

不完全な剛結部を有する構造物の振動性状について

VIBRATION OF STRUCTURE WITH IMPERFECT RIGID CONNECTION

小堀 為 雄*・森本 千秋**

By Tameo Kobori and Chiaki Morimoto

1. ま え が き

ラーメンや連続ばりのような構造物では各部材の接合点は、完全に剛結されている。一方、ゲルバーやトラスのような構造物の接合点は理論上、完全なヒンジ結合である。しかし、実際はこれらの剛結の度合いや、ヒンジの度合いは時には不完全な場合も考えられる。この研究では、結合点で曲げモーメントに比例した回転角が生ずるものとし、その比例定数を k としたモーメント スプリングが結合点（以下格点、節点は同意義である）にそう入されていると考え、このモーメント スプリングのばね定数 k が剛結の度合いを表わすとして解析を進める。すなわち、 k が ∞ の場合は完全剛結を示し、 k が 0 の場合はヒンジ結合を示す。

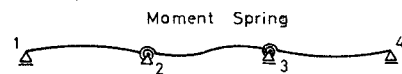
この種の研究としては、部材の塑性ヒンジを考慮した文献 1)~4) などがある。また、山崎他 2 名⁵⁾は節点の不完全剛結性と剛性を考慮した立体直線材ラーメンの固有周期を振動撓角式から求める方法を提示している。著者らは部材節点の剛結度に注目して、部材節点にモーメント スプリングを考え、節点間の部材は弾性の性質を維持しているものとし、動的 3 連モーメント法を適用して、基本式を導き、これを用いて、不完全な剛結部を有する連続ばり形式、ゲルバーばり形式およびラーメン構造形式の振動性状について考察し、合わせて各部材の剛比および部材長比が構造物の振動性状、とくに固有振動数におよぼす影響についても考察した。その結果から剛結の度合いによってその振動性状が異なることがわかった。

たとえば、ゲルバーばり形式におけるヒンジの不完全さや連続ばり・ラーメン構造形式の継手構造の不完全さ

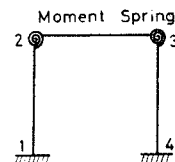
などによって、構造物の固有振動数およびその固有関数が異なることから、実際に作用する動的荷重の振動性状等の関係で、はりの振動が思いがけない振動をとまなう場合も考えられるなど、この種の問題に興味ある結果を得たので、その解法について報告する。この報告はこの研究の完成した報告ではなく、この種の構造物の動的解法の一つを示したもので、今後さらに研究が続けられるものである。

2. 理論式の誘導

不完全な剛結部を有する構造物を Fig. 1 のようにモデル化する。



(a) Continuous System



(b) Rigid frame System

Fig. 1 Model of structure with imperfect rigid connection.

Fig. 1 の (a) は連続ばり形式を (b) はラーメン構造形式を示す（以下形式の文字を省略して単に連続ばり、ラーメン構造という）。いずれの形式でも接合点 2 および 3 にはその点に働くモーメントに比例した回転角を生ずるモーメント スプリングが存在し、節点間は曲げに抵抗するはりが存在しているものとする。このような構造の運動を示す基本式を誘導するのであるが、まず基

* 正会員 工博 金沢大学助教授 工学部土木工学科

** 正会員 工修 元金沢大学大学院学生・現川崎重工業(株)

本式の誘導にさきだって、モーメント スプリングについて若干の説明を加える。

さて、前述のようにモーメント スプリングは節点における剛結の程度をあらわすもので、いま Fig. 2 のように A 点で固定され、B 点が自由な張出しばりを考えよう。Fig. 2 の (a) は完全剛結の状態であり、荷重 P が作用しても A 点のたわみ角は 0 である。(b) は不完全剛結されていて、荷重 P がはりに作用した場合、A 点にいくらかの回転角を生ずる。

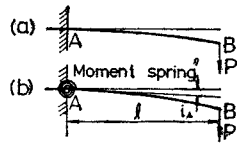


Fig. 2 Moment Spring.

この場合、モーメントに抵抗するばねを仮定し、A 点にそう入する。このばねをモーメント スプリングと呼ぶことにする。

このモーメント スプリングは A 点に働くモーメント M_A に比例するものとして、A 点の回転角 i_A は、

$$i_A = \frac{M_A}{k_A} \dots\dots\dots(1)$$

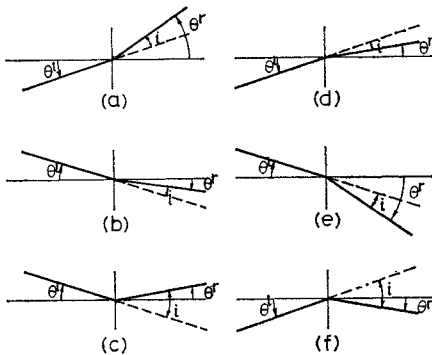
ここに、 k_A はモーメント スプリング定数と呼ぶ。

いま、 k_A が ∞ に近づくとき i_A は 0 となり、結合点が剛結されていることを示す。 k_A が 0 に近づくとき、

$$M_A = i_A k_A \dots\dots\dots(2)$$

から、モーメント スプリングの抵抗モーメントが 0 となり、ヒンジを意味することになる。

次に、格点にこのようなモーメント M が働いて、たわみ角が生ずる状態を考えると Fig. 3 のような 6 ケースが考えられる。Fig. 3 のうち (a), (b) および (c) は節点に正の曲げモーメントが働いた場合で、(d), (e) および (f) は節点に負の曲げモーメントが働いた場合である。回転角は節点の水平軸を基準に測って時計方向を正、反時計方向を負とする。したがって、格点の左の回転角 θ^l と右の回転角 θ^r の関係はモーメント スプリングによる回転角を i とすると (i は式 (1) より計算される)、



Positive bending moment Negative bending moment
Fig. 3 Bending moment and rotation angle.

曲げモーメントが正の場合、

$$\theta^l - |i| = \theta^r \dots\dots\dots(3)$$

曲げモーメントが負の場合、

$$\theta^l + |i| = \theta^r \dots\dots\dots(4)$$

となる。また、曲げモーメント M の符号を考慮すると式 (3) および (4) は一般につきのように書ける。

$$\theta^l = \theta^r + \frac{M}{k} \dots\dots\dots(5)$$

さて、各格点間の自由振動方程式は、格点間の曲げ剛さを一定として、次式のように表わされる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

ここに y は各格点間部材の変位であって、連続ばり形式では下側に変位するものを正とし、ラーメン構造形式では構造物の内側に変位するものを正とする。 x は各部材の一方の格点を基準に測るものとする。また、 y は一般に高次の振動を含むので、ここでは振動解析によく用いられるように、次の直交関数で表わされると仮定する。

$$y(t, x) = \sum_n X_n e^{i p_n t} \dots\dots\dots(7)$$

ここに、 X_n は n 次モードの基準関数であり、 $e^{i p_n t}$ は時間 t のみの関数であって、一般座標と呼ばれる。さらに式 (7) を式 (6) の偏微分方程式に入れ、 X_n を求めると、

$$X_n = A_n \sin a_n x + B_n \cos a_n x + C_n \sinh a_n x + D_n \cosh a_n x \dots\dots\dots(8)$$

となる。ここに A_n, B_n, C_n , および D_n は Fig. 4 の $s-1$ 点および s 点における境界条件から求められる。また a_n は $s-1, s$ のはりの単位質量を m として、

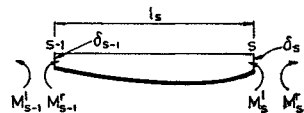


Fig. 4 Beam-notation.

$$a_n^4 = m \frac{\omega_n^2}{EI} \dots\dots\dots(9)$$

から求められる。ここに、 ω_n はこの振動系の n 次自由振動数である。

さて、式 (8) の係数 A_n, B_n, C_n および D_n を求めて見よう^{(6), (7), (8)}。

$s-1$ および s 点における境界条件は、 $x=0$ すなわち、 $s-1$ 点において、 n 次モードについて、

$$X_{s,n}(0) = \delta_{s-1, n} \dots\dots\dots(10)$$

s 点において、

$$X_{s,n}(l_s) = \delta_{s, n} \dots\dots\dots(11)$$

s 点におけるモーメントの連続性から、

$$EI_s X_{s,n}''(l_s) = EI_{s+1} X_{s+1, n}''(0) = -M_{s, n} \dots\dots(12)$$

さらに先きに述べた式 (5) のたわみ角の関係より、

$$X_{s,n}'(l_s) = X_{s+1,n}'(0) + M_{s,n}/k_s \dots\dots\dots(13)$$

以上 (10), (11), (12) および (13) の境界条件式より、式 (8) の基準関数の定数、 A_n, B_n, C_n および D_n を求める。

なお格点 $s-1$ と格点 s の間のはりに関して解かれていることから定数に s のサフィックスを付ける。

$$A_{s,n} = \frac{1}{2 \sin \beta_{s,n} l_s} \cdot \delta_{s,n}^l - \frac{I_{s+1} a_{s+1,n}^2}{2 \sin \beta_{s,n} l_s \cdot I_s a_{s,n}^2} \cdot \delta_{s,n}^r - \frac{\cos \beta_{s,n} l_s}{\sin \beta_{s,n} l_s} \cdot B_{s,n} + \frac{I_{s+1} \beta_{s+1,n}^2}{\sin \beta_{s,n} l_s \cdot I_s \beta_{s,n}^2} \cdot B_{s+1,n} \dots\dots\dots(14)$$

$$B_{s,n} = \frac{M_{s-1,n}}{2 E I_s \beta_{s,n}^2} + \frac{\delta_{s-1,n}^r}{2} \dots\dots\dots(15)$$

$$C_{s,n} = -\frac{\cosh \beta_{s,n} l_s}{\sinh \beta_{s,n} l_s} \cdot \delta_{s-1,n}^r + \frac{1}{2 \sinh \beta_{s,n} l_s} \cdot \delta_{s,n}^l + \frac{I_{s+1} \beta_{s+1,n}^2}{2 \sinh \beta_{s,n} l_s \cdot I_s \beta_{s,n}^2} \cdot \delta_{s,n}^r + \frac{\cosh \beta_{s,n} l_s}{\sinh \beta_{s,n} l_s} \cdot B_{s,n} - \frac{I_{s+1} \beta_{s+1,n}^2}{\sinh \beta_{s,n} l_s \cdot I_s \beta_{s,n}^2} \cdot B_{s+1,n} \dots\dots\dots(16)$$

$$D_{s,n} = \delta_{s-1,n}^r - B_{s,n} \dots\dots\dots(17)$$

一方格点 $s-1, s$ および $s+1$ 間の曲げモーメントとたさみ角に関する動的 3 連モーメントはつぎのように表われる。

$$M_{s-1,n} \frac{H_{s,n}}{a_{s,n} l_s} - M_{s,n} \left(\frac{G_{s,n}}{a_{s,n} l_s} + \frac{G_{s+1,n}}{a_{s+1,n} l_{s+1}} + \frac{2E}{k_s} \right) + M_{s+1,n} \frac{H_{s+1,n}}{a_{s+1,n} l_{s+1}} + E(-a_{s,n} L_{s,n} \delta_{s-1,n}^r + a_{s,n} K_{s,n} \delta_{s,n}^l + a_{s+1,n} K_{s+1,n} \delta_{s,n}^r - a_{s+1,n} L_{s+1,n} \delta_{s+1,n}^l) = 0 \dots\dots\dots(18)$$

ここに、

$$G_{s,n} = \frac{\cosh a_{s,n} l_s}{\sinh a_{s,n} l_s} - \frac{\cos a_{s,n} l_s}{\sin a_{s,n} l_s} \dots\dots\dots(19)$$

$$H_{s,n} = \frac{1}{\sinh a_{s,n} l_s} - \frac{1}{\sin a_{s,n} l_s} \dots\dots\dots(20)$$

$$K_{s,n} = \frac{\cosh a_{s,n} l_s}{\sinh a_{s,n} l_s} + \frac{\cos a_{s,n} l_s}{\sin a_{s,n} l_s} \dots\dots\dots(21)$$

$$L_{s,n} = \frac{1}{\sinh a_{s,n} l_s} + \frac{1}{\sin a_{s,n} l_s} \dots\dots\dots(22)$$

式 (18) は本研究での基本式で、第 2 項にモーメントスプリングに係する項が入っている。

さて、連続ばりの場合は $\delta_{s,n}^l = \delta_{s,n}^r$ であるから式 (18) は次式のようになる。

$$M_{s-1,n} \frac{H_{s,n}}{a_{s,n} l_s} - M_{s,n} \left(\frac{G_{s,n}}{a_{s+1,n} l_{s+1}} + \frac{G_{s+1,n}}{a_{s+1,n} l_{s+1}} + \frac{2E}{k_s} \right) + M_{s+1,n} \frac{H_{s+1,n}}{a_{s+1,n} l_{s+1}} + E(-a_{s,n} L_{s,n} \delta_{s-1,n} + (a_{s,n} K_{s,n}$$

$$+ a_{s+1,n} K_{s+1,n}) \delta_{s,n} - a_{s+1,n} L_{s+1,n} \delta_{s+1,n}) = 0 \dots\dots\dots(23)$$

3. 自由振動

2. で導いた基本式を用いて、連続ばりおよびラーメン構造の自由振動を導いて見よう。

(1) 連続ばり

Fig. 5 および 6 は 2 スパンおよび 3 スパン連続ばりの模型図で中間支点到にモーメントスプリングをそう入したものである。以下に Fig. 6 に示される 3 スパン連続ばりを例にその自由振動数とそのモードを求めて見る。具体的な計算例は次節 4. で述べる。

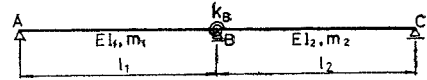


Fig. 5 Two span continuous beam-notation.

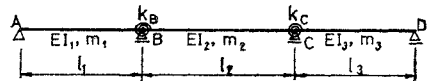


Fig. 6 Three span continuous beam-notation.

さて、Fig. 6 の 3 スパン連続ばりの両端支点 A および D では、モーメント M およびたわみ δ は 0 であり、また中間支点 B および C ではたわみ δ は 0 であるが、モーメント M は存在し、この M の大きさに比例するモーメントスプリングによる中間支点左右側の相対回転角が存在する。すなわち、

$$M_A = M_D = 0 \dots\dots\dots(24)$$

$$\delta_A = \delta_D = 0 \dots\dots\dots(25)$$

$$\delta_B = \delta_C = 0 \dots\dots\dots(26)$$

ゆえに、式 (23) は支点 A B C および B C D についで、次のように書かれる。

$$-M_B \left[\frac{G_1}{a_1 l_1} + \frac{G_2}{a_2 l_2} + \frac{2E}{k_B} \right] + M_C \left[\frac{H_2}{a_2 l_2} \right] = 0 \dots\dots\dots(27)$$

$$M_B \left[\frac{H_2}{a_2 l_2} \right] - M_C \left[\frac{G_2}{a_2 l_2} + \frac{G_3}{a_3 l_3} + \frac{2E}{k_C} \right] = 0 \dots\dots\dots(28)$$

ここに、支点モーメント M_B および M_C が 0 以外の根を持つためには、式 (27) および (28) の M の係数で作る行列式が 0 とならなければならない。すなわち、

$$\begin{vmatrix} -\left[\frac{G_1}{a_1 l_1} + \frac{G_2}{a_2 l_2} + \frac{2E}{k_B} \right] + \left[\frac{H_2}{a_2 l_2} \right] \\ \left[\frac{H_2}{a_2 l_2} \right] - \left[\frac{G_2}{a_2 l_2} + \frac{G_3}{a_3 l_3} + \frac{2E}{k_C} \right] \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(29)$$

式 (29) が振動数方程式である。また、式 (29) の G および H は式 (19) および (20) で示される値である

が、この G および H は a_n を含む。また、 a_n には式 (9) で見られるように振動数 ω_n が含まれていることから、一般解を求めることは困難であるので、 ω_n を最初仮定して式 (29) の左辺の値を求め、これを Δ としてこの Δ が 0 となる点を試行錯誤法で求める。

ここで、第 2 径間および第 3 径間のスパン長および断面 2 次モーメントを第 1 径間のそれらを基準にして表わすことにする。すなわち、

$$p_{12} = l_2/l_1, \quad p_{13} = l_3/l_1 \dots\dots\dots (30)$$

$$p_{22} = I_2/I_1, \quad p_{23} = I_3/I_1 \dots\dots\dots (31)$$

とおくと、式 (9) もまた、

$$\left. \begin{aligned} a_2 &= \sqrt[4]{1/p_{22} \cdot a_1} \\ a_3 &= \sqrt[4]{1/p_{23} \cdot a_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここで、 $a_1 l_1 = \phi_1, a_2 l_2 = \phi_2, a_3 l_3 = \phi_3$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \phi_2 &= a_1 \phi_1 \\ \phi_3 &= a_2 \phi_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= p_{12} \cdot \sqrt[4]{1/p_{22}} \\ a_2 &= p_{13} \cdot \sqrt[4]{1/p_{23}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

振動数 ω_n を求めることは式 (29) を満足する ϕ_1, ϕ_2 および ϕ_3 を求めることになり、固有振動数は次の式から求めればよい。

$$\begin{aligned} \omega &= \left(\frac{\phi_1}{l_1} \right)^2 \cdot \sqrt{\frac{EI_1}{m}} = \left(\frac{\phi_2}{l_2} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_2}{m}} \\ &= \left(\frac{\phi_3}{l_3} \right)^2 \sqrt{\frac{EI_3}{m}} \dots\dots\dots (35) \end{aligned}$$

しかし、式 (34) の a_1 および a_2 がともに 1.0 であるとき、式 (29) の解の近傍で、式 (29) の左辺の値 Δ が $+\infty$ と $-\infty$ に発散して $\Delta=0$ となる ω_n を見出すことが困難となる場合がある。これは $a_n l_n$ の値が $n\pi$ に近くなった場合で、具体的には中間支点でのモーメントが 0 となりモーメント スプリングが働かない状態である。このときには式 (27) と (28) は M の係数のいかに関係なく成立するのである。それゆえにこの場合は上述の方法とは別に求める必要がある。すなわち、基準関数 X_1, X_2 および X_3 は式 (36) で表わされると考える。

$$\left. \begin{aligned} X_1 &= A_1 \sin a_1 x \\ X_2 &= A_2 \sin a_2 x \\ X_3 &= A_3 \sin a_3 x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

この場合は各中間支点の曲げモーメントは、

$$\left. \begin{aligned} M_{A1} &= -EI_1 a_1^2 A_1 \sin a_1 0 = 0 \\ M_{B1} &= -EI_1 a_1^2 A_1 \sin a_1 l_1 \\ M_{B2} &= -EI_2 a_2^2 A_2 \sin a_2 0 = 0 \\ M_{C2} &= -EI_2 a_2^2 A_2 \sin a_2 l_2 \\ M_{C3} &= -EI_3 a_3^2 A_3 \sin a_3 0 = 0 \\ M_{D3} &= -EI_3 a_3^2 A_3 \sin a_3 l_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

として表わされ、各中間支点でのモーメントのつり合いから次式が成立することになる。

$$a_1 l_1 = a_2 l_2 = a_3 l_3 = \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = n\pi \dots\dots\dots (38)$$

この $\phi = n\pi$ から求められる振動数もまた、この連続ばりの固有振動数である。

一方、各固有振動数に対する固有関数すなわち各振動モードは各支点における境界条件より求められる。しかし各支点間の基準関数 X_n は式 (8) に示されるように、A, B, C および D の 4 つの定数を含むことから 3 スパン連続ばりでは計 12 個の未知定数を含むことになる。

各支点の境界条件式は各支点間のはりの弾性曲線に対して、

$$\left. \begin{aligned} X_1(0) &= 0, \quad X_1(l_1) = 0 \\ X_2(0) &= 0, \quad X_2(l_2) = 0 \\ X_3(0) &= 0, \quad X_3(l_3) = 0 \\ X_1'(l_1) &= X_2'(0) + M_B/k_B \\ X_2'(l_2) &= X_3'(0) + M_C/k_C \\ EI_1 X_1''(l_1) &= EI_2 X_2''(0) = -M_B \\ EI_2 X_2''(l_2) &= EI_3 X_3''(0) = -M_C \\ EI_1 X_1''(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

式 (39) から 11 個の係数はある 1 つの係数の比として求められる。

ゲルバーばりについては、これを連続ばりの 1 つとみなし、ヒンジ点にモーメント スプリングをそう入し、この点を連続ばりの沈下可能な支点の 1 つと仮定し、この点でせん断力が連続であるという条件を入れて連続ばりと同様に解析を進めれば、十分な精度で振動数を求めることができる。基礎式を次に示す (誘導は付録を参照)。

$$-M_B \left(\frac{G_1}{a_1 l_1} + \frac{G_2}{a_2 l_2} \right) + M_C \frac{H_2}{a_2 l_2} - E a_2 L_2 \delta_C = 0 \dots\dots\dots (40)$$

$$M_B \frac{H_2}{a_2 l_2} - M_C \left(\frac{G_2}{a_2 l_2} + \frac{G_3}{a_3 l_3} + \frac{2E}{k_C} \right) + E(a_2 K_2 + a_3 K_3) \delta_C = 0 \dots\dots\dots (41)$$

$$M_B a_2 L_2 - M_C (a_2 K_2 + a_3 K_3) + E(L_2 a_2^3 G_2 + L_3 a_3^3 G_3) \delta_C = 0 \dots\dots\dots (42)$$

(2) ラーメン構造

ここでは、ラーメン構造物のうち、基本構造として 1 層 1 スパン ラーメンを考えよう。この場合 Fig. 7 のように A および D 点を固定支持し、B 点および C 点にモーメント スプリングをそう入したラーメン構造の水平振動を考える。さて、ラーメンには B および C 点にそれぞれ δ_1 および $\delta_3 (= -\delta_1)$ の水平変位が生ずるものとし、 \overline{AD} 部材は ∞ に大きい剛性をもったはりで連結されていると考える。

いま、DAB, ABC, BCD および CDA に式 (23) を

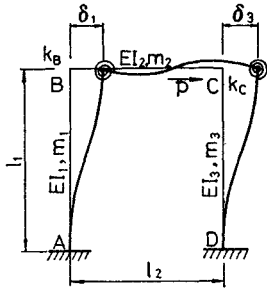


Fig. 7 Rigid frame-notation.

適用すると、

$$-M_A \frac{G_1}{a_1 I_1} + M_B \frac{H_1}{a_1 I_1} - E a_1 L_1 \delta_1 = 0 \quad \dots\dots (43)$$

$$M_A \frac{H_1}{a_1 I_1} - M_B \left(\frac{G_1}{a_1 I_1} + \frac{G_2}{a_2 I_2} + \frac{2E}{k_B} \right) + M_C \frac{H_2}{a_2 I_2} + E a_1 K_1 \delta_1 = 0 \quad \dots\dots (44)$$

$$M_B \frac{H_2}{a_2 I_2} - M_C \left(\frac{G_2}{a_2 I_2} + \frac{G_3}{a_3 I_3} + \frac{2E}{k_C} \right) + M_D \frac{H_3}{a_3 I_3} - E a_3 K_3 \delta_3 = 0 \quad \dots\dots (45)$$

$$M_C \frac{H_3}{a_3 I_3} - M_D \frac{G_3}{a_3 I_3} - E a_3 L_3 \delta_3 = 0 \quad \dots\dots (46)$$

となる。しかし、未知数が M_A, M_B, M_C, M_D および $\delta_1 (= -\delta_3)$ の5個であることからあと1個の方程式として、静的な解法に使用する層方程式を動的に書きかえる。

Fig. 7 の BC 断面におけるつり合いを考えるとこの部分に働くはりの水平慣性抵抗は、

$$P = m_2 l_2 \frac{d^2 y_1(x=l_1, t)}{dt^2} \quad \dots\dots (47)$$

ここで y_1 は各振動モードについて、

$$y_1 = X_1 \sin \omega t$$

で表わされるとすれば、式 (47) は

$$P = m_2 l_2 \omega^2 \delta_1 = EI_2 a_2^4 l_2 \delta_1 \quad \dots\dots (48)$$

さて、BC 断面でのつり合い式は

$$P = \frac{1}{l_1} \left(M_B - M_A - \int_0^{l_1} EI_1 a_1^4 X_1 x dx \right) + \frac{1}{l_3} \left(M_D - M_C + \int_0^{l_3} EI_3 a_3^4 X_3 (l_3 - x) dx \right) \quad \dots\dots (49)$$

式 (48) の P を式 (49) に代入すると、

$$EI_2 a_2^4 l_2 \delta_1 + \frac{M_A - M_B}{l_1} + \int_0^{l_1} \frac{EI_1 a_1^4 X_1 x}{l_1} dx - \frac{M_D - M_C}{l_3} + \int_0^{l_3} \frac{EI_3 a_3^4 X_3 (l_3 - x)}{l_3} dx = 0 \quad \dots\dots (50)$$

式 (43)~(46) と式 (50) を連立方程式として、ラーメン構造の振動を解析することができる。しかし、式 (50) では変数として δ_1, X_1 および X_3 の3個を含む。この3個の変数の間にはそれぞれ次の関係がある。すな

わち、 X_1 は Fig. 7 の \overline{AB} 部材の弾性曲線であり、 X_3 は \overline{DC} 部材の弾性曲線である。これらの曲線において、格点 B および C における変位が δ_1 および δ_3 となる。また、 δ_1 と δ_3 は \overline{BC} はりが伸びないとすれば等しい大ききをもつ。このことから X_1 および X_3 が定まれば、 δ_1 および δ_3 は、この X_1 および X_3 の B 点および C 点の値として求めることができる。

一例として左右対称ラーメン構造の場合について解析する。この場合未知数の間には、

$$\left. \begin{aligned} M_C &= -M_B \\ M_D &= -M_A \end{aligned} \right\} \dots\dots (51)$$

の関係があることから式 (43)~(46) および式 (50) は

$$M_A \frac{G_1}{a_1 I_1} - M_B \frac{H_1}{a_1 I_1} + E a_1 L_1 \delta_1 = 0 \quad \dots\dots (52)$$

$$M_A \frac{H_1}{a_1 I_1} - M_B \left(\frac{G_1}{a_1 I_1} + \frac{G_2}{a_2 I_2} + \frac{2E}{k_B} + \frac{H_2}{a_2 I_2} \right) + E a_1 K_1 \delta_1 = 0 \quad \dots\dots (53)$$

$$EI_2 a_2^4 l_2 \delta_1 + \frac{2(M_A - M_B)}{l_1} + 2 \int_0^{l_1} \frac{EI_1 a_1^4 X_1 x}{l_1} dx = 0 \quad \dots\dots (54)$$

ここで、式 (54) の第3項を M_A, M_B と δ_1 のみで表わすと、

$$\int_0^{l_1} \frac{EI_1 a_1^4 X_1 x}{l_1} dx = \left(\frac{a_1 L_1}{2} - \frac{1}{l_1} \right) M_A + \left(\frac{1}{l_1} - \frac{a_1 K_1}{2} \right) M_B + \frac{EI_1 a_1^3}{2} \delta_1 \quad \dots\dots (55)$$

式 (55) を式 (54) に代入して整理すると、

$$L_1 M_A - K_1 M_B + E \left(I_1 a_1^2 G_1 + I_2 \frac{a_2^2}{a_1} l_2 \right) \delta_1 = 0 \quad \dots\dots (56)$$

これより、 M_A, M_B および δ_1 がともに0でないためには、それぞれの係数で作る行列が0でなければならぬ。すなわち、

$$\begin{vmatrix} L_1 & -K_1 & E \left(I_1 a_1^2 G_1 + I_2 \frac{a_2^2}{a_1} l_2 \right) \\ G_1 & -H_1 & E a_1^2 I_1 L_1 \\ H_1 & - \left(G_1 + \frac{a_1 I_1}{a_2 I_2} G_2 + \frac{2 a_1 I_1 E}{k_B} + \frac{a_1 I_1}{a_2 I_2} H_2 \right) & E a_1^2 I_1 K_1 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (57)$$

これが、左右対称ラーメン構造の自由振動数方程式である。これより自由振動数 ω_n を求めることができる。振動モードは連続ばりと同様、各部材の各格点における境界条件式から求めることができる。

4. 強制振動

Fig. 6 および 7 に示される連続ばりやラーメン構造に強制変動外力が加わった場合の構造物の強制振動について論じよう。

いま、強制振動によるはりの動たわみ曲線を次の級数で表わされるとする。

$$y = \sum q_i(t) \cdot X_i(x) \dots\dots\dots(58)$$

ここに、 $X_i(x)$ は i 次振動の基準関数、 $q_i(t)$ は時間のみの関数である。解析にあたっては、この種の解析にしばしば用いられる、モード解析の手法をとり入れる。

この場合の運動方程式は D'Alembert の原理と仮想変位の原理から次のように求められる（振動次数を示すサフィクスは省略する）。

$$\ddot{q} + \frac{\sum EI_0 \int_0^l (X'')^2 dx + \sum k_j \{(X')^l - (X')^r\}^2}{\sum m \int_0^l X^2 dx} q = \frac{f(t) X_{x=c}}{\sum m \int_0^l X^2 dx} \dots\dots\dots(59)$$

ここに、 \sum は全部材について加え合わせることを意味し、 \sum はモーメント スプリング k_j について加え合わせることを意味する。 $(X')^l$ と $(X')^r$ はモーメント スプリングを有する節点の左右のたわみ角を示す。 $f(t)$ は外力であり、 $X_{x=c}$ は外力が作用している点の基準関数値である。

式 (59) 中で節点が完全なヒンジであれば $k=0$ で、 $k\{(X')^l - (X')^r\} = 0$ であり、完全剛結のときは $X'^l = X'^r$ となるから、ヒンジの場合と同様に $k\{(X')^l - (X')^r\} = 0$ となって、モーメント スプリングによるひずみエネルギーが生じないことを示している。

式 (59) 第 2 項 q の係数は振動数 ω の 2 乗を表わす。また、右辺は外力に関係する項であることからそれぞれ次式のようにおく。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\sum EI_0 \int_0^l (X'')^2 dx - \sum k \{(X')^l - (X')^r\}^2}{\sum m \int_0^l X^2 dx} &= \omega^2 \\ \frac{f(t) X_{x=c}}{\sum m \int_0^l X^2 dx} &= F(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(60)$$

そこで、式 (59) は次式のように書かれる。

$$\ddot{q} = \omega^2 q = F(t) \dots\dots\dots(61)$$

式 (61) の解は、

$$q = \left(\frac{1}{\omega} \right) \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau + D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t \dots\dots\dots(62)$$

ここに、 $D_1 \cos \omega t + D_2 \sin \omega t$ ははりの自由振動の項であり、構造物の減衰力が作用すれば時間とともに小さくなる項であることを考慮して、定常状態にのみ注目すれば、式 (62) は、

$$q = \left(\frac{1}{\omega} \right) \int_0^t F(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots(63)$$

式 (63) がこの系の強制振動の解である。

一例として、連続ばりのある点 C に強制振動の $\sin pt$ が作用している場合と、ラーメン構造に地震力 \ddot{z} が作用している場合についてその解を求めると次のようになる。すなわち、連続ばりについて

$$F(t) = \frac{f(t) \cdot X_1(C)}{\sum m \int_0^l X^2 dx} \dots\dots\dots(64)$$

として、式 (62) に代入して、強制振動のみの項をとって、動的応答 y を求めると、

$$y = \sum \left(\frac{X_{(x=c)} a \sin pt}{(\omega^2 - p^2) \sum m \int_0^l X^2 dx} X \right) \dots\dots\dots(65)$$

ラーメン構造について、

$$F(t) = \frac{2m \int_0^{l_1} X_1 dx + ml_2 X_1(x=l_1)}{2m \int_0^{l_1} X_1^2 dx + 2m \int_0^{l_2} X_2^2 dx + ml_2 X_1^2(x=l_1)} \cdot \ddot{z} = A\ddot{z} \dots\dots\dots(66)$$

ここに \ddot{z} が不規則な振動波形であればこれを式 (66) に代入して数値積分すればよい。

5. 数値計算とその考察

以上の理論式について数値計算の一例をあげ若干の考察を加える。

(1) 2 スパン連続ばり

計算に用いたはりは全長 $l=10.0$ m、曲げ剛性 $EI_1=2.73 \times 10^2$ ton-m²、単位長さ当り質量 $m_1=4.31 \times 10^{-2}$ ton/m²/sec² とし各径間の比を p_1 、曲げ剛性の比を p_2 とし、モーメント スプリング定数 k は、

$$k = p_4 (EI_1/l_1) \dots\dots\dots(67)$$

で表わされると考える。

p_1, p_2 および p_4 をパラメーターとして各場合について振動数を求めて見ると次のようになる。

(a) **Fig. 8** は $p_2=1.0, p_4=10^{10}$ すなわち、左右の径間の曲げ剛性は等しく、さらにモーメント スプリング定数は非常に大きく、完全に剛結されていると考えられる場合で、スパン割のみ異なる場合の自由振動数である。**Fig. 8** 中 $p_1=1.0$ の場合、等スパン連続ばりの振動数と一致し、 $p_1=\infty$ では $l_2/\infty=l_1$ となり、 l_2+l_1 をスパンとした単純ばりの自由振動と一致する。また、この結果 p_4 を 10^{10} 程度にとれば完全剛結とみなし得ることを意味している。

(b) **Fig. 9** はスパン割を等しくし、曲げ剛性が異なる場合の振動数である。**Fig. 8** の場合と同様 $p_2=1.0$ の場合は等断面、等スパンばりの振動数であり、 $p_2=\infty$ の場合は $EI_2=(\infty)EI_1$ からスパン l_1 をもったはりの B 点が固定支持され、A 点が単純支持されたはりの振

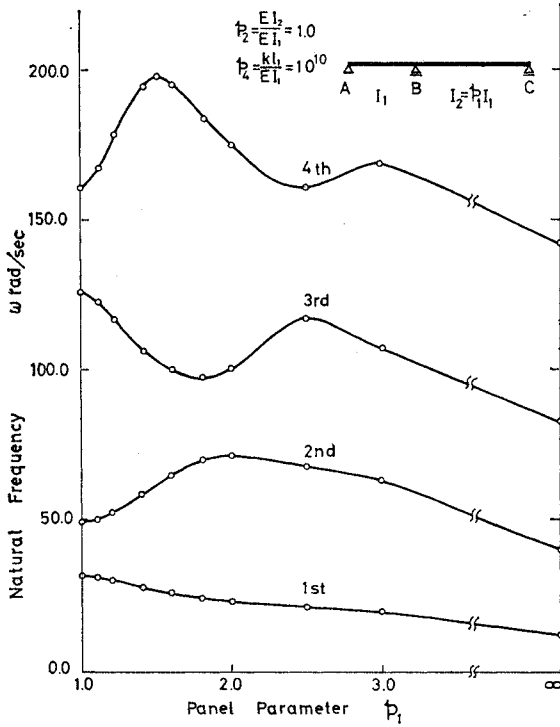


Fig. 8 Natural frequencies of two span continuous beam.

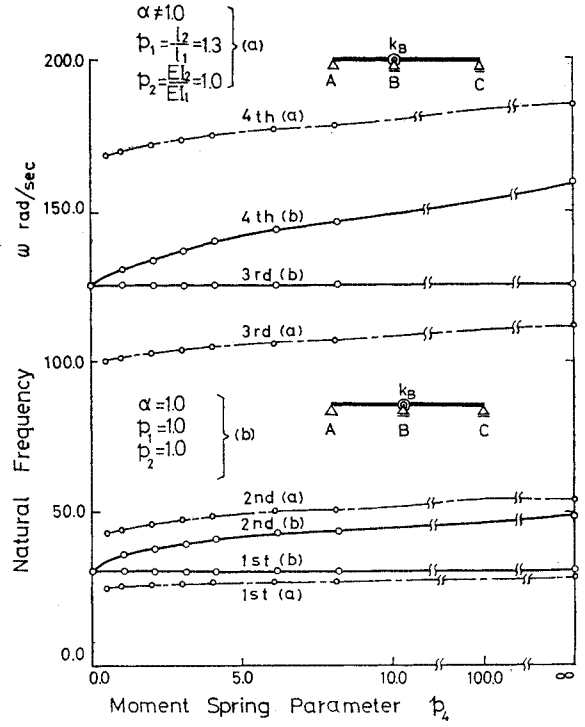


Fig. 10 Natural frequencies of two span continuous beam with moment spring.

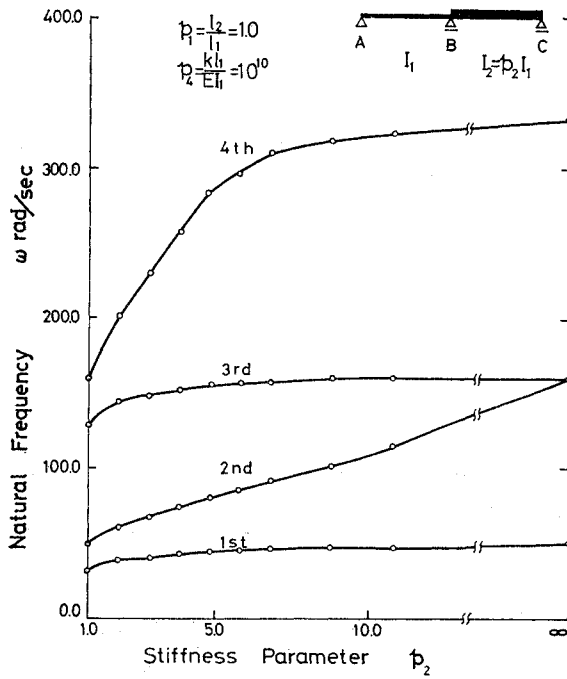


Fig. 9 Natural frequencies of two continuous beam.

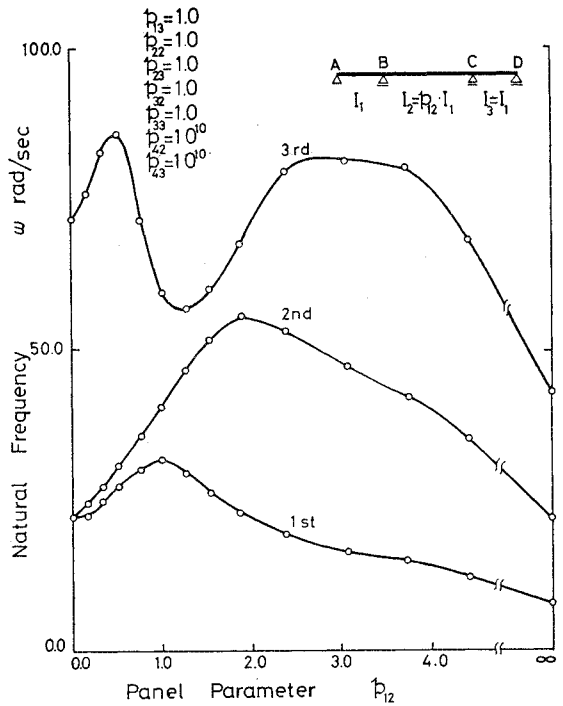


Fig. 11 Natural frequencies of three span continuous beam.

動数を示している。

(c) Fig. 10 の実線は、2 スパンばりについて中間支点 B にモーメント スプリング k を考慮した場合で

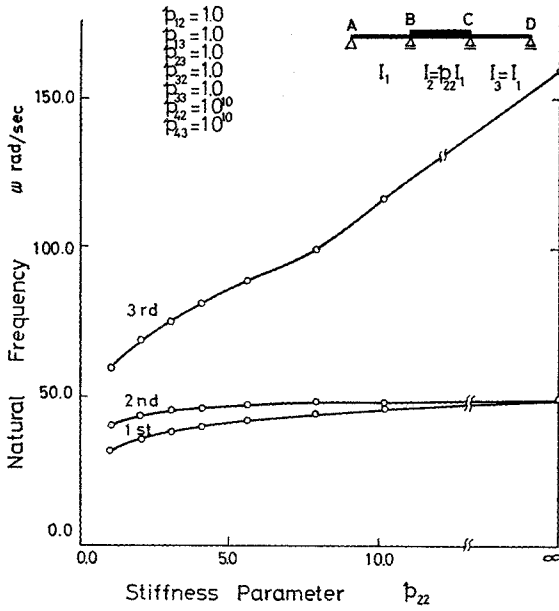


Fig. 12 Natural frequencies of three span continuous beam.

ある。

逆対称振動の場合、式 (33), (34) の α_1 が 1.0 となるので、この場合のみ完全剛結されたはりと同振動数は等

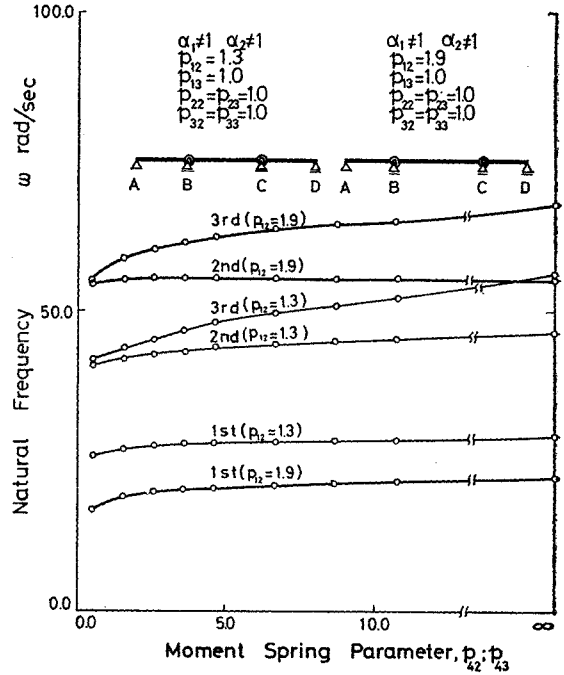


Fig. 14 Natural frequencies of three span continuous beam with moment spring.

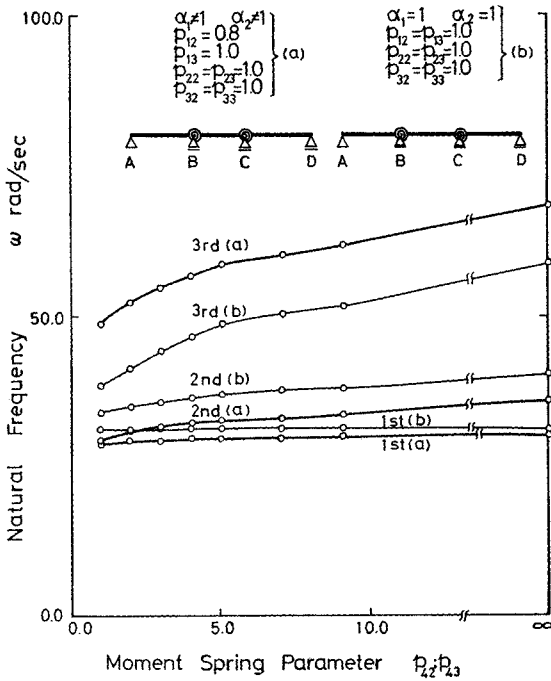


Fig. 13 Natural frequencies of three span continuous beam with moment spring.

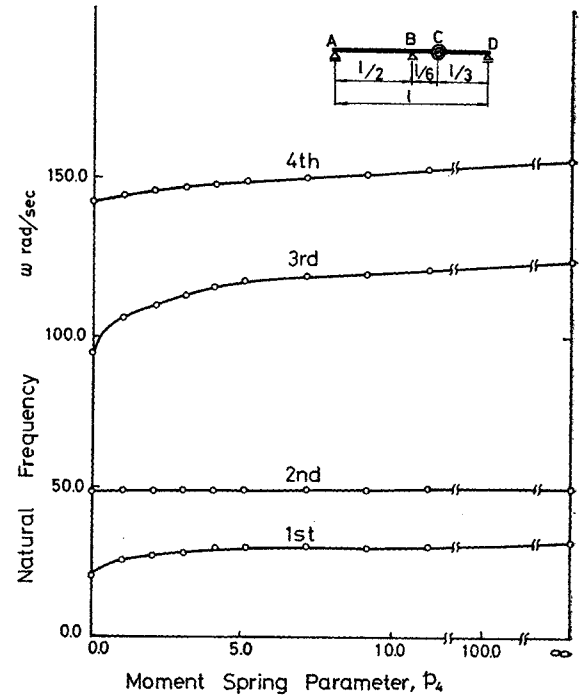


Fig. 15 Natural frequencies of cantilever beam with moment spring.

しくなる。また、 $p_4=0.0$ すなわち $k=0.0$ でモーメント スプリングが作用しない、いわゆるこの点で完全にヒンジ構造となっている場合は Fig. 10 で見られるようにスパンが $l_1=l_2=l$ である単純ばりの振動数に一致する。一方、 $p_4=\infty$ の場合には完全連続ばりのそれと一致する。

(d) Fig. 10 の鎖線は、スパン割を変えた場合でその比 p_1 を 1.3 とした場合であり、実線は等スパン割の場合である。

Fig. 10 の鎖線と実線を比較すると等スパンの場合は 1 次と 2 次、または、3 次と 4 次の振動数が接近しており、また、剛結度が悪くなるとこれはさらに接近する。しかし、鎖線では各振動次数の振動数ははなれている。このことは Fig. 8 からいえることである。

(2) 3 スパン連続ばり

2 スパン連続ばりと同様に次のパラメーターを用いて振動数を計算して見る。

$$\left. \begin{aligned} p_{12} &= l_2/l_1, & p_{13} &= l_3/l_1 \\ p_{22} &= EI_2/EI_1, & p_{23} &= EI_3/EI_1 \\ k_B &= k_C = p_4(EI_1/l_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

なお、全長 $l=l_1+l_2+l_3$ は 15.0 m 一定として計算し、基準曲げ剛性 EI_1 および単位長さ当り質量 m_1 は 2 スパン連続ばりの場合と同じ値を用いる。

(a) Fig. 11 と 12 は完全に剛結された 3 スパン連続ばりの p_{12} また p_{22} を変数とした場合である。

(b) Fig. 13 および 14 ははりの中間支点上にモーメント スプリングを考慮した等断面ばりで、両側径間が等しい対称ばりについて計算した結果である。

1 次振動についてのみ見ると、スパン割が等しいとき、振動数は最も高く、中央径間と側径間の比が大きくなっても小さくなくても、1 次振動数は小さくなる。2 次の振動について見ると中央径間と側径間の比 p_{12} が大きくなると振動数は高くなり、3 次振動では逆に p_{12} が 1.0 のとき、すなわち、等スパン連続ばりが最も小さくなっている。一般に節点の剛性が増すほど各振動次数の振動数は高くなっている。

(3) ゲルバーばり

次に、2 スパン ゲルバーばりのヒンジ部がモーメント スプリングでおきかえられた構造について計算して見ると Fig. 15 のようになる。すなわち、 p_4 が 0 に近づくと 1 次、2 次、3 次振動数は 20.58, 47.57, 94.60 rad/sec と C 点をヒンジとしたゲルバーばりの値に近づくと、また p_4 が大きくなると先に計算した 2 スパン連続ばりの振動数に一致する。

参考までに (a) $p_4=10^0$, (b) $p_4=5.0$ および (c)

$p_4=0.5$ のそれぞれの振動モードを求めたのが Fig. 16 である。図中 (a) は 2 スパン連続ばりのモードに等しく、(c) は C 点がヒンジであるゲルバーばりのそれにそれぞれ一致している。

2 スパン連続ばりの対称性がゲルバーばりになると急激にくずれる点興味深い。

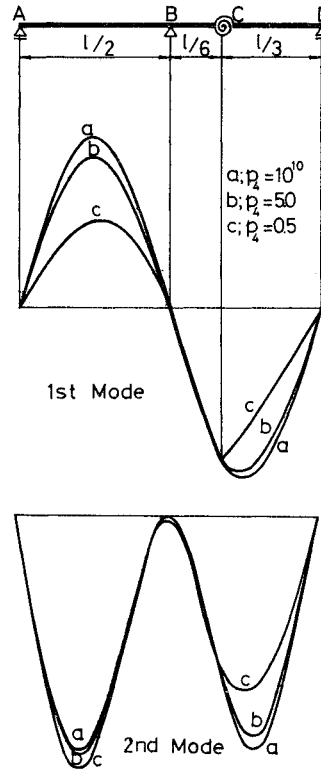


Fig. 16 Vibration mode of cantilever beam.

(4) 1 層 1 スパン ラーメン

計算の一例として、Fig. 17 の (a) のラーメン構造を考えよう。このラーメン構造は 1 および 4 の点で固定され、2 および 3 点が剛結されたラーメン構造で、この構造を基本系として、 $\overline{23}$ のはりの I_2 を ∞ と考えたのが (b) 図であり、これを模型化すると (A) の形となる。すなわち、 $\overline{12}$ および $\overline{34}$ の柱の頭部にそれぞれ $m_2/2$ の質量があり、2 および 3 の頭部での柱のたわみ角が常に 0 になっている状態である。また、 $\overline{23}$ のはりの曲げ剛性が非常に小さく、 $\overline{12}$ および $\overline{34}$ の柱のそれにくらべて無視し得る場合は (c) のように考えられ、この場合は、振動模型としては (B) のように考えられる。

一方、節点 2 および 3 にモーメント スプリングをそ入したのが (d) 図であり、このモーメント スプリングの定数 k を 0 としたのが (e) 図である。(e) では節

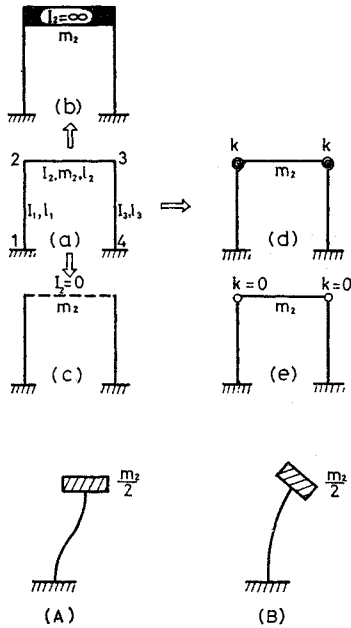


Fig. 17 Rigid frame-notation.

点2および3はヒンジであるから振動系としては (B) の型と一致する。

パラメーターとして23はりの曲げ剛性に関するパラメーター, p_2 , とモーメントスプリングに関するパラメーター, p_4 , を取って, 各場合について振動数を計算したのが Fig. 18 である。Fig. 18 で $p_4 \rightarrow \infty$ ではそれぞれのラーメン構造の振動数であり, $p_4 = 0$ では Fig. 17 の (e) の場合で, 振動模型 (B) に相当している。

さて, ラーメン構造では前節の連続ばりにおいて見られたモーメントスプリング定数が0に近づいたとき, 振動数はある一つの部材の振動数に収束するという現象は見られない。このことは, ラーメン構造では, 節点2および3がヒンジ構造となっても各部材間で互いに影響しあうことを意味している。このことを橋梁について見ると, 近年架設されている橋脚が長く, その剛性が比較的小さい橋梁で, 橋桁と橋脚との連結がヒンジのようになっている構造にこの現象が見られると思われる。

また, ゲルバーばりにおいてもラーメン構造で見られた現象が見られる。

6. 強制振動

強制振動に対しては, まず外力をどのように取扱うか, すなわち, 周期力と考えるか, 不規則外力と考えるかなどの問題から究明しなければならないが, ここでは対象を3スパン連続ばりとラーメン構造に限って, 主として, モーメントスプリングに関するパラメーター, p_4 による動的応答の違いについて考察して見る。

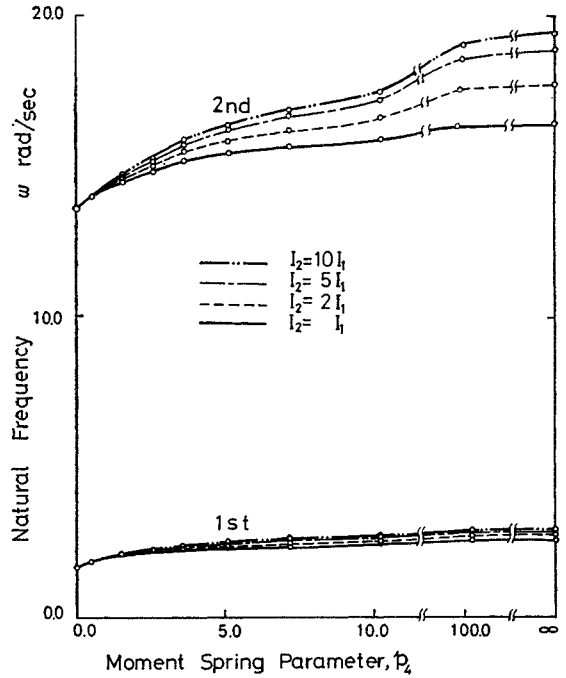


Fig. 18 Natural frequencies of rigid frame.

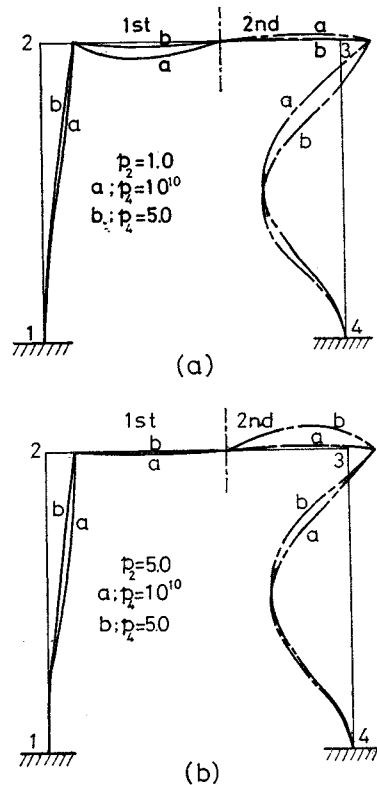


Fig. 19 Vibration mode of frame with moment spring.

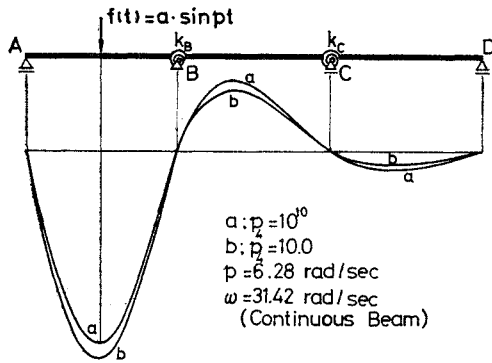


Fig. 20 Responses of three-span beam with moment spring due to applied dynamic force.

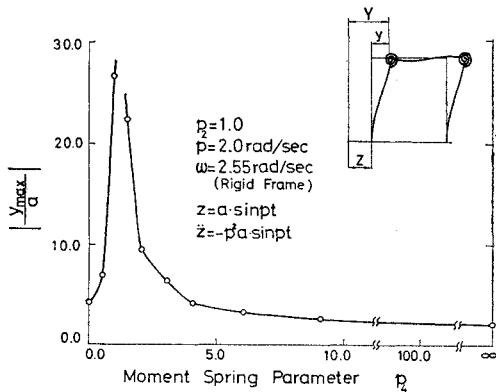


Fig. 21 Responses of frame with moment spring due to applied dynamic force.

まず、Fig. 20 では3スパン連続ばりの第1径間に外力 $f(t) = a \sin pt$ が作用した場合、最大動的応答の形を $p_1 = 10^0$ (完全剛結) と $p_1 = 10.0$ の場合を示した。

Fig. 21 は図中右肩のラーメン構造に地震力が作用した場合の最大動的応答とその他地震力が静的に作用した場合の比 $|y_{max}/a|$ をモーメント スプリング・パラメーター、 p_1 、との関係で示した。この図から、動的応答には1つのピークがあり、格点がヒンジの場合はその動的最大応答は格点が剛結の場合にくらべて約2倍の大きさになることがわかる。しかし、これらの値はラーメンの固有振動周期と外力に含まれる変動周期との関係で定まる値であるので、ここではその傾向について述べるにとどめる。

7. む す び

以上、不完全な剛結を有する構造物の振動問題の取扱い方について考察した結果について述べた。

この報告では、不完全な剛結を表わす尺度として、節点モーメントに抵抗するモーメント スプリングを考慮することによって取り扱った。すなわち、節点に作用するモーメントに比例した回転角が節点に生ずるとし、モー

メントと回転角との比を比例定数としたモーメント スプリングを考えた。

このようなモーメント スプリングを節点にもった連続ばり、ゲルバーばり、ラーメン構造について、モーメント スプリングのばね定数の大小によって構造物の振動数がどのように変化するかを調べた。さらに強制外力を受けるはりの強制振動についても若干の計算を行なってその結果を示した。この研究で現在までに得られた結果を以下に列挙する。

(1) 不完全な剛結の度合いを測る尺度としてモーメント スプリングのばね定数 k を考えることはこの種の解析を容易にする。この研究ではさらに、ばね定数 k に関するパラメーターとして、

$$p_1 = \frac{kl}{EI}$$

をとっている。

(2) 剛結の尺度 k が0の場合はヒンジを $k = \infty$ の場合は完全剛結を示す。しかし、数値計算的にはパラメーター、 p_1 、をヒンジに対しては 5×10^{-1} を完全剛結に対しては 1×10^{10} を取れば、十分な精度で振動数を求めることが可能である。

(3) 連続ばりの基本振動数(1次固有振動数) Fig. 10, 13 および 14 に見られるように節点の剛結の度合いによってほとんど変わらない。しかし、2次以上の固有振動数では剛結度が高くなるにしたがって順次高くなっている。

(4) 連続ばりにあっては節点の剛結の度合いが弱くなるほど、すなわち、ヒンジに近づくほど、2次と3次、または3次と4次などの振動数がそれぞれ接近することがあるので、周期的外力による動的安定性などを論ずるとき注意すべきである。

(5) ラーメン構造にあっては Fig. 18 に見られるように基本振動数(1次振動数)では節点の剛結の度合いによってもはりの曲げ剛性の割合によってもほとんど差はない。いいかえればラーメン構造物を Fig. 17 の(A)のようにモデル化して動的解析を行ってもよいことを示している。しかし、2次振動では、はりの曲げ剛性が柱のそれにくらべて大きいほど、節点の剛結が低下すると振動数は小さくなっている。また、剛結されたラーメンにあっては、はりと柱の曲げ剛性の比が大きい場合は Fig. 17 の(A)のようにモデル化してもよいが、剛比が小さい場合は振動数が小さくなる傾向にある。

強制振動については、計算例のみを示したが、橋脚の長い橋梁の地震時における振動などの解析に適用すれば興味ある結果が得られるものと思われる。

今回は不完全な剛結部を有する構造物の動的問題の取扱い方を、主として報告した。この種の解析の一助と

もなれば幸いである。

参考文献

- 1) Wen, R.K. and Toridis, T.D. : "Discrete Dynamic Models for Elasto-Inelastic Beams", Proc. of ASCE, EM 5, Vol. 90, 1964.
- 2) Toridis, T.D. and Wen, R.K. : "Inelastic Response of Beams to Moving Loads", Proc. of ASCE, EM 6, Vol. 92, 1964.
- 3) Wen, R.K., Hills, R.H. and Toridis, T.D. : "Elasto-Inelastic Beams Traversed by Massive Loads", The Relation of Engineering Mechanics Research to the Practice of Civil Engineering, Proc. of Engineering Mechanics Division Specially Conference, ASCE, 1966.
- 4) Lionberger, S.R. and Weaver, W. Jr. : "Dynamic Response of Frames with Nonrigid Connections", Proc. of ASCE, EM 1, Vol. 95, 1969.
- 5) 山崎徳也・太田俊昭・毛利俊雄 : "振動撓角式による立体直線材ラーメンの固有周期算定法", 第18回土木学会年次学術講演会概要集(第1部), p. 39~40, 昭和38年5月.
- 6) Biggs, J.M. : "Structural Dynamics", McGraw-Hill, pp. 150~183, 1964.
- 7) 岡本舜三 : "四連モーメント定理による架構の振動問題の解法に就て", 土木学会論文集, 第25巻第12号, 昭和14年12月.
- 8) 岡本舜三 : "建設技術者のための振動学", オーム社, p. 119~128, 昭和42年5月.

付 録

ゲルバーばり形式に対する基礎式の誘導

図に示すゲルバーばりを対象に基礎式を誘導する。

本文式(23)をABC, BCDに適用すれば,

$$-M_B \left(\frac{G_1}{a_1 I_1} + \frac{G_2}{a_2 I_2} \right) + M_C \frac{H_2}{a_2 I_2} - E a_2 L_2 \delta_C = 0 \quad \dots\dots\dots (a)$$

$$M_B \frac{H_2}{a_2 I_2} - M_C \left(\frac{G_2}{a_2 I_2} + \frac{G_3}{a_3 I_3} + \frac{2E}{k_C} \right) + E(a_2 K_2 + a_3 K_3) \delta_C = 0 \quad \dots\dots\dots (b)$$

を得る。これらの式には M_B, M_C および δ_C の3個の未知量が含まれているので、他の1つの方程式はヒンジ点における動的せん断力のつり合い条件より求める。

いま、振動中のはり

は慣性力として、

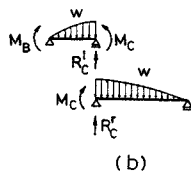
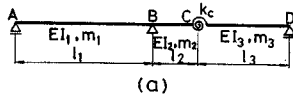
Fig. A Cantilever beam-notation.

$$w = m \frac{d^2 y}{dt^2} = m \omega^2 y \quad \dots\dots\dots (c)$$

の力を受けており、これを、本文式(9)を用いてある瞬間における慣性力を求めると、

$$w = EI a^4 X \quad \dots\dots\dots (d)$$

となる。はりにはこの w なる分布荷重が作用している



ものと考えられる。

一方はりのC点でのつり合いを考えるために Fig. A (b) のように単純ばり \overline{BC} と \overline{CD} に分けて考えると、その反力はそれぞれ

$$R_C^l = \frac{M_B - M_C}{l_2} + \int_0^{l_2} \frac{EI_2 a_2^4 X_2 x}{l_2} dx \quad \dots\dots (e)$$

$$R_C^r = \frac{-(M_C - 0)}{l_3} + \int_0^{l_3} \frac{EI_3 a_3^4 X_3 (l_3 - x)}{l_3} dx \quad \dots\dots\dots (f)$$

となる。しかし、C点は支持点ではないので反力は0であるから、

$$\frac{M_B - M_C}{l_2} + \int_0^{l_2} \frac{EI_2 a_2^4 X_2 x}{l_2} dx - \frac{M_C}{l_3} + \int_0^{l_3} EI_3 a_3^4 X_3 dx - \int_0^{l_3} \frac{EI_3 a_3^4 X_3 x}{l_3} dx = 0 \quad \dots\dots\dots (g)$$

式(g)の積分の項は、本文の G_s, H_s, K_s および L_s の記号を用いて、

$$\left. \begin{aligned} & \int_0^{l_2} EI_2 a_2^4 X_2 dx = \frac{1}{2} \{ a_2 (L_2 - K_2) M_C + EI_2 a_2^3 (G_2 - H_2) \delta_C \} \\ & \int_0^{l_2} \frac{EI_2 a_2^4 X_2 x}{l_2} dx = \left(\frac{a_2 L_2}{2} - \frac{1}{l_2} \right) M_B + \left(\frac{1}{l_2} - \frac{a_2 K_2}{2} \right) M_C + \frac{EI_2 a_2^3}{2} G_2 \delta_C \\ & \int_0^{l_3} \frac{EI_3 a_3^4 X_3 x}{l_3} dx = \left(\frac{a_3 L_3}{2} - \frac{1}{l_3} \right) M_C - \frac{EI_3 a_3^3}{2} H_3 \delta_C \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (h)$$

これより式(g)は

$$M_B (a_2 L_2) - M_C (a_2 K_2 + a_3 K_3) + E (I_2 a_2^3 G_2 + I_3 a_3^3 G_3) \delta_C = 0 \quad \dots\dots\dots (i)$$

となる。一例として、等断面ばりを考える。このときは

$$I_1 = I_2 = I_3 = I, \quad m_1 = m_2 = m_3 = m$$

であり、本文式(9)の a は

$$a_1 = a_2 = a_3 = a$$

となり、基本式(a), (b)および(c)はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} & -M_B (G_1 + G_2) + M_C H_2 - EI a^2 L_2 \delta_C = 0 \\ & M_B H_2 - M_C \left(G_2 + G_3 + \frac{2EIa}{k_C} \right) + EI a^2 (K_2 + K_3) \delta_C = 0 \\ & M_B L_2 - M_C (K_2 + K_3) + EI a^2 (G_2 + G_3) \delta_C = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (j)$$

となる。この式で M_B, M_C および δ_C が以外の根を持つためには、

$$\begin{vmatrix} -(G_1 + G_2) & H_2 & -L_2 \\ H_2 & -\left(G_2 + G_3 + \frac{2EIa}{k_C} \right) & K_2 + K_3 \\ L_2 & -(K_2 + K_3) & G_2 + G_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots (k)$$

が成立しなければならない。

式(k)が振動数方程式である。