

一般膨張性摩擦塑性体に関する速度場の理論

—2重すべりの概念—

THEORIES ON A VELOCITY FIELD FOR GENERAL DILATABLE PLASTIC SOILS

—CONCEPT OF DOUBLE SLIPPAGE—

橋 口 公 一*

By Koichi Hashiguchi

1. 序 論

D.C. Drucker & W. Prager¹⁾ により提唱された Coulomb・Mohr の破壊条件式を塑性 Potential として応力-ひずみ速度関係を規定する概念は速度の特性曲線(すべり線)が応力のそれに一致、すなわち、Coulomb の破壊応力状態に到達した面に沿ってすべりが生ずるといふ従来の破壊概念をそのまま受け入れ、さらにひずみ速度に対して応力のみを関連づける場合、等方性材料に対して必須条件となる²⁾ St. Venant の原理をも満たすものとして R.T. Shield^{3),4)}、山口柏樹博士^{5),6)} を経て筆者⁷⁾ により踏襲、発展された。一方、本論は摩擦性材料に対する Dilatation 現象をも説明するかに見られたが、W. Sylwestrowicz⁸⁾、A.D. Cox^{9),10)} などの実験事実を通して実状をはるかに上まわる過度の膨張を併起することが示唆され、この膨張性の観点から理論を根底より考え直す必要性が指摘された。

この要求に呼応して、非圧縮性の立場から、さらには膨張率にしたがう材料定数を採用する観点から幾多の諸論が報告されてきたが、これらは A.J.M. Spencer⁹⁾ の所論を除いてはいずれもひずみ速度に対して応力のみを関係づけたもので、その場合には上記 Associated flow rule の極限膨張状態外では一般に仮定しうる i) 等方性条件、および経験的にあるいは前記 Sylwestrowicz、Cox などの実験より推察しうる、ii) 応力と速度の特性曲線の一致条件は両立し得ない。したがって、これらは両条件のいずれか一方を採用したものである。

条件 i) を採用したものとして、一面せん断箱内のせん断状況の推察から R. Hill¹¹⁾ が提唱し、Cox により発展された非圧縮性に局限された考えをポアソン比に類似の概念の導入により膨張性材料へ拡張した E.H. Davis の近年の報告¹²⁾ は注目すべきものであるが、すべり線が

応力の特性曲線に一致しない点に関しては実状の再検討もさることながら、妥当な論理的説明は見当らない。また、加工硬化の立場から D.C. Drucker 他¹²⁾、A.W. Jenike & R.T. Shield¹³⁾ および A.W. Jenike¹⁴⁾ の諸研究を見受けるが、降伏条件の決定その他、多くの難解な問題を含んでいる。

また、条件 ii) に対しては G.A. Geniev の片面すべり理論^{9),15)} を修正し、さらに膨張性を考慮した高木俊介の研究¹⁵⁾、また、非圧縮性の立場から、De Jong^{9),15)}、R.M. Haythornthwaite¹⁶⁾ などの諸論があげられるが、いずれもおおのこの仮定した構成方程式の与える非等方性には無考慮に過ぎるように思われる。

以上に対して、応力速度を導入することにより上記2条件を両立せしめた Spencer の報告(非圧縮性)は特色ある研究といえようが、実際問題の解析には数学的処理の複雑さを伴うとともに、J. Mandel の批判論文¹⁷⁾ にも見られるように、ひずみ速度の方向が応力速度に従属となり、従来の金属塑性などに踏襲された変形概念では説明し得ない面を含むものと思われる。また、古く中原益次郎博士などに提案されていた“基本的すべり”なる概念(非圧縮性)¹⁸⁾ も形式的にはこれら2条件を満たしているものと見なせるが、基本仮定からして一般の変形を論ずるには多くの矛盾が内在するものと考えられる。

上述のように、摩擦性塑性体の速度場の問題は多くの難解な面を含み、いまだに決定的統一理論に至り得ない実状であるといえよう。しかしながら、上述の報告のうちとくに Davis、Spencer あるいは加工硬化の立場からの諸研究のいずれかが将来、実際現象をも再検討しつつ、一般に認められるに至るかもしれない。

ところで、“一般の平面塑性変形は Coulomb の破壊応力状態を満たす応力特性曲線に沿うすべりの重ね合わせからなる”とする仮説は、狭義には材料の非圧縮性および前記の条件 ii) に対して Spencer (Two superimposed shearing deformations) あるいは Mandel

* 正会員 九州大学助手 農学部農業機械学研究室

(Double glissement)^{17),19)} によりひとつの仮定として提唱されたが、本論文において明らかになるように必ずしも、応力と速度の特性曲線の一致を意味するものではなく Davis 流の所論に対しても言及し得るもので、筆者には唯一の可能な変形概念のように思われる。

本論文においてはこの“2重すべりの概念”を根底から省察し、さらに本論の一般膨張性材料への拡張を試みこれより生ずる諸論に対する問題点を呈示し、今後の研究の一助としたい。

2. 2重すべりの概念

序論においても述べたように、本概念は単に一般の平面塑性変形は材料の非圧縮性に対して両応力特性曲線方向のすべりの重ね合わせからなると規定されるものであるが、すべりの方向を規定する規準座標の選び方により数種の諸論を生ずる。本編ではこの規準座標を任意の直角座標として考え、また、元来非圧縮性に対する本概念を膨張性による材料定数の採用により Associated flow rule へ至る一般膨張性材料への拡張論として述べる。

さて、図-1 において、ある規則にしたがって固定座標 (x, y) に対して速度 V および角速度 Ω で動いている直角座標 (ξ, ζ) を考え、その原点 Q の近傍の材料要素のこの動座標に対する速度ベクトルを v' 、固定座標に対するそれを v とする。いま、瞬間 t において動座標 (ξ, ζ) が

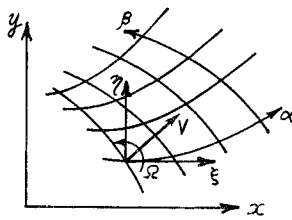


図-1 変形の規準座標 (ξ, η)

固定座標 (x, y) に対して平行になるように選び、材料の非圧縮性に対して2つのすべりの方向が両応力特性曲線に平行であると仮定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\alpha}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\alpha}} &= -\cot(\theta + \phi) \\ \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\beta}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\beta}} &= \tan \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.1)$$

が成り立つ。ここで、 v_{ξ}' および v_{η}' はそれぞれ v' の ξ および η 一軸方向成分。 θ は x 軸から α -すべり線へ測った角。 ϕ は内部摩擦角。

一方、Associated flow rule の場合の上の関係は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\alpha}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\alpha}} &= \frac{\partial v_y}{\partial S_{\alpha}} / \frac{\partial v_x}{\partial S_{\alpha}} = -\cot \theta \\ \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\beta}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\beta}} &= \frac{\partial v_y}{\partial S_{\beta}} / \frac{\partial v_x}{\partial S_{\beta}} = \tan(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.2)$$

で示される⁷⁾。ただし、 v_x および v_y はそれぞれ v の x および y 一軸方向の成分。

以上の非圧縮性および過膨張性なる両極限状態の中間の膨張性に対して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\alpha}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\alpha}} &= -\cot(\theta + \phi - \psi) \\ \frac{\partial v_{\eta}'}{\partial S_{\beta}} / \frac{\partial v_{\xi}'}{\partial S_{\beta}} &= \tan(\phi + \psi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.3)$$

が仮定されよう。ここに、 ψ は材料の膨張性による定数である ($0 \leq \psi \leq \phi$)。

なお、式 (2.3) は v' の α および β -すべり線方向の速度 u' および v' を用いると、

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi}' &= u' \cos \theta - v' \sin(\theta + \phi) \\ v_{\eta}' &= u' \sin \theta + v' \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.4)$$

なる関係および速度不連続は無いものとし、 $u' \neq 0, v' \neq 0$ に注意すると、

$$\left. \begin{aligned} \cos(\phi - \psi) \frac{\partial u'}{\partial S_{\alpha}} - \sin \psi \frac{\partial v'}{\partial S_{\alpha}} &= 0 \\ \cos(\phi - \psi) \frac{\partial v'}{\partial S_{\beta}} - \sin \psi \frac{\partial u'}{\partial S_{\beta}} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.5)$$

と表現される。

さて、式 (2.3) あるいは式 (2.5) に対してつぎの諸関係

$$\left. \begin{aligned} dv_{\xi} &= dv_x + \Omega \eta \\ dv_{\eta} &= dv_y - \Omega \xi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} v_x &= u \cos \theta - v \sin(\theta + \phi) \\ v_y &= u \sin \theta + v \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.7)$$

ただし、 u および v は v の α および β -すべり線方向の成分。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial S_{\alpha}} &= \cos \theta, \quad \frac{\partial \eta}{\partial S_{\alpha}} = \sin \theta \\ \frac{\partial \xi}{\partial S_{\beta}} &= -\sin(\theta + \phi), \quad \frac{\partial \eta}{\partial S_{\beta}} = \cos(\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.8)$$

を用いると、

$$\left. \begin{aligned} \cos(\phi - \psi) \frac{\partial u}{\partial S_{\alpha}} - \sin \psi \frac{\partial v}{\partial S_{\alpha}} \\ + \{u \sin(\phi - \psi) - v \cos \psi\} \frac{\partial \theta}{\partial S_{\alpha}} \\ - \Omega \sin(\phi - \psi) &= 0 \\ \cos(\phi - \psi) \frac{\partial v}{\partial S_{\beta}} - \sin \psi \frac{\partial u}{\partial S_{\beta}} \\ - \{v \sin(\phi - \psi) - u \cos \psi\} \frac{\partial \theta}{\partial S_{\beta}} \\ + \Omega \sin(\phi - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.9)$$

なる両すべり線方向の関係を得る。さらに本式に

$$\left. \begin{aligned} u \cos \phi &= u_x \cos(\theta + \phi) + v_y \sin(\theta + \phi) \\ v \cos \phi &= -u_x \sin \theta + v_y \cos \theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.10)$$

および

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial S_{\alpha}} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial S_{\beta}} &= -\sin(\theta + \phi) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(\theta + \phi) \frac{\partial}{\partial y} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.11)$$

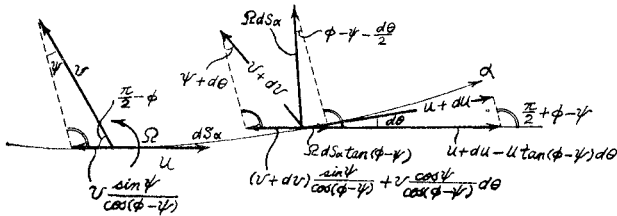


図-2 a-すべり線上の2点の速度成分の関係

を考慮すると

$$\left. \begin{aligned}
 & \cos(2\theta + \phi - \psi) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\
 & + \sin(2\theta + \phi - \psi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 & + \cos(\phi - \psi) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\
 & + \sin(\phi - \psi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega \right) = 0 \\
 & \cos(2\theta + \phi + \psi) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\
 & + \sin(2\theta + \phi + \psi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 & - \cos(\phi - \psi) \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \\
 & + \sin(\phi - \psi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.12)$$

これより

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\sin \psi}{\cos(\phi - \psi) \cos(2\theta + \phi)} \\
 & \times \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 & - \tan \psi \tan(\phi - \psi) \tan(2\theta + \phi) \\
 & \times \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega \right) = 0 \\
 & \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tan(2\theta + \phi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\
 & + \frac{\sin(\phi - \psi)}{\cos \psi \cos(2\theta + \phi)} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} - 2\Omega \right) \\
 & = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2.13)$$

を得る。この上式は膨張性条件とみなし得ようが、下式は $\psi=0$ または $\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y - 2\Omega=0$ のとき、St. Venant の原理に一致する。

なお、式 (2.9) は $\phi=0$ なる場合の Geiringer 式に相当するもので、 $\psi=\phi$ の場合にはすべり線に沿う縦ひずみ速度が 0、すなわち $\epsilon_a = \epsilon_\beta = 0$ となり、また $\psi=0$ の場合には式 (2.5) より $\partial u'/\partial S_a = \partial v'/\partial S_\beta = 0$ となるが、図式に示せば 図-2 のごとくである。

3. 2重すべり論に基づくひずみ速度方程式

前編の始めに当 2重すべりの仮説はすべりの方向を規

定する規準座標 (ξ, η) の運動のしかた、すなわち V および Ω の選び方により数論を生ずることを述べたが、これらの具体的意味合いについては触れなかった。なお、前編の諸式からわかるように V は導かれる諸方程式に関与しない。したがって Ω についてのみ考察すればよい。この Ω には以下の 3つの場合が考えられ、本編においてはこれらの場合に対して生ずる諸論について詳察する。

(1) 材料要素とともに回転する場合

$$\Omega = \omega_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \dots\dots\dots (3.1)$$

を式 (2.13) に代入すると

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\sin \psi}{\cos(\phi - \psi) \cos(2\theta + \phi)} \\
 & \times \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0 \\
 & \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} + \tan(2\theta + \phi) \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) = 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.2)$$

を得る。本式は

$$\sin \psi' = \frac{\sin \psi}{\cos(\phi - \psi)} \quad (0 \leq \psi' \leq \phi) \dots\dots\dots (3.3)$$

とおけば、Davis の所論に一致し、速度の特性曲線は

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} \tan\left(\theta + \frac{\phi - \psi'}{2}\right) : K_1\text{-線} \\ -\cot\left(\theta + \frac{\phi + \psi'}{2}\right) : K_2\text{-線} \end{cases} \dots\dots (3.4)$$

与えられ、応力のそれに一致しない。

なお、本論は近年 Davis により弾性学援用の立場からかなり詳細に論じられたが、E. Dembicki 他が軸対称問題に関する論文²⁰⁾ に引用している古く 1960 年の D. Radenkovic の Potential 論に相通ずるものと考えられる。

さて、Coulomb・Mohr の破壊条件式において ϕ を ψ' で置きかえた

$$\begin{aligned}
 f &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} - C \cdot \cos \psi' \\
 &+ \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \cdot \sin \psi' = 0 \dots\dots\dots (3.5)
 \end{aligned}$$

ただし、 C は粘着力

を塑性 Potential (Radenkovic) とすれば、ひずみ速度は

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} = \frac{\lambda}{2} \left(\sin \psi' + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2T} \right) \\
 &= \frac{\lambda}{2} \{ \sin \psi' - \sin(2\theta + \phi) \} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} = \frac{\lambda}{2} \left(\sin \psi' - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2T} \right) \\
 &= \frac{\lambda}{2} \{ \sin \psi' + \sin(2\theta + \phi) \}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xy} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{\tau_{xy}}{T} \\ &= \frac{\lambda}{2} \cos(2\theta + \phi) \\ T &= \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \lambda > 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.6)$$

で与えられよう。これより

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_x + \dot{\epsilon}_y &= 2 \dot{\epsilon}_{xy} \frac{\sin \psi'}{\cos(2\theta + \phi)} \\ \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_x &= 2 \dot{\epsilon}_{xy} \tan(2\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.7)$$

が得られ、Davis の与えた膨張性ならびに等方性条件式に一致する。さらに式 (3.7) を v_x, v_y で示すと式 (3.2) が得られようが、これらの特性曲線に沿う v_x, v_y の微分関係は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \tan\left(\theta + \frac{\phi - \psi'}{2}\right) \text{ に対して } (K_1\text{-線に沿って}) \\ \frac{dv_y}{dv_x} &= -\cot\left(\theta + \frac{\phi - \psi'}{2}\right) \\ \frac{dy}{dx} &= -\cot\left(\theta + \frac{\phi + \psi'}{2}\right) \text{ に対して } (K_2\text{-線に沿って}) \\ \frac{dv_y}{dv_x} &= \tan\left(\theta + \frac{\phi + \psi'}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.8)$$

で与えられ、これにより Hodograph 法が適用し得よう。また、本式は K_1, K_2 -線に沿う速度 \bar{u} および \bar{v} を用いると、

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \bar{u} \cos\left(\theta + \frac{\phi - \psi'}{2}\right) - \bar{v} \sin\left(\theta + \frac{\phi + \psi'}{2}\right) \\ v_y &= \bar{u} \sin\left(\theta + \frac{\phi - \psi'}{2}\right) + \bar{v} \cos\left(\theta + \frac{\phi + \psi'}{2}\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.9)$$

なる関係に注意して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial K_1} - \sin \psi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial K_1} - \bar{v} \cos \psi' \frac{\partial \theta}{\partial K_1} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial K_2} - \sin \psi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial K_2} + \bar{u} \cos \psi' \frac{\partial \theta}{\partial K_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.10)$$

と表わされる。

ところで、速度不連続に関しては Associated flow rule の場合と同様の所論により、つぎの事柄が証明し得る。

① 山口博士が文献 6) に示したと同等の手続きにより、式 (3.6) および速度不連続線上の応力関係の考察から“速度不連続線は速度の特性曲線に一致しなければならない”ことが容易に論証し得る。

② 筆者が文献 7) において用いたと同等の論法により、速度不連続線を横切つての速度成分の飛躍関係は式 (3.10) から

$$\left. \begin{aligned} K_1\text{-線が速度不連続線である場合} \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial K_2} = \sin \psi' \frac{\partial \bar{u}}{\partial K_2} \quad (dK_2 \rightarrow 0) \\ K_2\text{-線が速度不連続線である場合} \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial K_1} = \sin \psi' \frac{\partial \bar{v}}{\partial K_1} \quad (dK_1 \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.11)$$

となる。また、速度不連続線に沿つての速度不連続成分の伝播の状況は、

$$\bar{u}_D = \bar{u}_{D_0} e^{\pm \theta \tan \psi'}, \bar{v}_D = \bar{v}_{D_0} e^{\pm \theta \tan \psi'} \dots\dots(3.12)$$

ただし、 \bar{u}_D および \bar{v}_D はそれぞれ u および v の不連続量で、 \bar{u}_{D_0} および \bar{v}_{D_0} はこれらの $\theta=0$ における値。また、+ は K_1 -線、- は K_2 -線に相応する。

このほか、文献 7) に示した論法により速度不連続の反射、さらには塑性仕事率正なる検証法なども容易に明らかになるが、紙数の関係上、また、本論の適否そのものが検討されるべき現段階であるので割愛する。

本論による実際問題の解法には文献 7) に示したと類同の数値微分法も適用し得るが、式 (3.8) の関係にしたがう Hodograph 法により容易に解が得られよう。

なお、本論における応力と速度の特性線の不一致は、序論に述べたように Coulomb・Mohr の破壊概念に対する従来の解釈にはしたがわかない。ところで、塑性応力域は Coulomb・Mohr の破壊応力線 (応力特性線) により稠密におおわれ、この塑性域内ではすべり線は一般には任意の方向を取り得る。すなわち、応力と速度の特性曲線の一致は力学的制約条件ではないと考えられよう。

(2) 原点が材料要素とともに移動し、座標軸方向はすべり線に対して常に一定角をなす場合

$$\left. \begin{aligned} \varrho &= \frac{D\theta}{Dt} = \dot{\theta} + v_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + v_y \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ &= \dot{\theta} + u \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} + v \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.13)$$

ここで、 D/Dt は convected coordinates を一定に保つた状態での t に関する convected derivative。また、dot は $\partial/\partial t$ (x および y を一定に保つた状態での t のみに関する偏微分) の意。

本論は Spencer により非圧縮性材料に対して提案され彼自身による滑らかなポンチの押込み問題あるいは C.S. Pemberton²¹⁾ による先細流管からの押し出しの定常問題への応用を見受ける。本編ではこの Spencer の概念を膨張性材料へ拡張する。

さて、本場合には、式 (3.13) に対して式 (2.13) の特性曲線は応力のそれに一致する。しかしながら、St. Venant の条件は満たされない。したがって、まず $\varrho = D\theta/Dt$ に対して式 (3.13) が等方性条件を満たす構成方程式であることを証明しよう。構成方程式たり得るには剛体的運動の重ね合わせに対して独立な Tensor 成分で表現されねばならない。さらに、等方性条件に関して

は直交変換に対して不変形式を取らねばならない²²⁾。

まず

$$\tan(2\theta + \phi) = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \dots\dots\dots (3.14)$$

より

$$\left\{ 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \right\} \frac{D\theta}{Dt} = (\sigma_x - \sigma_y) \frac{D\tau_{xy}}{Dt} - \tau_{xy} \left(\frac{D\sigma_x}{Dt} - \frac{D\sigma_y}{Dt} \right) \dots\dots\dots (3.15)$$

を得る。

さて、ここで

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{11}, \sigma_y = \sigma_{22}, \tau_{xy} = \sigma_{12} = \sigma_{21} \\ \frac{\partial v_x}{\partial x} &= e_{11}, \frac{\partial v_y}{\partial y} = e_{22}, \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) = e_{12} = e_{21} \\ \omega_{11} = \omega_{22} &= 0, \omega_{12} = -\omega_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.16)$$

とき、さらに、剛体的運動の重ね合わせに対して独立な Jaumann-noll tensor²³⁾

$$\frac{\mathfrak{D}\sigma_{ij}}{\mathfrak{D}t} = \frac{D\sigma_{ij}}{Dt} + \sigma_{im}\omega_{mj} + \sigma_{mj}\omega_{mi} \dots\dots\dots (3.17)$$

を用いれば、式 (3.15) は

$$\left\{ 2\sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2} \right\} \frac{D\theta}{Dt} = (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\mathfrak{D}\sigma_{12}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{12} \left(\frac{\mathfrak{D}\sigma_{11}}{\mathfrak{D}t} - \frac{\mathfrak{D}\sigma_{22}}{\mathfrak{D}t} \right) - \{ (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2 \} \omega_{12} \dots\dots\dots (3.18)$$

となる。式 (3.14) および式 (3.18) により式 (2.13) は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{12}(e_{11} + e_{22}) - \frac{\sin\psi}{\cos(\phi - \psi)} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ - \tan\psi \tan(\phi - \psi) \\ \times \frac{(\sigma_{11} - \sigma_{22}) \left\{ (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\mathfrak{D}\sigma_{12}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{12} \left(\frac{\mathfrak{D}\sigma_{11}}{\mathfrak{D}t} - \frac{\mathfrak{D}\sigma_{22}}{\mathfrak{D}t} \right) \right\}}{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2} \\ = 0 \\ \{ \sigma_{12}(e_{11} - e_{22}) - (\sigma_{11} - \sigma_{22})e_{12} \} \\ \frac{\sin(\phi - \psi) \left\{ (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{\mathfrak{D}\sigma_{12}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{12} \left(\frac{\mathfrak{D}\sigma_{11}}{\mathfrak{D}t} - \frac{\mathfrak{D}\sigma_{22}}{\mathfrak{D}t} \right) \right\}}{\cos\psi \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}} \\ = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.19)$$

と表わされ、構成方程式としての条件を満たしていることが把握し得た。さらに、式 (3.19) は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{ij}e_{mn}\delta_{mn} - \frac{\sin\psi}{\cos(\phi - \psi)} \sqrt{2\sigma_{rs}\sigma_{rs} - \sigma_{rr}\sigma_{ss}} \\ + \tan\psi \tan(\phi - \psi) \\ \times \frac{\sigma_{il} \left(\sigma_{jk} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{lk}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{lk} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{jk}}{\mathfrak{D}t} \right) + \sigma_{jl} \left(\sigma_{ik} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{lk}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{lk} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{ik}}{\mathfrak{D}t} \right)}{2\sigma_{rs}\sigma_{rs} - \sigma_{rr}\sigma_{ss}} \\ = 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} e_{ip}\sigma_{jp} - e_{jp}\sigma_{ip} - \frac{\sin(\phi - \psi)}{\cos\psi} \cdot \frac{\sigma_{ik} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{jk}}{\mathfrak{D}t} - \sigma_{ik} \frac{\mathfrak{D}\sigma_{ik}}{\mathfrak{D}t}}{\sqrt{2\sigma_{rs}\sigma_{rs} - \sigma_{rr}\sigma_{ss}}} \\ = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.20)$$

の形に2階のテンソルに縮約され、直交変換に対して不変形式をとることがわかる。すなわち、等方性条件を満たしている。

速度不連続に関しては応力(あるいは速度)の特性線は応力の速度不連続線たり得ないこと⁶⁾を考えれば、式 (3.13) の $\dot{\theta}$ が有限である限り、式 (2.9) より

$$\left. \begin{aligned} \alpha\text{-線が速度不連続線である場合} \\ \frac{\partial v}{\partial S_\beta} = \frac{\sin\psi}{\cos(\phi - \psi)} \cdot \frac{\partial u}{\partial S_\beta} (dS_\beta \rightarrow 0) \\ \beta\text{-線が速度不連続線である場合} \\ \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} = \frac{\sin\psi}{\cos(\phi - \psi)} \cdot \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} (dS_\alpha \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.21)$$

が成り立つ。しかしながら、一般には速度不連続線の両側で Ω は連続たり得ないので、速度不連続線に沿っての速度不連続成分の単純な関係は得られない。 Ω が連続なる場合に限り、文献 7) にしたがって、

$$u_D = u_{D_0} e^{\pm \tan(2\psi - \phi) \cdot \theta}, v_D = v_{D_0} e^{\pm \tan(2\psi - \phi) \cdot \theta} \dots\dots\dots (3.22)$$

が成り立つ。

さて、本論による実際問題の解析に際しては、 Ω あるいは $\dot{\theta}$ を求めなければならない(当然のことながら、 $\Omega = D\theta/Dt \approx 0$ なる限り、式 (2.13) は準線型となり、特性曲線に沿う微分関係は $dv_y/dv_x = f(\theta)$ なる形式には求められず、Hodograph 法は適用し得ない)。Spencer は $\dot{\theta}$ に対して応力速度 $\partial\sigma_{ij}/\partial t$ を関連づけて、一解法を見出した。本解法は $\psi > 0$ に対しても全く同等に適用し得るが、後の応用例題の説明の都合上、以下に記しておく。

まず、式 (2.9) および式 (3.13) より

$$\left. \begin{aligned} \cos(\phi - \psi) \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} - \sin\psi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \\ - v \left\{ \cos\psi \frac{\partial\theta}{\partial S_\alpha} + \sin(\phi - \psi) \frac{\partial\theta}{\partial S_\beta} \right\} \\ - \dot{\theta} \sin(\phi - \psi) = 0 \\ \cos(\phi - \psi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} - \sin\psi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} \\ - u \left\{ \cos\psi \frac{\partial\theta}{\partial S_\beta} + \sin(\phi - \psi) \frac{\partial\theta}{\partial S_\alpha} \right\} \\ - \dot{\theta} \sin(\phi - \psi) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.23)$$

を得る。ここで、Spencer は Coulomb-Mohr の破壊則および式 (3.14) より得られる応力速度式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\sigma}_x &= -\dot{P} - \dot{P} \sin\phi \sin(2\theta + \phi) \\ &\quad - 2\dot{\theta} (P \sin\phi + C \cos\phi) \cos(2\theta + \phi) \\ \dot{\sigma}_y &= -\dot{P} + \dot{P} \sin\phi \sin(2\theta + \phi) \\ &\quad + 2\dot{\theta} (P \sin\phi + C \cos\phi) \cos(2\theta + \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.24)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\epsilon}_{xy} &= \dot{P} \sin \phi \cos(2\theta + \phi) \\ &\quad - 2\dot{\theta}(P \sin \phi + C \cos \phi) \sin(2\theta + \phi) \end{aligned} \right\}$$

ただし、 P は平均応力

ならびに平衡方程式より

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\alpha} + 2(P \sin \phi + C \cos \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} \\ + 2\dot{P} \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} + 2\dot{\theta} \frac{\partial P}{\partial S_\beta} = 0 \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\beta} - 2(P \sin \phi + C \cos \phi) \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} \\ - 2\dot{P} \sin \phi \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} - 2\dot{\theta} \frac{\partial P}{\partial S_\alpha} = 0 \end{aligned} \right\} (3.25)$$

なる微分関係を得、式 (3.23) における $\dot{\theta}$ の解法を与えた。

また、 \dot{P} および $\dot{\theta}$ に対する不連続条件を、Spencer は不連続線に垂直方向の成分が連続であるという観点から求めたが、むしろ式 (3.25) より簡明に、

$$\left. \begin{aligned} \alpha\text{-線が応力速度不連続線である場合} \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\beta} - 2(P \sin \phi + C \cos \phi) \\ \times \frac{\partial \theta}{\partial S_\beta} = 0 \quad (dS_\beta \rightarrow 0) \\ \beta\text{-線が応力速度不連続線である場合} \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\alpha} + 2(P \sin \phi + C \cos \phi) \\ \times \frac{\partial \theta}{\partial S_\alpha} = 0 \quad (dS_\alpha \rightarrow 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.26)$$

と得られよう。

(3) すべり線とともに回転する場合

$$\Omega = \dot{\theta} \dots\dots\dots (3.27)$$

(2) におけると同様に速度の特性曲線は応力のそれに一致し、St. Venant の理は成り立たない。ところで、 $\dot{\theta}$ は式 (3.14) より

$$\dot{\theta} = \left(\sigma_{1k} \frac{\partial \dot{\sigma}_{2k}}{\partial t} - \sigma_{2k} \frac{\partial \dot{\sigma}_{1k}}{\partial t} \right) / \sqrt{2 \sigma_{rs} \sigma_{rs} - \sigma_{rr} \sigma_{ss}}$$

なる 2 階のテンソルであり、これより式 (3.27) に対して式 (2.13) が直交変換に対して不変形式を取ることは容易に知り得るが、剛体的運動の重ね合わせに対して独立なテンソル成分で表現することは筆者にはできかねている。しかしながら、 ω_{xy} および $\dot{\theta}$ は剛体的並進運動には独立であるが、回転運動に対してはいずれも同値の影響を受けるもので、結局、 $(\omega_{xy} - \dot{\theta})$ は剛体的運動の重ね合わせに対して独立たり得るように感ずる (筆者の単なる所見にすぎない)。

以上のように、本論は根本的に不明確な面を有するにもかかわらず、本編の終りに述べられるように、定常問題のごとき $\dot{\theta} = 0$ の場合には $\phi = 0$ に対して可容な応力場をすべり線交角の単純な考慮により $\phi > 0$ に対して拡張される応力場 (一般に、Associated flow rule の場

合には可容) がそのまま適用し得ると考えられ、ひとつの検討されるべき特色ある所論のように思われる。以下においては、式 (3.27) に対して式 (2.13) が構成方程式としての条件に抵触しないものと考えて、考察を進めることにする。

さて、速度不連続に関して、不連続線を横切つての関係は前章と同等に式 (3.21) が成り立つ。また、不連続線に沿つての伝播についてもその両側で $\dot{\theta}$ が連続である限り式 (3.22) が成り立つ。

本論による実際問題の解析には前章の場合と同様に、式 (3.27) に対する式 (2.9)、さらに式 (3.25) を連立に解くことによる。

なお、定常問題の場合には $\Omega = \dot{\theta} = 0$ なるため、式 (2.13) より特性線に沿う微分関係は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \tan \theta \text{ に対して } (\alpha\text{-線に沿って}) \\ \frac{dv_y}{dv_x} = -\cot(\theta + \phi - \psi) \\ \frac{dy}{dx} = -\cot(\theta + \phi) \text{ に対して } (\beta\text{-線に沿って}) \\ \frac{dv_y}{dv_x} = \tan(\theta + \psi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.28)$$

となり、Hodograph 法が適用し得る。

以上、2 重すべりの仮説に基づく速度場の諸論について述べたが、応力場については触れなかった。ところで、これらのうち少なくとも (1) および (2) はつぎの一例に示すように、 $\phi = 0$ に対して認められた塑性応力場をすべり線交角の単純な考察により $\phi > 0$ に対して拡張して得られる応力場は、 $\phi = \psi$ なる Associated flow rule 状態外では一般には適用し得ず、応力場自体より省察せねばならないものと思われる。

さて、金属の直角ダイスによる 50% 押し出し問題に対して認められた応力場²⁴⁾ から $\phi > 0$ に対して拡張される 図-3 (a) の破線で示した $L/(1+L)\%$ 押し出しに対

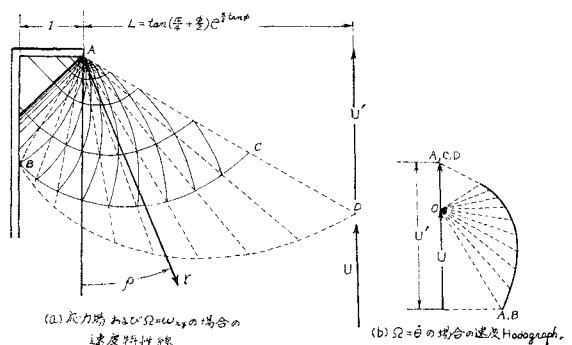


図-3 滑らかな直角ダイスによる $L/(1+L)\%$ 押し出しに対する R. Hill の拡張応力場の検討 (10° 等間隔網目)

する応力場を考えよう。

$\Omega = \omega_{xy}$ に対する速度の特性線は同図実線のようになり、 \overline{AC} 上で速度一定なる解が得られないこともさることながら、塑性変形域をピレット中央まで拡張すること自体不可能である。

$\Omega = D\theta/Dt$ に対しては $\dot{\theta} = 0$ に注意して点 A を極とする (r, ρ) 極座標を用いると、式 (3.23) より、

$$\left. \begin{aligned} \cos \phi \cdot \frac{\partial u}{\partial \rho} - v = 0 \\ r \frac{\partial v}{\partial r} - u \sin \phi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.29)$$

となるが、これより

$$\cos \phi \frac{\partial^2 u}{\partial r \cdot \partial \rho} - \frac{\sin \phi}{r} u = 0 \dots\dots\dots (3.30)$$

を得る。ここで $r = e^{\delta}$ とおけば

$$\frac{\partial^2 u(\delta, \rho)}{\partial \delta \cdot \partial \rho} - \tan \phi u(\delta, \rho) = 0 \dots\dots\dots (3.33)$$

なる電信方程式に帰着するが、本式において、 \overline{AB} および \overline{AD} 上で $u = \text{const.}$ なる境界条件を満たす解は $u = 0$ 以外には存在しないものと思われる。

ところで、 $\Omega = \dot{\theta}$ なる場合には式 (3.28) で与えられる Hodograph 法により、容易に同図 (b) に示される速度解が得られる。この解は \overline{AB} および \overline{AD} 上で速度一定なる条件、さらに $U' = U(1+L)/L$ なる非圧縮性条件をも満たしている。

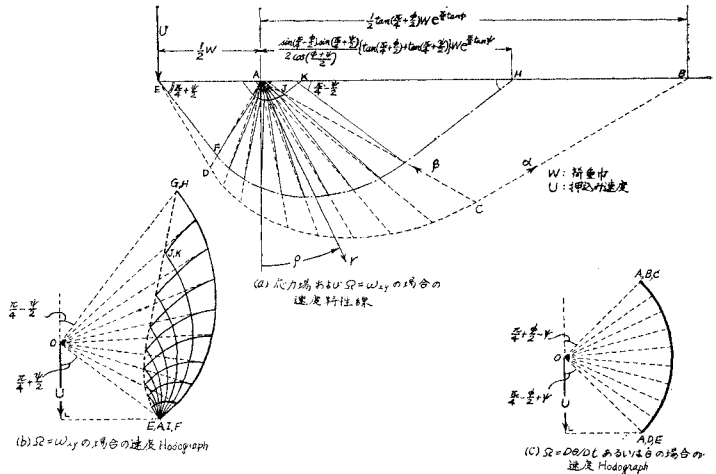
以上の例に示されたように、 $\phi = 0$ に対する応力場は Associated flow rule 状態へは単純に拡張適用し得るが $\psi \neq \phi$ なる場合には一般に適用し得ず、ここにも容易ならぬひとつの問題点が存在するものと思われる。

4. 帯状基礎支持力問題に対する速度場

前編に示した 2 重すべりの仮説により生ずる諸論はそのおのおのに多数の未解決事項を含み、さらに、これらのいずれを摩擦性塑性材料の挙動を適切に説明する論理として選択、採用すべきかについても判断を下し得ない実状であるが、本編ではこれらの諸論にしたがひ、半無限地盤上の帯状基礎の支持力問題に対する速度場を求めておく。なお、本問題は土木工学における重要課題であることもさることながら、上述の選択は多分に実験的根拠に依存しようが、これに際しても本編の問題は実状への理論の適合の可否を検討する貴重な判断材料を提供しよう。

(1) 底面の滑らかな帯状基礎に対する初期の解

底面の滑らかなポンチの押込みに対する R. Hill の初



図—4 R. Hill の初期の解の拡張応力場に対する速度解 (10° 等間隔網目)

期の解¹¹⁾から $\phi > 0$ に対して拡張される 図—4 (a) の破線で示した応力場に対する速度解を求めてみる。

a) $\Omega = \omega_{xy}$ の場合

$\psi = 0$ なる場合の速度の特性曲線は Davis の著書に見られ、またそれに対する速度解は Cox により明らかにされたと述べられているが、これは数値積分によるものと思われる。ここでは、 ψ の一般値に対して Hodograph 法による解析について述べる。

さて、速度の特性線は式 (3.4) により同図 (a) の実線および一点鎖線と与えられる。なお、この一点鎖線は速度の不連続線となる。この速度特性線に対して、式 (3.11) および式 (3.12) の速度不連続の関係さらに式 (3.8) の Hodograph 関係を用いれば、容易に同図 (b) のように速度解が得られる。本論によれば、荷重周辺の盛り上りの幅は Associated flow rule 状態におけるより小となり、またその高さは一定ではなく、荷重に近づくにしたがひ低位となる。

b) $\Omega = D\theta/Dt$ の場合

Spencer の報告に見られる本問題の解析 ($\psi = 0$) は、 $v = 0$ に対する設定条件あるいは $\dot{\theta}$, \dot{P} の境界条件などの説明に多少厳密さを欠くものと思われる。

さて、ADE において式 (3.23) および式 (3.25) より直線応力場であることに注意して、

$$\left. \begin{aligned} P &= C \cot \phi \left\{ \frac{1}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \tan \phi) - 1 \right\}, \\ \theta &= -\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\alpha} + \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \tan \phi) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial S_\alpha} &= 0 \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\beta} - \frac{2C \cos \phi}{1 - \sin \phi} \exp(\pi \tan \phi) \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial S_\beta} &= 0 \\ \cos(\phi - \psi) \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} - \sin \psi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} - \dot{\theta} \sin(\phi - \psi) &= 0 \end{aligned} \right\}$$

$$\cos(\phi-\psi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} - \sin \psi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} + \dot{\theta} \sin(\phi-\psi) = 0 \quad (4.1)$$

を得る。

さて、 \overline{AE} においては常に $\theta = -\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2}$ ，すなわち $\dot{\theta} = 0$ なる境界条件を満たさねばならないが，これを領域 ADE について拡張仮定すると式 (4.1) の第 2，第 3 式より

$$\dot{\theta} = 0, \dot{P} = \text{const.} \quad (4.2)$$

となる。ここで，点 E の速度はその鉛直成分が U に等しくなければならないこと，および \overline{ED} は速度不連続線であるから式 (3.21) の関係が成り立たねばならないことより

$$u = \frac{\cos(\phi-\psi)}{\cos(\pi/4-\phi/2+\psi)} U, v = \frac{\sin \psi}{\cos(\pi/4-\phi/2+\psi)} U \quad (4.3)$$

となる。ところで，一般に金属塑性あるいは Associated flow rule の場合にも \overline{AE} 上の速度の仮定のしかたで種々の速度解が得られ，解は唯一には定まらないが，ここでは式 (4.3) の一定値で与えられるものとする。これにより， $\dot{\theta} = 0$ に対して式 (4.1) の第 4，第 5 式より ADE 全域において速度は式 (4.3) の定値で与えられることになる。

つぎに ACD において，図-4 (a) のごとく点 A を極とする極座標 (r, ρ) を用いれば，

$$\left. \begin{aligned} P &= C \cot \phi \left[\frac{1}{1-\sin \phi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \phi - 2\rho \right) \tan \phi \right\} - 1 \right], \\ \theta &= \rho - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial \rho} + \frac{2C \cos \phi}{1-\sin \phi} \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \phi - 2\rho \right) \tan \phi \right\} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial \rho} \\ &\quad + 2 \dot{P} \sin \phi = 0 \\ \frac{\partial \dot{P}}{\partial r} - \frac{2C}{1-\sin \phi} \left(\frac{\partial \dot{\theta}}{\partial r} + \frac{2\dot{\theta}}{r} \right) \exp \left\{ \left(\frac{\pi}{2} + \phi - 2\rho \right) \tan \phi \right\} \\ &= 0 \\ \cos(\phi-\psi) \frac{\partial u}{\partial \rho} - \sin \psi \frac{\partial v}{\partial \rho} - v \cos \psi + r \dot{\theta} \frac{\sin(\phi-\psi)}{\cos \phi} \\ &= 0 \\ \sin \psi \frac{\partial u}{\partial r} - \cos(\phi-\psi) \frac{\partial v}{\partial r} + u \sin(\phi-\psi) \frac{\cos \phi}{r} \\ &\quad + \dot{\theta} \sin(\phi-\psi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

となる。本式より， \overline{AD} において式 (4.3) と連続なる速度解は，

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U \cos(\phi-\psi)}{\cos \phi \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ \left(\rho + \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \tan(2\psi - \phi) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{U \sin \psi}{\cos \phi \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ \left(\rho + \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \tan(2\psi - \phi) \right\} \end{aligned} \right\}$$

これに対して，

$$\left. \begin{aligned} \dot{P} &= \frac{2UC \sin(\pi/2 + \phi - \psi)}{r(1-\sin \phi) \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ \left(-3\rho + \frac{\pi}{4} + \frac{3}{2}\phi \right) \tan(2\psi - \phi) \right\} \\ \dot{\theta} &= -\frac{U \cos(\phi-\psi)}{r \cos \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ -\left(\rho + \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \tan(2\psi - \phi) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

となる。したがって， \overline{AD} は \dot{P} および $\dot{\theta}$ の不連続線となるが，式 (4.6) は

$$\dot{P} \cos \phi + 2\dot{\theta} (P \sin \phi + C \cos \phi) = 0 \quad (4.7)$$

となるので，不連続条件式 (3.26) を満たすためには ADE 域の式 (4.2) で示された定値 \dot{P} は， $\dot{P} = 0$ でなければならないことになる。

さらに，ACB においては，

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{C \cos \phi}{1-\sin \phi}, \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\alpha} + \frac{2C}{1-\sin \phi} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial S_\alpha} &= 0 \\ \cos \phi \frac{\partial \dot{P}}{\partial S_\beta} - \frac{2C}{1-\sin \phi} \frac{\partial \dot{\theta}}{\partial S_\beta} &= 0 \\ \cos(\phi-\psi) \frac{\partial u}{\partial S_\alpha} - \sin \psi \frac{\partial v}{\partial S_\alpha} \\ &\quad - \dot{\theta} \sin(\phi-\psi) = 0 \\ \cos(\phi-\psi) \frac{\partial v}{\partial S_\beta} - \sin \psi \frac{\partial u}{\partial S_\beta} \\ &\quad + \dot{\theta} \sin(\phi-\psi) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

となる。これより AC で式 (4.5) と連続なる速度解は，

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U \cos(\phi-\psi)}{\cos \phi \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ \frac{\pi}{2} \tan(2\psi - \phi) \right\} \\ v &= \frac{U \sin \psi}{\cos \phi \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} + \psi \right)} \exp \\ &\quad \times \left\{ \frac{\pi}{2} \tan(2\psi - \phi) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

と得られる。これに対して $\dot{P} = \dot{\theta} = 0$ となるが，これらは \overline{AC} における \dot{P} と $\dot{\theta}$ の不連続条件を満たし，また式 (3.24) より応力速度はいずれも 0 となり， \overline{AC} が自由表面なる境界条件を満たしている。

以上に示した解析は ADE における速度の仮定から出発したもので，もちろん，解の一例としてしか位置づけられず，今後の解の唯一性に対する論理の確立に期待

せねばならない。

c) $\Omega = \hat{\theta}$ の場合

本場合には b) における各領域の諸方程式は領域 ADC における速度式が

$$\left. \begin{aligned} \cos(\phi - \psi) \frac{\partial u}{\partial \theta} - \sin \psi \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ + \{ \sin(\phi - \psi)u - \cos \psi \cdot v \} \\ - \hat{\theta} r \sin(\phi - \psi) \cos \phi = 0 \\ \cos(\phi - \psi) \frac{\partial v}{\partial r} - \sin \psi \frac{\partial u}{\partial r} \\ - \hat{\theta} \sin(\phi - \psi) = 0 \\ \dots\dots\dots (4.10) \end{aligned} \right\}$$

となることを除いては全く同等に成り立ち、これらを満たす解は ACD において $\dot{P} = \hat{\theta} = 0$ として b) の場合と全く同等の速度解で与えられる。

なお、本場合には $\hat{\theta} = 0$ であるから

式 (3.28) の関係により結果的に Hodograph 法が適用でき、図-4 (b) のように図解的に速度解が得られるが、実は b) の場合にも全域において $d\theta/dt = dP/dt = 0$ となり同等に Hodograph 法が成り立つのである。

(2) L. Prandtl の応力場に対する速度解

Prandtl の応力場は $\phi > 0$ に対して 図-5 (a) の破線のごとく拡張されるが、本題は前題と全く同様の所論により解析しうるので簡単に説明する。

$\Omega = \omega_{xy}$ の場合には速度の特性曲線は 図-5 (a) の実線のようになり、一点鎖線で示された \widehat{AF} および \widehat{GF} は速度不連続線となる。この特性曲線に対する Hodograph は同図 (b) のように与えられる。

$\Omega = D\theta/Dt$ および $\hat{\theta}$ の場合には前題と同様に $\Omega = 0$ となり、Hodograph 関係にしたがい同図 (c) のように速度解が得られる。

5. 結 言

以上、非圧縮性から Associated flow rule の過膨張性に至る摩擦性塑性等方材料の速度論に関して 2 重すべりの概念に基づく諸論を示したが、これらにはいかにも多数の容易ならぬ未解決事項が残され、本論文は単に諸問題点の指摘を行なったに過ぎないかもしれない。しかしながら、速度場の問題が混迷模索し、幾多の仮説を乱出せる現時点で、2 重すべりの仮説こそが将来、本問題を的確に説明しうるに至る論理的に妥当な概念であると信じる筆者としては、この小論文を通して本概念が強調され、さらに今後この観点からいっそうの究明が進められ、長年にわたる速度場の難題に対する一打開策が得られれば幸いきわまりない。

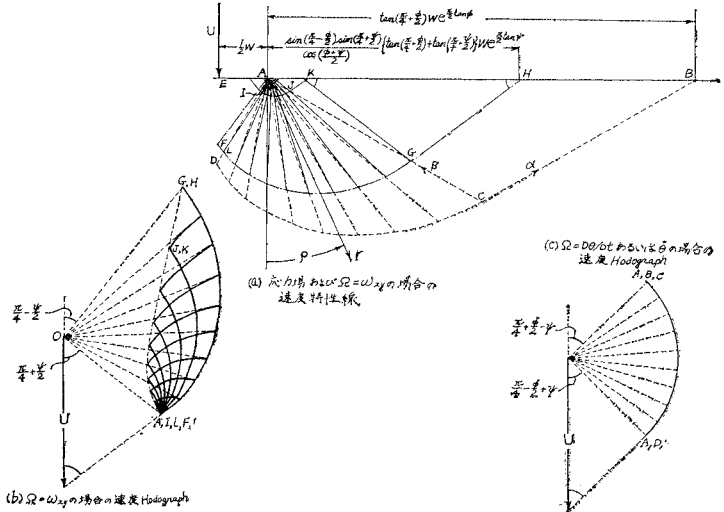


図-5 L. Prandtl の拡張応力場に対する速度解 (10° 等間隔網目)

今後は本論文に示した 3 つの理論を検討しつつ、実験の根拠のもとにこれらのいずれの所論を採用すべきかについて明らかにしていきたい。

本論文に関しては東京工大 山口柏樹博士の懇篤な指導を仰ぎ、また絶えざる強い励ましを頂いた。ここに付記して深く謝意を表わしたい。

参 考 文 献

- 1) D.C. Drucker & W. Prager: "Soil Mechanics and Plastic Analysis or Limit Design", Q. Appl. Math., Vol. 10, pp. 157-165., 1952.
- 2) Y.C. Fung: "A First Course in Continuum Mechanics", Prentice-Hall (London), pp. 135-146., 1969.
- 3) R.T. Shield: "Mixed Boundary Value Problems in Soil Mechanics", Q. Appl. Math., Vol. 11, pp. 61-75., 1953.
- 4) R.T. Shield: "Stress and Velocity fields in Soil Mechanics", J. Math. Phys., Vol. 33, pp. 144-156. 1954.
- 5) 山口柏樹: "塑性流動における速度場の理論", 土木学会論文集, 63号, pp. 8-16, 1959.
- 6) 山口柏樹: "土の塑性力学における応力と速度の不連続性について", 東工大論文報告集, pp. 1-9., 1967.
- 7) 橋口公一: "摩擦性塑性体に関する速度場の理論", 土木学会論文報告集, 172号, pp. 19-30., 1969.
- 8) W. Sylwestrowicz: "Experimental Investigation of the Behaviour of Soil under a Punch or Footing", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 1, pp. 258-264., 1953.
- 9) A.J.M. Spencer: "A Theory of the Kinematics of Ideal Soils under Plane Strain Conditions", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 12, pp. 337-351., 1964.
- 10) E.H. Davis: "Theory of Plasticity and the Failure of Soil Masses", Soil Mechanics Selected Topics edited by I.K. Lee, Butterworths (London), pp. 341-380., 1968.
- 11) R. Hill: "塑性学"(邦訳), 培風館, pp. 290-295., 1954.
- 12) D.C. Drucker, R.E. Gibson and D.J. Henkel: "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity", ASCE (SM), Vol. 122, pp. 338-346., 1957
- 13) A.W. Jenike & R.T. Shield: "On the Plastic Flow

- of Coulomb Solids beyond Original Failure", J. Appl. Mech., Vol. 26, pp. 599-602., 1959.
- 14) A.W. Jenike : "Steady Gravity Flow of Frictional Cohesive Solids in Converging Channel", J. Appl. Mech., Vol. 31, pp. 5-11., 1964.
 - 15) S. Takagi : "Plane Plastic Deformation of Soils", ASCE (EM), Vol. 88, pp. 107-151., 1962.
 - 16) R.M. Hythornthwaite : "Progress in Applied Mechanics" the Prager Anniversary Volume, Macmillan (New York and London), 1963.
 - 17) J. Mandel : "Sur les Equations D'ecoulement des Sols Ideaux en Deformation Plane et le Concept du Double Glissement", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 14, pp. 303-308, 1966.
 - 18) 山田嘉昭他 : "塑性学", 日本機械学会, pp. 250-261, 1960.
 - 19) J. Mandel : "Sur les Lines de Glissement et le Calcul des Deplacements dans la deformation plastique", C.R. Acad. Sci., Vol. 206, pp. 1272-1273.
 - 20) E. Dembicki, R. Negre and P. Stuts : "Ecoulement dans un Sols Conique de Revolution et Deformation d'un Echantillon dans L'essai Triaxial pour un Matériau a Dilatation non Standardisee", Pro. 3rd Budapest Conf. on Soil Mech. & Found. Eng., Akademiai Kiado (Budapest), pp. 35-53, 1968.
 - 21) C.S. Pemberton : "Flow of Imponderable Granular Materials in Wedge-Shaped Channels", J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, pp. 351-360, 1965.
 - 22) A.E. Green & J.E. Adkins : "Large Elastic Deformations and Non-Linear Continuum Mechanics", Clarendon Press (Oxford), pp. 320-328, 1960.
 - 23) A.C. Eringen : "Non Linear Theory of Continous Media", McGraw-Hill, pp. 260, 1962.
 - 24) R. Hill : "A Theoretical Analysis of the Stress and Strains in Extrusion and Piercing", J. Iron and Steel Inst., Vol. 158, pp.177-185, 1948.

(1970. 7. 10・受付)