

3 ヒンジアーチの自由振動解法

AN ANALYSIS OF THE FREE VIBRATION OF THREE HINGED ARCH

山崎 徳也*・崎山 毅**

By Tokuya Yamasaki and Takeshi Sakiyama

1. 序 文

はりの弾性線の微分方程式を与えられた境界条件の下で解いて、変形量を明らかにするとともに、これを用いてあらかじめ求めておいた断面力と変形量との関係式から断面力の値を決定する、いわゆる微分方程式によるはりの解法は、静定ばり、不静定ばりなどの区別なく適用できる解法であるが、この解法に残された欠点は、たとえば、集中荷重の作用を受けるはり、階段状変断面ばり、あるいはゲルバーばりや連続ばりなどのように荷重強度、断面形状あるいは構造形式などに関して、なんらかの不連続な要素を持つはりの解析方法が繁雑になるということである。

図-1 に示すような諸種のはり、すなわち集中荷重を受けるはり、階段状変断面ばり、ゲルバーばりあるいは連続ばりなどの変形および断面力を求める際には、はりの性質が断面形、たわみ角、曲げモーメント、せん断力などに関して一定であるかあるいは連続的に変化する部分に対して1個ずつの微分方程式が必要となり、したがって、全体としては数個の微分方程式を解かねばならないことになり、その結果、決定すべき積分定数の数も飛躍的に増大するため、全スパンにわたってすべての要素が一定であるか、ないしは連続的に変化するはりの解析にくらべて、式の取り扱いがきわめて繁雑になる。

従来のはり理論においては、Mohrの定理に基づく弾性荷重法や3モーメント法などの諸法によって局部的に

これらの問題を解決してきた感がある。また、ゲルバーばりの変形の解法などにもわずかの研究があるにすぎず、諸要素の連続性、不連続性にかかわりなく、はり構造物全体を統一するような簡潔な解法はいまだ確立されていない現状である。

著者らは本論文において、微分方程式の解法に若干の工夫を加えることにより、ゲルバーばり、3ヒンジアーチ、連続ばり、階段状変断面ばりあるいは集中荷重、集中モーメント荷重、部分的分布荷重の作用を受けるはりなどのように、その構造形式、断面形状あるいは荷重形態などに基づいて、はりの中間部で曲げ剛性、伸び剛性、たわみ角、曲げモーメント、せん断力などに関して不連続な要素をもつはり構造物についても、全スパン等分布荷重を受ける単純ばりのように連続要素のみから成るはり構造物と全く同様の取扱いにより、その変形および断面力の解析を有効に行ないうることを示し、もって微分方程式によるはりの解法の一般化を企図した。

本文中、不連続要素を有するはり構造物の典型として3ヒンジアーチを取り上げ、その自由振動問題を論じつつ解法の概略を述べることとする。

円弧アーチの振動に関しては、2ヒンジアーチおよび固定アーチを扱った F.W. Waltking¹⁾の研究などがあるが、3ヒンジアーチの自由振動に関する詳細な研究は著者らの知る限りにおいて見当たらない。本論文においては、中間ヒンジが任意の位置にある最も一般的な3ヒンジを対象として、その固有振動数および振動モードを明らかにする。

2. 円弧アーチに関する基本方程式

弾性的な変形量に関する微分方程式および断面力と変形量との関係など円弧アーチの変形、断面力の解析に必要な基本方程式は F.W. Waltking によって導かれた。すなわち、円弧アーチの半径および接線方向の変位と荷重強度とをそれぞれ、 u , w と、 p , q で表わせば、これら諸量間には、つぎの連立微分方程式によって表わされる

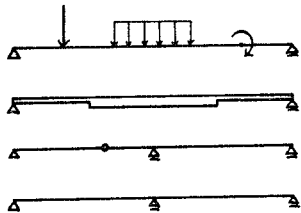


図-1

* 正会員 工博 九州大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 長崎大学講師 工学部土木工学科

係が成立する。

$$\begin{cases} \frac{EA}{R^2} \left(\frac{dw}{d\varphi} - u \right) - \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^4u}{d\varphi^4} + \frac{d^3w}{d\varphi^3} \right) + p = 0 \\ \dots\dots\dots(1\cdot a) \\ \frac{EA}{R^2} \left(\frac{d^2w}{d\varphi^2} - \frac{du}{d\varphi} \right) + \frac{EI}{R^4} \left(\frac{d^3u}{d\varphi^3} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) + q = 0 \\ \dots\dots\dots(1\cdot b) \end{cases}$$

式 (1・a), (1・b) 中の E, A, I, R はそれぞれ円弧アーチ部材のヤング率, 断面積, 断面二次モーメント, アーチ軸半径を表わす。また, φ は慣用の極座標であり, 動径の回転方向が時計の回転方向と一致する場合を正とする。外力 p, q の正負に関しては, それぞれ円弧の中心点に向うものおよび円弧の中心点に関して時計回りのモーメントを形成するものを正としている。

荷重関数 p, q が連続関数でそれぞれ 3 回および 4 回微分可能であれば, 基本式 (1・a), (1・b) より半径方向の変位 u を消去することができ, その結果変形量に関する微分方程式はつぎに示す 1 個の式となる。

$$\begin{aligned} \frac{d^5w}{d\varphi^5} + 2\frac{d^4w}{d\varphi^4} + \frac{d^3w}{d\varphi^3} &= \frac{R^4}{EI} \left(\frac{dp}{d\varphi} - q \right) \\ &- \frac{R^2}{EA} \left(\frac{d^4p}{d\varphi^4} + \frac{d^3q}{d\varphi^3} \right) \dots\dots\dots(2\cdot a) \end{aligned}$$

このとき, 変位 u は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u &= \frac{dw}{d\varphi} - \frac{I}{I+R^2A} \left(\frac{d^3w}{d\varphi^3} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) + \frac{R^2}{EA} p \\ &- \frac{R^2I}{EA(I+R^2A)} \left(\frac{d^2p}{d\varphi^2} - \frac{dq}{d\varphi} + \frac{d^3q}{d\varphi^3} \right) \dots\dots\dots(2\cdot b) \end{aligned}$$

微分方程式 (1・a), (1・b) あるいは (2・a), (2・b) より半径および接線方向の変位 u, w が求められれば, 円弧アーチのたわみ角 θ , 曲げモーメント M , 軸力 N およびせん断力 Q などの諸量はつぎの各式により算定される。

$$\theta = \frac{1}{R} \left(\frac{du}{d\varphi} + w \right) \dots\dots\dots(3\cdot a)$$

$$M = -\frac{EI}{R^2} \left(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + \frac{dw}{d\varphi} \right) \dots\dots\dots(3\cdot b)$$

$$N = \frac{EA}{R} \left(\frac{dw}{d\varphi} - u \right) \dots\dots\dots(3\cdot c)$$

$$Q = -\frac{EI}{R^3} \left(\frac{d^3u}{d\varphi^3} + \frac{d^2w}{d\varphi^2} \right) \dots\dots\dots(3\cdot d)$$

以上示した諸式によって, 円弧アーチに関する静的および動的な諸問題を解明することができる。

円弧アーチの自由振動の解析にあたっては, ダランベールの原理に基づき, 基本式 (1・a), (1・b) の荷重強度 p, q の項につぎの 2 式

$$p = -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad q = -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

を代入することにより, 振動の微分方程式をえることができる。ここで, t, ρ はそれぞれ時間および円弧アーチ

の単位長さ当りの質量を表わす。すなわち, 振動の微分方程式はつぎのような u, w に関する連立微分方程式となる。

$$\begin{cases} \frac{R^2A}{I} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - u \right) - \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^3 w}{\partial \varphi^3} \right) - \frac{\rho R^4}{EI} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \\ \dots\dots\dots(4\cdot a) \\ \frac{R^2A}{I} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) - \frac{\rho R^4}{EI} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ = 0 \dots\dots\dots(4\cdot b) \end{cases}$$

さらに, 変位 u, w に関して

$$u = U \cdot e^{i\omega t}, \quad w = W \cdot e^{i\omega t}$$

が成立するとき, 規準関数 U, W が満足すべき関係は次式となる。

$$a \left(\frac{dW}{d\varphi} - U \right) - \left(\frac{d^4U}{d\varphi^4} + \frac{d^3W}{d\varphi^3} \right) + \lambda^4 U = 0 \dots\dots\dots(5\cdot a)$$

$$a \left(\frac{d^2W}{d\varphi^2} - \frac{dU}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d^3U}{d\varphi^3} + \frac{d^2W}{d\varphi^2} \right) + \lambda^4 W = 0 \dots\dots\dots(5\cdot b)$$

ただし,

$$a = \frac{R^2A}{I} = \left(\frac{R}{\sqrt{I}} \right)^2, \quad \lambda^4 = \frac{\rho\omega^2 R^4}{EI}$$

ω : 円弧アーチの固有角振動数

規準関数 U, W に関する連立微分方程式 (5・a), (5・b) を与えられた円弧アーチの境界条件の下で解くことにより, 固定アーチや 2 ヒンジアーチなどに関しては所要の固有角振動数と振動モードをえることができるが, アーチの中間部にヒンジが存在する 3 ヒンジアーチや 1 ヒンジアーチにおいては, 中間ヒンジの左右両部においてそれぞれ 1 個ずつ, 計 2 個の基礎微分方程式を解かねばならず, その結果, 積分定数は固定アーチや 2 ヒンジアーチにくらべて 2 倍の 12 個となり, 以後の式の取り扱いが非常に繁雑となる。ここにおいて, この繁雑さを回避しうる何らかの工夫がなされるべきであると考える。

3. 3 ヒンジアーチの自由振動

(1) 振動方程式の解

3 ヒンジアーチにおいては, 中間ヒンジの左右両部において, たわみ角が不連続となるため, 固定アーチや 2 ヒンジアーチなどとは異なり, 円弧アーチの全長にわたって 1 個の微分方程式を解くだけで変形や断面力を求めることはできない。

基本的には, 中間ヒンジの左右両部において, 変形量に関する 2 つの微分方程式を解き, 6 個の境界条件およ

び6個の連続条件, 曲げモーメントの条件とから合計12個の積分定数を決定する方法により, 自由振動を解析することができるが, 数式の繁雑さのゆえに解法として実用的とはいえない。

以下に述べる解法はゲルバーばり, 3 ヒンジアーチ, 連続ばり, 階段状変断面ばりあるいは集中荷重を受けるはりなどのように中間部において何らかの不連続要素が存在するはり構造物の微分方程式による変形, 断面力の解析に有効な数学解析法である。

前述のとおり, 円弧アーチの曲げ振動は方程式 (4・a), (4・b) で表わされ, その規準関数 U, W は方程式 (5・a), (5・b) を満足しなければならない。

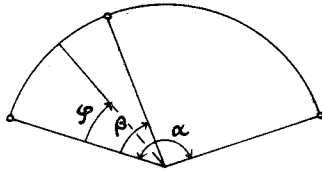


図-2

方程式 (5・a), (5・b) よりえられる規準関数 U, W は, 図-2 のような3ヒンジアーチの場合, $\varphi=0, \alpha$ における境界条件を満足すると同時に, $\varphi=\beta$ なる中間ヒンジ点における半径方向変位, 接線方向変位, 軸力およびせん断力の連続条件を満足し, 曲げモーメントに関しても $\varphi=\beta$ 点において, その値が零であるという条件を満足しなければならない。

いま, 半径方向変位および接線方向変位の規準関数 U, W を単位階段関数を用いて, 次式のように表現する。

$$U(\varphi) = U_1(\varphi) + U_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \quad (\varphi \neq \beta) \quad \dots (6)$$

$$W(\varphi) = W_1(\varphi) + W_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \quad (\varphi \neq \beta) \quad \dots (7)$$

関数 U, W は $\varphi=\beta$ においては定義されていないが, 関数 U_1, U_2, W_1, W_2 に関してはその限りではない。なお, 単位階段関数 $\bar{a}(\varphi - \beta)$ は次式で定義される。

$$\bar{a}(\varphi - \beta) = \begin{cases} 0 & (0 < \varphi < \beta) \\ 1 & (\varphi > \beta) \end{cases}$$

たわみ角 θ , 曲げモーメント M , 軸力 N およびせん断力 Q の規準関数を改めて, それぞれ θ, M, N, Q で表わせば, 式 (3・a)~(3・d) および式 (6), (7) より諸量の規準関数として, つぎの各式がえられる。

$$\begin{aligned} \theta(\varphi) &= \theta_1(\varphi) + \theta_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ &= \frac{1}{R} \left[\left(\frac{dU_1}{d\varphi} + W_1 \right) + \left(\frac{dU_2}{d\varphi} + W_2 \right) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \right] \end{aligned} \quad \dots (8 \cdot a)$$

$$\begin{aligned} M(\varphi) &= M_1(\varphi) + M_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ &= -\frac{EI}{R^2} \left[\left(\frac{d^2U_1}{d\varphi^2} + \frac{dW_1}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d^2U_2}{d\varphi^2} + \frac{dW_2}{d\varphi} \right) \right. \end{aligned}$$

$$\left. \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \right] \quad \dots (8 \cdot b)$$

$$\begin{aligned} N(\varphi) &= N_1(\varphi) + N_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ &= \frac{EA}{R} \left[\left(\frac{dW_1}{d\varphi} - U_1 \right) + \left(\frac{dW_2}{d\varphi} - U_2 \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \right] \quad \dots (8 \cdot c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(\varphi) &= Q_1(\varphi) + Q_2(\varphi) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ &= -\frac{EI}{R^3} \left[\left(\frac{d^3U_1}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_1}{d\varphi^2} \right) + \left(\frac{d^3U_2}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_2}{d\varphi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \right] \quad \dots (8 \cdot d) \end{aligned}$$

したがって, 図-2 のような3ヒンジアーチの境界条件はつぎのとおりとなる。すなわち

$$\varphi=0 : U_1(0) = 0 \quad \dots (9 \cdot a)$$

$$W_1(0) = 0 \quad \dots (9 \cdot b)$$

$$M_1(0) = 0 \quad \dots (9 \cdot c)$$

$$\varphi=\alpha : U_1(\alpha) + U_2(\alpha) = 0 \quad \dots (9 \cdot d)$$

$$W_1(\alpha) + W_2(\alpha) = 0 \quad \dots (9 \cdot e)$$

$$M_1(\alpha) + M_2(\alpha) = 0 \quad \dots (9 \cdot f)$$

また, 半径方向の変位 U に関する $\varphi=\beta$ 点における連続条件はつぎのようになる。

$$U(\beta-0) = U(\beta+0)$$

したがって,

$$U_1(\beta) = U_1(\beta) + U_2(\beta)$$

よって

$$U_2(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot a)$$

全く同様にして, 接線方向変位, 軸力およびせん断力の連続条件がつぎのようにえられる。

$$W_2(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot b)$$

$$N_2(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot c)$$

$$Q_2(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot d)$$

さらに, $\varphi=\beta$ 点における曲げモーメントの値は零であるゆえ,

$$M_1(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot e)$$

$$M_2(\beta) = 0 \quad \dots (10 \cdot d)$$

式 (6), (7) を方程式 (5・a), (5・b) に代入して

$$\left. \begin{aligned} &a \left(\frac{dW_1}{d\varphi} - U_1 \right) - \left(\frac{d^4U_1}{d\varphi^4} + \frac{d^3W_1}{d\varphi^3} \right) + \lambda^4 U_1 \\ &+ \left\{ a \left(\frac{dW_2}{d\varphi} - U_2 \right) - \left(\frac{d^4U_2}{d\varphi^4} + \frac{d^3W_2}{d\varphi^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \lambda^4 U_2 \right\} \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) = 0 \\ &a \left(\frac{d^2W_1}{d\varphi^2} - \frac{dU_1}{d\varphi} \right) + \left(\frac{d^3U_1}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_1}{d\varphi^2} \right) \\ &+ \lambda^4 W_1 + \left\{ a \left(\frac{d^2W_2}{d\varphi^2} - \frac{dU_2}{d\varphi} \right) \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{d^3U_2}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_2}{d\varphi^2} \right) + \lambda^4 W_2 \right\} \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots (11)$$

をえる。

ところで、つぎの2つの連立微分方程式

$$\left. \begin{aligned} a\left(\frac{dW_1}{d\varphi} - U_1\right) - \left(\frac{d^4U_1}{d\varphi^4} + \frac{d^3W_1}{d\varphi^3}\right) + \lambda^4U_1 &= 0 \\ a\left(\frac{d^2W_1}{d\varphi^2} - \frac{dU_1}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^3U_1}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_1}{d\varphi^2}\right) + \lambda^4W_1 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12\cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} a\left(\frac{dW_2}{d\varphi} - U_2\right) - \left(\frac{d^4U_2}{d\varphi^4} + \frac{d^3W_2}{d\varphi^3}\right) + \lambda^4U_2 &= 0 \\ a\left(\frac{d^2W_2}{d\varphi^2} - \frac{dU_2}{d\varphi}\right) + \left(\frac{d^3U_2}{d\varphi^3} + \frac{d^2W_2}{d\varphi^2}\right) + \lambda^4W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12\cdot b)$$

を満足する関数 U_1, W_1, U_2, W_2 は明らかに原方程式 (11) を満足するゆえ、本問題は条件 (9・a)~(9・f) および (10・a)~(10・f) を満足する連立微分方程式 (12・a), (12・b) の解を求めることに帰着する。

ここで、

$$L[W_1(\varphi)] = F_1(S)$$

$$L[U_1(\varphi)] = G_1(S)$$

と置いて、連立微分方程式 (12・a) を Laplace 変換すれば、 $F_1(S), G_1(S)$ に関するつぎの連立方程式をえる。

$$\left. \begin{aligned} S(S^2 - a) \cdot F_1(S) + [S^4 + (a - \lambda^4)] \cdot G_1(S) \\ = S^3 \cdot U_1(0) - a \cdot W_1(0) S^2 \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ + S \cdot \bar{M}_1(0) + \bar{Q}_1(0) \\ [(a+1)S^2 + \lambda^4] \cdot F_1(S) + S(S^2 - a) \cdot G_1(S) \\ = S^2 \cdot U_1(0) + S \cdot a \cdot W_1(0) + S \bar{\theta}_1(0) \\ + \bar{M}_1(0) + \bar{N}_1(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ただし、

$$\bar{\theta}_1(0) = R \cdot \theta_1(0), \quad \bar{M}_1(0) = -\frac{R^2}{EI} \cdot M_1(0),$$

$$\bar{N}_1(0) = \frac{R^3}{EA} N_1(0), \quad \bar{Q}_1(0) = -\frac{R^3}{EI} Q_1(0)$$

ここで、境界条件 (9・a), (9・b), (9・c) を考慮すれば、式 (13) は

$$\left. \begin{aligned} S(S^2 - a) \cdot F_1(S) + [S^4 + (a - \lambda^4)] \cdot G_1(S) \\ = S^2 \cdot \bar{\theta}_1(0) + \bar{Q}_1(0) \\ [(a+1)S^2 + \lambda^4] \cdot F_1(S) + S(S^2 - a) \cdot G_1(S) \\ = S \cdot \bar{\theta}_1(0) + \bar{N}_1(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

となる。

連立方程式 (14) を解いて、 $F_1(S), G_1(S)$ を求めれば、

$$F_1(S) = \left. \begin{aligned} \frac{S \left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \right] \cdot \bar{\theta}_1(0) + \frac{S^4 + (a - \lambda^4)}{D} \\ \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} - \frac{S(S^2 - a)}{D} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \end{aligned} \right\}$$

$$G_1(S) = \left. \begin{aligned} \frac{S^2 \left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right] \cdot \bar{\theta}_1(0) - \frac{S(S^2 - a)}{D} \\ \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} + \frac{[(a+1)S^2 + \lambda^4] \cdot \bar{Q}_1(0)}{D} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

ただし、

$$D = S^6 + \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) S^4 + \left(1 - \lambda^4 - \frac{\lambda^4}{a} \right) S^2 + \lambda^4 \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \dots\dots\dots(16)$$

式 (15) を Laplace 逆変換することにより、関数 $W_1(\varphi), U_1(\varphi)$ を求めることができる。

つぎに連立微分方程式 (12・b) の解を求める。連続条件 (10・a)~(10・d) および (10・f) が直接考慮できるように、変数 φ に関して

$$\varphi - \beta = \eta$$

なる変換を行なえば、方程式 (12・b) は

$$\left. \begin{aligned} a\left(\frac{dW_2}{d\eta} - U_2\right) - \left(\frac{d^4U_2}{d\eta^4} + \frac{d^3W_2}{d\eta^3}\right) + \lambda^4U_2 &= 0 \\ a\left(\frac{d^2W_2}{d\eta^2} - \frac{dU_2}{d\eta}\right) + \left(\frac{d^3U_2}{d\eta^3} + \frac{d^2W_2}{d\eta^2}\right) + \lambda^4W_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

となり、連続条件 (10・a)~(10・d) および (10・f) はつぎのように書きかえられる。

$$U_2(\eta=0) = 0 \dots\dots\dots(18\cdot a)$$

$$W_2(\eta=0) = 0 \dots\dots\dots(18\cdot b)$$

$$N_2(\eta=0) = 0 \dots\dots\dots(18\cdot c)$$

$$Q_2(\eta=0) = 0 \dots\dots\dots(18\cdot d)$$

$$M_2(\eta=0) = 0 \dots\dots\dots(18\cdot e)$$

つぎに、

$$L[W_2(\eta)] = F_2(S)$$

$$L[U_2(\eta)] = G_2(S)$$

と置いて、連立微分方程式 (17) を Laplace 変換すれば $F_2(S), G_2(S)$ に関するつぎの連立方程式をえる。

$$\left. \begin{aligned} S(S^2 - a) \cdot F_2(S) + [S^4 + (a - \lambda^4)] \cdot G_2(S) \\ = S^2 \cdot U_2(0) - W_2(0) + S^2 \bar{\theta}_2(0) \\ + S \bar{M}_2(0) + \bar{Q}_2(0) \\ [(a+1)S^2 + \lambda^4] \cdot F_2(S) + S(S^2 - a) \cdot G_2(S) \\ = S^2 \cdot U_2(0) + S a W_2(0) + S \bar{\theta}_2(0) \\ + \bar{M}_2(0) + \bar{N}_2(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

ここで、連続条件 (18・a)~(18・e) を考慮すれば連立方程式 (19) は簡潔な次式となる。

$$\left. \begin{aligned} S(S^2 - a) \cdot F_2(S) + [S^4 + (a - \lambda^4)] \cdot G_2(S) \\ = S^2 \cdot \bar{\theta}_2(0) \\ [(a+1)S^2 + \lambda^4] \cdot F_2(S) + S(S^2 - a) \cdot G_2(S) \\ = S \cdot \bar{\theta}_2(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

連立方程式 (20) を解いて $F_2(S), G_2(S)$ を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} F_2(S) &= \frac{S \left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{D} \cdot \bar{\theta}_2(0) \\ G_2(S) &= \frac{S^2 \left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{D} \cdot \bar{\theta}_2(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

式 (21) 中の右辺の分母 D に関しては式 (16) で定義したとおりである。式 (21) を Laplace 逆変換することにより、関数 $W_2(\eta)$, $U_2(\eta)$, したがって関数 $W_2(\varphi)$, $U_2(\varphi)$ を求めることができる。なお、連立微分方程式 (12・a) および (17) を Laplace 変換する場合、これら両式の像空間における変数は厳密には同一文字では表わすべきでないが、本文中では混同する恐れはないので、あえて同一文字 S をもって、方程式 (12・a), (17) の像空間における変数とした。

式 (15) および (21) に Laplace 逆変換をほどこすことにより、 $W_1(\varphi)$, $U_1(\varphi)$, $W_2(\eta)$, $U_2(\eta)$ が求められえられた式中にはなお $\bar{\theta}_1(\varphi=0)$, $\bar{N}_1(\varphi=0)$, $\bar{Q}_1(\varphi=0)$ および $\bar{\theta}_2(\eta=0)$ なる 4 個の未定定数が含まれるが、これらは (9・d)~(9・f) の境界条件と (10・e) の条件とにより決定されることとなる。

式 (15) および式 (21) の Laplace 逆変換は式 (16) で表わされる D の性質により異なった形をとる。無次元の固有角振動数パラメーター λ の値が次式

$$\lambda > 2.05$$

を満足するとき、 D はつぎのように因数分解される。

$$\left. \begin{aligned} D &= S^6 + \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) S^4 + \left(1 - \lambda^4 - \frac{\lambda^4}{a} \right) S^2 + \lambda^4 \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \\ &= (S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2) \quad (a \geq \lambda^4) \\ &= (S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2) \quad (a < \lambda^4) \end{aligned} \right\} \dots\dots(22)$$

ただし、 I^2, J^2, K^2 はつぎの各式によりその値を決定することのできる正の定数である。

$$\left. \begin{aligned} I^2 &= \left| 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\gamma}{3} - \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right| \\ J^2 &= \left| 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\gamma + 4\pi}{3} - \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right| \\ K^2 &= \left| 2 \cdot \sqrt[3]{r} \cdot \cos \frac{\gamma + 2\pi}{3} - \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right| \end{aligned} \right\} \dots(23)$$

ここに、

$$\begin{aligned} r &= \left\{ -\frac{1}{27} \left[\left(1 - \lambda^4 - \frac{\lambda^4}{a} \right) - \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right)^{2/3} \right]^3 \right\}^{1/2} \\ r &= \cos^{-1} \left(-\frac{q}{2r} \right) \\ q &= \frac{2}{27} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right)^3 - \frac{1}{3} \left(2 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \left(1 - \lambda^4 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \\ &\quad + \lambda^4 \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \end{aligned}$$

式 (22) に示すように、式 (15) および式 (21) の右辺の各項に含まれる D は a と λ^4 との大小関係により異なった形に因数分解される。したがって、式 (15) お

よび式 (21) の Laplace 逆変換も a と λ^4 との大小関係により当然異なったものになる。よって、以下の解析は、**a)** $a > \lambda^4$ の場合と、**b)** $a < \lambda^4$ の場合の 2 つに分けて進めなければならない。

a) $a > \lambda^4$ の場合

この場合、式 (22) に示したとおり

$$D = (S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2) \quad (I^2, J^2, K^2 > 0)$$

であるゆえ、式 (15) および式 (21) はそれぞれつぎのように変形される。

$$\left. \begin{aligned} F_1(S) &= \frac{S \left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ &\quad + \frac{S^4 + (a - \lambda^4)}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} \\ &\quad - \frac{S(S^2 - a)}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \\ G_1(S) &= \frac{S^2 \left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ &\quad - \frac{S(S^2 - a)}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} \\ &\quad + \frac{[(a+1)S^2 + \lambda^4]}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24 \cdot a)$$

$$\left. \begin{aligned} F_2(S) &= \frac{S \left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_2(0) \\ G_2(S) &= \frac{S^2 \left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a} \right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 - J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_2(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(25 \cdot a)$$

式 (24・a), 式 (25・a) を Laplace 逆変換すれば、所要の関数 $W_1(\varphi)$, $U_1(\varphi)$, $W_2(\eta)$, $U_2(\eta)$ がつぎのようにえられる。

$$\left. \begin{aligned} W_1(\varphi) &= (a_1 \cdot \cosh I\varphi + a_2 \cdot \cosh J\varphi \\ &\quad + a_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) + (b_1 \cdot \sinh I\varphi \\ &\quad + b_2 \cdot \sinh J\varphi + b_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\ &\quad - (c_1 \cdot \cosh I\varphi + c_2 \cdot \cosh J\varphi \\ &\quad + c_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) \\ U_1(\varphi) &= (d_1 \cdot \sinh I\varphi + d_2 \cdot \sinh J\varphi \\ &\quad + d_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) - (e_1 \cdot \cosh I\varphi \\ &\quad + e_2 \cdot \cosh J\varphi + e_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\ &\quad + (f_1 \cdot \sinh I\varphi + f_2 \cdot \sinh J\varphi \\ &\quad + f_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) \\ W_2(\eta) &= (a_1 \cdot \cosh I\eta + a_2 \cdot \cosh J\eta \\ &\quad + a_3 \cdot \cos K\eta) \cdot \bar{\theta}_2(0) \\ U_2(\eta) &= (d_1 \cdot \sinh I\eta + d_2 \cdot \sinh J\eta \\ &\quad + d_3 \cdot \sin K\eta) \cdot \bar{\theta}_2(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots(26 \cdot a)$$

したがって、変形および断面力に関する諸量 $W(\varphi)$, $U(\varphi)$, $\theta(\varphi)$, $M(\varphi)$, $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ はつぎの各式で与えら

れることとなる。

$$W(\varphi) = (a_1 \cdot \cosh I\varphi + a_2 \cdot \cosh J\varphi + a_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) + (b_1 \cdot \sinh I\varphi + b_2 \cdot \sinh J\varphi + b_3 \cdot \sin K\varphi) \bar{N}_1(0) \\ - (c_1 \cdot \cosh I\varphi + c_2 \cdot \cosh J\varphi + c_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) + [a_1 \cdot \cosh I(\varphi - \beta) + a_2 \cdot \cosh J(\varphi - \beta) \\ + a_3 \cdot \cos K(\varphi - \beta)] \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \dots \dots \dots (27 \cdot a)$$

$$U(\varphi) = (d_1 \cdot \sinh I\varphi + d_2 \cdot \sinh J\varphi + d_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) - (c_1 \cdot \cosh I\varphi + c_2 \cdot \cosh J\varphi + c_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\ + (e_1 \cdot \sinh I\varphi + e_2 \cdot \sinh J\varphi + e_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) + [d_1 \cdot \sinh I(\varphi - \beta) + d_2 \cdot \sinh J(\varphi - \beta) \\ + d_3 \cdot \sin K(\varphi - \beta)] \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \dots \dots \dots (28 \cdot a)$$

$$R \cdot \theta(\varphi) = [(a_1 + d_1 I) \cosh I\varphi + (a_2 + d_2 J) \cosh J\varphi + (a_3 + d_3 K) \cos K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ + \left(\frac{a_1}{I} \cdot \sinh I\varphi + \frac{a_2}{J} \cdot \sinh J\varphi + \frac{a_3}{K} \cdot \sin K\varphi \right) \cdot \bar{N}_1(0) + \left(\frac{d_1}{I} \cdot \cosh I\varphi + \frac{d_2}{J} \cdot \cosh J\varphi - \frac{d_3}{K} \cdot \cos K\varphi \right) \\ \cdot \bar{Q}_1(0) + [(a_1 + d_1 I) \cosh I(\varphi - \beta) + (a_2 + d_2 J) \cosh J(\varphi - \beta) + (a_3 + d_3 K) \cos K(\varphi - \beta)] \\ \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \dots \dots \dots (29 \cdot a)$$

$$-\frac{R^2}{EI} M(\varphi) = [I(a_1 + d_1 I) \sinh I\varphi + J(a_2 + d_2 J) \sinh J\varphi - K(a_3 + d_3 K) \sin K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ + (a_1 \cdot \cosh I\varphi + a_2 \cdot \cosh J\varphi + a_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) + (d_1 \cdot \sinh I\varphi + d_2 \cdot \sinh J\varphi + d_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) \\ + [I(a_1 + d_1 I) \sinh I(\varphi - \beta) + J(a_2 + d_2 J) \sinh J(\varphi - \beta) - K(a_3 + d_3 K) \sin K(\varphi - \beta)] \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ \dots \dots \dots (30 \cdot a)$$

$$\frac{R}{EA} N(\varphi) = [(a_1 I - d_1) \sinh I\varphi + (a_2 J - d_2) \sinh J\varphi - (a_3 K + d_3) \sin K\varphi] \bar{\theta}_1(0) \\ + [(b_1 I + c_1) \cosh I\varphi + (b_2 J + c_2) \cosh J\varphi + (b_3 K + c_3) \cos K\varphi] \bar{N}_1(0) \\ - [(c_1 I + e_1) \sinh I\varphi + (c_2 J + e_2) \sinh J\varphi - (c_3 K - e_3) \sin K\varphi] \bar{Q}_1(0) \\ + [(a_1 I - d_1) \sinh I(\varphi - \beta) + (a_2 J - d_2) \sinh J(\varphi - \beta) - (a_3 K + d_3) \sin K(\varphi - \beta)] \bar{\theta}_2(\beta) \bar{a}(\varphi - \beta) \\ \dots \dots \dots (31 \cdot a)$$

$$-\frac{R^3}{EI} Q(\varphi) = [I^2(a_1 + d_1 I) \cosh I\varphi + J^2(a_2 + d_2 J) \cosh J\varphi - K^2(a_3 + d_3 K) \cos K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ + [a_1 I \sinh I\varphi + a_2 J \sinh J\varphi - a_3 K \sin K\varphi] \cdot \bar{N}_1(0) + [d_1 I \cosh I\varphi + d_2 J \cosh J\varphi + d_3 K \cos K\varphi] \cdot \bar{Q}_1(0) \\ + [I^2(a_1 + d_1 I) \cosh I(\varphi - \beta) + J^2(a_2 + d_2 J) \cosh J(\varphi - \beta) - K^2(a_3 + d_3 K) \cos K(\varphi - \beta)] \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{a}(\varphi - \beta) \\ \dots \dots \dots (32 \cdot a)$$

ただし、

$$a_1 = \frac{I^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(I^2 - J^2)(I^2 + K^2)}, \quad a_2 = \frac{J^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(J^2 - I^2)(J^2 + K^2)}$$

$$a_3 = -\frac{K^2 - \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(K^2 + I^2)(K^2 + J^2)}$$

$$b_1 = \frac{I^4 + (a - \lambda^4)}{aI(I^2 - J^2)(I^2 + K^2)}$$

$$b_2 = \frac{J^4 + (a - \lambda^4)}{aJ(J^2 - I^2)(J^2 + K^2)}$$

$$b_3 = \frac{K^4 + (a - \lambda^4)}{aK(K^2 + I^2)(K^2 + J^2)}$$

$$c_1 = \frac{I^2 - a}{a(I^2 - J^2)(I^2 + K^2)}$$

$$c_2 = \frac{J^2 - a}{a(J^2 - I^2)(J^2 + K^2)}$$

$$c_3 = -\frac{K^2 + a}{a(K^2 + I^2)(K^2 + J^2)}$$

$$d_1 = \frac{I \left[I^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(I^2 - J^2)(I^2 + K^2)}, \quad d_2 = \frac{J \left[J^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(J^2 - I^2)(J^2 + K^2)}$$

$$d_3 = \frac{K \left[K^2 - \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(K^2 + I^2)(K^2 + J^2)}, \quad e_1 = \frac{(a+1)I^2 + \lambda^4}{aI(I^2 - J^2)(I^2 + K^2)}$$

$$e_2 = \frac{(a+1)J^2 + \lambda^4}{aJ(J^2 - I^2)(J^2 + K^2)}$$

$$e_3 = -\frac{(a+1)K^2 - \lambda^4}{aK(K^2 + I^2)(K^2 + J^2)}$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

この場合 D は次式のように因数分解される。

$$D = (S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2) \quad (I^2, J^2, K^2 > 0)$$

したがって、式 (15), (16) はそれぞれつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} F_1(S) &= \frac{S \left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_1(0) \\ &+ \frac{S^4 + (a - \lambda^4)}{(S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} \\ &- \frac{S(S^2 - a)}{(S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \\ G_1(S) &= \frac{S^2 \left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(S^2 - I^2)(S^2 + J^2)(S^2 + K^2)} \cdot \bar{\theta}_1(0) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 & -\frac{S(S^2-a)}{(S^2-I^2)(S^2+J^2)(S^2+K^2)} \cdot \frac{\bar{N}_1(0)}{a} \\
 & + \frac{[(a+1)S^2+\lambda^4]}{(S^2-I^2)(S^2+J^2)(S^2+K^2)} \cdot \frac{\bar{Q}_1(0)}{a} \\
 & \dots\dots\dots(24\cdot b) \\
 & F_2(S) = \frac{S\left[S^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)\right]}{(S^2-I^2)(S^2+J^2)(S^2+K^2)} \cdot \bar{\theta}_2(0) \\
 & G_2(S) = \frac{S^2\left[S^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right)\right]}{(S^2-I^2)(S^2+J^2)(S^2+K^2)} \cdot \bar{\theta}_2(0) \\
 & \dots\dots\dots(25\cdot b)
 \end{aligned} \right\}$$

式 (24・b), (25・b) を Laplace 逆変換して, つぎのように所要の関数 $W_1(\varphi)$, $U_1(\varphi)$, $W_2(\eta)$, $U_2(\eta)$ をえる。

$$\left. \begin{aligned}
 W_1(\varphi) &= (a_1' \cdot \cosh I\varphi + a_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ a_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &+ (b_1' \cdot \sinh I\varphi + b_2' \cdot \sin J\varphi \\
 &+ b_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &- (c_1' \cdot \cosh I\varphi + c_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ c_3' \cdot \cos K\varphi) \bar{Q}_1(0) \\
 U_1(\varphi) &= (d_1' \cdot \sinh I\varphi + d_2' \cdot \sin J\varphi \\
 &+ d_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &- (c_1' \cdot \cosh I\varphi + c_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ c_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &+ (e_1' \cdot \sinh I\varphi + e_2' \cdot \sin J\varphi \\
 &+ e_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 W_2(\eta) &= (a_1' \cdot \cosh I\eta + a_2' \cdot \cos J\eta \\
 &+ a_3' \cdot \cos K\eta) \cdot \bar{\theta}_2(0) \\
 U_2(\eta) &= (d_1' \cdot \sinh I\eta + d_2' \cdot \sin J\eta \\
 &+ d_3' \cdot \sin K\eta) \cdot \bar{\theta}_2(0)
 \end{aligned} \right\} (26\cdot b)$$

したがって, 変形および断面力に関する諸量 $W(\varphi)$, $U(\varphi)$, $\theta(\varphi)$, $M(\varphi)$, $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ はつぎの各式で与えられることになる。

$$\begin{aligned}
 W(\varphi) &= (a_1' \cdot \cosh I\varphi + a_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ a_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) + (b_1' \cdot \sinh I\varphi \\
 &+ b_2' \cdot \sin J\varphi + b_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &- (c_1' \cdot \cosh I\varphi + c_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ c_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 &+ [a_1' \cdot \cosh I(\varphi-\beta) + a_2' \cdot \cos J(\varphi-\beta) + a_3' \\
 &\cdot \cos K(\varphi-\beta)] \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \\
 &\dots\dots\dots(27\cdot b) \\
 U(\varphi) &= (d_1' \cdot \sinh I\varphi + d_2' \cdot \sin J\varphi \\
 &+ d_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}_1(0) - (c_1' \cdot \cosh I\varphi \\
 &+ c_2' \cdot \cos J\varphi + c_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &+ (e_1' \cdot \sinh I\varphi + e_2' \cdot \sin J\varphi \\
 &+ e_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}_1(0) + [d_1' \cdot \sinh I(\varphi-\beta) \\
 &+ d_2' \cdot \sin J(\varphi-\beta) + d_3' \cdot \sin K(\varphi-\beta)] \\
 &\cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \dots\dots\dots(28\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R \cdot \theta(\varphi) &= [(a_1' + d_1' I) \cdot \cosh I\varphi \\
 &+ (a_2' + d_2' J) \cdot \cos J\varphi + (a_3' + d_3' K) \\
 &\cdot \cos K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &+ \left[\frac{a_1'}{I} \cdot \sinh I\varphi + \frac{a_2'}{J} \cdot \sin J\varphi \right. \\
 &+ \left. \frac{a_3'}{K} \cdot \sin K\varphi \right] \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &+ \left[\frac{d_1'}{I} \cdot \cosh I\varphi - \frac{d_2'}{J} \cdot \cos J\varphi \right. \\
 &- \left. \frac{d_3'}{K} \cdot \cos K\varphi \right] \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 &+ [(a_1' + d_1' I) \cdot \cosh I(\varphi-\beta) \\
 &+ (a_2' + d_2' J) \cdot \cos J(\varphi-\beta) \\
 &+ (a_3' + d_3' K) \cdot \cos K(\varphi-\beta)] \\
 &\cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \dots\dots\dots(29\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^2}{EI} M(\varphi) &= [I(a_1' + d_1' I) \sinh I\varphi \\
 &- J(a_2' + d_2' J) \sin J\varphi \\
 &- K(a_3' + d_3' K) \sin K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &+ [a_1' \cdot \cosh I\varphi + a_2' \cdot \cos J\varphi \\
 &+ a_3' \cdot \cos K\varphi] \cdot \bar{N}_1(0) + [d_1' \cdot \sinh I\varphi \\
 &+ d_2' \cdot \sin J\varphi + d_3' \cdot \sin K\varphi] \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 &+ [I(a_1' + d_1' I) \sinh I(\varphi-\beta) \\
 &- J(a_2' + d_2' J) \sin J(\varphi-\beta) - K(a_3' \\
 &+ d_3' K) \sin K(\varphi-\beta)] \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \\
 &\dots\dots\dots(30\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EA} N(\varphi) &= [(a_1' I - d_1') \cdot \sinh I\varphi - (a_2' J + d_2') \\
 &\cdot \sin J\varphi - (a_3' K + d_3') \cdot \sin K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &+ [(b_1' I + c_1') \cdot \cosh I\varphi + (b_2' J + c_2') \\
 &\cdot \cos J\varphi + (b_3' K + c_3') \cdot \cos K\varphi] \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &- [(c_1' I + e_1') \cdot \sinh I\varphi - (c_2' J - e_2') \\
 &\cdot \sin J\varphi - (c_3' K - e_3') \cdot \sin K\varphi] \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 &+ [(a_1' I - d_1') \cdot \sinh I(\varphi-\beta) \\
 &- (a_2' J + d_2') \cdot \sin J(\varphi-\beta) \\
 &- (a_3' K + d_3') \cdot \sin K(\varphi-\beta)] \cdot \bar{\theta}_2(\beta) \\
 &\cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \dots\dots\dots(31\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^3}{EI} Q(\varphi) &= [I^2(a_1' + d_1' I) \cosh I\varphi \\
 &- J^2(a_2' + d_2' J) \cos J\varphi \\
 &- K^2(a_3' + d_3' K) \cos K\varphi] \cdot \bar{\theta}_1(0) \\
 &+ [a_1' \cdot I \cdot \sinh I\varphi - a_2' \cdot J \cdot \sin J\varphi \\
 &- a_3' \cdot K \cdot \sin K\varphi] \cdot \bar{N}_1(0) \\
 &+ [d_1' \cdot I \cosh I\varphi + d_2' \cdot J \cos J\varphi \\
 &+ d_3' \cdot K \cos K\varphi] \cdot \bar{Q}_1(0) \\
 &+ [I^2(a_1' + d_1' I) \cosh I(\varphi-\beta) \\
 &- J^2(a_2' + d_2' J) \cos J(\varphi-\beta) \\
 &- K^2(a_3' + d_3' K) \cdot \cos K(\varphi-\beta)] \\
 &\cdot \bar{\theta}_2(\beta) \cdot \bar{u}(\varphi-\beta) \dots\dots\dots(32\cdot b)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 a_1' &= \frac{I^2 + \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(I^2 + J^2)(I^2 + K^2)} \\
 a_2' &= -\frac{J^2 - \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(I^2 + J^2)(J^2 - K^2)} \\
 a_3' &= \frac{K^2 - \left(1 - \frac{\lambda^4}{a}\right)}{(K^2 + I^2)(J^2 - K^2)} \\
 b_1' &= \frac{I^4 + (a - \lambda^4)}{aI(I^2 + J^2)(I^2 + K^2)} \\
 b_2' &= \frac{J^4 + (a - \lambda^4)}{aJ(I^2 + J^2)(J^2 - K^2)} \\
 b_3' &= -\frac{K^4 + (a - \lambda^4)}{aK(K^2 + I^2)(J^2 - K^2)} \\
 c_1' &= \frac{I^2 - a}{a(I^2 + J^2)(I^2 + K^2)} \\
 c_2' &= -\frac{J^2 + a}{a(I^2 + J^2)(J^2 - K^2)} \\
 c_3' &= \frac{K^2 + a}{a(K^2 + I^2)(J^2 - K^2)} \\
 d_1' &= \frac{I \left[I^2 + \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(I^2 + J^2)(I^2 + K^2)} \\
 d_2' &= \frac{J \left[J^2 - \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(I^2 + J^2)(J^2 - K^2)} \\
 d_3' &= -\frac{K \left[K^2 - \left(1 + \frac{\lambda^4}{a}\right) \right]}{(K^2 + I^2)(J^2 - K^2)} \\
 e_1' &= \frac{(a+1)I^2 + \lambda^4}{aI(I^2 + J^2)(I^2 + K^2)} \\
 e_2' &= -\frac{(a+1)J^2 - \lambda^4}{aJ(I^2 + J^2)(J^2 - K^2)} \\
 e_3' &= \frac{(a+1)K^2 - \lambda^4}{aK(K^2 + I^2)(J^2 - K^2)}
 \end{aligned}$$

(2) 振動数方程式

積分定数を決定するための残りの4条件 (10・e), (9・d), (9・e), (9・f) を用いれば, 未定の定数 $\bar{\theta}_1(0)$, $\bar{N}_1(0)$, $\bar{Q}_1(0)$ および $\bar{\theta}_2(\beta)$ に関する連立方程式をえ, さらに, つぎのように振動数方程式をえる。

a) $a \geq \lambda^4$ の場合

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{41} & a_{21} & a_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1(0) \\ \bar{N}_1(0) \\ \bar{Q}_1(0) \\ \bar{\theta}_2(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (33 \cdot a)$$

したがって, 振動数方程式は次式となる。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} & a_{34} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} & a_{44} \end{pmatrix} = 0 \quad \dots (34 \cdot a)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 a_{11} &= I(a_1 + d_1 I) \sinh I\beta + J(a_2 + d_2 J) \sinh J\beta \\
 &\quad - K(a_3 + d_3 K) \sin K\beta \\
 a_{12} &= a_1 \cosh I\beta + a_2 \cosh J\beta + a_3 \cos K\beta \\
 a_{13} &= d_1 \sinh I\beta + d_2 \sinh J\beta + d_3 \sin K\beta \\
 a_{14} &= 0 \\
 a_{21} &= d_1 \sinh I\alpha + d_2 \sinh J\alpha + d_3 \sin K\alpha \\
 a_{22} &= -(c_1 \cosh I\alpha + c_2 \cosh J\alpha + c_3 \cos K\alpha) \\
 a_{23} &= e_1 \sinh I\alpha + e_2 \sinh J\alpha + e_3 \sin K\alpha \\
 a_{24} &= d_1 \sinh I(\alpha - \beta) + d_2 \sinh J(\alpha - \beta) \\
 &\quad + d_3 \sin K(\alpha - \beta) \\
 a_{31} &= a_1 \cosh I\alpha + a_2 \cosh J\alpha + a_3 \cos K\alpha \\
 a_{32} &= b_1 \sinh I\alpha + b_2 \sinh J\alpha + b_3 \sin K\alpha \\
 a_{33} &= a_{22} \\
 a_{34} &= a_1 \cosh I(\alpha - \beta) + a_2 \cosh J(\alpha - \beta) \\
 &\quad + a_3 \cos K(\alpha - \beta) \\
 a_{41} &= I(a_1 + d_1 I) \sinh I\alpha + J(a_2 + d_2 J) \sinh J\alpha \\
 &\quad - K(a_3 + d_3 K) \sin K\alpha \\
 a_{42} &= a_{31} \\
 a_{43} &= a_{21} \\
 a_{44} &= I(a_1 + d_1 I) \sinh I(\alpha - \beta) \\
 &\quad + J(a_2 + d_2 J) \sinh J(\alpha - \beta) \\
 &\quad - K(a_3 + d_3 K) \sin K(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{22} & b_{34} \\ b_{41} & b_{31} & b_{21} & b_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{\theta}_1(0) \\ \bar{N}_1(0) \\ \bar{Q}_1(0) \\ \bar{\theta}_2(\beta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots (33 \cdot b)$$

したがって, 振動数方程式は次式となる。

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\ b_{31} & b_{32} & b_{22} & b_{34} \\ b_{41} & b_{31} & b_{21} & b_{44} \end{pmatrix} = 0 \quad \dots (34 \cdot b)$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 b_{11} &= I(a_1' + d_1' I) \sinh I\beta - J(a_2' + d_2' J) \sinh J\beta \\
 &\quad - K(a_3' + d_3' K) \sin K\beta \\
 b_{12} &= a_1' \cosh I\beta + a_2' \cosh J\beta + a_3' \cos K\beta \\
 b_{13} &= d_1' \sinh I\beta + d_2' \sinh J\beta + d_3' \sin K\beta \\
 b_{14} &= 0 \\
 b_{21} &= d_1' \sinh I\alpha + d_2' \sinh J\alpha + d_3' \sin K\alpha \\
 b_{22} &= -(c_1' \cosh I\alpha + c_2' \cosh J\alpha + c_3' \cos K\alpha) \\
 b_{23} &= e_1' \sinh I\alpha + e_2' \sinh J\alpha + e_3' \sin K\alpha \\
 b_{24} &= d_1' \sinh I(\alpha - \beta) + d_2' \sinh J(\alpha - \beta) \\
 &\quad + d_3' \sin K(\alpha - \beta) \\
 b_{31} &= a_1' \cosh I\alpha + a_2' \cosh J\alpha + a_3' \cos K\alpha \\
 b_{32} &= b_1' \sinh I\alpha + b_2' \sinh J\alpha + b_3' \sin K\alpha \\
 b_{33} &= b_{22}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{34} &= a_1' \cosh I(\alpha - \beta) + a_2' \cos J(\alpha - \beta) \\
 &\quad + a_3' \cos K(\alpha - \beta) \\
 b_{41} &= I(a_1' + d_1' I) \sinh I\alpha - J(a_2' + d_2' J) \sin J\alpha \\
 &\quad - K(a_3' + d_3' K) \sin K\alpha \\
 b_{42} &= b_{31} \\
 b_{43} &= b_{21} \\
 b_{44} &= I(a_1' + d_1' I) \sinh I(\alpha - \beta) \\
 &\quad - J(a_2' + d_2' J) \sin J(\alpha - \beta) \\
 &\quad - K(a_3' + d_3' K) \sin K(\alpha - \beta)
 \end{aligned}$$

(3) 振動モード

a) $a > \lambda^4$ の場合

$$\begin{aligned}
 W(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \{ (a_1 - c_1 m_2) \cosh I\varphi \\
 &\quad + (a_2 - c_2 m_2) \cosh J\varphi + (a_3 - c_3 m_2) \cos K\varphi \\
 &\quad + m_1 \cdot (b_1 \cdot \sinh I\varphi + b_2 \cdot \sinh J\varphi + b_3 \cdot \sin K\varphi) \\
 &\quad + m_3 \cdot [a_1 \cosh I(\varphi - \beta) + a_2 \cosh J(\varphi - \beta) \\
 &\quad + a_3 \cos K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \} \dots \dots \dots (35 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \{ (d_1 + e_1 m_2) \sinh I\varphi \\
 &\quad + (d_2 + e_2 m_2) \sinh J\varphi + (d_3 + e_3 m_2) \sin K\varphi \\
 &\quad - m_1 \cdot (c_1 \cosh I\varphi + c_2 \cosh J\varphi + c_3 \cos K\varphi) \\
 &\quad + m_3 \cdot [d_1 \sinh I(\varphi - \beta) + d_2 \sinh J(\varphi - \beta) \\
 &\quad + d_3 \sin K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \} \dots \dots \dots (36 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R \cdot \theta(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \left\{ \left[a_1 + \left(I + \frac{m_2}{I} \right) d_1 \right] \cosh I\varphi \right. \\
 &\quad + \left[a_2 + \left(J + \frac{m_2}{J} \right) d_2 \right] \cosh J\varphi \\
 &\quad + \left[a_3 + \left(K - \frac{m_2}{K} \right) d_3 \right] \cos K\varphi \\
 &\quad + m_1 \cdot \left(\frac{a_1}{I} \cdot \sinh I\varphi + \frac{a_2}{J} \cdot \sinh J\varphi \right. \\
 &\quad + \left. \frac{a_3}{K} \cdot \sin K\varphi \right) + m_3 \cdot [(a_1 + d_1 I) \cosh I(\varphi - \beta) \\
 &\quad + (a_2 + d_2 J) \cosh J(\varphi - \beta) \\
 &\quad + (a_3 + d_3 K) \cos K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \\
 &\dots \dots \dots (37 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^2}{EI} M(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \left\{ I \cdot \left[a_1 + \left(I + \frac{m_2}{I} \right) d_1 \right] \sinh I\varphi \right. \\
 &\quad + J \cdot \left[a_2 + \left(J + \frac{m_2}{J} \right) d_2 \right] \sinh J\varphi \\
 &\quad - K \cdot \left[a_3 + \left(K - \frac{m_2}{K} \right) d_3 \right] \sin K\varphi \\
 &\quad + m_1 \cdot (a_1 \cdot \cosh I\varphi + a_2 \cdot \cosh J\varphi + a_3 \cdot \cos K\varphi) \\
 &\quad + m_3 \cdot [I(a_1 + d_1 I) \sinh I(\varphi - \beta) \\
 &\quad + J(a_2 + d_2 J) \sinh J(\varphi - \beta) \\
 &\quad - K(a_3 + d_3 K) \sin K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \\
 &\dots \dots \dots (38 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{R}{EA} N(\varphi) = \bar{\theta}_1(0) \{ [a_1 I - d_1 - m_2(c_1 I + e_1)] \sinh I\varphi$$

$$\begin{aligned}
 &+ [a_2 J - d_2 - m_2(c_2 J + e_2)] \sinh J\varphi \\
 &- [a_3 K + d_3 - m_2(c_3 K - e_3)] \sin K\varphi \\
 &+ m_1 \cdot [(b_1 I + c_1) \cosh I\varphi + (b_2 J + c_2) \cosh J\varphi \\
 &+ (b_3 K + c_3) \cos K\varphi] \\
 &+ m_3 \cdot [(a_1 I - d_1) \sinh I(\varphi - \beta) \\
 &+ (a_2 J - d_2) \sinh J(\varphi - \beta) \\
 &- (a_3 K + d_3) \sin K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \\
 &\dots \dots \dots (39 \cdot a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^3}{EI} Q(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \left\{ I^2 \cdot \left[a_1 + \left(I + \frac{m_2}{I} \right) d_1 \right] \cosh I\varphi \right. \\
 &\quad + J^2 \left[a_2 + \left(J + \frac{m_2}{J} \right) d_2 \right] \cosh J\varphi \\
 &\quad - K^2 \left[a_3 + \left(K - \frac{m_2}{K} \right) d_3 \right] \cos K\varphi \\
 &\quad + m_1 \cdot (a_1 I \sinh I\varphi + a_2 J \sinh J\varphi \\
 &\quad - a_3 K \sin K\varphi) \\
 &\quad + m_3 \cdot [I^2(a_1 + d_1 I) \cosh I(\varphi - \beta) \\
 &\quad + J^2(a_2 + d_2 J) \cosh J(\varphi - \beta) \\
 &\quad - K^2(a_3 + d_3 K) \cos K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \\
 &\dots \dots \dots (40 \cdot a)
 \end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
 m_1 &= (a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{24} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{34} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{34} \\
 &\quad - a_{13} \cdot a_{24} \cdot a_{31}) / m_4 \\
 m_2 &= (a_{12} \cdot a_{24} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{34} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{34} \\
 &\quad - a_{11} \cdot a_{24} \cdot a_{32}) / m_4 \\
 m_3 &= (a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{22} + a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} \\
 &\quad - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{22}^2 - a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) / m_4 \\
 m_4 &= a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{24} - a_{12} \cdot a_{22} \cdot a_{24} \\
 &\quad - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{24}
 \end{aligned}$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

$$\begin{aligned}
 W(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \{ (a_1' - n_2 \cdot c_1') \cosh I\varphi \\
 &\quad + (a_2' - n_2 \cdot c_2') \cos J\varphi + (a_3' - n_2 \cdot c_3') \cos K\varphi \\
 &\quad + n_1 (b_1' \sinh I\varphi + b_2' \sin J\varphi + b_3' \sin K\varphi) \\
 &\quad + n_3 [a_1' \cosh I(\varphi - \beta) + a_2' \cos J(\varphi - \beta) \\
 &\quad + a_3' \cos K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \dots \dots \dots (35 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \{ (d_1' + n_2 e_1') \sinh I\varphi \\
 &\quad + (d_2' + n_2 e_2') \sin J\varphi + (d_3' + n_2 e_3') \sin K\varphi \\
 &\quad - n_1 (c_1' \cosh I\varphi + c_2' \cos J\varphi + c_3' \cos K\varphi) \\
 &\quad + n_3 [d_1' \sinh I(\varphi - \beta) + d_2' \sin J(\varphi - \beta) \\
 &\quad + d_3' \sin K(\varphi - \beta)] \bar{u}(\varphi - \beta) \left. \right\} \dots \dots \dots (36 \cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R \cdot \theta(\varphi) &= \bar{\theta}_1(0) \left\{ \left[a_1' + \left(I + \frac{n_2}{I} \right) d_1' \right] \cosh I\varphi \right. \\
 &\quad + \left[a_2' + \left(J - \frac{n_2}{J} \right) d_2' \right] \cos J\varphi \\
 &\quad + \left[a_3' + \left(K - \frac{n_2}{K} \right) d_3' \right] \cos K\varphi \\
 &\quad + n_1 \cdot \left(\frac{a_1'}{I} \cdot \sinh I\varphi + \frac{a_2'}{J} \cdot \sin J\varphi + \frac{a_3'}{K} \cdot \sin K\varphi \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+n_3[(a_1'+d_1'I)\cosh I(\varphi-\beta) \\
 &+(a_2'+d_2'J)\cos J(\varphi-\beta) \\
 &+(a_3'+d_3'K)\cos K(\varphi-\beta)]\bar{u}(\varphi-\beta)\} \\
 &\dots\dots\dots(37\cdot b) \\
 -\frac{R^2}{EI}M(\varphi)=\bar{\theta}_1(0)\{ &I\left[a_1'+\left(I+\frac{n_2}{I}\right)d_1'\right]\sinh I\varphi \\
 -J\left[a_2'+\left(J-\frac{n_2}{J}\right)d_2'\right] &\sin J\varphi \\
 -K\left[a_3'+\left(K-\frac{n_2}{K}\right)d_3'\right] &\sin K\varphi \\
 +n_1(a_1'\cosh I\varphi+a_2'\cos J\varphi &+a_3'\cos K\varphi) \\
 +n_3[I(a_1'+d_1'I)\sinh(\varphi-\beta) & \\
 -J(a_2'+d_2'J)\sin J(\varphi-\beta) & \\
 -K(a_3'+d_3'K)\sin K(\varphi-\beta)] &\bar{u}(\varphi-\beta)\} \\
 \dots\dots\dots(38\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{R}{EA}N(\varphi)=\bar{\theta}_1(0)\{ &[(a_1'I-d_1') \\
 -n_2(c_1'I+e_1')] &\sin I\varphi - [(a_2'J+d_2') \\
 -n_2(c_2'J-e_2')] &\sin J\varphi - [(a_3'K+d_3') \\
 -n_2(c_3'K-e_3')] &\sin K\varphi \\
 +n_1[(b_1'I+c_1')\cosh I\varphi &+(b_2'J+c_2')\cos J\varphi \\
 +(b_3'K+c_3')\cos K\varphi] & \\
 +n_3[(a_1'I-d_1')\sinh I(\varphi-\beta) & \\
 -(a_2'J+d_2')\sin J(\varphi-\beta) & \\
 -(a_3'K+d_3')\sin K(\varphi-\beta)] &\bar{u}(\varphi-\beta)\} \\
 \dots\dots\dots(39\cdot b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{R^3}{EI}Q(\varphi)=\bar{\theta}_1(0)\{ &I^2\left[a_1'+\left(I+\frac{n_2}{I}\right)d_1'\right]\cosh I\varphi \\
 -J^2\left[a_2'+\left(J-\frac{n_2}{J}\right)d_2'\right] &\cos J\varphi \\
 -K^2\left[a_3'+\left(K-\frac{n_2}{K}\right)d_3'\right] &\cos K\varphi \\
 +n_1(a_1'I\sinh I\varphi-a_2'J\sin J\varphi & \\
 -a_3'K\sin K\varphi)+n_3[I^2(a_1'+d_1'I)\cosh I(\varphi-\beta) & \\
 -J^2(a_2'+d_2'J)\cos J(\varphi-\beta) & \\
 -K^2(a_3'+d_3'K)\cos K(\varphi-\beta)] &\bar{u}(\varphi-\beta)\} \\
 \dots\dots\dots(40\cdot b)
 \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
 n_1 &=(b_{11}\cdot b_{22}\cdot b_{24}+b_{13}\cdot b_{21}\cdot b_{34}-b_{11}\cdot b_{23}\cdot b_{34}-b_{13}\cdot b_{24} \\
 &\quad b_{31})/n_4 \\
 n_2 &=(b_{12}\cdot b_{24}\cdot b_{31}+b_{11}\cdot b_{22}\cdot b_{34}-b_{11}\cdot b_{24}\cdot b_{32})/n_4 \\
 n_3 &=(b_{11}\cdot b_{23}\cdot b_{32}+b_{12}\cdot b_{21}\cdot b_{22}+b_{13}\cdot b_{22}\cdot b_{31}-b_{12}\cdot b_{23}\cdot b_{31} \\
 &\quad -b_{11}\cdot b_{22}^2-b_{13}\cdot b_{21}\cdot b_{32})/n_4 \\
 n_4 &=b_{12}\cdot b_{23}\cdot b_{34}+b_{13}\cdot b_{32}\cdot b_{24}-b_{12}\cdot b_{22}\cdot b_{24}-b_{13}\cdot b_{22}\cdot b_{24}
 \end{aligned}$$

4. 対称形 3 ヒンジ アーチの自由振動

3 ヒンジアーチの中間ヒンジがアーチの中央点にあるとき、すなわち $\varphi=\frac{\alpha}{2}$ ($=\beta$) なる位置にある時は振動型を対称、逆対称の別に分けて自由振動を解析することができる。いま、

$$\varphi-\beta=\eta$$

なる座標変換を行なえば、3 ヒンジアーチの半径方向変位 U はつぎのように変形される。

a) $a \geq \lambda'$ の場合

式 (28・a) より

$$\begin{aligned}
 U(\eta)= &[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_1\cosh I\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_1\sinh I\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_1\cosh I\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_1]\cdot \sinh I\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_2\cosh J\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_2\sinh J\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_2\cosh J\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_2]\cdot \sinh J\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_3\cos K\beta+\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_3\sin K\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_3\cos K\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_3]\cdot \sin K\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_1\sinh I\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_1\cosh I\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_1\sinh I\beta]\cdot \cosh I\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_2\sinh J\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_2\cosh J\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_2\sinh J\beta]\cdot \cosh J\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_3\sin K\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_3\cos K\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_3\sin K\beta]\cdot \cos K\eta \\
 &(0\leq\eta\leq\beta)\dots\dots\dots(41\cdot a)
 \end{aligned}$$

b) $a < \lambda_4$ の場合

式 (28・b) より

$$\begin{aligned}
 U(\eta)= &[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_1'\cosh I\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_1'\sinh I\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_1'\cosh I\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_1']\cdot \sinh I\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_2'\cos J\beta+\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_2'\sin J\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_2'\cos J\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_2']\cdot \sin J\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_3'\cos K\beta+\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_3'\sin K\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_3'\cos K\beta+\bar{\theta}_2(0)\cdot d_3']\cdot \sin K\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_1'\sinh I\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_1'\cosh I\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_1'\sinh I\beta]\cdot \cosh I\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_2'\sin J\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_2'\cos J\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_2'\sin J\beta]\cdot \cos J\eta \\
 &+[\bar{\theta}_1(-\beta)\cdot d_3'\sin K\beta-\bar{N}_1(-\beta)\cdot c_3'\cos K\beta \\
 &+\bar{Q}_1(-\beta)\cdot e_3'\sin K\beta]\cdot \cos K\eta \\
 &(0\leq\eta\leq\beta)\dots\dots\dots(41\cdot b)
 \end{aligned}$$

(1) 逆対称振動

a) $a \geq \lambda'$ の場合

関数 $\cosh I\eta$, $\cosh J\eta$, $\cos K\eta$ は偶関数であるゆえ、
 次式が成立せねばならない。

$$\begin{bmatrix} d_1\sinh I\beta & -c_1\cosh I\beta & e_1\sinh I\beta \\ d_2\sinh J\beta & -c_2\cosh J\beta & e_2\sinh J\beta \\ d_3\sin K\beta & -c_3\cos K\beta & e_3\sin K\beta \end{bmatrix}$$

$$\cdot \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(-\beta) \\ \bar{N}_1(-\beta) \\ \bar{Q}_1(-\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって、つぎの振動数方程式がえられる。

$$\begin{vmatrix} d_1 \sinh I\beta & c_1 \cosh I\beta & e_1 \sinh I\beta \\ d_2 \sinh J\beta & c_2 \cosh J\beta & e_2 \sinh J\beta \\ d_3 \sin K\beta & c_3 \cos K\beta & e_3 \sin K\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(42\cdot a)$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

関数 $\cosh I\eta$, $\cos J\eta$, $\cos K\eta$ は偶関数であるゆえ、次式が成立せねばならない。

$$\begin{vmatrix} d_1' \sinh I\beta & -c_1' \cosh I\beta & e_1' \sinh I\beta \\ d_2' \sin J\beta & -c_2' \cos J\beta & e_2' \sin J\beta \\ d_3' \sin K\beta & -c_3' \cos K\beta & e_3' \sin K\beta \end{vmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\theta}_1(-\beta) \\ \bar{N}_1(-\beta) \\ \bar{Q}_1(-\beta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

したがって、振動数方程式は

$$\begin{vmatrix} d_1' \sinh I\beta & c_1' \cosh I\beta & e_1' \sinh I\beta \\ d_2' \sin J\beta & c_2' \cos J\beta & e_2' \sin J\beta \\ d_3' \sin K\beta & c_3' \cos K\beta & e_3' \sin K\beta \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(42\cdot b)$$

(2) 対称振動

奇関数 $\sinh I\eta$, $\sinh J\eta$, $\sin K\eta$, $\sin J\eta$ の係数および $\eta=0$ 点における曲げモーメント零の条件よりつぎのように振動数方程式がえられる。

a) $a > \lambda^4$ の場合

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ d_1 \cosh I\beta & -c_1 \sinh I\beta & e_1 \cosh I\beta & d_1 \\ d_2 \cosh J\beta & -c_2 \sinh J\beta & e_2 \cosh J\beta & d_2 \\ d_3 \cos K\beta & c_3 \sin K\beta & e_3 \cos K\beta & d_3 \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(43\cdot a)$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ d_1' \cosh I\beta & -c_1' \sinh I\beta & e_1' \cosh I\beta & d_1' \\ d_2' \cos J\beta & c_2' \sin J\beta & e_2' \cos J\beta & d_2' \\ d_3' \cos K\beta & c_3' \sin K\beta & e_3' \cos K\beta & d_3' \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(43\cdot b)$$

5. 2 ヒンジアーチの自由振動

2 ヒンジアーチの自由振動の半径方向変位および接線方向変位の規準関数をそれぞれ U , W とすれば、これらは (12・a) と同形の方程式を満足する。したがって、2 ヒンジアーチの U , W はつぎとおりととなる。

a) $a > \lambda^4$ の場合

$$W(\varphi) = (a_1 \cdot \cosh I\varphi + a_2 \cdot \cosh J\varphi + a_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}(0)$$

$$\begin{aligned} & + (b_1 \cdot \sinh I\varphi + b_2 \cdot \sinh J\varphi + b_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{N}(0) \\ & - (c_1 \cdot \cosh I\varphi + c_2 \cdot \cosh J\varphi + c_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{Q}(0) \\ U(\varphi) & = (d_1 \cdot \sinh I\varphi + d_2 \cdot \sinh J\varphi + d_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}(0) \\ & - (c_1 \cdot \cosh I\varphi + c_2 \cdot \cosh J\varphi + c_3 \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}(0) \\ & + (e_1 \cdot \sinh I\varphi + e_2 \cdot \sinh J\varphi + e_3 \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}(0) \end{aligned}$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

$$\begin{aligned} W(\varphi) & = (a_1' \cdot \cosh I\varphi + a_2' \cdot \cos J\varphi \\ & + a_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{\theta}(0) + (b_1' \cdot \sinh I\varphi \\ & + b_2' \cdot \sin J\varphi + b_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{N}(0) \\ & - (c_1' \cdot \cosh I\varphi + c_2' \cdot \cos J\varphi \\ & + c_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{Q}(0) \\ U(\varphi) & = (d_1' \cdot \sinh I\varphi + d_2' \cdot \sin J\varphi + d_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{\theta}(0) \\ & - (c_1' \cdot \cosh I\varphi + c_2' \cdot \cos J\varphi + c_3' \cdot \cos K\varphi) \cdot \bar{N}(0) \\ & + (e_1' \cdot \sinh I\varphi + e_2' \cdot \sin J\varphi + e_3' \cdot \sin K\varphi) \cdot \bar{Q}(0) \end{aligned}$$

これらより、2 ヒンジアーチの振動数方程式として次式を得る。

a) $a > \lambda^4$ の場合

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{22} \\ a_{41} & a_{31} & a_{21} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(44\cdot a)$$

b) $a < \lambda^4$ の場合

$$\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{22} \\ b_{41} & b_{31} & b_{21} \end{vmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots(44\cdot b)$$

さらに、対称および逆対称の振動数方程式を別々にえるために、2 ヒンジアーチの半開角を β とし、 $\varphi - \beta = \eta$ なる変数変換を行なえば、

$$\begin{aligned} U(\eta) & = \sinh I\eta [\theta(-\beta) \cdot d_1 \cosh I\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_1 \sinh I\beta + Q(-\beta) \cdot e_1 \cosh I\beta] \\ & + \sinh J\eta [\theta(-\beta) \cdot d_2 \cosh J\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_2 \sinh J\beta + Q(-\beta) \cdot e_2 \cosh J\beta] \\ & + \sin K\eta [\theta(-\beta) \cdot d_3 \cos K\beta \\ & + N(-\beta) \cdot c_3 \sin K\beta + Q(-\beta) \cdot e_3 \cos K\beta] \\ & + \cosh I\eta [\theta(-\beta) \cdot d_1 \sinh I\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_1 \cosh I\beta + Q(-\beta) \cdot e_1 \sinh I\beta] \\ & + \cosh J\eta [\theta(-\beta) \cdot d_2 \sinh J\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_2 \cosh J\beta + Q(-\beta) \cdot e_2 \sinh J\beta] \\ & + \cos K\eta [\theta(-\beta) \cdot d_3 \sin K\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_3 \cos K\beta + Q(-\beta) \cdot e_3 \sin K\beta] \\ & (a > \lambda^4) \dots\dots\dots(45\cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U(\eta) & = \sinh I\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_1' \cosh I\beta \\ & - N(-\beta) \cdot c_1' \sinh I\beta + Q(-\beta) \cdot e_1' \cosh I\beta] \\ & + \sin J\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_2' \cos J\beta \\ & + N(-\beta) \cdot c_2' \sin J\beta + Q(-\beta) \cdot e_2' \cos J\beta] \\ & + \sin K\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_3' \cos K\beta \\ & + N(-\beta) \cdot c_3' \sin K\beta + Q(-\beta) \cdot e_3' \cos K\beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \cosh I\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_1' \sinh I\beta \\
 & - N(-\beta) \cdot c_1' \cosh I\beta + Q(-\beta) \cdot e_1' \sinh I\beta] \\
 & + \cos J\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_2' \sin J\beta \\
 & - N(-\beta) \cdot c_2' \cos J\beta + Q(-\beta) \cdot e_2' \sin J\beta] \\
 & + \cos K\eta \cdot [\theta(-\beta) \cdot d_3' \sin K\beta \\
 & - N(-\beta) \cdot c_3' \cos K\beta + Q(-\beta) \cdot e_3' \sin K\beta] \\
 & (a < \lambda') \dots\dots\dots(45 \cdot b)
 \end{aligned}$$

(1) 逆対称振動

偶関数 $\cosh I\eta$, $\cosh J\eta$, $\cos K\eta$, $\cos J\eta$ の係数は零でなくてはならぬことより つぎの振動数方程式をえる。

a) $a \geq \lambda'$ の場合

$$\begin{vmatrix} d_1 \sinh I\beta & c_1 \cosh I\beta & e_1 \sinh I\beta \\ d_2 \sinh J\beta & c_2 \cosh J\beta & e_2 \sinh J\beta \\ d_3 \sin K\beta & c_3 \cos K\beta & e_3 \sin K\beta \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(46 \cdot a)$$

b) $a < \lambda'$ の場合

$$\begin{vmatrix} d_1' \sinh I\beta & c_1' \cosh I\beta & e_1' \sinh I\beta \\ d_2' \sin J\beta & c_2' \cos J\beta & e_2' \sin J\beta \\ d_3' \sin K\beta & c_3' \cos K\beta & e_3' \sin K\beta \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(46 \cdot b)$$

(2) 対称振動

奇関数 $\sinh I\eta$, $\sinh J\eta$, $\sin K\eta$, $\sin J\eta$ の係数は零でなくてはならぬことより、つぎの振動数方程式をえる。

a) $a \geq \lambda'$ の場合

$$\begin{vmatrix} d_1 \cosh I\beta & -c_1 \sinh I\beta & e_1 \cosh I\beta \\ d_2 \cosh J\beta & -c_2 \sinh J\beta & e_2 \cosh J\beta \\ d_3 \cos K\beta & c_3 \sin K\beta & e_3 \cos K\beta \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(47 \cdot a)$$

b) $a < \lambda'$ の場合

$$\begin{vmatrix} d_1' \cosh I\beta & -c_1' \sinh I\beta & e_1' \cosh I\beta \\ d_2' \cos J\beta & c_2' \sin J\beta & e_2' \cos J\beta \\ d_3' \cos K\beta & c_3' \sin K\beta & e_3' \cos K\beta \end{vmatrix} = 0 \dots\dots\dots(47 \cdot b)$$

6. 解析結果および考察

振動数方程式 (42・a) と (46・a) および (42・b) と (46・b) が示すように、円弧アーチの中央点にヒンジを有する3ヒンジアーチすなわち対称構造をもつ3ヒンジアーチの逆対称振動の固有値は2ヒンジアーチの同次数の逆対称振動の固有値と一致する。

図-3 (a), (b), (c), (d) はそれぞれ中心角 30° , 60° , 90° , 120° の対称構造をもつ3ヒンジアーチの各次数の固有値 $\lambda = (\rho\omega^2 L^4/EI)^{1/4}$ と細長比 $(L^2 A/I)^{1/2}$ との関係

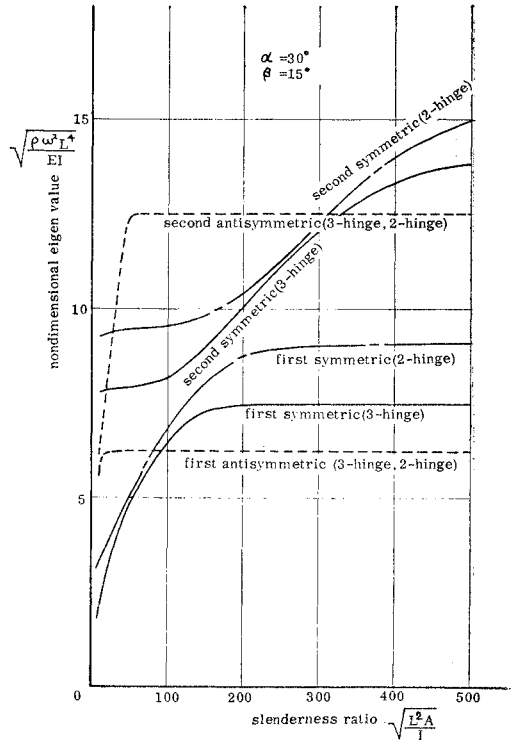


図-3 (a)

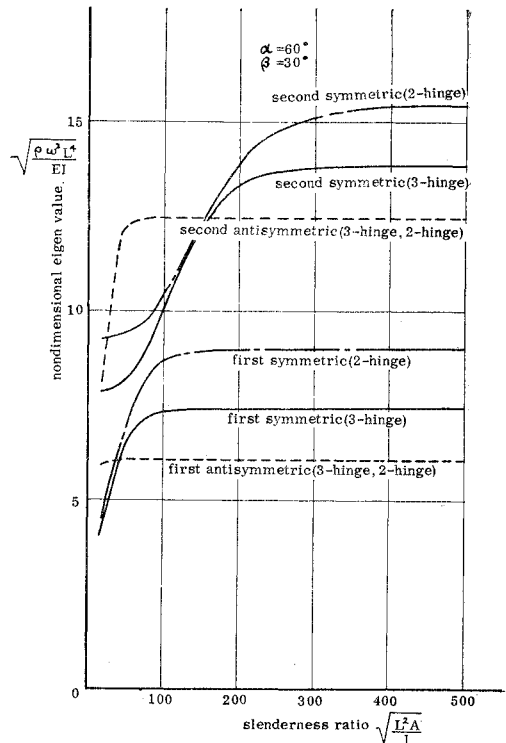


図-3 (b)

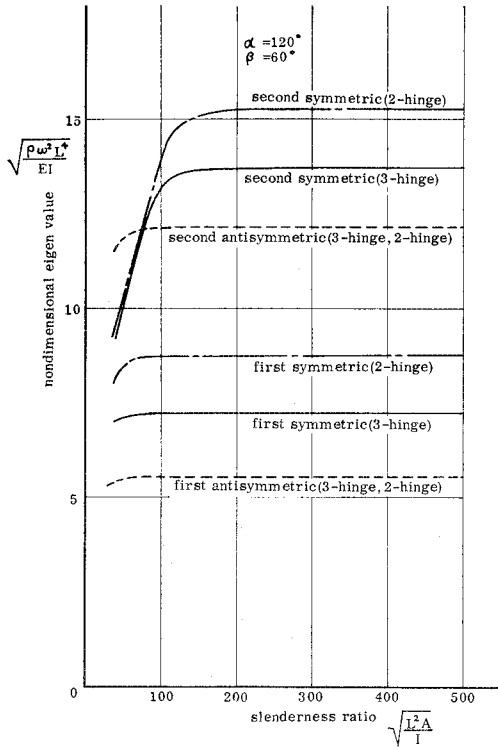


図-3 (c)

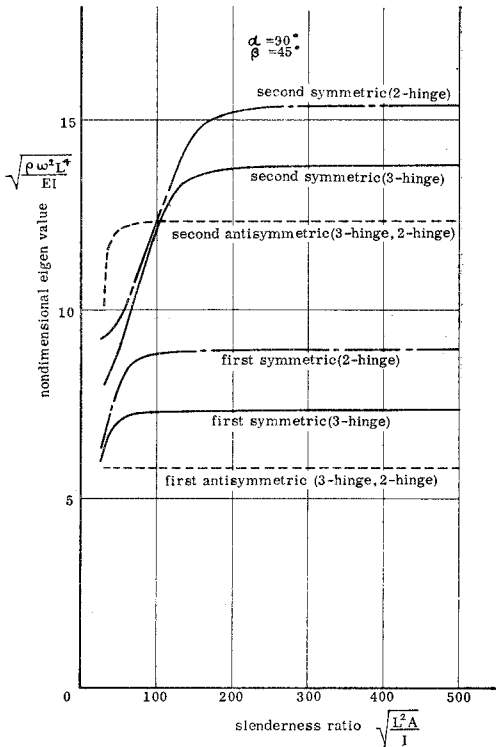


図-3 (d)

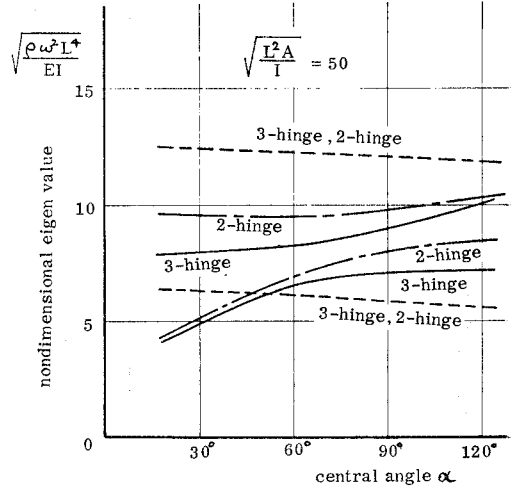


図-4 (a)

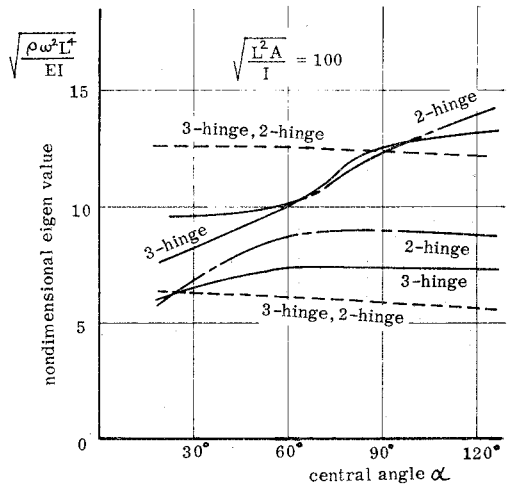


図-4 (b)

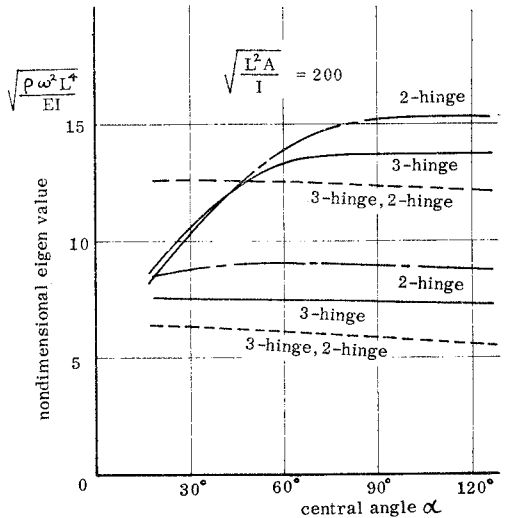


図-4 (c)

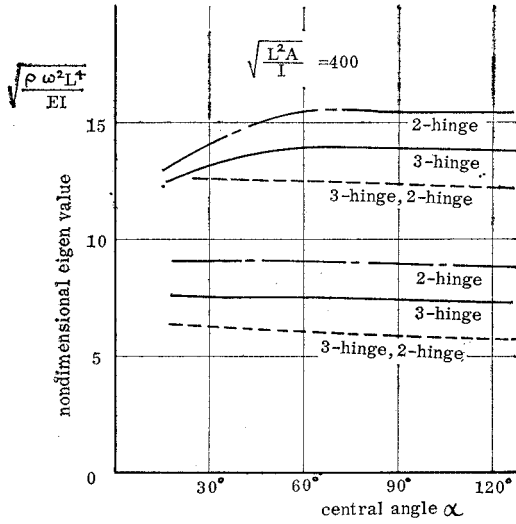


図-4 (d)

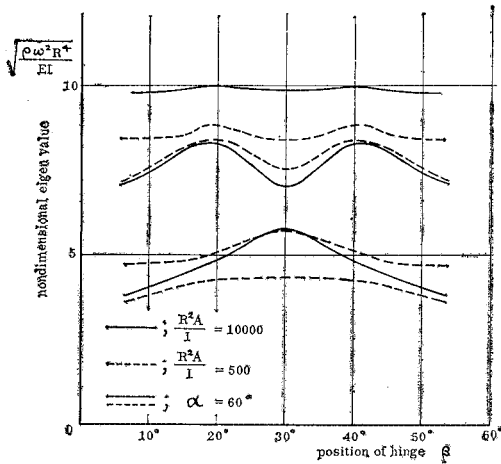
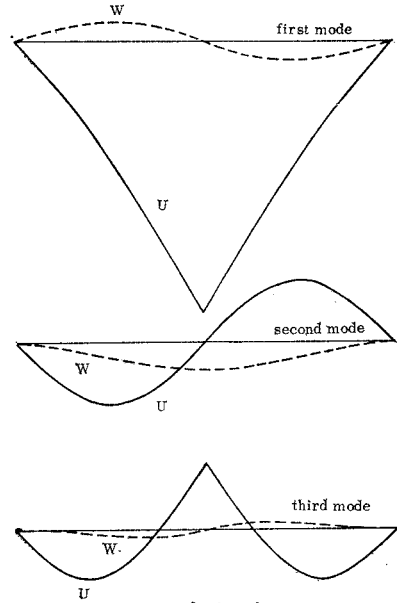


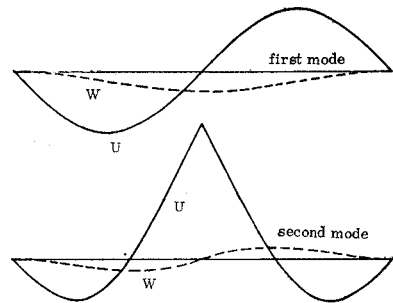
図-5

を示すものである。これらより、対称構造をもつ3ヒンジアーチの自由振動性状に関してつぎの事柄が明らかとなる。

- (1) 逆対称振動に関しては、3ヒンジアーチと2ヒンジアーチとの固有振動数は一致する。
- (2) 細長比 $(L^2 A / I)^{1/2}$ の逆対称振動の固有値 λ への影響範囲は小さい。この傾向は低次の逆対称振動においてとくに顕著である。
- (3) 対称振動の固有値 λ は細長比 $(L^2 A / I)^{1/2}$ の値影響される範囲が大きく、高次になるほどその傾向が著しい。
- (4) 3ヒンジアーチの最低次自由振動は、2ヒンジアーチと同様、通常の細長比の範囲では、逆対称振動である。
- (5) 一般に、対称振動の固有振動数は同次数の2ヒ



$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$
 $\frac{R^2 A}{I} = 500$
図-6 (a)



$\alpha = 60^\circ, \beta = 30^\circ$
 $\frac{R^2 A}{I} = 10000$
図-6 (b)

ンジアーチのそれよりも小さい。

つぎに、図-4 は対称構造を有する3ヒンジアーチの固有値 λ と中心角 α との関係を示すものである。これにより、細長比が小さい場合には曲線が交錯し、したがって、中心角の大きさによって振動型の順序が異なることを知る。

図-5 は中心角 60° の3ヒンジアーチの固有値 $(\rho \omega^2 R^4 / EI)$

$EI)^{1/4}$ と中間ヒンジ位置との関係を示すものである。 $\beta \rightarrow 0$ あるいは $\beta \rightarrow 60^\circ$ のときの固有値は一端ヒンジ他端自由の 2 ヒンジアーチの固有値と一致する。

図-6 に 2 種の細長比に対する振動モードを示す。

7. 結 語

3 ヒンジアーチの自由振動は本来古典的な問題であろうと思われるが、これについて詳細な解析を行なった研究は、著者らの知る限り、無い。もちろん、解式の繁雑さをいわず、数値計算の安定性を度外視すれば、従来の方法すなわち中間ヒンジの左右両部においておのおの 1 個ずつの基礎微分方程式をたて、これを境界条件と連続条件の下で解くという方法で解を求めることはできるのであるが実用上合理的とはいえず、当然何らかの方法によって解析の簡単化、数値計算の安定化がはからなければならないと思う。ここに提案した方法は単位階段関数などを用いた数学的方法により解法の簡易化、一般化を目指すものであり、要素の不連続部すなわち中間

ヒンジ部における連続条件を本法のように表わすことによって、3 ヒンジアーチの自由振動解析を容易に行なうことができる。このことは、3 ヒンジアーチのみに限らず、ゲルバーばりや連続ばりその他の不連続要素を持つ構造物に対しても共通していえることである。さらに、振動問題のみでなく静的な問題や座屈問題などの解法にも本法の考え方が適用できることはいうまでもない。

なお、本研究における数値計算は全て九州大学大型電子計算機センターの FACOM 230-60 を用いて行なったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) Walkling, F.W.: Schwingungszahlen und Schwingungsformen von Kreisbogenträgern, Ing. Arch. Bd 5 (1934), S 429~449
- 2) 崎山 毅: 3 ヒンジアーチの自由振動, 土木学会第 24 回 年次学術講演会第 I 部概要集 p. 233~236
- 3) 崎山 毅: 集中質量を有する梁の自由振動解法, 第 19 回 応用力学連合講演会論文抄録集, p. 157~158
- 4) 崎山 毅: ゲルバーばりの座屈について, 昭和 44 年度土木学会西部支部研究発表会論文集, p. 79~82
(1970.5.14・受付)