

十字形板の応力解析

—隅角部の丸味と隅角部の応力—

STRESS ANALYSIS OF THE CROSS-SHAPED PLATE

—Roundness of Corner and its Stresses—

長谷部 宣 男*

By Norio Hasebe

1. ま え が き

十字形状の隅角部に丸味のある板を、面内荷重が作用した平面弾性問題として、あるいは面外荷重が作用した薄いプレートの曲げの問題として解析し、とくに応力集中と隅角部の曲率半径との関係などについて考察したものである。

この種の形状は、構造物の各所にみられ、その応力解析は興味がある。しかし数理解析されたものは少なく、文献 1) (平面弾性問題として) が見あたる程度である。

この種の帯状を持つ形状を平面弾性問題として解析的に解こうとする場合、その領域を単位円に写像する写像関数をべき級数に展開すると、その級数の収束がきわめて遅いので、実際の数値計算が困難なのである。

解こうとする領域を単位円に写像する関数が有理関数である場合には、Fredholm の積分方程式を解くことなく閉じた解が得られるので²⁾、Schwarz-Christoffel の変換公式を応用して隅角部に丸味のある十字形の領域を単位円に写像する写像関数を作り、これをもとにして分数式の和の形の有理写像関数を作る。これを用いてMuskhelishvili の方法²⁾によって応力解析を行なったものである。

2. 写 像 関 数

(1) 隅角部に丸味のある十字形の写像関数

隅角部に丸味を入れた写像関数は、Schwarz-Christoffel の変換公式より比較的簡単に導くことができ、十字形の場合についても文献 1) に利用されているが、こゝでもこれと同じ方法を用いる。

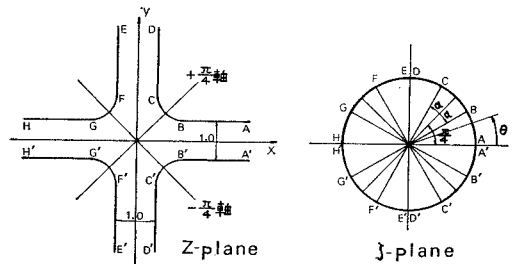


図-1

図-1 のような隅角部に丸味を入れた十字形領域を考える。単位円に写像したときの対応点は 図-1 に示してある。B 点は $(\pi/4) - \alpha$ 、C 点は $(\pi/4) + \alpha$ に対応し、F, G, G', F', C', B' も同様に考える。ここに α は、丸味の位置に関するパラメーターである。

直線部分においては、

$$\frac{d}{d\zeta} \log \frac{dz}{d\zeta} = - \left[\frac{1}{\zeta-1} + \frac{1}{\zeta+1} + \frac{1}{\zeta-i} + \frac{1}{\zeta+i} \right]$$

$$\therefore \log \frac{dz}{d\zeta} = - [\log(\zeta-1) + \log(\zeta+1) + \log(\zeta-i) + \log(\zeta+i)] \quad (1)$$

曲線部分においては、無限個の稜を有する多角形と考え、

$$\frac{d}{d\zeta} \left(\log \frac{dz}{d\zeta} \right) = - \left[\int_1^{1/2} \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(k\lambda+c)}} + \int_{3/2}^1 \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(k\lambda+c)}} + \int_2^{3/2} \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(k\lambda+c)}} + \int_{5/2}^2 \frac{d\lambda}{\zeta - e^{i(k\lambda+c)}} \right]$$

ここに曲線部と直線部の接続より、

$$\left. \begin{aligned} B : e^{i(\pi/4-\alpha)} &= e^{i(k+c)} \\ C : e^{i(\pi/4+\alpha)} &= e^{i(k/2+c)} \\ F : e^{i(\pi-(\pi/4+\alpha))} &= e^{i(3/2k+c)} \\ G : e^{i(\pi-(\pi/4-\alpha))} &= e^{i(k+c)} \\ G' : e^{i(\pi+(\pi/4-\alpha))} &= e^{i(2k+c)} \\ F' : e^{i(\pi+(\pi/4+\alpha))} &= e^{i(3/2k+c)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \therefore k &= -4\alpha \\ c &= \pi/4 + 3\alpha \\ \therefore k &= -4\alpha \\ c &= 3/4\pi + 5\alpha \\ \therefore k &= -4\alpha \\ c &= 5/4\pi + 7\alpha \end{aligned}$$

* 正会員 工修 名古屋工業大学助手 土木工学科

表-1 分数式の係数

α_j	A_j	α_j	A_j
0.99999315842	0.00000453788	0.99995748572	0.00001482733
0.99985020365	0.00004352141	0.99954927687	0.00012034187
0.99868846845	0.00034827129	0.99628713455	0.00096121483
0.98945404340	0.00277393747	0.97064269000	0.00760392267
0.91904758998	0.02156063238	0.78994650005	0.05675414493
0.51492621116	0.14636202272	0.15116975987	0.31998707727

ブロックの影響を差し引いた $a'_{4 \times M}$ 等の値を用いて4個の連立方程式を解いて $\alpha_3^{M'}$, A_3 , $\alpha_4^{M'}$, A_4 を決める。第4ブロックのときは、第3, 第5, 第6ブロックの影響を考慮する ($|\alpha_j| < 1$ であるので低次のブロックの高次のブロックへの影響は小さい)。こうして第1ブロックまで行ったらまた第6ブロックへ戻り同じことを行なう。これを何回か繰返して変動が小さくなったときの α_j , A_j を求める。計算結果において $|\alpha_j| < 1$ なることを確認する。こうして求めた α_j , A_j の値を表-1に示す。

求めた α_j , A_j の値を式(6)に代入して式(5)と比べてみると、 ζ の低次の項では、小数点以下4, 5桁、高次の項では、6, 7桁まで一致し、第6ブロックの最終項 $a_{16 \times M} = a_{16 \times 8}$ は、 ζ の 524289 乗の項にあたるので、またそれより高次の項も打ち切ったわけではなないのでかなりの高次の項まで一致し、分数式(6)は、式(5)のべき級数の ζ の 5~60 万乗の項までとったのに等しいといえる。

つぎに、式(4)の収束の速い項に対する分数式の作り方も考え方は同じで、そのべき級数の収束が速いことからつぎのように作る。まずこの項をべき級数に展開して

$$\int \frac{f(\zeta) - f(1)}{1 - \zeta^4} d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \zeta^{4n-3} \dots \dots \dots (8)$$

これに対して

$$\sum_{j=1}^k \frac{B_j \zeta}{1 - \beta_j \zeta^4} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k B_j \beta_j^{n-1} \zeta^{4n-3} \dots \dots \dots (9)$$

を考え、分数式の項数は、ここでは $k=4$ 個にとる。そして b_2 から b_9 の係数と一致するよう、8個の連立方程式

$$\sum_{j=1}^4 B_j \beta_j^{n-1} = b_n \quad (n=2, 3, \dots, 9)$$

を解いて、おのおの4個の β_j , B_j (一般に複素数) を求める。式(8)は隅角部の丸味に関係するパラメータ α を含むので、 α の値を変えて隅角部に種々の大きさの丸味を持つ写像関数を作る。一例として $\alpha=0, 0.45, 0.77$ ラジアンに対する β_j , B_j および形状係数 K の値を表-2に示す。

式(8)と式(9)は、 ζ^{33} の項までは完全に一致し、それより高次の項もかなりのところまで一致する。

以上より式(6), 式(9)と ζ の1次の項(式(6)も式(9)も ζ^5 以上の項より一致するように選んだ)を補正して、有理型の近似写像関数は、

$$Z = \omega(\zeta) = K \left\{ \left(1 - f(1) \sum_{j=1}^{12} A_j - \sum_{j=1}^4 B_j \right) \zeta + f(1) \sum_{j=1}^{12} \frac{A_j \zeta}{1 - \alpha_j \zeta^4} + \sum_{j=1}^4 \frac{B_j \zeta}{1 - \beta_j \zeta^4} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

の形で求まる。

つぎに写像関数式(10)の精度について検討する。

$\alpha=0.77$ に対する式(10)の写像関数の表わす領域の1/4を図-2に示す。 $\pm \frac{\pi}{4}$ 軸について対称でこの点での曲率半径 ρ は、

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\text{Re}[\zeta \omega''(\zeta) / \omega'(\zeta)] + 1}{|\zeta \omega'(\zeta)|}$$

($\text{Re} []$ は、 $[]$ の実部を示す)

より帯の幅を1.0として(以下寸法の基準は、すべてこれである) $\rho = -0.603$ (マイナスの符号は、外向きに凹

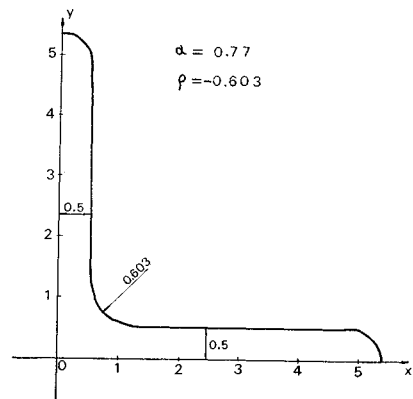


図-2

表-2 形状係数および分数式の係数

α	K	β_j	B_j	β_j	B_j
0.0	1.8006326322	-0.05130653655	-0.11460650466	-0.53252897834	-0.00640065189
		-0.24391218133	-0.02997073342	-0.81861118090	-0.00068227554
0.45	1.6721669568	0.01771265292 + 0.21595749140 i	-0.02125977188 + 0.01675027553 i	0.13124731343 + 0.63844689710 i	-0.00136635473 + 0.00016777867 i
		上値の共役な値	上値の共役な値	上値の共役な値	上値の共役な値
0.77	1.3223792624	0.30504052742	-0.00644160417	0.84673713334	-0.00109140532
		0.07436732308	-0.01187675716	0.60100273156	-0.00324129162

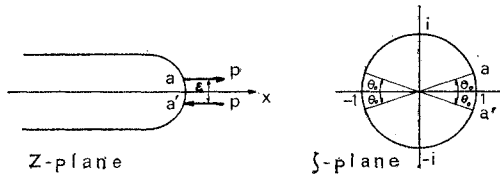


図-3

$$A'(\zeta) = \frac{2p}{\pi(1-\zeta^4)}$$

e) x軸方向の帯の先端に偶力 M が作用した1軸面内曲げの場合 (図-5 参照)

偶力については、図-3 に示すように、大きさが等しく方向反対で ε だけ離れた x 軸方向の集中荷重 p を考える。数値計算において p は、 $p\varepsilon = M = 1.0$ になるようにとる。

$$A'(\zeta) = \frac{-2pi}{\pi} \cdot \frac{\zeta \sin 2\theta_0}{\zeta^4 - 2 \cos 2\theta_0 \zeta^2 + 1}$$

ここに θ_0 は、荷重載荷点を表わす z 平面上の角である。

d) x および y 軸の帯の先端に偶力の作用した2軸面内曲げの場合 (図-5 参照)

$$A'(\zeta) = \frac{2pi}{\pi} \cdot \frac{\zeta \sin 2\theta_0}{\zeta^4 - 2 \cos 2\theta_0 \zeta^2 + 1} + \frac{2p}{\pi} \cdot \frac{\zeta \sin 2\theta_0}{\zeta^4 + 2 \cos 2\theta_0 \zeta^2 + 1}$$

(3) 解析結果

これら4種類の荷重条件のもとで、隅角部付近の境界線に沿う縁応力 $\tau_{\theta\theta}$ について計算する。縁応力 $\tau_{\theta\theta}$ のみ

を計算するのならば $\tau_{rr} = 0$ であるから式 (11) の第1式より計算できる。この場合は、複素応力関数も $\varphi(\zeta)$ のみが必要で $\psi(\zeta)$ は求める必要がない。

図-4, 5 には、 $\alpha = 0.45$ の場合のおおの荷重に対する縁応力分布を示す。

表-3, 4, 5 には、 $\alpha = 0, 0.45, 0.77$ の3つの場合の各荷重に対する縁応力の値を示す。

表-6 には、各 α について最大縁応力やその生ずる位置などについて示す。 $\alpha = 0, \rho = -0.00013$ の項は、文献 6) による写像関数を用いて応力計算した。

1軸および2軸引張りの縁応力 $\tau_{\theta\theta}$

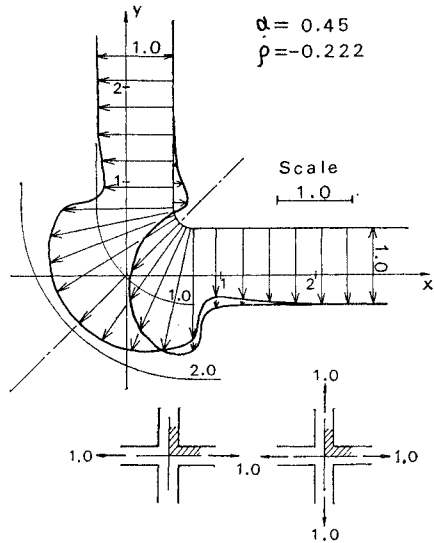


図-4

表-3 縁応力分布 $\alpha = 0$ 対称軸 $\pi/4$ 上の曲率半径 $\rho = -0.00057$

ラジアン	曲率半径 ρ	座 標		1 軸 引 張 り $\tau_{\theta\theta}$	2 軸 引 張 り $\tau_{\theta\theta}$	1 軸 面 内 曲 げ $\tau_{\theta\theta}$	2 軸 面 内 曲 げ $\tau_{\theta\theta}$
		x	y				
0.004	-37.92	2.11762	0.50007	1.00	1.00	6.00	6.00
0.04	-31.66	1.38488	0.49995	1.00	0.98	6.00	5.93
0.08	-33.36	1.16449	0.49975	1.00	0.94	6.00	5.80
0.25	-31.77	0.80495	0.49998	1.04	0.83	6.03	5.42
0.3	-23.25	0.74866	0.49991	1.07	0.82	6.08	5.43
0.5	43.91	0.59731	0.50003	1.23	0.94	6.59	6.13
0.68	-3.62	0.52072	0.49998	1.76	1.71	9.16	10.37
0.75	0.10579	0.50397	0.49998	2.84	3.62	15.10	21.17
0.775	-0.00265	0.50077	0.49993	8.28	13.66	45.98	79.23
0.78	-0.00098	0.50042	0.50001	12.35	22.19	69.81	128.60
0.7815	-0.00077	0.50034	0.50004	13.62	25.17	77.48	145.89
0.783	-0.00064	0.50027	0.50008	14.58	27.75	83.49	160.81
0.7845	-0.00058	0.50020	0.50013	14.95	29.26	86.24	—
$\pi/4$	-0.00057	0.50016	0.50016	14.81	29.62	85.82	171.64
0.79	-0.00086	0.50003	0.50038	10.74	23.79	63.90	137.89
0.8	-0.00679	0.49991	0.50114	3.35	9.45	21.44	54.89
0.85	1.25	0.50001	0.50990	0.23	2.36	2.81	13.98
0.9	-5.32	0.49998	0.52352	-0.08	1.62	1.00	9.85
1.1	30.92	0.50004	0.61426	-0.29	0.90	-0.53	5.91
1.2	242.76	0.49998	0.68433	-0.28	0.83	-0.65	5.51
1.54	-56.59	0.50007	1.46798	-0.01	0.98	-0.05	5.95
1.562	83.19	0.49988	1.86679	0.00	1.00	0.00	6.00

1軸および2軸面内曲げの縁応力分布

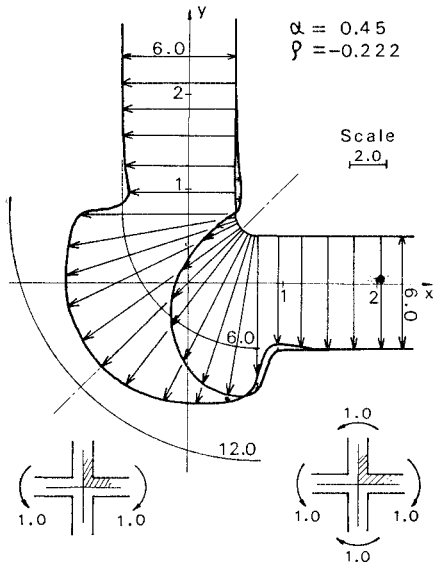


図-5

縮応力が生じている。その距離も圧縮力の大きさも隅角部の曲率半径の小さいときほど大きい(表-3, 4, 5 参照)。

最大応力の発生位置について考察してみる。図-6には、表-6の各 α における最大応力発生点の座標を結んだ図を示す。多少のバラツキはあるが、曲率半径の小さい($\rho = -0.0001 \sim -0.005$)ところでは、最大応力点は、ほぼ $\varphi = 10^\circ \sim 12^\circ$ の直線に(図-6左図)、大きな曲率半径になるとほぼ $\varphi = 41^\circ \sim 42^\circ$ の直線にのっている(図-6右図)。

b) 2軸引張りの場合

1軸引張りの場合の応力を $\pi/4$ 軸に対称に重ね合せた場合に相当し、1軸引張りで圧縮を生じている所に相当する個所で、応力は1.0より小さい応力低下を起こして

1 軸 面 内 曲 げ				2軸面内曲げ	
最大応力点の θ	最大応力点の曲率半径	最大応力点の座標		最大縁応力 $\tau_{\theta \max}$	最大縁応力 $\tau_{\theta \max}$
		x	y		
0.7851	-0.00013	0.50006	0.50004	169.82	335.57
0.7845	-0.00058	0.50020	0.50013	86.24	171.64
0.784	-0.00125	0.50066	0.50052	60.21	119.41
0.7825	-0.00282	0.50152	0.50114	41.89	82.54
0.78	-0.00504	0.50270	0.50185	32.65	63.83
0.68	-0.03477	0.53295	0.50126	15.21	25.78
0.58	-0.14382	0.59485	0.50470	10.35	14.79
0.55	-0.18734	0.62003	0.50668	9.57	13.06
0.45	-0.32700	0.70065	0.50708	8.37	10.43
0.38	-0.50314	0.78854	0.51217	7.56	8.95
0.25	-0.89900	0.96734	0.51088	6.83	6.82
0.1	-2.35906	1.32317	0.50363	6.35	5.55
0.04	-5.86011	1.68478	0.50310	6.10	4.82

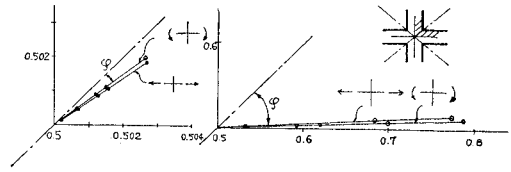


図-6

いる。

最大応力は、対称軸 $\pi/4$ 軸上の点に生ずる。

表-5の2軸引張りの項から、応力が隅角部全体に比較的均等に分布しており、これと図-8(後述)とから隅角部全体に1.0の応力が生じて応力集中の生じないような曲率半径の大きさは $\rho = -0.64$ 程度と思われる。

c) 1軸面内曲げの場合

図-5からわかるように応力分布の形は、1軸引張りの場合に非常に似ている。隅角部より離れたところでは、6.0の応力を生じ、これは材料力学より求まる $\sigma = \frac{M}{I}y = 6.0$ に一致する。

最大応力の発生点は、 $\pi/4$ 軸より荷重側に生じ、1軸引張りの場合と同じようにして調べると図-6のようになる。 $\varphi = -0.0001 \sim -0.005$ では、 $\varphi = 8^\circ \sim 10^\circ$ (図-6左図)、曲率半径の大きいところでは、 $\varphi = 42^\circ \sim 43^\circ$ (図-6右図)である。

d) 2軸面内曲げによる応力分布も2軸引張りの場合によく似ている。

(4) 隅角部の角度と曲率半径と応力の order との関係

平面弾性問題として隅角部の角度と隅角部付近の応力分布の考察については、いままでもいくつかの論文⁷⁾があるが、ここでは隅角部の角度が $\frac{3}{2}\pi$ の場合の隅角部の曲率半径と応力の order との関係を知るため、まず簡単にそれを述べる。

隅角部付近に外力の作用していない図-7のような領域において、隅角部付近の応力関数を

$$F(r, \theta) = r^{m+2} f(\theta)$$

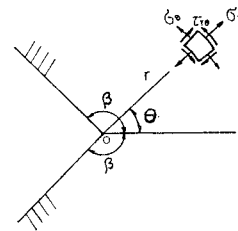


図-7

と表わすと、関数 $F(r, \theta)$ は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \times \left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

を満足するからこれより、

$$f(\theta) = A \sin m \theta + B \cos m \theta + C \sin(m+2)\theta + D \cos(m+2)\theta$$

$\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$ を決めるための境界条件式は、単位円周上 $\sigma = e^{i\theta}$ で、

$$\begin{aligned} & -\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)}\overline{\varphi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} \\ & = -\frac{1}{D(1-\nu)}\int_0^s [m(s) + i\int_0^s p(s)ds] \\ & \quad \times (dx + idy) \equiv H(\sigma) \end{aligned}$$

である。ここに $m(s)$ は、境界上の単位長さ当りの曲げモーメント、 $p(s)$ は、境界上における単位長さ当りの面に垂直な力である。

上式に $\frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{d\sigma}{\sigma-\zeta}$ を乗じて単位円周上で積分すると、

$$\begin{aligned} & -\frac{3+\nu}{1-\nu}\varphi(\zeta) + \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \cdot \frac{\overline{\varphi'(\sigma)}}{\sigma-\zeta} d\sigma \\ & + \overline{\psi(0)} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{H(\sigma)}{\sigma-\zeta} d\sigma \equiv B(\zeta) \dots\dots (19) \end{aligned}$$

となる。上式より $\varphi(\zeta)$ は、数学的には、式 (12) と全く同じようにして求められる。境界上の曲げモーメント M_θ のみを計算するのならば $M_\rho = 0$ であるから式 (18) の第1式より計算できる。したがってこのときは $\varphi(\zeta)$ のみが必要である。また式 (19) より求まる $\varphi(\zeta)$ の中に含まれる曲げ剛さ D と式 (18) の曲げ剛さ D が相殺されて M_θ の計算に D は関係しない。

つぎに外力としては、つぎのようなものを考える。

a) x 軸方向の帯の先端に大きさ M の集中曲げモーメントが作用した1軸面外曲げの場合 (図-9 参照)

式 (19) の $B(\zeta)$ の1次導関数は、

$$B'(\zeta) = \frac{M}{\pi D(1-\nu)} \cdot \frac{1}{1-\zeta^2}$$

b) x 軸および y 軸方向の帯の先端に大きさ M の集中曲げモーメントの作用した2軸面外曲げの場合 (図-9 参照)

$$B'(\zeta) = \frac{M}{\pi D(1-\nu)} \cdot \frac{2}{1-\zeta^4}$$

c) x 軸方向の帯の先端に大きさ H_{xy} の集中ねじりモーメントが作用した1軸面外ねじりの場合 (図-10 参照)

$$B'(\zeta) = \frac{H_{xy}}{\pi D(1-\nu)} \cdot \frac{i}{\zeta^2-1}$$

d) x 軸および y 軸の帯の先端に大きさ H_{xy} の集中ねじりモーメントの作用した2軸面外ねじりの場合 (図-10 参照)

$$B'(\zeta) = \frac{H_{xy}}{\pi D(1-\nu)} \cdot \frac{2i\zeta^2}{\zeta^4-1}$$

(2) 解析結果

以上4種類の場合について、数値計算においては、ポアソン比 $\nu=0.3$, $M=1.0$, $H_{xy}=1.0$ として、境界線に沿う曲げモーメント M_θ を計算した。

【軸および2軸面外曲げの縁曲げモーメント】

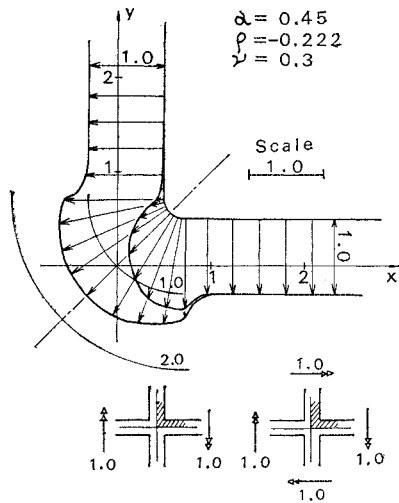


図-9

【軸および2軸面外ねじりの縁曲げモーメント】

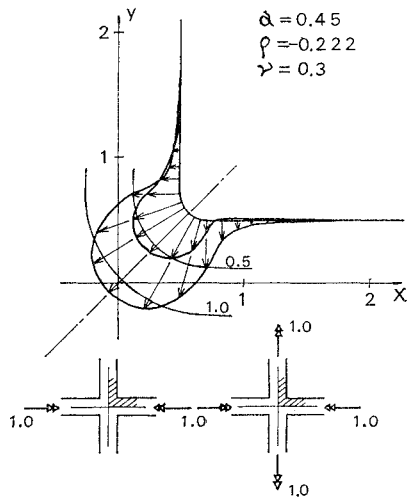


図-10

図-9, 10 には、 $\alpha=0.45$ の場合の各荷重に対する M_θ の分布を示す。

表-7, 8, 9 には、それぞれ $\alpha=0, 0.45, 0.77$ の場合の各荷重に対する M_θ の値を示す。

表-10 には、各 α に対する最大縁曲げモーメントの値やその生ずる位置などを示す。 $\alpha=0, \rho=-0.00013$ は、文献 6) による写像関数を用いて計算したものである。

a) 1軸面外曲げの場合

図-9 からわかるように、隅角部より離れた荷重側では $M_\theta=1.0$ で、隅角部に近づくと曲げモーメントの集中が生ずる。最大曲げモーメントの発生点は、 $\pi/4$ 軸より荷重側にあり、曲率半径が大きくなると、 $\pi/4$ 軸から

表-10

(対称軸 $\pi/4$ 上の曲率半径 ρ の値, 2軸面外曲げおよび2軸面多ねじり最大曲げモーメント点の座標は表-6を参照)

α	1 軸 面 外 曲 げ					2軸面外曲	1 軸 面 外 ね じ り					2軸面外ねじり
	最大曲げモーメント点の θ	最大曲げモーメント点の曲率半径	最大曲げモーメント点の座標		最大縁曲げモーメント	最大縁曲げモーメント	最大曲げモーメント点の θ	最大曲げモーメント点の曲率半径	最大曲げモーメント点の座標		最大縁曲げモーメント	最大縁曲げモーメント
			x	y					x	y		
0*	0.7835	-0.00021	0.50011	0.50002	9.61	14.22	0.787	-0.00019	0.50002	0.50010	7.70	11.54
0	0.7805	-0.00090	0.50039	0.50002	5.98	9.13	0.79	-0.00086	0.50003	0.50038	4.78	7.40
0.02	0.778	-0.00186	0.50103	0.50029	4.58	7.12	0.795	-0.00237	0.50022	0.50120	3.60	5.75
0.035	0.773	-0.00412	0.50230	0.50067	3.55	5.59	0.795	-0.00354	0.50079	0.50205	2.77	4.50
0.05	0.77	-0.00650	0.50368	0.50124	2.97	4.73	0.8	-0.00633	0.50129	0.50360	2.31	3.80
0.15	0.68	-0.03477	0.53295	0.50126	1.83	2.70	0.88	-0.03686	0.50195	0.53046	1.18	2.12
0.17**	0.68	-0.04716	0.53642	0.50253	1.71	2.44	0.85	-0.06217	0.50649	0.52720	1.11	1.99
0.3	0.55	-0.13518	0.60614	0.50229	1.39	1.94	0.88	-0.11807	0.51898	0.56000	0.80	1.48
0.35	0.53	-0.19341	0.62826	0.50472	1.31	1.80	0.88	-0.15290	0.52749	0.57218	0.72	1.37
0.45	0.43	-0.33457	0.71179	0.50500	1.20	1.58	0.85	-0.22469	0.55614	0.59145	0.61	1.19
0.55	0.33	-0.54740	0.82550	0.50576	1.13	1.41	0.85	-0.31264	0.58658	0.62687	0.53	1.04
0.65	0.23	-1.00111	0.99080	0.50797	1.07	1.25	0.82	-0.41941	0.63930	0.66385	0.46	0.92
0.73	0.1	-2.35906	1.32317	0.50363	1.03	1.12	0.8	-0.52947	0.70059	0.71224	0.41	0.81
0.77	0.04	-5.86011	1.68478	0.50310	1.00	1.04	0.7875	-0.60266	0.74971	0.75152	0.38	0.75

* 文献 6) による写像関数を用いて計算

** 対称軸 $\pi/4$ 上の曲率半径 $\rho = -0.04341$, 座標 (0.51519, 0.51519) である

b) 2軸面外曲げの場合

表-9, 図-11 より曲げモーメントが1.0の大きさで一様に分布する曲率半径は, $\rho = -0.65$ 程度である。

c) 1軸面外ねじりの場合

表-7, 8, 9 や 図-10 からわかるように隅角部より離れた荷重側では小さな値ではあるが負の曲げモーメントが生じ, 隅角部に近づくと正の曲げモーメントに変わり, 曲げモーメントの集中が生じている。最大曲げモーメントの発生点は, $\pi/4$ 軸より荷重の載荷していない側に生じ曲率半径が大きくなると, $\pi/4$ 軸に近づく(表-10 参照)。これは1軸引張りや1軸面内, 面外曲げの場合と定性的に異なっている。

d) 2軸面外ねじりの場合

最大曲げモーメントは $\pi/4$ 軸の点に生じ, 曲げモーメントの集中のためかなりのところまで正の曲げモーメントが生ずる。

(3) 隅角部の角度と曲率半径と応力の order との関係

さきに平面弾性問題として述べたと同じようにして今度は隅角部のある薄いプレートの曲げの問題として隅角部の角度と曲率半径と応力の order について考察する。

面に垂直な荷重を受けない 図-7 のような領域において, 隅角部付近のたわみ関数を

$$w(r, \theta) = r^{m+2} f(\theta)$$

と表わすと, 関数 $w(r, \theta)$ は,

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \times \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = \Delta \Delta w = 0$$

を満足するから, これより

$$f(\theta) = E \sin m\theta + F \cos m\theta + G \sin(m+2)\theta + H \cos(m+2)\theta$$

が得られ, 曲げモーメントやせん断力は,

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\ M_\theta &= -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right] \\ M_{r\theta} &= (1-\nu) D \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) \\ Q_\theta &= -D \frac{\partial}{r \partial \theta} (\Delta w) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

より計算される。ここに D は曲げ剛さ, ν はポアソン比である。境界条件としては, 境界線上で外力が作用していない自由境界として扱うと, すなわち,

$$[M_\theta]_{\theta=\pm\beta} = 0, \left[Q_\theta - \frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r} \right]_{\theta=\pm\beta} = 0$$

より, E, F, G, H に関する4個の同次方程式が得られ, その解の存在する条件より,

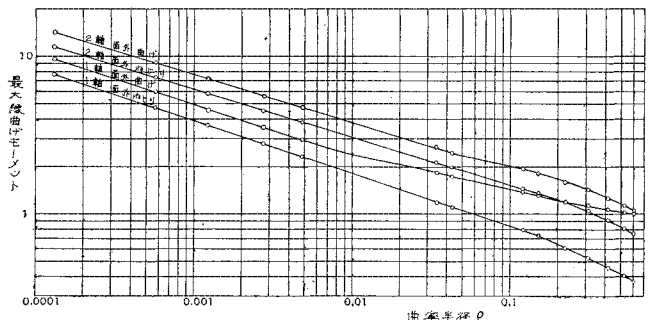


図-11