年次学術講演会。
- 5) 倉西 茂：ダンパーによる吊橋のたわみ振動の制御について，土木学会論文集 142 号。
  - 6) 倉西・高橋：ダンパーを有する吊橋の振動，土木学会 第 22 回年次学術講演会。
  - 7) 倉西・高橋：ダンパーを有する吊橋の振動，43 年度東北支部技術研究発表会。
  - 8) 倉西・高橋：ケーブルスティダンパーによる吊橋の振動制御，44 年度東北支部技術研究発表会。
  - 9) Snowdon, J.C. : Vibration and Shock in Damped Mechanical Systems.
  - 10) Thomson, W.T. : Mechanical Vibration.  
(1970. 1.16・受付)  
(1970.12.21・再受付)
-