

点支持された斜板の有限要素法による解析

ANALYSIS OF POINTS-SUPPORTED SKEW PLATES BY FINITE ELEMENT METHOD

川島一彦*・関 千秋**・梶田建夫***・成岡昌夫****

By Kazuhiko Kawashima, Chiaki Seki, Tateo Kajita and Masao Naruoka

1. はしがき

斜板に関しては、これまで多くの模型実験や差分法¹⁾による数値解析が行なわれてきており、斜板が長方形板とは相当異なった力学的挙動を示すことは、広く知られている。しかし、現在までに行なわれた研究の多くは、曲げモーメントに関するものであり、支点の反力を実験的に取り扱っているものもあるが、これは比較的少ない^{2),3),5)}。また、支点の反力を取り扱っているものでも、支点での沈下や浮き上りを許さない、いわゆる、剛に支持された場合を対象としているものが大部分であるが、実際の斜板構造物は適当な間隔をおいて並べられたネオプレーンなどのゴム支承で、弾性的、かつ、非連続的に支持されていることが多い。このように、斜板が弾性的に数点で支持されている場合には、板に複雑な変形を与えると考えられるが、こうした斜板の厳密な理論的

解析は、非常に困難である。

Darmstadt 工科大学の A. Mehmel 教授と、その助手 H. Weise は、種々の条件の斜板について、実験的研究を行ない、斜板の支点反力、曲げモーメントの性質について研究している¹⁾。このような問題は、現在、有限要素法を用いることにより、容易に数値解析されうることに着目し、A. Mehmel らの実験報告にそった数値解析を行なったので、この数値解析結果と実験値との比較、および結果の検討について報告したい。

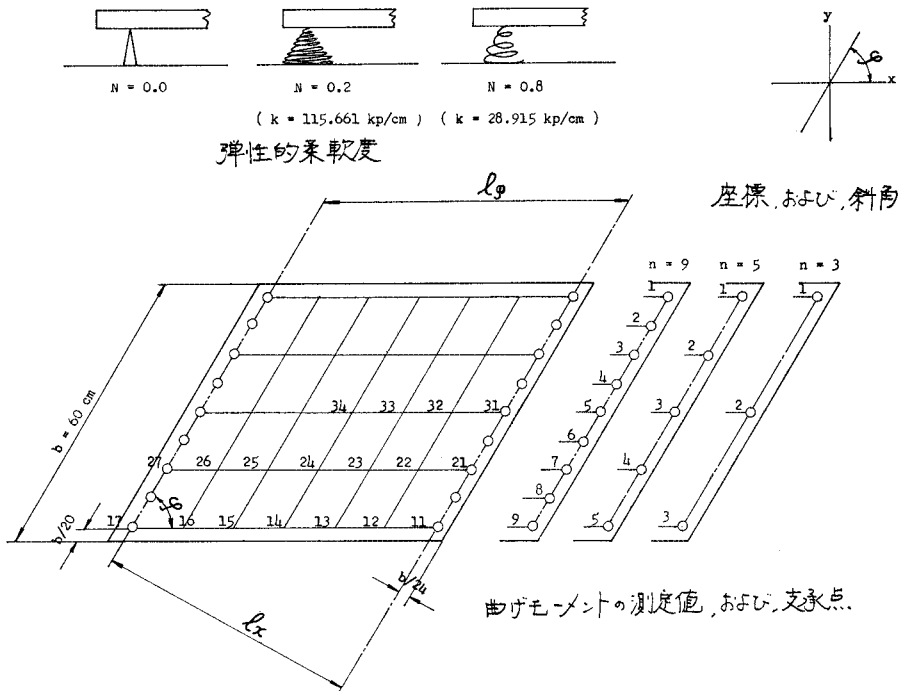


図-1 実験に用いられた模型

* 学生会員 名古屋大学大学院工学研究科修士課程 ** 正会員 工修 国鉄札幌鉄道管理局(実修中)
*** 学生会員 工修 名古屋大学大学院工学研究科博士課程 **** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

2. A. Mehmélらの行なった実験的研究の概要

A. Mehmél と H. Weise は、図-1 のような相対する2辺で弾性的に点支持され、他の2辺が自由である斜板の、支点反力、および、曲げモーメント、ねじりモーメントに影響をおよぼす因子として、斜角、辺長比、弾性的柔軟度、支点数の4つを取りあげ、それぞれ、つぎに示すように3種類ずつ、合計 $3^4=81$ 種類にわたって、組織的な実験を行なった。これらは、満載等分布荷重が作用したときの支点反力と曲げモーメント、および、支点反力の影響面の形で報告されている。

斜角	$\varphi=30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$
辺長比	$l_\varphi/b=0.5, 1.0, 2.0$
支点数	$n=3, 5, 9$
弾性的柔軟度	$N=0.0, 0.2, 0.8$

ここで、辺長比 l_φ/b とは、自由辺の長さ、すなわち、斜板のスパン l_φ と支承線方向の幅員 b との比であり、Mehmél らの実験では、 b を統一して、60 cm にとっている。また、支承の弾性的柔軟度 N (elastische-Nachgiebigkeit) は、つぎのように定義されている。

$$N = Ed^3/kb^2$$

ここで、 E : 板材料のヤング係数、 d : 板の厚さ、 b : 板の支承線方向の幅員、 k : 支承材料のばね定数である。また、実験に用いられた模型の材料は水晶ガラスで、厚さ $d=0.48$ cm、ヤング係数 $E=753\,000$ kp/cm²、ポアソン比 $\mu=0.22$ である。

3. 有限要素法による解析

(1) 使用した要素

図-1 のような斜板を要素に分割するには、三角形要素に分割する方法と平行四辺形要素に分割する方法とが考えられる。ここでは、これら両方の分割法を使用した。

三角形要素としては、O.C. Zienkiewicz らによる一節点の変位成分が、 $w, \theta_x (= -\partial w/\partial y), \theta_y (= \partial w/\partial x)$ の3個で、隣接要素間のたわみ角の連続性のない、いわゆる、non-conforming の形のものを使用した⁶⁾。

また、平行四辺形要素としては、たわみ w を、斜角に対応した斜交座標を用いて、長方形要素に対して行なわれたと同様に、12 の項数をもつ多項式で仮定したものをを用いた。

(2) 支点反力

剛に支持されている場合には、境界条件として、その支点でのたわみ w を0にする。全体の変位 $\{U\}$ は、

このように境界条件で与えられる既知の変位 $\{U_\alpha\}$ と、未知の変位 $\{U_\beta\}$ とに分けることができる。同様に、力 $\{F\}$ も、 $\{U_\alpha\}$ に対応する力 $\{F_\alpha\}$ と、 $\{U_\beta\}$ に対応する力 $\{F_\beta\}$ とに分けられる。力 $\{F_\alpha, F_\beta\}^T$ と変位 $\{U_\alpha, U_\beta\}^T$ とは、Stiffness Matrix により、つぎのように結びつけられる。

$$\begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{Bmatrix}$$

いま、 $\{U_\alpha\}=0$ であるから、未知変位 $\{U_\beta\}$ は $\{U_\beta\} = [K_{\beta\beta}]^{-1} \{F_\beta\}$

$$\therefore \{F_\alpha\} = [K_{\alpha\beta}][K_{\beta\beta}]^{-1} \{F_\beta\}$$

となる。この $\{F_\alpha\}$ が支点反力である。

つぎに、弾性的に支持されている場合には、支点のばね定数 k を、全体の Stiffness Matrix の対応する対角要素（ここでは、ばねは沈下、あるいは、浮き上りに対してのみ作用し、回転には無拘束とした）に加えてから、この行列の逆行列を求める。これから、各節点での変位が求められると、支点反力は、支点の変位にばね定数 k を乗じたものとなる。

(3) 要素の分割

A. Mehmél らの実験に用いられた模型には、図-1 のように、自由辺、支持辺に、それぞれ、 $b/20, b/24$ の張り出し部がついているが、計算では、これらを見捨て、四隅の支承点を結ぶ線の範囲内を対象とした。

要素の分割数は、支点反力を求めるためには、辺長比 $l_\varphi/b=0.5$ の場合、45 節点（支持辺、自由辺を、それぞれ、8, 4 等分に分割——以下、これを“8×4”のように表わす）に、 $l_\varphi/b=1.0$ の場合には、35 節点（4×6）、 $l_\varphi/b=2.0$ の場合には、55 節点（4×10）とした。曲げモーメントについては、 $l_\varphi/b=1.0$ の場合を対象として、支点反力を求める場合より細かく分割して、63 節点（8×6）とした。

4. 実験値と計算値との比較

満載等分布荷重が作用したときの各支点反力については、表-1 に示すように、11 種類の場合を計算した。各段とも、上が著者らの計算結果を、下の（ ）内が、A. Mehmél らの実験値を示している。

これによれば、計算値は、鈍角端のように反力の集中する支点では、やや実験値よりも小さめになっているほかは、きわめて実験値とよく一致していると思われる。

支点反力の影響面の計算値を、実験による影響面の値と比較した例が、図-2、および、図-3 である。図-2 は弾性的柔軟度 N を、図-3 は支点数 n を、それぞれ変化させたときの、影響面の変化を表わしている。等

表-1 等分布荷重 (q) 満載の場合の支点反力
(q×板の面積を 1 とする)

a) 辺長比 $l_p/b=1.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$

φ	N	支 点 (n=5)				
		1	2	3	4	5
60°	0.8	0.048 (0.051)	0.086 (0.073)	0.107 (0.099)	0.121 (0.124)	0.139 (0.153)
	0.2	0.042 (0.046)	0.081 (0.075)	0.099 (0.092)	0.114 (0.113)	0.162 (0.174)
	0.0	0.023 (0.039)	0.097 (0.103)	0.125 (0.092)	0.075 (0.052)	0.180 (0.214)
30°	0.8	0.021 (0.026)	0.078 (0.068)	0.108 (0.110)	0.133 (0.130)	0.161 (0.166)
	0.2	0.020 (0.023)	0.071 (0.069)	0.098 (0.096)	0.117 (0.118)	0.194 (0.194)
	0.0	0.019 (0.016)	0.074 (0.081)	0.128 (0.117)	0.017 (0.016)	0.263 (0.270)

b) 辺長比 $l_p/b=2.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$

N	支 点 (n=5)				
	1	2	3	4	5
0.8	0.014 (0.017)	0.055 (0.050)	0.088 (0.087)	0.133 (0.134)	0.212 (0.212)
0.2	0.012 (0.024)	0.063 (0.043)	0.076 (0.065)	0.092 (0.106)	0.260 (0.262)

c) 辺長比 $l_p/b=0.5$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 弾性的柔軟度 $N=0.2$

n	支 点 (n=3, 5, 9)								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3	0.078 (0.093)	0.234 (0.227)	0.171 (0.180)						
5	0.045 (0.064)	0.102 (0.088)	0.122 (0.111)	0.123 (0.113)	0.108 (0.124)				
9	0.027 (0.040)	0.043 (0.045)	0.053 (0.050)	0.058 (0.052)	0.060 (0.054)	0.061 (0.054)	0.062 (0.055)	0.065 (0.065)	0.074 (0.085)

高線の間隔は単位荷重の 0.2 倍とし、実線が計算結果を、破線が A. Mehmel らの実験値を示している。板周辺の張り出し部を無視して計算しているため、周辺部において計算では現われてこない等高線が実験値の場合にはあるが、全体としては、支点反力の影響面の計算結果は、実験値の傾向をよく表わしていると考えられる。

つぎに、曲げモーメントについて少し述べよう。A. Mehmel らの実験では、影響面の形では報告されていないので、満載等分布荷重が作用した場合を、辺長比 $l_p/b=1.0$, 斜角 $\varphi=30^\circ$, 支点数 $n=5$ の斜板について実験値と比較したのが表-2 である。表中の数値は、図-1 に示されている、11~34 の各点における曲げモーメント、 M_x , M_y , および、ねじモーメント M_{xy} のモーメント係数を表わしている。この表より、計算値は実験値と定性的には、よく一致していると思われるが、定量的には、さきの支点反力の場合に比較して、あまりよくないようである。この理由としては、支点反力はたわみか

表-2 辺長比 $l_p/b=1.0$, 斜角 $\varphi=30^\circ$, 支点数 $n=5$ の場合における、等分布荷重満載時の、点 11~34 (図-1 参照) における曲げモーメントの値 (単位 ql_x^2)
{ () 内は実験値を示す }

位 置	N=0.0			N=0.2		
	M_x	M_y	M_{xy}	M_x	M_y	M_{xy}
11	-0.153 (-0.190)	-0.055 (-0.062)	0.080 (0.076)	-0.081 (-0.103)	-0.048 (-0.048)	0.075 (0.078)
12	0.083 (0.069)	0.000 (0.003)	0.125 (0.120)	0.118 (0.105)	0.002 (0.002)	0.119 (0.119)
13	0.118 (0.117)	-0.004 (0.004)	0.091 (0.085)	0.132 (0.139)	-0.003 (0.004)	0.089 (0.087)
14	0.123 (0.105)	-0.003 (0.004)	0.054 (0.051)	0.111 (0.109)	-0.003 (0.004)	0.050 (0.048)
15	0.065 (0.066)	-0.001 (0.005)	0.024 (0.021)	0.075 (0.075)	-0.001 (0.005)	0.021 (0.016)
16	0.016 (0.019)	0.003 (0.003)	0.003 (0.001)	0.033 (0.032)	0.003 (0.003)	-0.001 (-0.003)
17	0.015 (-0.003)	-0.015 (-0.001)	-0.001 (-0.002)	0.024 (-0.004)	-0.017 (-0.003)	-0.007 (-0.004)
21	0.028 (0.027)	-0.020 (-0.004)	0.025 (0.010)	-0.006 (-0.027)	-0.084 (-0.058)	0.051 (0.038)
22	-0.026 (-0.010)	0.070 (0.047)	0.065 (0.065)	0.021 (0.031)	0.036 (0.023)	0.083 (0.079)
23	0.070 (0.043)	0.070 (0.053)	0.121 (0.117)	0.106 (0.083)	0.052 (0.039)	0.122 (0.117)
24	0.090 (0.092)	0.047 (0.046)	0.095 (0.086)	0.108 (0.107)	0.042 (0.039)	0.098 (0.089)
25	0.100 (0.092)	0.025 (0.026)	0.060 (0.052)	0.093 (0.092)	0.028 (0.027)	0.057 (0.052)
26	0.053 (0.045)	0.012 (0.006)	0.027 (0.022)	0.062 (0.055)	0.013 (0.009)	0.022 (0.018)
27	0.001 (-0.014)	-0.045 (-0.034)	0.013 (0.009)	0.017 (0.000)	-0.041 (-0.028)	0.007 (0.018)
31	0.015 (-0.009)	-0.085 (-0.061)	0.028 (0.024)	0.021 (0.003)	-0.066 (-0.047)	0.025 (0.017)
32	0.077 (0.068)	0.018 (0.018)	0.045 (0.036)	0.059 (0.055)	0.020 (0.013)	0.050 (0.044)
33	0.045 (0.052)	0.072 (0.062)	0.081 (0.077)	0.073 (0.073)	0.052 (0.041)	0.095 (0.091)
24	0.065 (0.041)	0.093 (0.076)	0.115 (0.111)	0.100 (0.086)	0.066 (0.057)	0.123 (0.115)

ら求めているのに対し、曲げモーメントはたわみの 2 階微分で求めていること、および、曲げモーメントを求めるのに使用した三角形要素は、その変位関数が要素間の境界線上での適合条件を満足していないうえに、曲げモーメントが要素間で不連続となっているためであると考えられる。また、各要素ごとに節点の曲げモーメントを求め、これを平均したものをこの節点の曲げモーメントの値としているため、板の内部より周辺の方が精度が悪くなっている。

5. 弾性的に点支持された斜板の挙動

A. Mehmel らが行った実験的研究、および、著者らの計算結果より、弾性的に点支持された斜板では、斜角の大きさ、支点数、弾性点支承の軟弱度 (弾性的柔軟度)、辺長比などが、支点反力、および、曲げモーメントに大きな影響を与えることが明らかとなった。その概要を述べると、つぎのとおりである。

(1) 表-1 から明らかのように、斜板は満載等分布荷重が作用すると、支点反力は鈍角端の支点へ大きく集

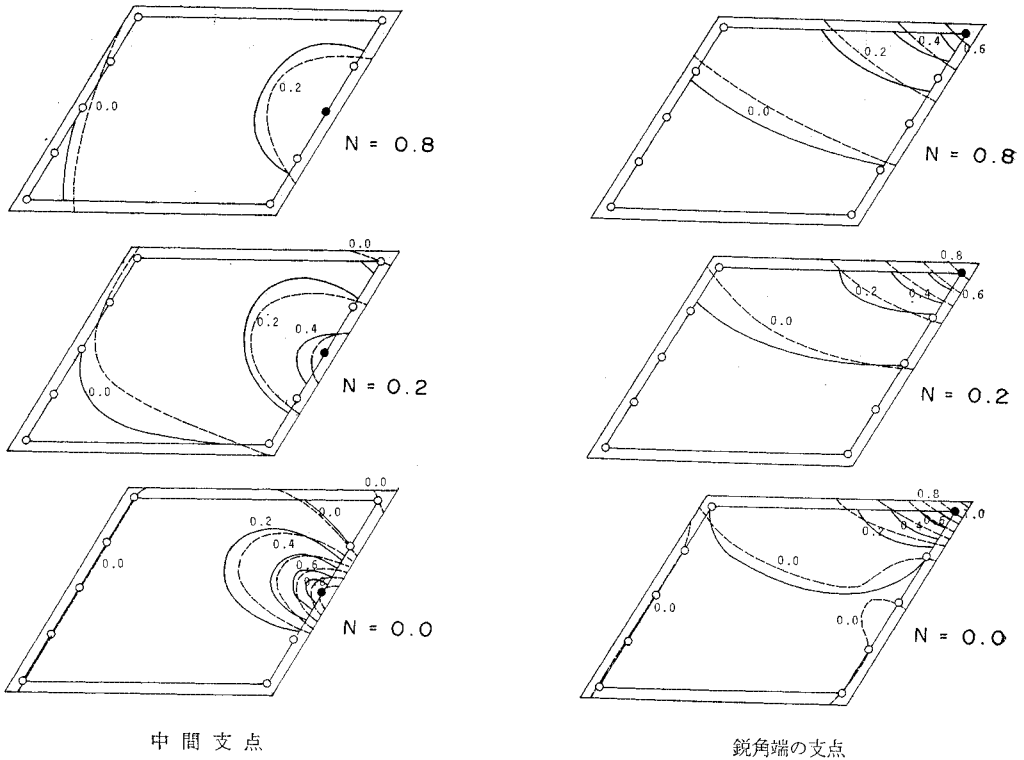
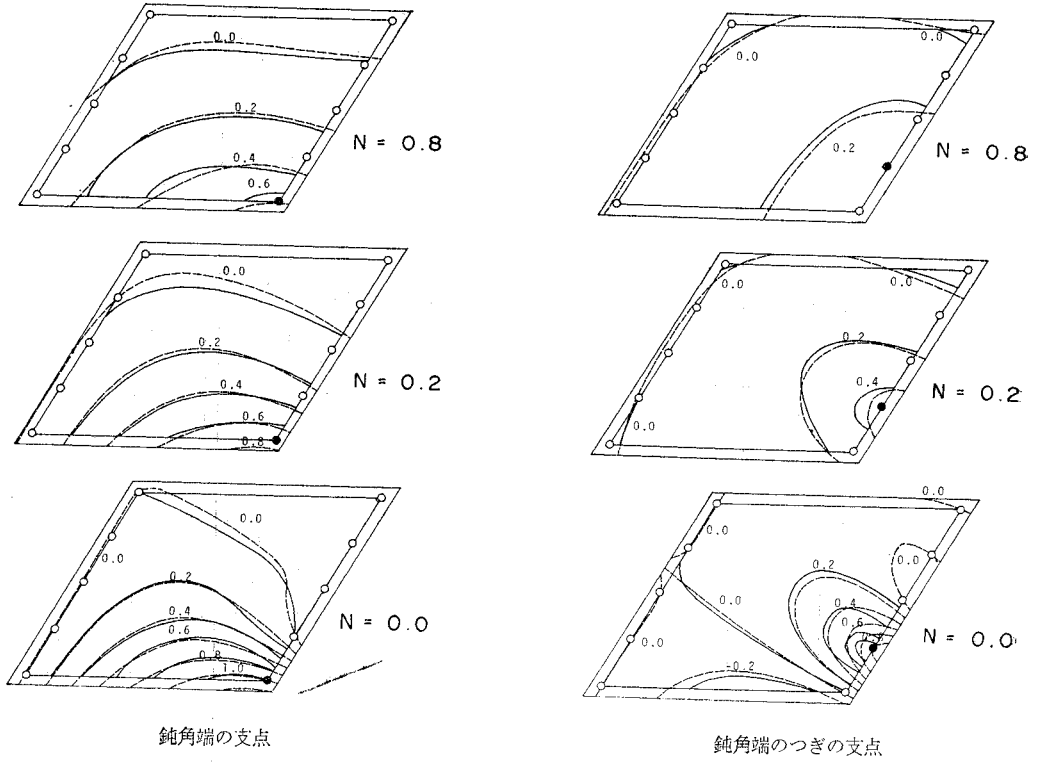


図-2 辺長比 $l_y/l_x=1.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$ の場合における, 支点反力の影響面 (実線は計算値, 点線は実験値を示す)

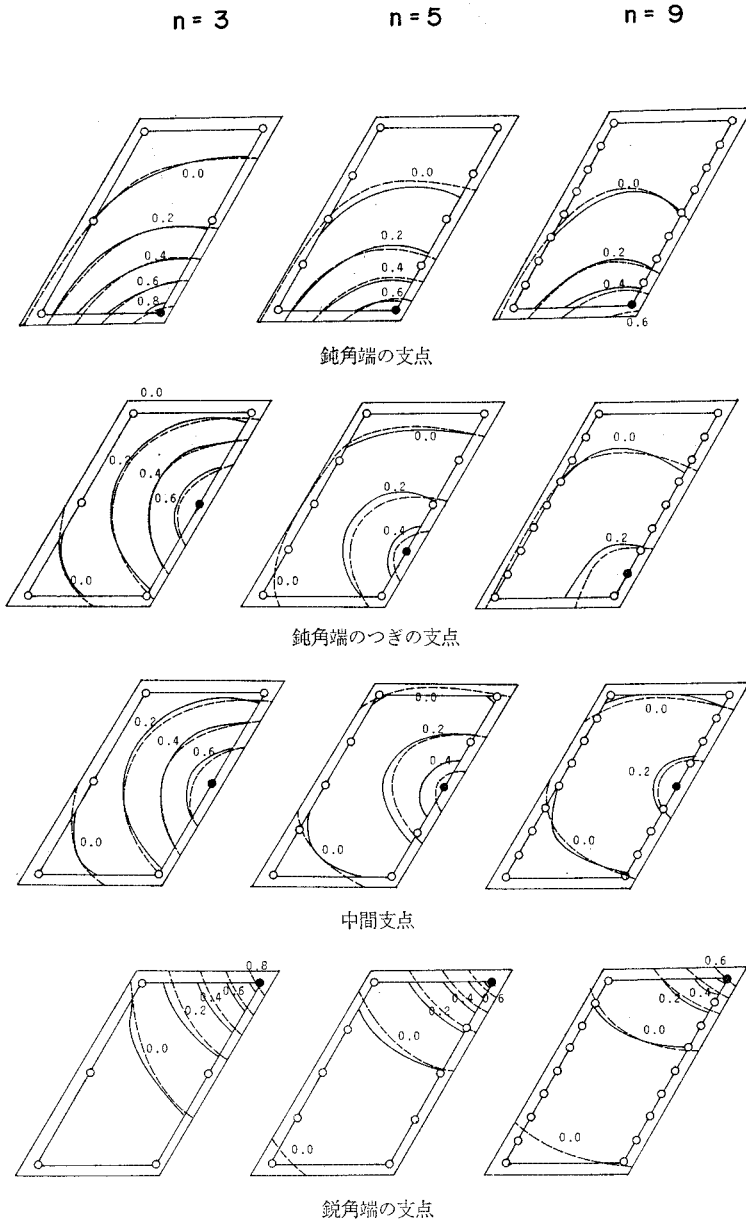


図-3 辺長比 $l_y/b=0.5$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 弾性的柔軟度 $N=0.2$ の場合における、支点反力の影響面 (実線は計算値, 点線は実験値を示す)

中する傾向が見られる。剛に支持した場合には、この度は著しく、また、鈍角端のつぎの支点では、逆に、支点反力は非常に小さくなるという傾向を示す。

これに対して、弾的に支持された場合には、支承の軟弱度が増加するとともに、鈍角端への反力の集中は緩和され、鈍角端のつぎの支点での浮き上りもなくなって、支点間相互の反力のばらつきは全体に小さくなり、平均化される傾向が認められる。

(2) 支点数 n が増加すると、剛に支持されている場合には、(1) で述べたような、鈍角端の支点と鈍角端

のつぎの支点での反力の対比がますますはっきりしたものになり、荷重分配の上から明らかに不利となるが、弾的に支持された場合には、鈍角端の支点も含めて、個々の支点の反力が減少していく。図-3 は、弾性的柔軟度 $N=0.2$ の場合について、支点数 n の変化による影響面の変化を示している。支点数 n が増加するとともに、各支点とも、等高線の本数が減少していくのが、はっきり見られる。

(3) 曲げモーメントについては、A. Mehmel らの実験には、あまりくわしく示されていないが、著者らの計算結果をまとめると、つぎのようになる。

a) 図-4 は、辺長比 $l_y/b=1.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$ の斜板の中央点における曲げモーメント M_x, M_y , および、ねじりモーメント M_{xy} の影響面である。弾性的柔軟度 $N=0.0$ (剛支持) の場合と、 $N=0.2$ の場合が示されているが、この2つは、ほとんど同じで、板中央点においては、曲げモーメントの影響面は、弾性的柔軟度 N には、あまり左右されない。

b) 図-5 は、鈍角端における曲げモーメントの影響面である。弾的に支持されている場合には、剛に支持されている場合にくらべて、曲げモーメントの最大値、あるいは、最小値が小さくなっており、弾性支承が支点反力を

平均化させたのと同様に、鈍角端のような支点に対しては、曲げモーメントを平均化させる効果のあることを示している。

6. あとがき

著者らは、数値解析が困難であるため、従来、実験的にしか研究されていなかった、弾的に点支持された斜板を、有限要素法を用いることにより、容易に数値解析できることを示した。この数値解析の結果は、A. Meh-

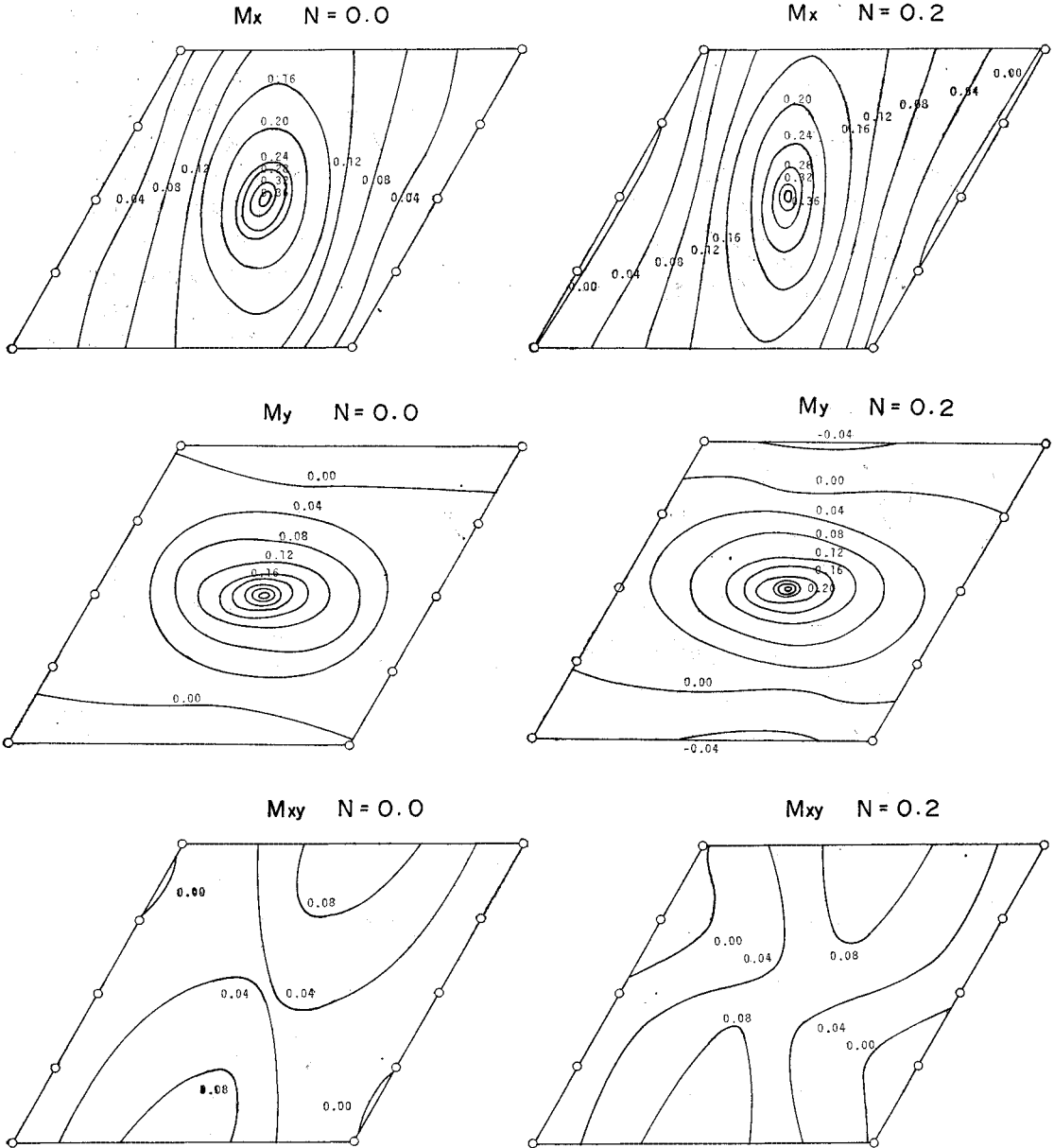


図-4 辺長比 $l_\varphi/b=1.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$ の場合における, 板の中心点の M_x, M_y, M_{xy} の影響面 (単位 $\text{kp}\cdot\text{cm}/\text{cm}$)

mel らの実験値とよく一致し、この方法が、このような問題の解析に対する有効な手段であることが明らかとなった。

著者らは、A. Mehmel の実験との対比を目的として、この数値解析の研究を1スパンの斜板に対して行なったが、さらに、2スパン、3スパン連続の斜板に対して、斜角 φ 、辺長比 l_φ/b 、支点数 n 、弾性的柔軟度 N の種々の組み合わせの場合の数値解析を行っており、近く公表したいと考えている。

斜板がスラブ橋として用いられることが、ますます多くなり、また、このスラブ橋が支承において線支承ではなく、ネオプレーンなどによって点支持されていることが多くなっていく傾向に対し、この拙い報告が多少なりとも貢献するところがあれば、幸甚である。

この研究は、(株)福山コンサルタント代表取締役 福山俊郎氏の示唆によるところが多い。ここに記して、謝意を表したい。

この数値計算には、京都大学大型 計算機センターの

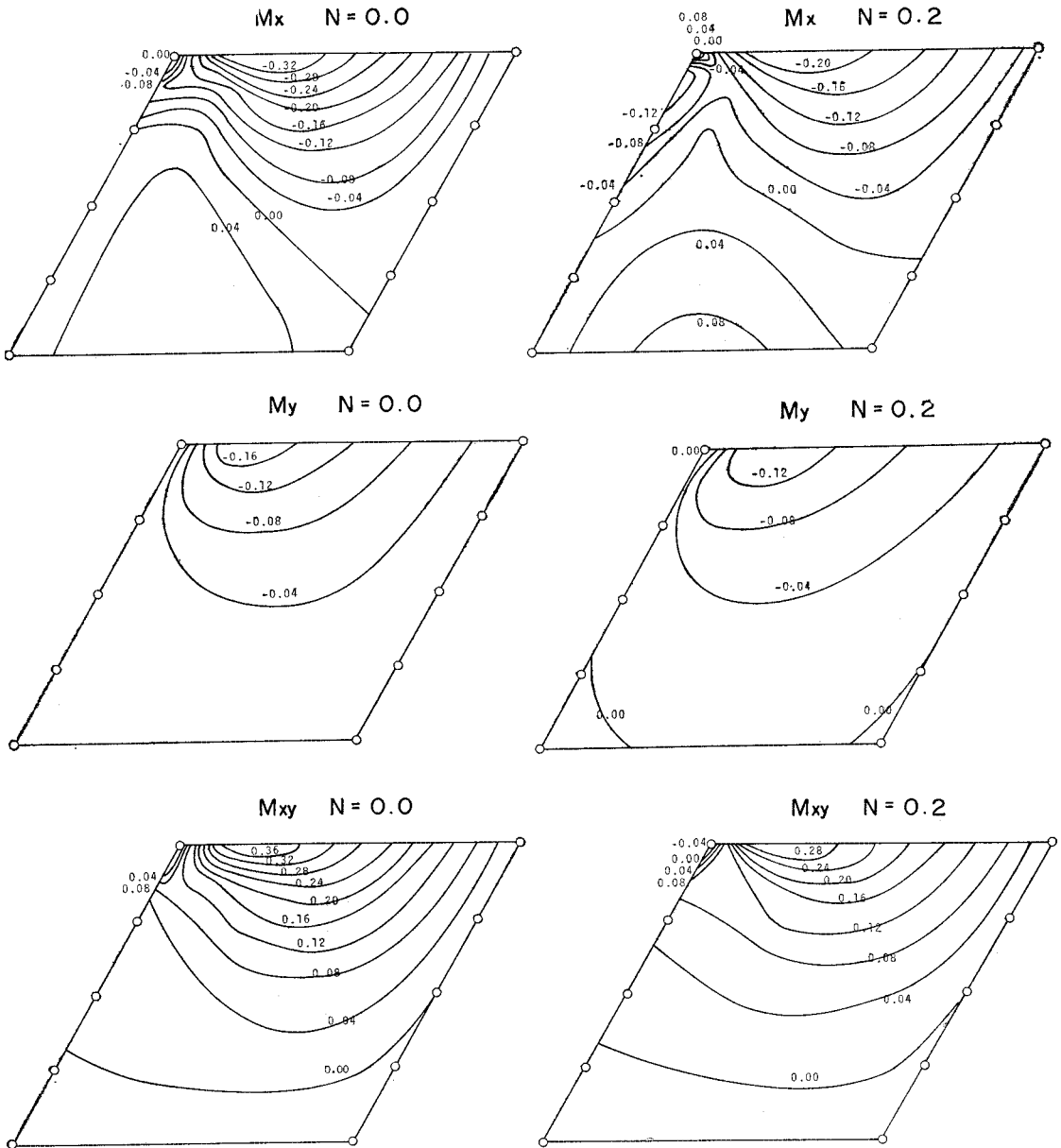


図-5 辺長比 $l_x/b=1.0$, 斜角 $\varphi=60^\circ$, 支点数 $n=5$ の場合における, 鈍角端の M_x, M_y, M_{xy} の影響面 (単位 $\text{kp}\cdot\text{cm}/\text{cm}$)

FACOM 230-60 を使用した。

参考文献

- 1) A. Mehmel u. H. Weise : Modellstatische Untersuchung punktförmig gestützter schiefwinkliger Platten unter besonderer Berücksichtigung der elastischen Auflagernachgiebigkeit, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 161 (1964).
- 2) H. Homberg, R. Marx u. H. Jäckle : Einfluss einer elastischen Lagerung auf Biegemomente und Auflagerkraft Schiefwinkliger Einfeldplatten, Bauingenieur, 36 (1961), S. 19-26.
- 3) W. Andrä u. F. Leonhardt : Einfluss des Lagerabs-
- 4) 山本・福山・西辻・成岡 : 鉄筋コンクリート斜スラブ橋の設計, 土木学会誌, 51-10 (昭和 41.10), pp. 22~27.
- 5) 赤井・堀井・石川 : 斜版の反力測定実験, 橋梁, 5-8 (昭和 44.8), pp. 48~54.
- 6) G.P. Bazeley, Y.K. Cheung, B.M. Irons and O.C. Zienkiewicz : Triangular element in plate bending, conforming and non-conforming solutions, Proc. Conf. on Matrix Method in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air-Force Base, Ohio, 1965, pp. 547-575. (1970.5.11・受付)

tandes auf Biegemomente und Auflagerkräfte schiefwinkliger Einfeldplatten, Beton und Stahlbetonbau, 55 (1960), S. 151-162.