

## 任意形孔をもつ無限板の曲げおよび ねじりによる応力集中

STRESS CONCENTRATION AROUND AN ARBITRARILY  
SHAPED HOLE IN INFINITE THIN PLATE SUBJECTED  
TO TRANSVERSE BENDING AND TWISTING MOMENTS  
AT ITS INFINITY

山崎 徳也\*・後藤 恵之輔\*\*

By Tokuya Yamasaki and Keinosuke Gotoh

### 1. 序 言

土木、建築、機械、造船などの各種構造物において多見される有孔薄板が面外荷重を受けるとき、面内荷重の場合と同様に、孔縁近傍に応力集中が生ずることは周知のとおりである。この現象は構造物を破壊に導くき裂の発生原因となるゆえ、設計に際してはできるだけ小さなものとなるように、特に孔縁の縁ばりや孔縁近傍の配筋などによる補強策を講じなければならない。したがって、応力集中の大きさおよび分布状態を正確に知ることが重要な課題となるが、これらは孔の位置や形状などによって大きく異なる。

孔の位置が応力集中におよぼす影響に関しては、著者らの知る限りほとんど究明されてなく、わずかに土橋・三浦らのく形、L形孔をもつ満載等分布荷重を対象とした周辺固定く形板に関する研究<sup>1)</sup>があるのみで、これも板を粗い格子状に分割のうえ通常の階差法によっているゆえ、解の近似性は否めず、特に応力集中に対する精度には疑義がある。孔の形状による影響については、有孔無限板が無限遠点において面外の曲げおよびねじりを受ける場合が Goodier<sup>2)</sup>、斎藤<sup>3)</sup> および Savin<sup>4)</sup> らにより理論的に取扱われており、さらに松井・斎藤<sup>5)</sup> らによって実験的に研究されている。Goodier の研究は円孔および楕円孔の応力集中を実数型のたわみ関数により解析したもので、古典的研究として興味深い。斎藤は円形、楕円形および正多角形の各孔を実数型たわみ関数により、Savin は円形、楕円形、正三角形およびく形(形状比 0.309)の各孔を Muskhelishvili の複素変数法(complex variable method)により取扱っているが、

両者とも写像関数として Schwarz-Christoffel の変換公式よりえられる無限級数を最初の数項で打切って用いるため、写像形状が実際のものとは異なり、したがって、これらは定性的な結果を与えるのみで、定量的な数値を必要とする場合には不適當である。また、松井らは円孔および正方形孔を光弾性実験により論じているが、Savin の理論解の検証に留まっている。ほかに、孔形状の影響を論じたものには、堯天<sup>6)</sup> および土橋・斎藤<sup>7)</sup> の正方形孔をもち満載等分布荷重を受ける周辺固定正方形板に関する研究が認められるが、いずれも文献 1) と手法を同じくするため、精度上に難点がある。Goodier・Lee<sup>8)</sup> および Drucker<sup>9)</sup> はともに円孔をもつ帯板の曲げによる応力集中を光弾性実験を用いて考察し、有孔板の設計に有用な資料を提供しているが、孔形状が円孔一形式に限定され、一般的な実用性に欠けるうらみがある。

以上の所論より、著者らは円形、楕円形、く形および正多角形などをすべて含んで任意の孔形状に拡張し、まず単一孔に関して孔形状および孔の位置などの影響を正確に解明するため、本論文では手始めに無限板を対象としてその無限遠点に純円筒曲げ(purely cylindrical bending)、純曲げ(pure bending)および純ねじり(pure twisting)が作用する場合につき、応力集中に対する孔形状、孔隅角部の丸味および板材料のポアソン比の影響を考究するものである。解法には複素変数法を用い、その鍵となる写像関数を一般的に複素数の任意係数をもつ  $N$  次の降べき級数に展開して、任意の孔形状に適応せしめるとともに、板の複素たわみ関数の誘導を容易ならしめている。この写像関数によってえられる孔形状は、多角形に対しても直線辺で隅に任意の丸味をもたせることができ、切断加工上、隅が丸められる実際の孔形状によく合致するものである。この写像関数に対して、複素たわみ関数を同じく降べき級数で仮定し、孔縁自由の境界条件

\* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学教室

\*\* 正会員 工修 九州大学助手 工学部土木工学教室

式よりその係数を決定する  $N$  元 1 次の連立方程式を誘導している。算例には楕円形（特例として円形を含む）、正三角形、正方形、正六角形およびく形の各孔を取上げ、複素たわみ関数および孔縁モーメント、特に孔縁の接線方向の曲げモーメントに対する算式を示すとともに、応力集中におよぼす諸要素の影響を定量的に解明した。なお、解析に当っては、板は弾性で等方等断面とし、薄板の微小たわみ理論が適用できるものとする。

2. 基礎方程式と境界条件式

有孔薄板の中立面内に、孔中心を原点とする直角座標  $(x, y)$  を導入し、平板の垂直たわみを  $w$  とすれば、板の周辺に面外の曲げモーメントおよびねじりモーメントのみが作用するときの基礎微分方程式は、次式で与えられる。

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

式 (1) の一般解は、複素変数  $Z = x + iy$  を用いてつぎのごとく重調和関数として表わされる。

$$w = R_e[\bar{Z} \Phi(Z) + X(Z)] \dots\dots\dots (2)$$

ここに、バー記号はその変数または関数の共役数を、 $R_e$  記号は [ ] 内の変数または関数の実数部をそれぞれ表わし、 $\Phi(Z)$ 、 $X(Z)$  は解析関数で、 $X(Z)$  はさらに次式のごとく解析関数  $\Psi(Z)$  で定義される。

$$X(Z) = \int \Psi(Z) dZ \dots\dots\dots (3)$$

しかるに、 $\Phi(Z)$ 、 $\Psi(Z)$  は 2 つの関数に分離され、次式のごとく置ける。

$$\left. \begin{aligned} \Phi(Z) &= \Phi_0(Z) + \Phi_1(Z) \\ \Psi(Z) &= \Psi_0(Z) + \Psi_1(Z) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

ここに、関数  $\Phi_0(Z)$ 、 $\Psi_0(Z)$  は平板に孔が無いときのたわみ関数であり、 $\Phi_1(Z)$ 、 $\Psi_1(Z)$  は孔の存在による付加たわみ関数である。

$Z$ -面上の任意形孔  $\Gamma$  の外部領域を  $\zeta$ -面上の単位円  $r$  の外部に写像する関数として、次式を定義する (図-1 参照)。

$$Z = \omega(\zeta) = R \left( \zeta + \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} \right) \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 $\zeta = \rho \exp(i\theta)$ 、 $(\rho, \theta)$ ：極座標、 $R$ ：孔の大き

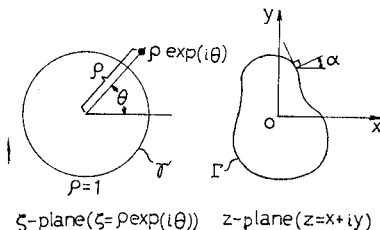


図-1 座標変換

さを与える実数定数、 $N$ ：正整数、 $a_n$ ：一般的に 0 でない複素数係数で式 (5) が  $\rho=1$  のとき孔縁を表わすごとく決定される。

しかるとき、式 (4) の解析関数は次式に変換される。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \varphi_0(\zeta) + \varphi_1(\zeta) \\ \psi(\zeta) &= \psi_0(\zeta) + \psi_1(\zeta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ここに、 $\Phi(Z) = \Phi[\omega(\zeta)] = \varphi(\zeta)$ 、 $\Psi(Z) = \Psi[\omega(\zeta)] = \psi(\zeta)$  であり、 $\varphi_0(\zeta)$ 、 $\varphi_1(\zeta)$  などについても同様である。

付加たわみ関数の  $\varphi_1(\zeta)$  および  $\psi_1(\zeta)$  は、つぎのごとく  $\zeta$  のべき級数で表わしうる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \zeta^{-k} \\ \psi_1(\zeta) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \zeta^{-k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式 (7) の  $b_k$ 、 $c_k$  は、孔縁の境界条件式より決定される複素数係数である。

孔縁が自由境界なときの条件式は次式で与えられる (文献 4)、p. 315 参照)。

$$-\kappa \varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = 0 \dots\dots\dots (8)_a$$

あるいは、共役式を採って、

$$-\kappa \overline{\varphi(\sigma)} + \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi'(\sigma) + \psi(\sigma) = 0 \dots\dots\dots (8)_b$$

式 (8) における  $\sigma = (\zeta)_{\rho=1} = \exp(i\theta)$  で、プライム符号は ( ) 内の変数による微分を意味し、 $\kappa$  は次式で定義されるものである。

$$\kappa = \frac{3+\nu}{1-\nu}$$

ここに、 $\nu$ ：板材料のポアソン比

式 (6) を式 (8)<sub>a</sub> に代入し、その結果に  $1/2\pi i(\sigma - \zeta)$  を乗じて式 (7) を考慮のうえ単位円  $r$  のまわりに積分すれば、Cauchy の定理により次式がえられる。

$$\begin{aligned} \kappa \varphi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_r \left[ \kappa \varphi_0(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} - \overline{\psi_0(\sigma)} \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{aligned}$$

同様に、式 (6) を式 (8)<sub>b</sub> に代入して複素積分を行えば、次式がえられる。

$$\begin{aligned} -\psi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_r \left[ \kappa \overline{\varphi_0(\sigma)} - \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) - \psi_0(\sigma) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \end{aligned}$$

したがって、付加たわみ関数  $\varphi_1(\zeta)$ 、 $\psi_1(\zeta)$  を決定する式は次式となる。

$$\begin{aligned} \kappa \varphi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_r (f_1^0 + if_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \dots\dots\dots (9)_a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\psi_1(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\omega'(\sigma)} \varphi_1'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \\
 = \frac{1}{2\pi i} \int_r (f_1^0 - if_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} \dots\dots\dots(9)_b
 \end{aligned}$$

ここに、 $f_1^0 + if_2^0$  は次式で定義されるもので、 $f_1^0 - if_2^0$  は  $f_1^0 + if_2^0$  の共役式である。

$$f_1^0 + if_2^0 = \kappa \varphi_0(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\varphi_0'(\sigma)} - \overline{\psi_0(\sigma)}$$

式(9)の右辺は荷重状態により定まるもので、これを荷重項と名付け、左辺第2項は写像関数、すなわち孔形状に関係するもので、これを形状項と称することにす。

### 3. たわみ関数と断面力との関係

直角座標における曲げモーメント  $M_x, M_y$ , ねじりモーメント  $M_{xy}$  およびせん断力  $Q_x, Q_y$  は、たわみ関数  $w$  を用いて周知のごとく次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_{xy} &= -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
 Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\
 Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここに、 $D$ : 板の曲げ剛性

式(10)は、たわみ関数  $w$  に式(2)の関係を適用することにより、つぎのごとく複素表示される。

$$\left. \begin{aligned}
 M_x + M_y &= -2D(1+\nu) [\Phi'(Z) + \overline{\Phi'(Z)}] \\
 M_y - M_x + 2iM_{xy} &= 2D(1-\nu) \\
 &\quad \times [\overline{Z} \Phi''(Z) + \Psi'(Z)] \\
 Q_x - iQ_y &= -4D \Phi''(Z)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

一方、変換座標における断面力  $M_\rho, M_\theta, M_{\rho\theta}, Q_\rho$  および  $Q_\theta$  と直角座標における断面力との関係は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_\rho + M_\theta &= M_x + M_y \\
 M_\theta - M_\rho + 2iM_{\rho\theta} &= (M_y - M_x + 2iM_{xy}) \\
 &\quad \times \exp(2i\alpha) \\
 Q_\rho - iQ_\theta &= (Q_x - iQ_y) \exp(i\alpha)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $\alpha$  は  $Z$ -面において  $\rho =$ 一定の曲線に立てた垂線と  $x$  軸とのなす角である (図-1 参照)。

式(11)を式(12)に代入すれば次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_\rho + M_\theta &= -2D(1+\nu) [\Phi'(Z) + \overline{\Phi'(Z)}] \\
 M_\theta - M_\rho + 2iM_{\rho\theta} &= 2D(1-\nu) \\
 &\quad \times [\overline{Z} \Phi''(Z) + \Psi'(Z)] \exp(2i\alpha) \\
 Q_\rho - iQ_\theta &= -4D \Phi''(Z) \exp(i\theta)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

式(13)において  $\exp(2i\alpha) = \omega'(\zeta)/\overline{\omega'(\zeta)} \cdot \exp(2i\theta)$  であることと式(5)、(6)とを考慮すれば、結局変換座標における断面力は、写像関数  $\omega(\zeta)$  と複素たわみ関数  $\varphi(\zeta)$  および  $\psi(\zeta)$  との関数として、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned}
 M_\rho + M_\theta &= -2D(1+\nu) \left[ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\overline{\omega'(\zeta)}} \right] \\
 M_\theta - M_\rho + 2iM_{\rho\theta} &= \frac{2D(1-\nu)\zeta^2}{\rho^2 \omega'(\zeta)} \\
 &\quad \times \left[ \omega(\zeta) \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}' + \psi'(\zeta) \right] \\
 Q_\rho - iQ_\theta &= -\frac{4D\zeta}{\rho |\omega'(\zeta)|} \left\{ \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} \right\}'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

### 4. 孔が無い場合のたわみ関数の決定

孔が無い場合のたわみ関数は、孔が無い場合の応力状態と等価で、孔より遠く離れた点すなわち無限遠点における応力状態を用いて求められる。すなわち、図-2に示すごとく、任意形状の単一孔を有する無限薄板が  $x =$

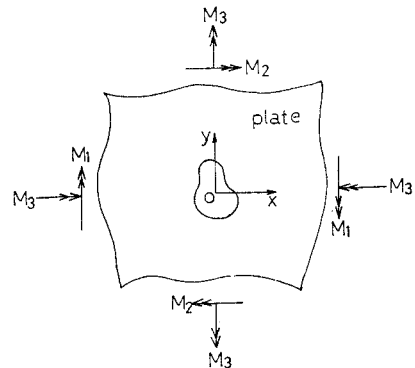


図-2 有孔無限薄板の荷重状態

無限大および  $y =$ 無限大の点においてそれぞれ曲げモーメント  $M_1, M_2$  とねじりモーメント  $M_3$  とを受けるとき、無限遠点における平板の応力状態は次式となる。

$$M_x = M_1, M_y = M_2, M_{xy} = M_3 \dots\dots\dots(15)$$

このとき、 $M_2 = M_3 = 0$  あるいは  $M_1 = M_3 = 0$  とすれば純円筒曲げ、 $M_1 = M_2, M_3 = 0$  とすれば純曲げ、 $M_1 = M_2 = 0$  とすれば純ねじりの各状態がえられる。

式(15)を式(10)に代入して孔が無いときのたわみ関数  $w_0$  を求めればつぎのごとくえられる。

$$w_0(x, y) = -\frac{1}{2(1-\nu^2)D} [(M_1 - \nu M_2)x^2$$

$$+2(1+\nu)M_3xy+(M_2-\nu M_1)y^2] \dots\dots\dots (16)$$

式 (16) において  $Z=x+iy$ ,  $\bar{Z}=x-iy$  なることおよび式 (2) の関係を適用して少しく演算すれば、 $\phi_0(Z)$  および  $X_0(Z)$  が次式のごとくえられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_0(Z) &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Z \\ X_0(Z) &= -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{4(1-\nu)D} Z^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)_a$$

式 (17)<sub>a</sub> の第 2 式と式 (3) より、 $\psi_0(Z)$  は次式となる。

$$\psi_0(Z) = \frac{dX_0(Z)}{dZ} = -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} Z \dots\dots\dots (17)_b$$

式 (17) に式 (5) の写像関数を代入することにより、孔が無いときの複素たわみ関数  $\phi_0(\zeta)$ ,  $\psi_0(\zeta)$  がえられ、つぎの結果となる。

$$\begin{aligned} \phi_0(\zeta) &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \left( \zeta + \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} \right) \dots\dots\dots (18)_a \\ \psi_0(\zeta) &= -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R \left( \zeta + \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} \right) \dots\dots\dots (18)_b \end{aligned}$$

### 5. 付加たわみ関数の誘導

#### (1) 形状項の算定

まず、式 (9)<sub>a</sub> の形状項において、 $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)}$  を式 (5) により  $\sigma$  の昇べき級数に展開すれば次式がえられる。

$$\frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \dots\dots\dots (19)$$

ここに、係数  $e_q$  は次式より写像関数の係数  $a_n$  の関数として算定される。

$$a_{N-q} = e_q - \sum_{j=1}^{q-1} j \bar{a}_j e_{q-1-j} \dots\dots\dots (20)$$

一方、式 (7) より次式をうる。

$$\overline{\varphi_1'(\sigma)} = -\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{b}_k \sigma^{k+1}$$

よって、式 (9)<sub>a</sub> の形状項の被積分関数は次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} &= \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \left( -\sum_{k=1}^{\infty} k \bar{b}_k \sigma^{k+1} \right) \\ &= -\left( \sum_{p=0}^{N-2} f_p \sigma^{-p} + \sum_{p=1}^{\infty} l_p \sigma^p \right) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ここに、係数  $f_p$  は次式より  $e_q$  と未定係数  $b_k$  の関数として算定されるもので、 $l_p$  も同様に求められるが、以後の計算には関係しない。

$$f_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} (N-p-r) e_{r-1} \bar{b}_{N-p-r} \dots\dots\dots (22)$$

したがって、式 (9)<sub>a</sub> の形状項は Cauchy の定理を適用して次式のごとく算定される。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} = \sum_{p=1}^{N-2} f_p \zeta^{-p} \dots\dots\dots (23)$$

つぎに、式 (9)<sub>b</sub> の形状項において被積分関数  $\overline{\omega(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\varphi_1'(\sigma)}$  は  $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\varphi_1'(\sigma)}$  の共役数であるゆえ、式 (21) より次式がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} &= -\left( \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{l}_p \sigma^{-p} \right) \\ \text{したがって、式 (9)}_b \text{ の形状項はつぎの結果となる。} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\omega(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} &= \\ &= -\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\overline{\omega'(\zeta)}} \overline{\varphi_1'(\zeta)} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

#### (2) 荷重項の算定

式 (9)<sub>a</sub> の荷重項において式 (18) より次式が成立する。

$$\begin{aligned} \phi_0(\sigma) &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \left( \sigma + \sum_{n=1}^N a_n \sigma^{-n} \right) \\ \overline{\psi_0(\sigma)} &= -\frac{M_1-M_2+2iM_3}{2(1-\nu)D} R \left( \sigma^{-1} + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \sigma^n \right) \end{aligned}$$

よって、つぎの複素積分がえられる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \kappa \phi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} &= \kappa \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} \dots\dots\dots (25) \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{\psi_0(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} &= \frac{M_1-M_2+2iM_3}{2(1-\nu)D} R \zeta^{-1} \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

また、 $\omega(\sigma)/\overline{\omega'(\sigma)} \cdot \overline{\varphi_1'(\sigma)}$  は式 (18)<sub>a</sub> と (19) を用いさらに式 (21) を参照して次式となる。

$$\begin{aligned} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} &= \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \left\{ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \right\} \\ &\times \left( 1 - \sum_{n=1}^N n \bar{a}_n \sigma^{n+1} \right) = -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \\ &\times \left( \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} - \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \cdot \sum_{n=1}^N n \bar{a}_n \sigma^{n+1} \right) \\ &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \left[ \sum_{q=0}^{\infty} e_q \sigma^{-N+q} \right. \\ &\left. - \left( \sum_{p=0}^{N-2} g_p \sigma^{-p} + \sum_{p=1}^{\infty} h_p \sigma^p \right) \right] \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ここに、係数  $g_p$  は式 (22) による  $f_p$  と同様に次式より求められる。

$$g_p = \sum_{r=1}^{N-p-1} (N-p-r) e_{r-1} \bar{a}_{N-p-r} \dots\dots\dots (28)$$

よって次式をうる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\omega(\sigma)}{\overline{\omega'(\sigma)}} \overline{\varphi_1'(\sigma)} \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta} &= \\ &= \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \left( \sum_{q=0}^{N-1} e_q \zeta^{-N+q} - \sum_{p=1}^{N-2} g_p \zeta^{-p} \right) \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

したがって、式 (9)<sub>a</sub> の荷重項が式 (25), (26) および (29) より次式のごとく算定される。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r (f_1^0 + i f_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \times \left( \kappa \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} - \sum_{q=0}^{N-1} e_q \zeta^{-N+q} + \sum_{p=1}^{N-2} g_p \zeta^{-p} \right) - \frac{M_1 - M_2 + 2iM_3}{2(1-\nu)D} R \zeta^{-1} \dots\dots\dots (30)$$

つぎに、式(9)<sub>b</sub>の荷重項については、式(25)、(26)および(29)を参照してつぎの各式がえられる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\kappa \varphi_0(\sigma)}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_r \kappa \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \times \left( \sigma^{-1} + \sum_{n=1}^N \bar{a}_n \sigma^n \right) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \kappa \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \zeta^{-1} \dots\dots\dots (31)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \psi_0(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_r \times \frac{M_1 - M_2 - 2iM_3}{2(1-\nu)D} R \left( \sigma + \sum_{n=1}^N a_n \sigma^{-n} \right) \times \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{M_1 - M_2 - 2iM_3}{2(1-\nu)D} R \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} \dots\dots\dots (32)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r \frac{\bar{\omega}(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \varphi_0'(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{1}{2\pi i} \int_r \times \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \left[ \sum_{q=0}^{\infty} \bar{e}_q \sigma^{N-q} - \left( \sum_{p=0}^{N-2} \bar{g}_p \sigma^p + \sum_{p=1}^{\infty} \bar{h}_p \sigma^{-p} \right) \right] \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = -\frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} \varphi_0'(\zeta) - \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \times \left( \sum_{q=0}^N \bar{e}_q \zeta^{N-q} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{g}_p \zeta^p \right) \dots\dots\dots (33)$$

したがって、式(9)<sub>b</sub>の荷重項は次式となる。

$$\frac{1}{2\pi i} \int_r (f_1^0 - i f_2^0) \frac{d\sigma}{\sigma - \zeta} = \frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \times \left( \kappa \zeta^{-1} + \sum_{q=0}^N \bar{e}_q \zeta^{N-q} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{g}_p \zeta^p \right) - \frac{M_1 - M_2 - 2iM_3}{2(1-\nu)D} R \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} + \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} \varphi_0'(\zeta) \dots\dots\dots (34)$$

(3) 付加たわみ関数の決定

式(23)の形状項と式(30)の荷重項とを式(9)<sub>a</sub>に代入して付加たわみ関数  $\varphi_1(\zeta)$  を求めれば次式となる。

$$\varphi_1(\zeta) = \frac{M_1 + M_2}{4\kappa(1+\nu)D} R \left( \kappa \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} - \sum_{q=0}^{N-1} e_q \zeta^{-N+q} + \sum_{p=1}^{N-2} g_p \zeta^{-p} \right) - \frac{M_1 - M_2 + 2iM_3}{2\kappa(1-\nu)D} R \zeta^{-1} - \frac{1}{\kappa} \sum_{p=1}^{N-2} f_p \zeta^{-p} \dots\dots\dots (35)$$

式(7)の第1式と式(35)とにおいて、 $\zeta$ の同一べき数の係数を比較することによりつぎの方程式をうる。

$$b_k = \begin{cases} \frac{M_1 + M_2}{4\kappa(1+\nu)D} R (\kappa a_1 - e_{N-1} + g_1) - \frac{M_1 - M_2 + 2iM_3}{2\kappa(1-\nu)D} R - \frac{1}{\kappa} f_1, & k=1 \\ \frac{M_1 + M_2}{4\kappa(1+\nu)D} R (\kappa a_k - e_{N-k} + g_k) - \frac{1}{\kappa} f_k, & k=2, 3, 4, \dots, N-2 \\ \frac{M_1 + M_2}{4\kappa(1+\nu)D} R (\kappa a_k - e_{N-k}), & k=N-1, N \\ 0, & k \geq N+1 \end{cases} \dots\dots\dots (36)$$

よって、式(5)の写像関数が決定されれば、この係数  $a_n$  を用いて  $e_q$  が式(20)の反復方程式より求められ、これと  $a_n$  とを式(28)に代入することにより  $g_p$  がえられる。さらに、 $e_q$  を式(22)に代入すれば  $f_p$  は  $b_k$  のみの関数となり、したがって、式(36)は付加たわみ関数  $\varphi_1(\zeta)$  の係数  $b_k$  を決定するための  $N$  元1次の連立方程式となる。

残る一つの付加たわみ関数  $\psi_1(\zeta)$  は、式(9)<sub>b</sub>に式(24)の形状項と式(34)の荷重項とを代入することにより、次式のごとく求められる。

$$\psi_1(\zeta) = -\frac{M_1 + M_2}{4(1+\nu)D} R \left( \kappa \zeta^{-1} + \sum_{q=0}^N \bar{e}_q \zeta^{N-q} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{g}_p \zeta^p \right) + \frac{M_1 - M_2 - 2iM_3}{2(1-\nu)D} R \sum_{n=1}^N a_n \zeta^{-n} - \sum_{p=0}^{N-2} \bar{f}_p \zeta^p - \frac{\bar{\omega}(1/\zeta)}{\omega'(1/\zeta)} [\varphi_0'(\zeta) + \varphi_1'(\zeta)] \dots\dots\dots (37)$$

6. 板のたわみおよび断面力の算定と孔縁モーメントの算式

孔が無いときのたわみ関数は式(18)で与えられ、孔の存在による付加たわみ関数は式(36)、(37)で決定されるゆえ、所要の板のたわみは、式(6)を用いてこれらを重ね合せたうえ、式(2)に代入することにより算定される。すなわち、

$$w = R_e [\bar{\omega}(\zeta) \varphi(\zeta) + \chi(\zeta)] \dots\dots\dots (38)$$

ここに、 $\chi(\zeta)$  は式(3)より次式で求められる。

$$\chi(\zeta) = \int \psi(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (39)$$

また、式(5)の写像関数と以上で決定された  $\varphi(\zeta)$ 、 $\psi(\zeta)$  とを式(14)に代入すれば、所要の断面力を算定することができる。特に孔縁においては  $M_\rho = 0$  なるゆえ、式(14)の第1式より孔縁モーメント ( $M_t$ ) の算式として次式がえられる。

$$M_t = (M_\theta)_{\rho=1} = -4D(1+\nu) \frac{R_e [\varphi'(\sigma) \bar{\omega}'(\sigma)]}{\omega'(\sigma) \omega'(\sigma)} \dots\dots\dots (40)$$

なお、式(40)の  $\varphi'(\sigma)$  を与える  $\varphi(\zeta)$  は式(36)の

連立方程式より板の曲げ剛性  $D$  を分母に含むゆえ、孔縁モーメント  $M_t$  は板の曲げ剛性には無関係に求められる。

7. 計算例および考察

(1) 応力集中に対する孔形状および孔隅角部の丸味の影響

孔形状および孔隅角部の丸味が孔縁モーメントの分布や最大孔縁モーメントにおよぼす影響を、楕円孔、正多角形孔およびく形孔について吟味すれば以下のごとくである。ただし、ポアソン比  $\nu=0.3$  とし、後 2 者の写像関数の係数については補遺に述べる。

a) 楕円孔 (図-3)

この形状の写像関数は周知のごとく次式で与えられる。

$$Z=R(\zeta+m\zeta^{-1}) \dots (41)$$

楕円孔の  $x$  軸に沿う半軸長を  $\epsilon_1$ ,  $y$  軸に沿うそれを  $\epsilon_2$ ,  $K=\epsilon_2/\epsilon_1$

とすれば,  $m=(1-K)/(1+K)$ ,  $R/\epsilon_1=(1+K)/2$  となる。式 (41) を用いて式 (18), (36) および (37) より複素たわみ関数  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  を求めれば次式となる。

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\zeta+m\zeta^{-1}) + \frac{R}{2(3+\nu)D} \\ &\quad \times \{- (1-m)M_1 + (1+m)M_2 - 2iM_3\} \zeta^{-1} \\ \psi(\zeta) &= -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(\zeta+m\zeta^{-1}) \\ &\quad - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\kappa\zeta^{-1}+m\zeta) \end{aligned} \right\}$$

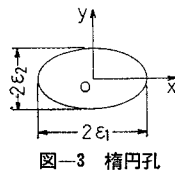


図-3 楕円孔

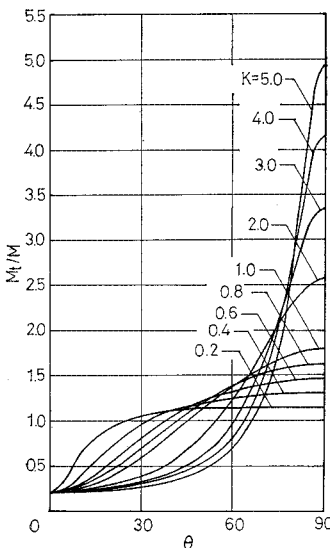
$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R \cdot m \zeta^{-1} - \frac{1+m\kappa^2}{\zeta(1-m\kappa^{-2})} \\ &\times \left[ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(1-m\kappa^{-2}) - \frac{R}{2(3+\nu)D} \right. \\ &\left. \times \{- (1-m)M_1 + (1+m)M_2 - 2iM_3\} \zeta^{-2} \right] \end{aligned} \right\} \dots (42)$$

式 (41) と式 (42) の第 1 式とを式 (40) に代入のうえ整理すれば、楕円孔に対する孔縁モーメントがつきのごとく求められる。

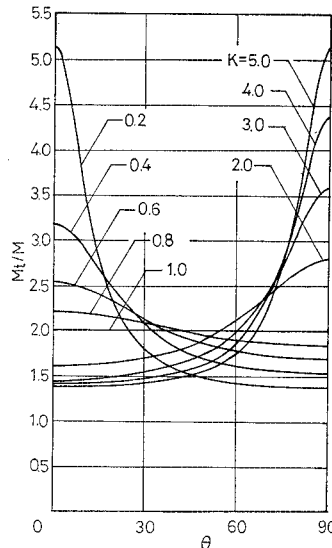
$$\begin{aligned} M_t &= M_1 + M_2 + \frac{2(1+\nu)}{3+\nu} \\ &\times \{(1-m)M_1 - (1+m)M_2\} \frac{m - \cos 2\theta}{1+m^2-2m \cos 2\theta} \\ &- \frac{4(1+\nu)}{3+\nu} M_3 \frac{\sin 2\theta}{1+m^2-2m \cos 2\theta} \dots (43) \end{aligned}$$

式 (43) は純円筒曲げ ( $M_1=M$ ,  $M_2=M_3=0$ ), 純曲げ ( $M_1=M_2=M$ ,  $M_3=0$ ) および純ねじり ( $M_1=M_2=0$ ,  $M_3=H$ ) のとき, Savin の解 (文献 4) の式 (6.62), (6.80) および (6.92)) とそれぞれ一致する。

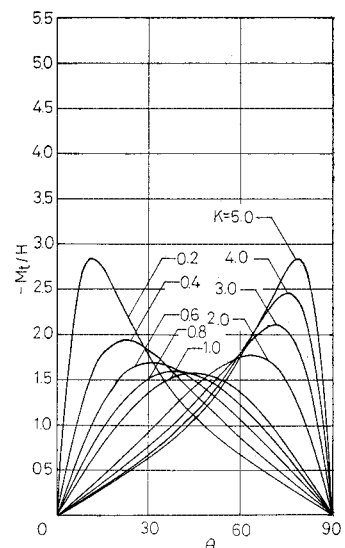
各荷重状態について形状比  $K$  の種々の値に対する  $M_t$  値をプロットすれば図-4 がえられ、純円筒曲げ、純曲げでは孔縁モーメントがつねに正であることがわかる。純円筒曲げのとき、最大孔縁モーメント (最大  $M_t$  と略記) は  $\theta=90^\circ$  において起こり、その値は形状比  $K$  に比例する。換言すれば、 $K$  が大きいとき、すなわち作用するモーメント荷重に対して直角方向に細長い形状ほど応力集中が著しい。純曲げの場合には、最大  $M_t$  は  $K < 1$  のとき  $\theta=0^\circ$  に、 $K > 1$  のとき  $\theta=90^\circ$  にそれぞれ起こり、 $K=1$  (円孔) のとき  $\theta$  のいかんにかかわらず



(a) x方向純円筒曲げ



(b) 純曲げ



(c) 純ねじり

図-4 孔縁モーメント (楕円孔)

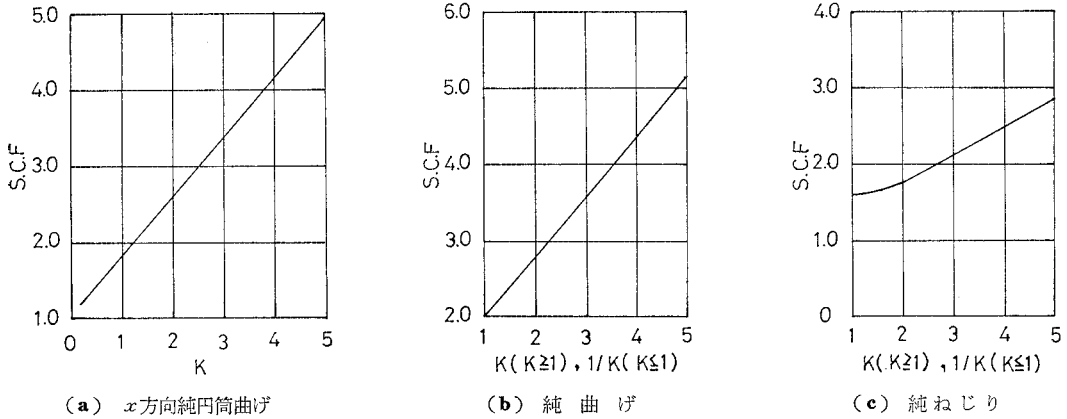


図-5 応力集中係数(楕円孔)

$M_t = 2M$  となる。純ねじりの場合には、最大  $M_t$  は  $K=1$  のとき  $\theta=45^\circ$  において最小となり、 $K > 1$  のとき  $K$  が大きいほど ( $K < 1$  のとき  $K$  が小さいほど) 応力集中が激しくなるが、その変化の割合は前2種の荷重状態より小さい。ちなみに、各荷重状態における最大  $M_t$  の作用モーメントに対する比、すなわち応力集中係数 (S.C.F. と略記) を形状比  $K$  をパラメーターとして 図-5 に示す。

直線辺で隅を丸めた正三角形孔の写像関数は次式のごとくえられる。

$$Z = R(\zeta + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-5}) \dots \dots \dots (44)$$

ここに、 $a_2, a_3$ : 実数

しかるとき、複素たわみ関数および孔縁モーメントは、途中の演算を省略して結果のみ示せばそれぞれつぎの式 (45), (46) となる。

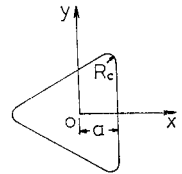


図-6 正三角形孔

b) 正三角形孔 (図-6)

$$\left. \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\zeta + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-5}) + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-1} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_2'\zeta^{-2} \\ &+ \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_3'' \right\} \zeta^{-3} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_5'\zeta^{-5} \\ \psi(\zeta) &= -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(\zeta + a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-5}) - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\kappa\zeta^{-1} + a_5\zeta^5 + a_2\zeta^2) \\ &+ \frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(a_2\zeta^{-2} + a_3\zeta^{-5}) - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_1' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_1'' \right\} \zeta - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rf_2'\zeta^2 \\ &- \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_3' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_3'' \right\} \zeta^3 - \frac{1+a_2\zeta^3+a_5\zeta^6}{\zeta(1-2a_2\zeta^{-3}-5a_3\zeta^{-6})} \left[ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \right. \\ &\times (1-2a_2\zeta^{-3}-5a_3\zeta^{-6}) - \left. \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-2} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 2b_2'\zeta^{-3} \right. \\ &\left. - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_3'' \right\} 3\zeta^{-4} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 5b_5'\zeta^{-6} \right] \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (45)$$

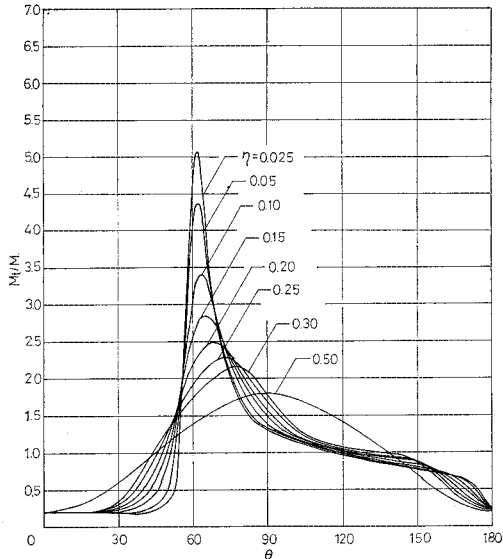
$$\begin{aligned} M_t &= \left[ (M_1+M_2)[1+4a_2^2+25a_5^2-4a_2b_2'-25a_3b_5'+\{-4a_2(1-5a_5)+2b_2'(1-5a_5)-10a_2b_5'\}\cos 3\theta \right. \\ &+ (-10a_3+5b_3')\cos 6\theta] + 2\frac{1+\nu}{1-\nu}(M_1-M_2)\{(-2a_2b_1'-6a_2b_3')\cos \theta + (b_1'-15a_3b_3')\cos 2\theta \\ &+ (-5a_3b_1'+3b_3')\cos 4\theta\} + 4\frac{1+\nu}{1-\nu}M_3\{(2a_2b_1''-6a_2b_3'')\sin \theta + (b_1''+15a_3b_3'')\sin 2\theta \\ &+ (5a_3b_1''+3b_3'')\sin 4\theta\} \Big] / \{1+4a_2^2+25a_5^2-4a_2(1-5a_5)\cos 3\theta-10a_3\cos 6\theta\} \dots \dots \dots (46) \end{aligned}$$

ここに、  
 $b_1' = \frac{\kappa}{3a_5^2 - \kappa^2}$ ,  $b_1'' = b_1'$ ,  $b_2' = \frac{a_2(\kappa-1)}{\kappa+2a_5}$ ,  $b_3' = -\frac{a_5}{3a_5^2 - \kappa^2}$ ,  $b_3'' = \frac{a_5}{3a_5^2 - \kappa^2}$ ,  $b_5' = \frac{a_5(\kappa-1)}{\kappa}$ ,  
 $f_1' = 3a_5b_3'$ ,  $f_1'' = -3a_3b_3''$ ,  $f_2' = 2a_5b_2'$ ,  $f_3' = a_5b_1'$ ,  $f_3'' = -a_5b_1''$

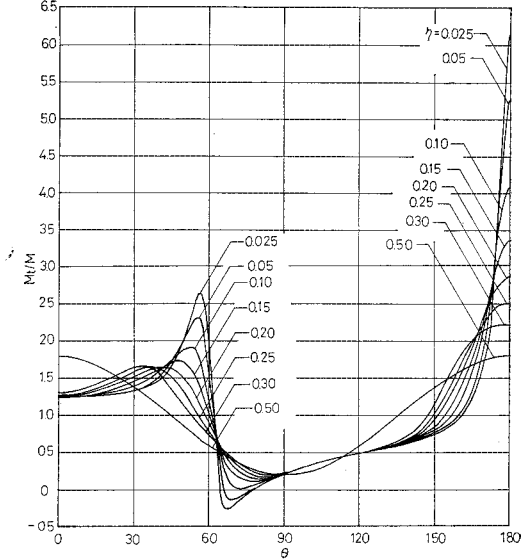
式 (46) において  $a_2=1/3, a_3=0$  とすれば、各荷重状態についてそれぞれ Savin の解 (文献 4) の式 (6.71), (6.84) および (6.100) がえられる。

孔縁モーメント  $M_t$  を隅の丸味を表わす隅半径比  $\eta = R_c/2a$  ( $R_c$ : 隅半径,  $a$ : 辺心距) に対してプロットすれば 図-7 のごとくなり、S.C.F は 図-8 となる。正

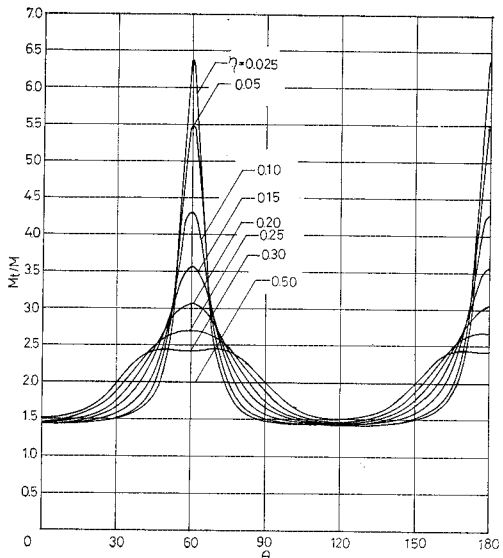
三角形の一辺に垂直に作用する  $x$  方向の純円筒曲げおよび純ねじりのとき、最大  $M_t$  は隅に丸味が無ければ  $\theta = 60^\circ$  の鋭角部に生ずるが、丸味がある場合には最大  $M_t$  の生ずる位置が隅角部の丸味の中心と直線辺より丸味が始まる点との中間に移行する。これに対し、正三角形の一辺に平行に作用する  $y$  方向の純円筒曲げのときには、



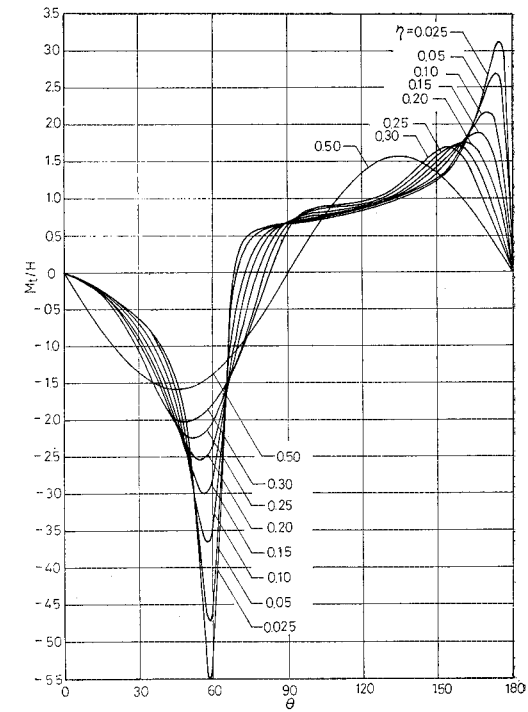
(a)  $x$  方向純円筒曲げ



(b)  $y$  方向純円筒曲げ



(c) 純 曲 げ



(d) 純 ね じ り

図-7 孔 縁 モ ー メ ン ト (正三角形孔)



最大  $M_t$  は隅の丸味に関係なく  $\theta = 180^\circ$  に起り、 $\theta = 60^\circ$  近辺においてもかなりの応力集中が認められる。また、純曲げの場合には、最大  $M_t$  は  $\eta < 0.30$  の範囲で隅の丸味に無関係に  $\theta = 60^\circ (180^\circ)$  に起り、 $\eta \geq 0.30$  では  $\theta = 60^\circ (180^\circ)$  を少し離れた位置に生ずるがほとんど均等化され、 $\eta = 0.50$  のとき円形となり孔縁上すべて等しく  $M_t = 2M$  となる。 $x$  方向の純円筒曲げおよび純曲げにおいては孔縁モーメントがつねに正であるが、 $y$  方向の純円筒曲げでは  $\eta < 0.10$  の範囲で隅角部  $\theta = 60^\circ$  近辺に負の孔縁モーメントがわずかに生じる。S.C.F. はいずれの荷重状態においても隅の丸味が減少するにしたがって著しく増大することが認められる。

e) 正方形孔 I (図-9)

2対辺がそれぞれ  $x, y$  軸と直交

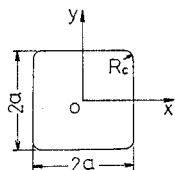


図-9 正方形孔 I

し、直線辺で隅が丸められた正方形孔は、 $a_3, a_7$  を実数係数として次式により写像される。

$$Z = R(\zeta + a_3\zeta^{-3} + a_7\zeta^{-7}) \dots\dots\dots (47)$$

式 (47) を用いて、複素たわみ関数は次式のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\zeta + a_3\zeta^{-3} + a_7\zeta^{-7}) + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-1} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_3'\zeta^{-3} \\ & + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_5' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_5'' \right\} \zeta^{-5} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_7'\zeta^{-7} \\ \psi(\zeta) = & -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(\zeta + a_3\zeta^{-3} + a_7\zeta^{-7}) - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\kappa\zeta^{-1} + a_7\zeta^7 + a_3\zeta^3) \\ & + \frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(a_3\zeta^{-3} + a_7\zeta^{-7}) - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_1' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_1'' \right\} \zeta - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rf_3'\zeta^3 \\ & - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_5' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_5'' \right\} \zeta^5 - \frac{1+a_3\zeta^4+a_7\zeta^8}{\zeta(1-3a_3\zeta^{-4}-7a_7\zeta^{-8})} \left[ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \right. \\ & \times (1-3a_3\zeta^{-4}-7a_7\zeta^{-8}) - \left. \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-2} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 3b_3'\zeta^{-4} \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_5' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_5'' \right\} 5\zeta^{-6} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 7b_7'\zeta^{-8} \right] \end{aligned} \dots\dots\dots (48)$$

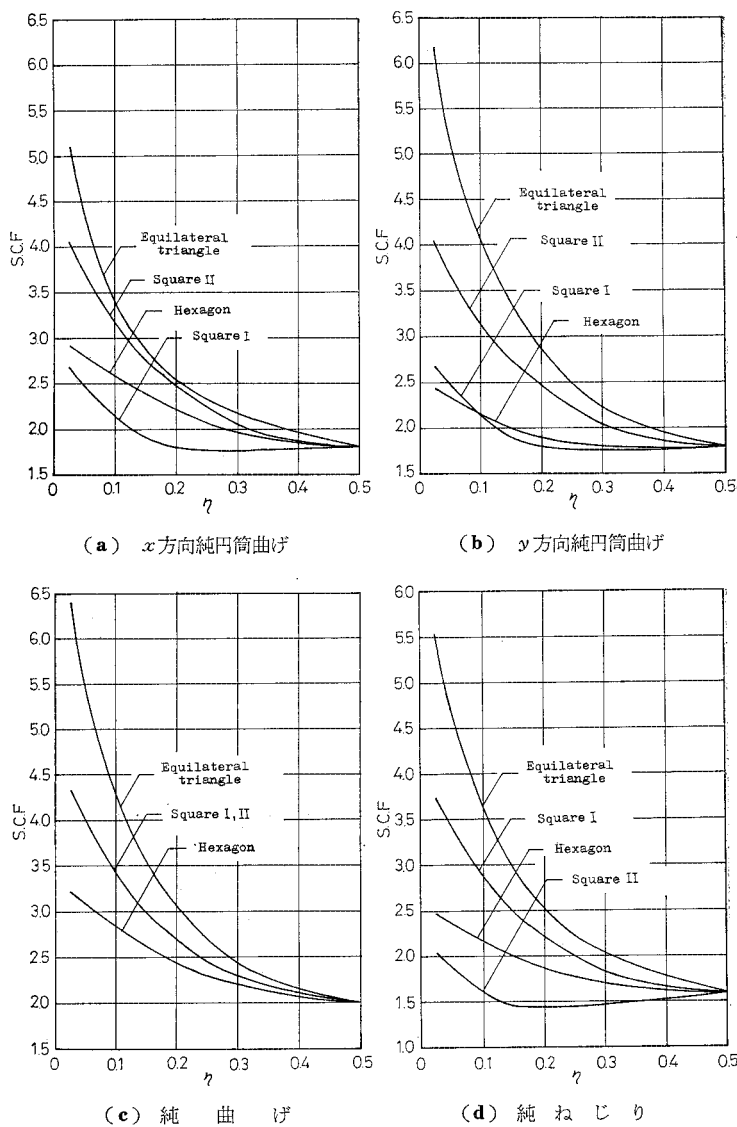


図-8 応力集中係数 (正多角形孔)

ここに、

$$b_1' = \frac{\kappa}{5a_7^2 - a_3(1+3a_7)\kappa - \kappa^2}, \quad b_1'' = \frac{\kappa}{5a_7^2 + a_3(1+3a_7)\kappa - \kappa^2}, \quad b_3' = \frac{a_3(\kappa-1)}{\kappa+3a_7},$$

$$b_5' = -\frac{a_7}{5a_7^2 - a_3(1+3a_7)\kappa - \kappa^2}, \quad b_5'' = \frac{a_7}{5a_7^2 + a_3(1+3a_7)\kappa - \kappa^2}, \quad b_7' = \frac{a_7(\kappa-1)}{\kappa},$$

$$f_1' = \left\{ a_3(1+3a_7) - \frac{5a_7^2}{\kappa} \right\} b_1', \quad f_1'' = -\left\{ a_3(1+3a_7) + \frac{5a_7^2}{\kappa} \right\} b_1'', \quad f_3' = 3a_7b_3', \quad f_5' = a_7b_5', \quad f_5'' = -a_7b_5''$$

また、孔縁における曲げモーメントはつぎの結果となる。

$$M_t = \left[ (M_1 + M_2) [1 + 9a_3^2 + 49a_7^2 - 9a_3b_3' - 49a_7b_7' + \{-6a_3(1-7a_7) + 3b_3'(1-7a_7) - 21a_3b_7'\} \cos 4\theta \right. \\ \left. + (-14a_7 + 7b_7') \cos 8\theta \right] + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} (M_1 - M_2) [ \{b_1'(1-3a_3) - 5b_5'(3a_3+7a_7)\} \cos 2\theta \\ \left. + (-7a_7b_1' + 5b_5') \cos 6\theta \right] + 4 \frac{1+\nu}{1-\nu} M_3 [ \{b_1''(1+3a_3) - 5b_5''(3a_3-7a_7)\} \sin 2\theta \\ \left. + (7a_7b_1'' + 5b_5'') \sin 6\theta \right] \Bigg/ \{1 + 9a_3^2 + 49a_7^2 - 6a_3(1-7a_7)\cos 4\theta - 14a_7\cos 8\theta\} \dots\dots\dots (49)$$

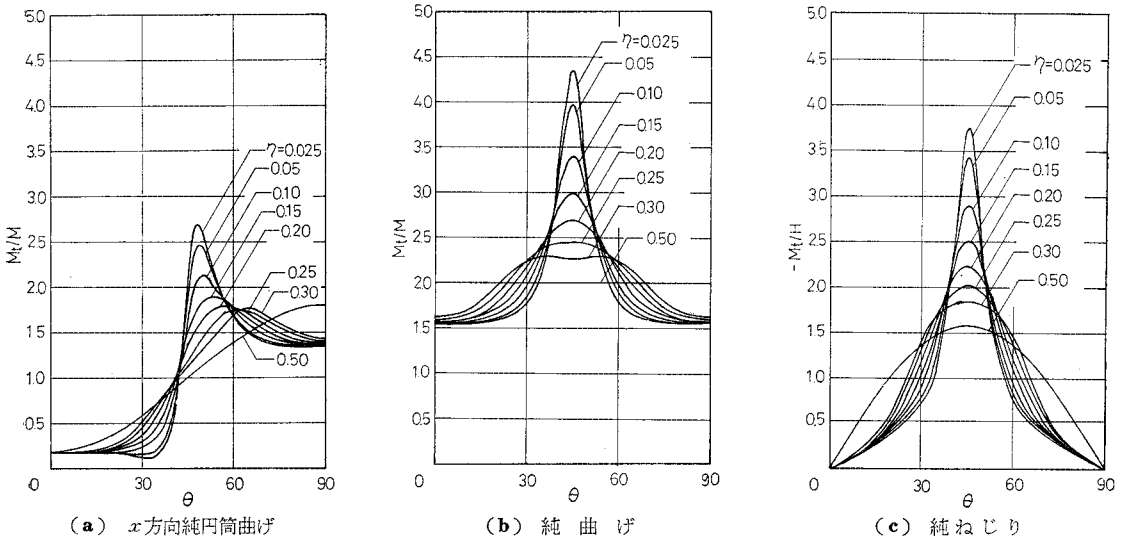


図-10 孔縁モーメント(正方形孔 I)

式(49)は  $a_3 = -1/6, a_7 = 0$  のとき、各荷重状態について Savin の解(文献4)の式(6.67), (6.82)および(6.96)とそれぞれ一致する。

隅半径比  $\eta$  をパラメーターとして  $M_t$  を図-10に、S.C.F を図-8に示す。純円筒曲げの場合には、正三角形孔と同様に、最大  $M_t$  は隅角部の丸味の中心と直線辺より丸味が始まる点との中間に生じ、 $\eta$  の減少に伴って隅角部の中心 ( $\theta = 45^\circ$ ) に近づく。また、純曲げの場合も、最大  $M_t$  は正三角形孔と同様な傾向を示して、 $\eta < 0.30$  で  $\theta = 45^\circ$  に生じ、 $\eta \geq 0.30$  では  $\theta = 45^\circ$  を少し離れ、 $\eta = 0.50$  の極限では孔縁上すべて  $M_t = 2M$  となる。しかし、純ねじりのときには、最大  $M_t$  は  $\eta$  のいかんにかかわらずつねに  $\theta = 45^\circ$  の隅角部の中心に起こる。S.C.F は純曲げと純ねじりにおいては、隅の丸味の減少とともに急激に増大するが、その変化の度合いは正三角形孔ほどではない。純円筒曲げにおける

S.C.F は  $\eta > 0.20$  で円孔 ( $\eta = 0.50$ ) とほぼ同じ大きさとなり、したがって、孔隅角部に孔幅  $2a$  の  $0.20$  倍の丸味を付けることにより円孔と同一効果を与えることを意味するものである。

d) 正方形孔 II (図-11)

対角線が  $x, y$  両軸と一致する正方形孔の写像関数は、式(47)の正方形孔 I のそれにおいて  $a_3$  を  $-a_3$  とすれば容易にえられる。したがって、この場合の複素たわみ関数および孔縁モーメントも、

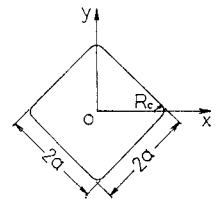
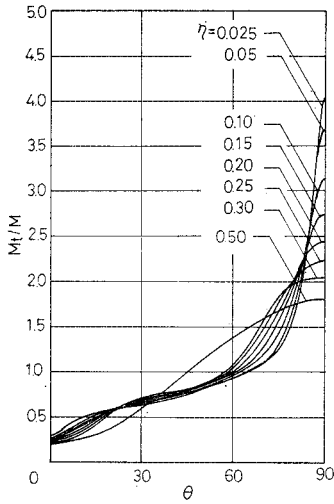


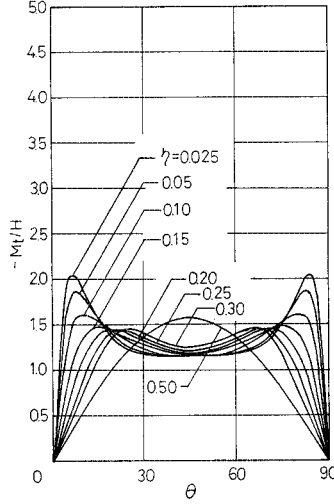
図-11 正方形孔 II

正方形孔 I の結果の式(48), (49)において  $a_3$  を  $-a_3$  としたものに等しい。

純円筒曲げおよび純ねじりの状態における  $M_t$  は図-12のごとくなり、S.C.F は図-8となる。なお、純曲げの場合は明らかに  $M_t$  が  $45^\circ$  回転して正方形孔



(a) x方向純円筒曲げ



(b) 純ねじり

図-12 孔縁モーメント (正方形孔 II)

Iと一致し、S.C.Fも合致する。最大  $M_t$  は純円筒曲げのとき  $\eta$  と無関係に  $\theta=90^\circ$  に生じ、純ねじりでは  $\eta$  の減少にしたがって  $\theta=45^\circ$  より  $\theta=0^\circ$  および  $90^\circ$  の両隅に移動する。S.C.F は純円筒曲げおよび純曲げの場合、 $\eta$  の減少に伴って急増するが、純ねじりの場合には  $\eta > 0.10$  の範囲で円孔 ( $\eta=0.50$ ) のときよりも小さく、この範囲の  $\eta$  による隅の丸味の応力集中に対する低減効果が顕著であることが認められる。

合、 $\eta$  の減少に伴って急増するが、純ねじりの場合には  $\eta > 0.10$  の範囲で円孔 ( $\eta=0.50$ ) のときよりも小さく、この範囲の  $\eta$  による隅の丸味の応力集中に対する低減効果が顕著であることが認められる。

e) 正六角形孔 (図-13)

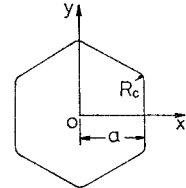


図-13 正六角形孔

直線辺で隅に丸味をもつ正六角形孔の写像関数は次式で与えられる。

$$Z = R(\zeta + a_5 \zeta^{-5} + a_{11} \zeta^{-11}) \dots \dots \dots (50)$$

ここに、 $a_5, a_{11}$  : 実数

このとき、複素たわみ関数および孔縁モーメントはそれぞれつぎの式 (51), (52) のごとく求められる。

$$\begin{aligned} \varphi(\zeta) = & -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\zeta + a_5 \zeta^{-5} + a_{11} \zeta^{-11}) + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-1} \\ & + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_3'' \right\} \zeta^{-3} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_5' \zeta^{-5} + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_7' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_7'' \right\} \zeta^{-7} \\ & + \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_9' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_9'' \right\} \zeta^{-9} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rb_{11}' \zeta^{-11} \\ \psi(\zeta) = & -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(\zeta + a_5 \zeta^{-5} + a_{11} \zeta^{-11}) - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\kappa \zeta^{-1} + a_{11} \zeta^{11} + a_5 \zeta^5) \\ & + \frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(a_5 \zeta^{-5} + a_{11} \zeta^{-11}) - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_1' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_1'' \right\} \zeta \\ & - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_3' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_3'' \right\} \zeta^3 - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} Rf_5' \zeta^5 \\ & - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_7' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_7'' \right\} \zeta^7 - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rf_9' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rf_9'' \right\} \zeta^9 \\ & - \frac{1+a_5 \zeta^6 + a_{11} \zeta^{12}}{\zeta(1-5a_5 \zeta^{-6} - 11a_{11} \zeta^{-12})} \left[ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(1-5a_5 \zeta^{-6} - 11a_{11} \zeta^{-12}) \right. \\ & - \left. \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_1'' \right\} \zeta^{-2} - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_3'' \right\} 3 \zeta^{-4} \right. \\ & - \left. \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 5 b_5' \zeta^{-6} - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_7' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_7'' \right\} 7 \zeta^{-8} \right. \\ & \left. - \left\{ \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} Rb_9' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} Rb_9'' \right\} 9 \zeta^{-10} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 11 b_{11}' \zeta^{-12} \right] \dots \dots \dots (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_t = & \left[ (M_1+M_2)[1+25a_5^2+121a_{11}^2-25a_5b_5'-121a_{11}b_{11}'+\{-10a_5(1-11a_{11})+5b_5'(1-11a_{11}) \right. \\ & -55a_5b_{11}'\} \cos 6\theta + \{-22a_{11}+11b_{11}'\} \cos 12\theta] + 2 \frac{1+\nu}{1-\nu} (M_1-M_2) \{ (b_1'-15a_5b_3' \\ & -35a_5b_7'-99a_{11}b_9') \cos 2\theta + \{-5a_5b_1'+3b_3'-77a_{11}b_7'-45a_5b_9'\} \cos 4\theta \\ & + \{-33a_{11}b_5'+7b_7'\} \cos 8\theta + \{-11a_{11}b_1'+9b_9'\} \cos 10\theta \} + 4 \frac{1+\nu}{1-\nu} M_3 \{ (b_1''+15a_5b_3'' \end{aligned}$$

$$-35 a_5 b_7'' + 99 a_{11} b_9'' \sin 2 \theta + (5 a_5 b_1'' + 3 b_3'' + 77 a_{11} b_7'' - 45 a_5 b_9'') \sin 4 \theta + (33 a_{11} b_3'' + 7 b_7'') \sin 8 \theta + (11 a_{11} b_1'' + 9 b_9'') \sin 10 \theta \Big] \sqrt{\{1 + 25 a_5^2 + 121 a_{11}^2 - 10 a_5 (1 - 11 a_{11}) \cos 6 \theta - 22 a_{11} \cos 12 \theta\}} \dots (52)$$

ここに,

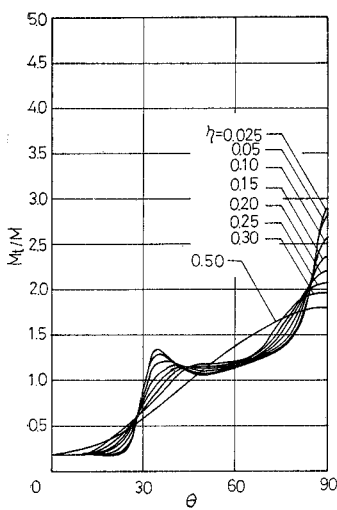
$$b_1' = \frac{\kappa}{9 a_{11}^2 + \frac{3 a_5^2 (1 + 5 a_{11})^2}{\kappa^2 - 21 a_{11}^2} \kappa^2 - \kappa^2}, \quad b_1'' = b_1', \quad b_3' = -\frac{\kappa a_5 (1 + 5 a_{11})}{\kappa^2 - 21 a_{11}^2} b_1', \quad b_3'' = \frac{\kappa a_5 (1 + 5 a_{11})}{\kappa^2 - 21 a_{11}^2} b_1'',$$

$$b_5' = \frac{a_5 (\kappa - 1)}{\kappa + 5 a_{11}}, \quad b_7' = \frac{3 a_5 a_{11} (1 + 5 a_{11})}{\kappa^2 - 21 a_{11}^2} b_1', \quad b_7'' = \frac{3 a_5 a_{11} (1 + 5 a_{11})}{\kappa^2 - 21 a_{11}^2} b_1'', \quad b_9' = -\frac{a_{11}}{\kappa} b_1', \quad b_9'' = \frac{a_{11}}{\kappa} b_1'',$$

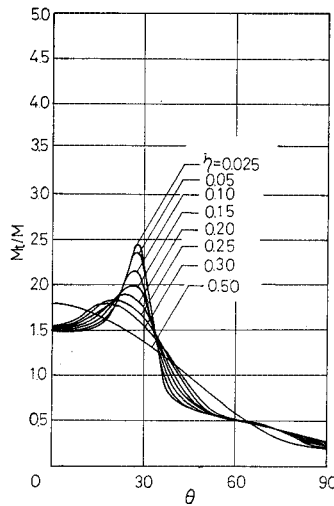
$$b_{11}' = \frac{a_{11} (\kappa - 1)}{\kappa},$$

$$f_1' = 9 a_{11} b_9' + 3 a_5 (1 + 5 a_{11}) b_3', \quad f_1'' = -\{9 a_{11} b_9'' + 3 a_5 (1 + 5 a_{11}) b_3''\}, \quad f_3' = 7 a_{11} b_7' + a_5 (1 + 5 a_{11}) b_1',$$

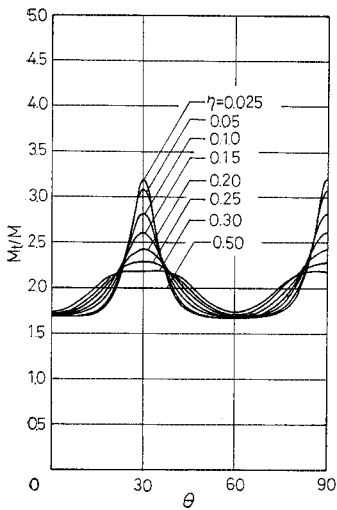
$$f_3'' = -\{7 a_{11} b_7'' + a_5 (1 + 5 a_{11}) b_1''\}, \quad f_5' = 5 a_{11} b_5', \quad f_7' = 3 a_{11} b_3', \quad f_7'' = -3 a_{11} b_3'', \quad f_9' = a_{11} b_1', \quad f_9'' = -a_{11} b_1''$$



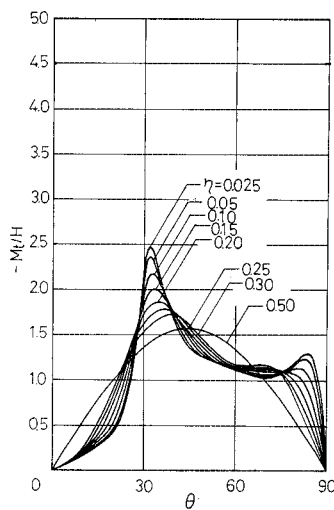
(a) x方向純円筒曲げ



(b) y方向純円筒曲げ



(c) 純曲げ



(d) 純ねじり

図-14 孔縁モーメント (正六角形孔)

孔縁モーメントの分布は、図-14に示すごとくえられる。最大  $M_t$  は、 $x$  方向の純円筒曲げのとき  $\eta$  に関係なく  $\theta = 90^\circ$  において起こり、 $y$  方向の純円筒曲げおよび純ねじりの場合には  $\eta$  の減少とともにそれぞれ  $\theta = 0^\circ$  および  $45^\circ$  より  $\theta = 30^\circ$  の隅角部の中心に近づく。純曲げでの最大  $M_t$  は正方形孔のときと同一傾向を示す。S.C.F は 図-8 に見るごとく、 $y$  方向の純円筒曲げを除く3種の荷重状態では  $\eta$  の減少にしたがってやや大きく増加するが、 $y$  方向の純円筒曲げではさほどでなく  $\eta \geq 0.30$  で円孔の場合と同一値を示す。

f) く形孔 (図-15)

直線辺に隅を丸めたく形孔の写像関数は、 $a_1, a_3, a_5, a_7$  を実数係数として次式で表わされる。

$$Z = R(\zeta + a_1 \zeta^{-1} + a_3 \zeta^{-3} + a_5 \zeta^{-5} + a_7 \zeta^{-7}) \dots (53)$$

式 (53) に対して複素たわみ関数および孔縁モーメントを求めれば、それぞれつぎの式 (54), (55) の結果がえられる。

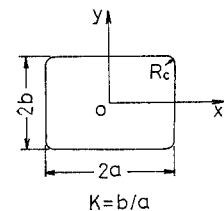


図-15 く形孔

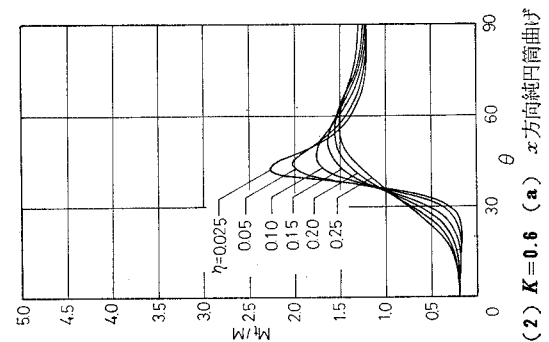
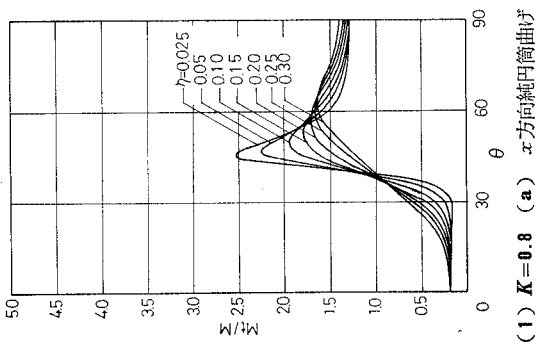
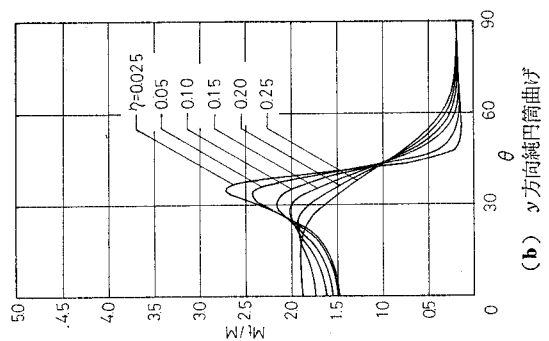
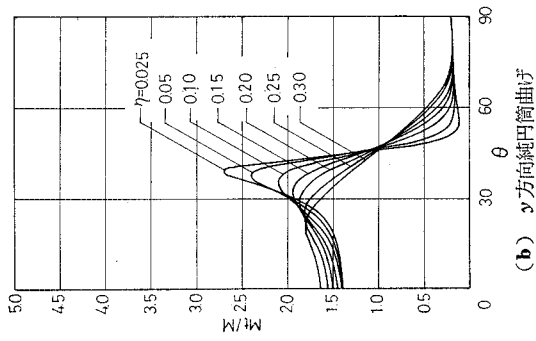
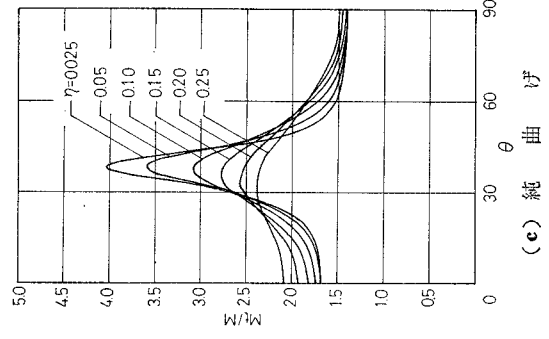
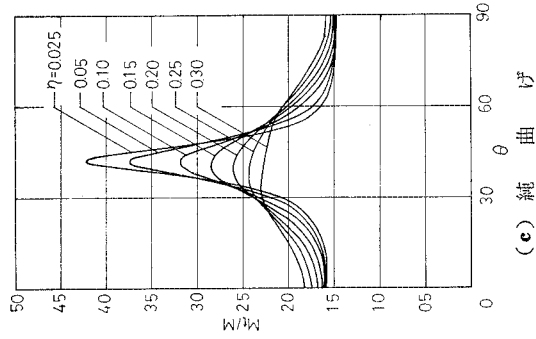
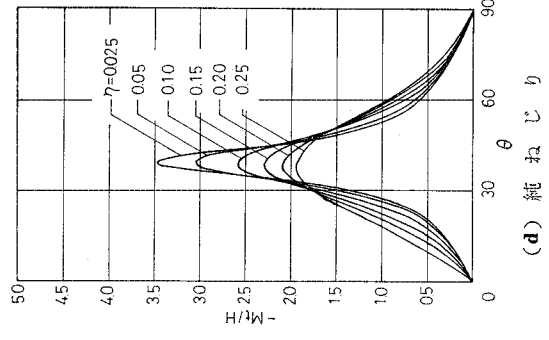
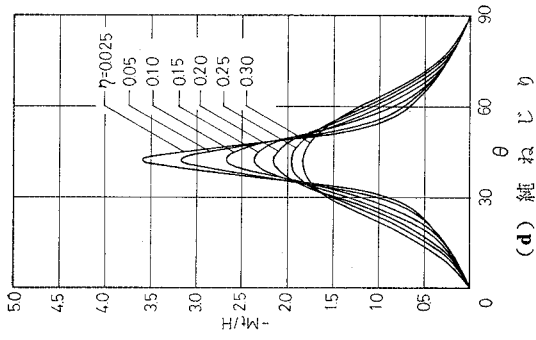
$$\begin{aligned}
\varphi(\zeta) = & -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\zeta+a_1\zeta^{-1}+a_3\zeta^{-3}+a_5\zeta^{-5}+a_7\zeta^{-7}) + \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_1' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_1' \right. \\
& + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_1'' \left. \right\} \zeta^{-1} + \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_3' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_3'' \right\} \zeta^{-3} \\
& + \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_5' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_5' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_5'' \right\} \zeta^{-5} + \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R b_7' \zeta^{-7} \\
\psi(\zeta) = & -\frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(\zeta+a_1\zeta^{-1}+a_3\zeta^{-3}+a_5\zeta^{-5}+a_7\zeta^{-7}) - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(\kappa\zeta^{-1}+a_7\zeta^7+a_5\zeta^5+a_3\zeta^3+a_1\zeta) \\
& + \frac{M_1-M_2-2iM_3}{2(1-\nu)D} R(a_1\zeta^{-1}+a_3\zeta^{-3}+a_5\zeta^{-5}+a_7\zeta^{-7}) - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho f_1' \right. \\
& + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m f_1' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R f_1'' \left. \right\} \zeta - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho f_3' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m f_3' \right. \\
& - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R f_3'' \left. \right\} \zeta^3 - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho f_5' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m f_5' - \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R f_5'' \right\} \zeta^5 \\
& - \frac{1+a_1\zeta^2+a_3\zeta^4+a_5\zeta^6+a_7\zeta^8}{\zeta(1-a_1\zeta^{-2}-3a_3\zeta^{-4}-5a_5\zeta^{-6}-7a_7\zeta^{-8})} \left[ -\frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R(1-a_1\zeta^{-2}-3a_3\zeta^{-4}-5a_5\zeta^{-6}-7a_7\zeta^{-8}) \right. \\
& - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_1' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_1' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_1'' \right\} \zeta^{-2} - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_3' \right. \\
& + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_3' + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_3'' \left. \right\} 3\zeta^{-4} - \left\{ \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot \rho b_5' + \frac{M_1-M_2}{2(1-\nu)D} R \cdot m b_5' \right. \\
& \left. + \frac{iM_3}{(1-\nu)D} R b_5'' \right\} 5\zeta^{-6} - \frac{M_1+M_2}{4(1+\nu)D} R \cdot 7b_7' \zeta^{-8} \left. \right] \\
& \dots\dots\dots(54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_I = & \left[ (M_1+M_2) [1+a_1^2+9a_3^2+25a_5^2+49a_7^2 - a_1 \cdot \rho b_1' - 9a_3 \cdot \rho b_3' - 25a_5 \cdot \rho b_5' - 49a_7 b_7' \right. \\
& + \{-2(a_1-3a_1a_3-15a_3a_5-35a_5a_7) + \rho b_1'(1-3a_3) - 3\rho b_3'(a_1+5a_5) - 5\rho b_5'(3a_3+7a_7) \\
& - 35a_7 b_7'\} \cos 2\theta + \{-2(3a_3-5a_1a_3-21a_3a_5-5a_5 \cdot \rho b_1' + 3\rho b_3'(1-7a_7) - 5a_1 \cdot \rho b_5' - 21a_3 b_7') \cos 4\theta \\
& + \{-2(5a_5-7a_1a_7) - 7a_7 \cdot \rho b_1' + 5\rho b_5' - 7a_1 b_7'\} \cos 6\theta + (-14a_7 + 7b_7') \cos 8\theta \left. \right] \\
& + 2\frac{1+\nu}{1-\nu} (M_1-M_2) [-a_1 \cdot m b_1' - 9a_3 \cdot m b_3' - 25a_5 \cdot m b_5' + \{m b_1'(1-3a_3) - 3m b_3'(a_1+5a_5) \\
& - 5m b_5'(3a_3+7a_7)\} \cos 2\theta + \{-5a_5 \cdot m b_1' + 3m b_3'(1-7a_7) - 5a_1 \cdot m b_5'\} \cos 4\theta \\
& + (-7a_7 \cdot m b_1' + 5m b_5') \cos 6\theta] + 4\frac{1+\nu}{1-\nu} M_3 [\{b_1''(1+3a_3) - 3b_3''(a_1-5a_5) - 5b_5''(3a_3-7a_7)\} \sin 2\theta \\
& + \{5a_3 b_1'' + 3b_3''(1+7a_7) - 5a_7 b_5''\} \sin 4\theta + (7a_7 b_1'' + 5b_5'') \sin 6\theta] \left. \right] / [1+a_1^2+9a_3^2+25a_5^2+49a_7^2 \\
& - 2(a_1-3a_1a_3-15a_3a_5-35a_5a_7) \cos 2\theta - 2(3a_3-5a_1a_3-21a_3a_5) \cos 4\theta - 2(5a_5-7a_1a_7) \cos 6\theta \\
& - 14a_7 \cos 8\theta] \dots\dots\dots(55)
\end{aligned}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\rho b_1' = & \frac{\kappa(\kappa-1) \left( a_1 - \frac{1}{\kappa} 5e_0 a_5 - \frac{3e_2}{\kappa+3e_0} a_3 \right)}{\kappa^2 + \kappa e_4 - 5e_0^2 - \frac{3e_2}{\kappa+3e_0} \kappa e_2}, \quad m b_1' = -\frac{\kappa}{\kappa^2 + \kappa e_4 - 5e_0^2 - \frac{3e_2}{\kappa+3e_0} \kappa e_2}, \\
b_1'' = & -\frac{\kappa}{\kappa^2 - \kappa e_4 - 5e_0^2 - \frac{3e_2}{\kappa-3e_0} \kappa e_2}, \quad \rho b_3' = \frac{a_3(\kappa-1)}{\kappa+3e_0} \frac{e_2}{\kappa} \rho b_1', \quad m b_3' = -\frac{e_2}{\kappa+3e_0} m b_1', \quad b_3'' = \frac{e_2}{\kappa-3e_0} b_1'', \\
\rho b_5' = & \frac{a_5(\kappa-1)}{\kappa} \frac{e_0}{\kappa} \rho b_1', \quad m b_5' = -\frac{e_0}{\kappa} m b_1', \quad b_5'' = \frac{e_0}{\kappa} b_1'', \quad b_7' = \frac{a_7(\kappa-1)}{\kappa}, \\
\rho f_1' = & 5e_0 \cdot \rho b_5' + 3e_2 \cdot \rho b_3' + e_4 \cdot \rho b_1', \quad m f_1' = 5e_0 \cdot m b_5' + 3e_2 \cdot m b_3' + e_4 \cdot m b_1', \quad f_1'' = -5e_0 b_5'' - 3e_2 b_3'' - e_4 b_1'', \\
\rho f_3' = & 3e_0 \cdot \rho b_3' + e_2 \cdot \rho b_1', \quad m f_3' = 3e_0 \cdot m b_3' + e_2 \cdot m b_1', \quad f_3'' = -3e_0 b_3'' - e_2 b_1'', \quad \rho f_5' = e_0 \cdot \rho b_5', \quad m f_5' = e_0 \cdot m b_5', \\
f_5'' = & -e_0 b_5'', \quad e_0 = a_7, \quad e_2 = a_5 + a_1 a_7, \quad e_4 = a_3 + a_1 a_5 + 3a_3 a_7 + a_1^2 a_7
\end{aligned}$$

式(55)は、 $a_3=a_5=a_7=0$ のとき楕円孔の式(43)に、 $a_1=a_5=0$ のとき正方形孔の式(49)にそれぞれ帰着し、さらに $a_1=0.5$ 、 $a_3=-0.125$ 、 $a_5=-0.038$ 、 $a_7=0$ とすれば、各荷重状態について形状比 $K=0.309$ のく形孔に対するSavinの解(文献4)の式(6.74)、(6.87)および(6.102)と一致する。



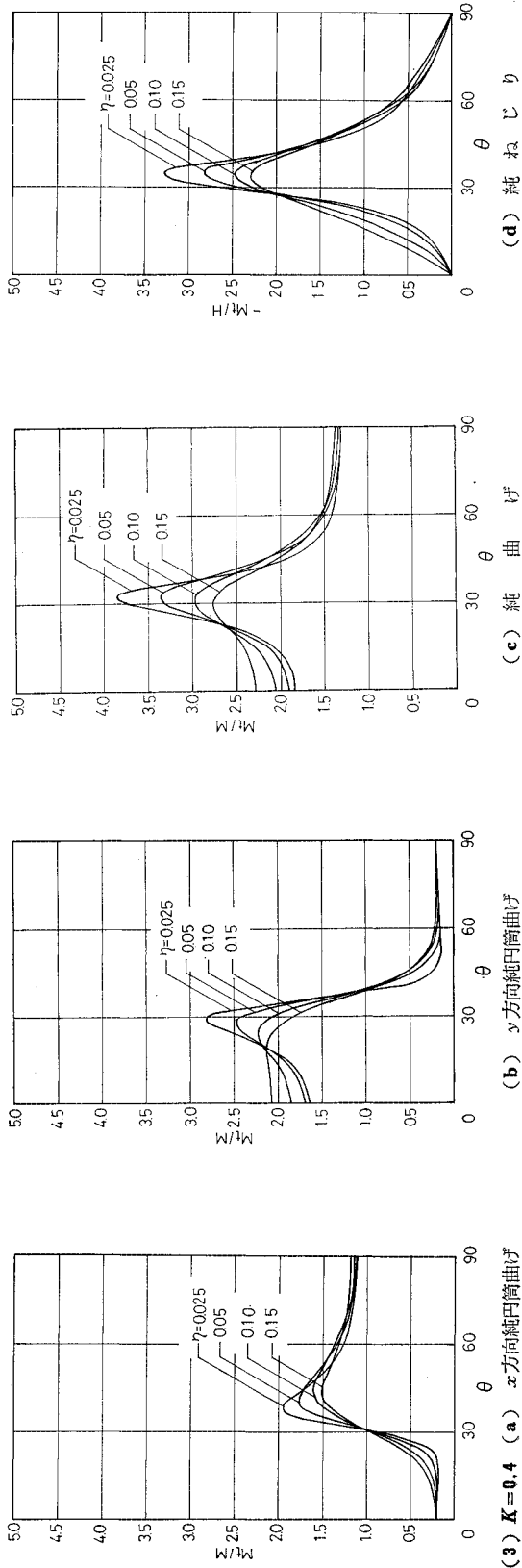


図-16 孔縁モーメント(く形孔)

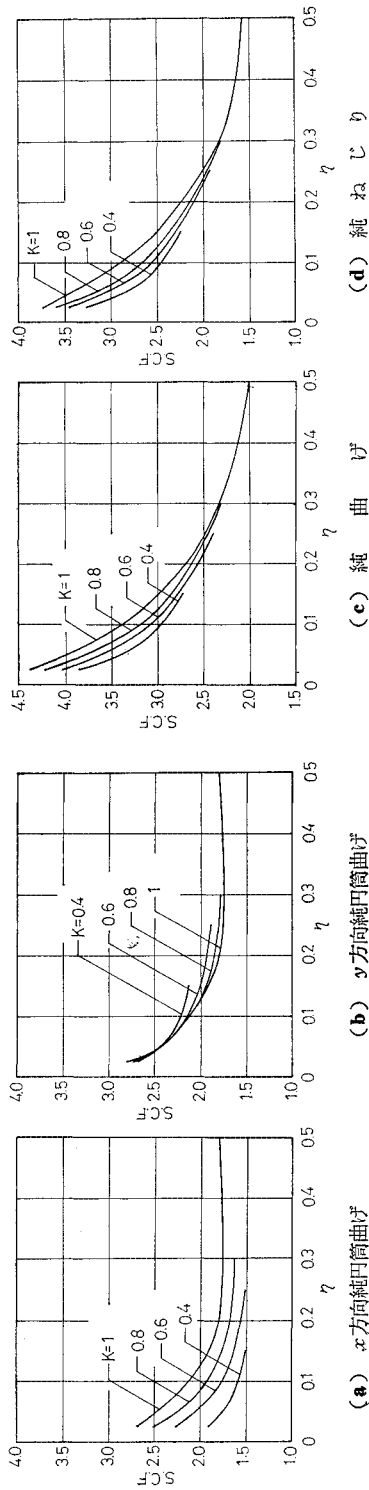


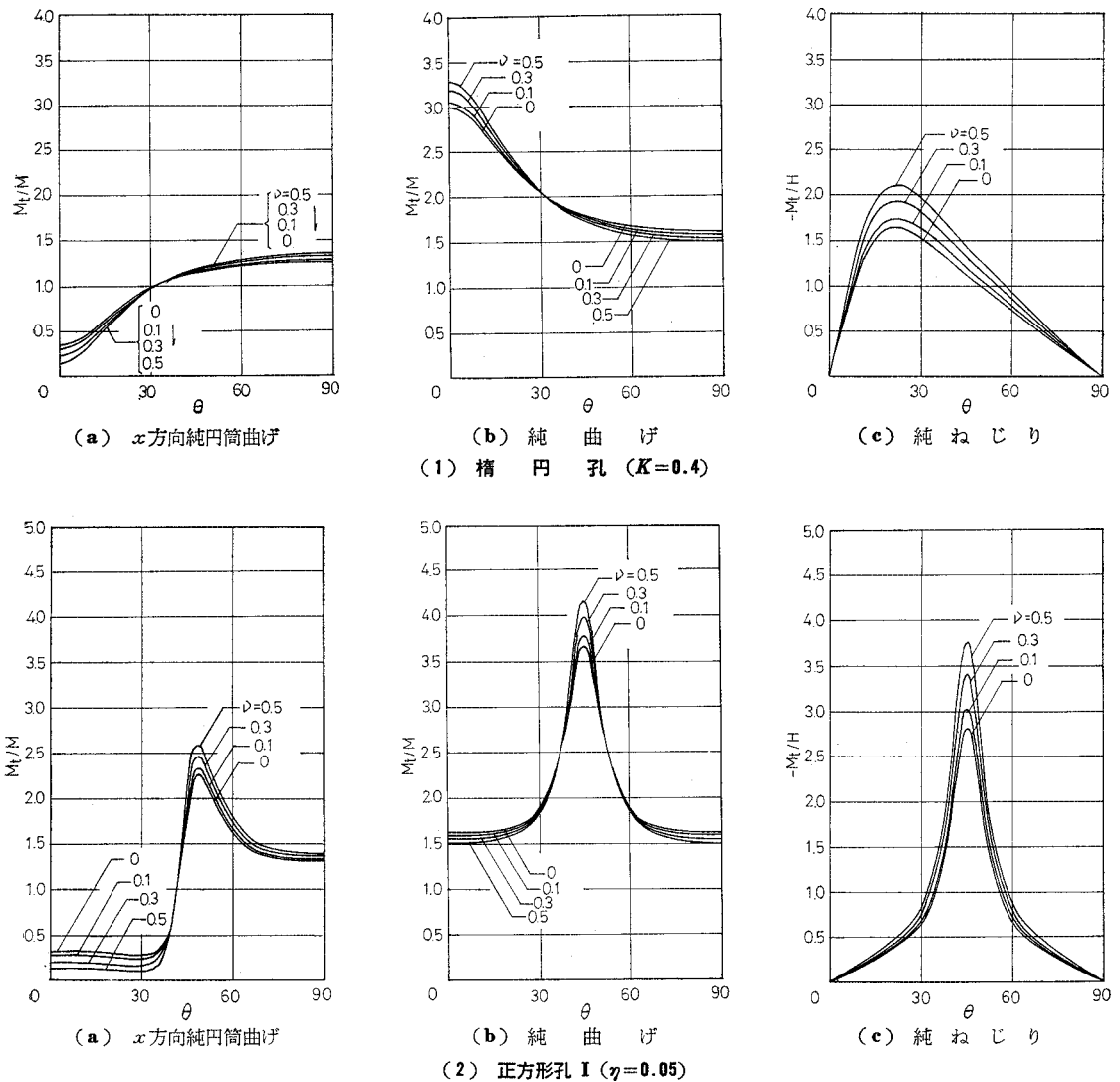
図-17 応力集中係数(く形孔)

3種の形状比 ( $K=0.8, 0.6, 0.4$ ) に対して、各荷重状態における  $M_t$  の値を  $\eta$  を変数として図示すれば 図—16 がえられ、これより孔縁モーメントの分布に対する孔形状および隅角部の丸味の影響が定量的に明確に把握される。また、S.C.F は 図—17 に示すごとく、 $x$  方向の純円筒曲げ、純曲げおよび純ねじりの各状態では、 $\eta$  の一定値に対して  $K$  の減少、すなわち孔孔が  $x$  方向に細長くなるにつれて減少し、逆に、 $y$  方向の純円筒曲げでは増大する。

(2) 板材料のポアソン比が応力集中におよぼす影響

孔縁モーメント  $M_t$  の分布やその最大値が板材料のポアソン比に影響されることは、式 (9) の孔縁における境界条件式に、ポアソン比に関するファクター  $\nu$  が含

まれていることから容易に判断される。しかるに、孔縁モーメントの分布形状は、孔形状および隅の丸味による考察の場合とは異なり、ポアソン比のいかんにかかわらず不変で、単に孔縁上各位置における値が少しく変化するのみで、この傾向は純曲げを受ける円孔を除いて孔形状および荷重状態には無関係である。ちなみに、 $K=0.4$  の楕円孔および  $\eta=0.05$  の正方形孔 I の各荷重状態における孔縁モーメントの分布を、 $\nu$  を変数として 図—18 に示す。また、ポアソン比の最大  $M_t$  におよぼす影響について 図—19 より考察すれば、各孔とも荷重状態のいかんにかかわらず、S.C.F と  $\nu$  とはほぼ直線関係にあることが認められる。すなわち、S.C.F は、 $\nu=0$  のとき最小値を採り、 $\nu$  の増大に伴って直線的に増加し、 $\nu=0.5$  のとき最大値を示す。ただし、純曲げを受ける



図—18 板材料のポアソン比が孔縁モーメントにおよぼす影響



円孔の場合は、 $\nu$  が変化しても孔縁上のすべての点で  $M_t = 2M$  となり、このことはたとえば 図-4 (b) や 図-19 (c) よりも容易に判断される。

### 8. 結 語

本論文に述べた有孔薄板の解法では、写像関数を式 (5) で求めさえすれば、以後の計算は式 (36) の連立方程式を解くことと式 (40) による孔縁モーメントの算定のみである。しかるに、前者を解くことは手計算の域を超えるものではなく、後者の算定も小型の電子計算機で十分処理しうるもので、孔形状や採用する写像関数の項数によっては卓上型電子計算機で手計算が可能である。また、写像関数も、Heller らの手法<sup>10)</sup> を拡張応用することにより、工学上多見されるほとんどすべての孔形状に対して誘導可能である。したがって、本法は、表題に掲げるとく、任意形孔をもつ無限薄板の応力集中を在来の研究に比してきわめて簡明かつ厳密に取扱いうる汎用解法といえ、実用的には、光弾性実験により検証されているとおり (文献 5) 参照)、板の長さおよび幅に関してその 1/4 以下の孔径をもつ有限板にそのまま適用しうるものである。

7. の計算例により、代表的な孔形状について純円筒曲げ、純曲げおよび純ねじりの各荷重状態における孔縁モーメントが孔形状および隅角部の丸味、さらには板材料のポアソン比によりいかに影響されるかが明確にされた。孔縁を含め板の任意点のたわみや孔縁以外の点における断面力の算定あるいは孔縁の補強方法など、さらに追加して検討を加えるべき余地を残すが、これらは有孔有限板の解析とともに今後にまちたく思う。

最後に、計算には本学中央計数施設の電子計算機 OKITAC 5090 H および同大型計算機センターの FACOM 230-60 によったことを付記する。

### 参 考 文 献

- 1) 土橋・三浦：有孔矩形板の応力研究，日本建築学会論文報告集，第 63 号，昭和 34 年 10 月。
- 2) J.N. Goodier : The Influence of Circular and Elliptical Holes on the Transverse Flexure of Elastic Plates, Phil. Mag., Vol. 22, Jul. 1936.
- 3) 斎藤秀雄：穴のある薄板の曲げおよびねじり，日本機械

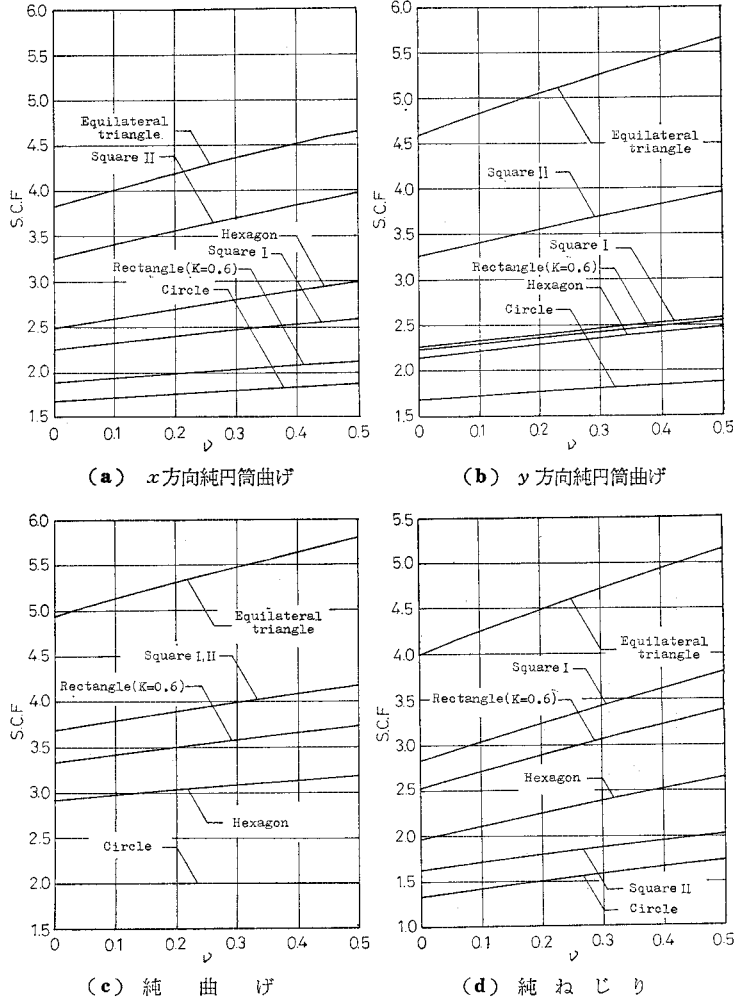


図-19 応力集中係数のポアソン比による変化

- 学会論文集，第 17 卷，第 61 号，昭和 26 年 11 月。
- 4) G. N. Savin : Stress Concentration Around Holes, Pergamon Press, New York, 1961.
- 5) 松井・斎藤：有孔床版の応力分布とその補強に関する研究，日本建築学会関東支部 36 回学術研究発表会梗概集，昭和 40 年 6 月。
- 6) 荒天義久：開口平板の階差方程式による近似解，日本建築学会研究報告，第 33 号，昭和 30 年 10 月。
- 7) 土橋・斎藤：矩形有孔床版の曲げ応力，日本建築学会研究報告，第 42 号，昭和 33 年 6 月。
- 8) J.N. Goodier and G.H. Lee : An Extension of the Photoelastic Method of Stress Measurement to Plates in Transverse Bending, Jour. Appl. Mech., Vol. 8, No. 1, Mar. 1941.
- 9) D.C. Drucker : The Photoelastic Analysis of Transverse Bending of Plates in the Standard Transmission Polariscope, Jour. Appl. Mech., Vol. 9, No. 4, Dec. 1942.
- 10) S.R. Heller, Jr., J.S. Brock and R. Bart : The Stresses around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Uniformly Loaded Plate, Proc. 3rd U.S. Natl. Cong. Appl. Mech., Jun. 1958.

補遺：正多角形孔およびく形孔の写像関数の係数

本文に用いた、直線辺で隅に丸味をもつ正多角形孔およびく形孔の写像関数は、2次元問題においてく形孔の外部領域を単位円外へ写像する Heller らの手法(文献10))を応用して容易に求められるが、ここでは採用した選点の数と位置のみを示し、詳細は文献10)に譲る。すなわち、正多角形孔に対しては6個の点を、く形孔に

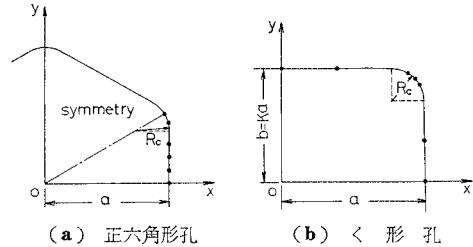


図-20 写像関数決定のための選点の数と位置

表-1 写像関数の係数

(a) 正多角形孔

$$Z=2a(A\zeta+B\zeta^{-s+1}+C\zeta^{-2s+1}+D\zeta^{-3s+1}+E\zeta^{-4s+1}+F\zeta^{-5s+1})$$

(s: 正多角形の辺数)

孔形状	$\eta$	A	B	C	D	E	F
正三角	0.30	0.61260	-0.09979	-0.01451	0.00030	0.00191	-0.00052
	0.25	0.63649	-0.12734	-0.01210	0.00242	0.00061	-0.00028
	0.20	0.65902	-0.15360	-0.00855	0.00364	-0.00047	-0.00004
	0.15	0.68027	-0.17917	-0.00395	0.00396	-0.00131	0.00021
	0.10	0.70023	-0.20379	0.00163	0.00334	-0.00186	0.00046
	0.05	0.71854	-0.22702	0.00826	0.00141	-0.00180	0.00061
正方形	0.30	0.54678	$\mp 0.04112$	-0.00645	$\pm 0.00001$	0.00109	$\mp 0.00291$
	0.25	0.55634	$\mp 0.05273$	-0.00492	$\pm 0.00111$	0.00036	$\mp 0.00016$
	0.20	0.56514	$\mp 0.06379$	-0.00278	$\pm 0.00168$	-0.00023	$\mp 0.00002$
	0.15	0.57322	$\mp 0.07432$	-0.00006	$\pm 0.00172$	-0.00067	$\pm 0.00012$
	0.10	0.58057	$\mp 0.08425$	0.00319	$\pm 0.00115$	-0.00092	$\pm 0.00026$
	0.05	0.58893	$\mp 0.09324$	0.00699	$\mp 0.00028$	-0.00072	$\pm 0.00033$
正六角	0.30	0.51733	-0.01542	-0.00228	0.00007	0.00043	-0.00012
	0.25	0.52071	-0.01978	-0.00147	0.00051	0.00010	-0.00006
	0.20	0.52374	-0.02388	-0.00039	0.00067	-0.00014	0.00000
	0.15	0.52645	-0.02771	0.00093	0.00057	-0.00031	0.00007
	0.10	0.52882	-0.03122	0.00249	0.00015	-0.00037	0.00014
	0.05	0.53069	-0.03419	0.00423	-0.00075	-0.00011	0.00012
く形孔	0.30	0.53122	-0.03512	0.00501	-0.00150	0.00051	-0.00013

\* 複号は上符号が正方形孔Ⅰ、下符号が正方形孔Ⅱにそれぞれ対応する。

(b) く形孔

$$Z=2a(A\zeta+B\zeta^{-1}+C\zeta^{-2}+D\zeta^{-3}+E\zeta^{-4}+F\zeta^{-5}+G\zeta^{-6})$$

K	$\eta$	A	B	C	D	E	F	G
0.8	0.30	0.48440	0.04930	-0.03031	0.00186	-0.00368	-0.00115	-0.00040
	0.25	0.49455	0.04995	-0.04130	0.00109	-0.00362	-0.00104	0.00037
	0.20	0.50422	0.05061	-0.05223	0.00032	-0.00304	-0.00093	0.00104
	0.15	0.51332	0.05130	-0.06300	-0.00052	-0.00187	-0.00077	0.00156
	0.10	0.52158	0.05209	-0.07343	-0.00162	0.00011	-0.00047	0.00174
	0.05	0.52823	0.05315	-0.08280	-0.00342	0.00364	0.00027	0.00093
0.6	0.25	0.43046	0.09942	-0.02816	0.00238	-0.00110	-0.00180	-0.00120
	0.20	0.44098	0.10058	-0.03907	0.00122	-0.00195	-0.00180	0.00004
	0.15	0.45086	0.10183	-0.04996	-0.00009	-0.00195	-0.00175	0.00105
	0.10	0.45975	0.10336	-0.06061	-0.00195	-0.00098	-0.00141	0.00173
	0.05	0.46672	0.10561	-0.06972	-0.00550	0.00158	-0.00011	0.00143
	0.025	0.46846	0.10727	-0.07265	-0.00898	0.00423	0.00171	-0.00004
0.4	0.15	0.38331	0.15274	-0.03290	-0.00167	0.00104	-0.00106	-0.00145
	0.10	0.39507	0.15336	-0.04514	-0.00062	-0.00105	-0.00273	0.00113
	0.05	0.40383	0.15589	-0.05520	-0.00337	-0.00115	-0.00253	0.00252
	0.025	0.40494	0.15914	-0.05680	-0.00944	0.00039	0.00031	0.00146

対しては7個の点を選った。その例を、それぞれ図-20

(a), (b) の・点に示す。表-1は、上記の方法により  $2a=1$  (図-20 参照) として求められた写像関数の係数値を示すもので、表に見るとく、正多角形孔では第4項の D 以下、く形孔では第6項の F 以下がそれぞれ第3項までおよび第5項までに比べて小さく無視しうるゆえ、本論では前者に対して A, B, C の3項を、後者に対しては A, B, C, D, E の5項を採用した。したがって、式(44), (47) および (50) の各写像関数において  $R=2a \cdot A, a_{s-1}=B/A, a_{2s-1}=C/A$  (ここに s: 正多角形の辺数) であり、式(53)の写像関数においては  $R=2a \cdot A, a_1=B/A, a_3=C/A, a_5=D/A, a_7=E/A$  である。

(1970. 9. 16・受付)