

## 板の三角形曲げ要素に対する寄与

## CONTRIBUTION TO THE TRIANGULAR ELEMENT FOR PLATE BENDING

関 千秋\*・梶田建夫\*\*・成岡昌夫\*\*\*

By Chiaki Seki, Tateo Kajita and Masao Naruoka

## 1. 概 説

有限要素法による板曲げ解析は、O.C. Zienkiewiczらによって長方形要素を用いて解析されたのが最初であり、以後、非常に多くの研究が発表されている。これは、板曲げ解析に有限要素法を適用するにあたって必要となる要素内での変位、または、応力の仮定に問題があるためである。有限要素法では、連続体を長方形や三角形要素などに分割して解析を行なうため、よりよい近似を得るためには、要素の境界での力、または、変形の適合性がそこなわれなように、仮定が行なわれなければならない。

板曲げ要素については、要素内で変位を仮定する場合には、境界辺での normal slope の適合性が問題となる。しかし、長方形要素については、この条件が満足されていなくても、ある程度の精度の解が得られることが知られており、また、2, 3 の文献<sup>(1), (5)</sup>では、長方形要素でこの条件を満足させた場合の結果が論じられている。

しかし、有限要素法の特長である任意形状・任意の境界条件の板曲げ解析を行なうためには、三角形要素を用いることが不可欠である。そして、この場合には、A. Adini, R.W. Clough<sup>(2)</sup>らの結果によって示されているように、境界辺での変位の適合性は、解の精度、収束性に大きく影響する。これを満足するためには、要素の変位の自由度を大きくとるか、または、要素を3つの領域に分け、それぞれの領域内で変位を仮定することなどが行なわれている。

以上は、要素内で変位を仮定する場合であるが、このほかに、F. de Veubeke, R.T. Severnらが要素内で応力、または、応力と変位を仮定する場合についての論文を発表している。このように三角形要素については種々の論文が多く発表されているが、T.H.H. Pian<sup>(3)</sup>

は、これらの要素を、適用される変分原理によって、compatible, equilibrium, hybrid, mixed model の4つの model に分類している。ここでは、この4つの model について説明し、とくに、compatible model の CCT-21, CCT-18 の誘導、および、精度について述べ、今後、板の曲げ解析を志さず会員諸氏に有用な情報を与え、参考に供したいと思う。

## 2. 四つの model

## (1) Compatible model

これは、前にのべた要素内で変位分布を仮定するもので、minimum potential energy の原理を用いて要素の stiffness matrix を誘導する。これについては、3. において説明する。

## (2) Equilibrium model

これは、compatible model とは異なり、要素内で応力分布を仮定し、minimum complementary energy の原理を用いるものである。

F. de Veubeke, B. Sander<sup>(2)</sup>は、三角形要素の基本マトリックス (compatible model の stiffness matrix に相当するもの) を誘導する際に、要素内でつり合い条件を満足する応力分布を仮定しているが、最終的な未知数は、要素間での応力の伝達が保証されるように選ばれた節点変位である。

また、L.S.D. Morley<sup>(24), (26)</sup>は、板曲げ問題と平面応力問題との力学的、および、幾何学的相似性を用いて、基本マトリックスを誘導している。また、Z.M. Elias<sup>(25)</sup>も同様な方法で解析しているが、Morley が6節点三角形要素を対象としているのに対し、3節点三角形要素を対象としている。

しかし、このような方法においては、未知数がはっきりした物理的な意味をもっていないため、境界条件が複雑になり、また、外力の表示がめんどうになるという欠

\* 正会員 工修 国鉄札幌鉄道管理局(実習中)

\*\* 学生会員 工修 名古屋大学大学院工学研究科土木工学専攻博士課程在学

\*\*\* 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学科

点がある。そこで、このような欠点をなくし、板曲げ解析として一般化された complementary energy の原理を用いる方法が、E. Anderheggen<sup>27)</sup> によって発表されている。これは、節点における曲げ・ねじりモーメント  $\bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{xyi}$  を未知変数として、要素内での曲げ・ねじりモーメント  $M_x, M_y, M_{xy}$  の分布を仮定する。ここで、境界辺での適合性を満足するために、たとえば、曲げ・ねじりモーメントの分布を2次の関数で仮定すると、6節点三角形要素を用いなければならない。そして、これらのモーメントは要素内でのつり合い条件を満足しなければならないから、この解析は拘束された最小問題となる。ここで、dummy variable として、よく知られた Lagrange 乗数を導入することによって、一般化された complementary energy の原理から基本マトリックスは誘導され、最終的な未知数としては、節点モーメント  $\bar{M}_{xi}, \bar{M}_{yi}, \bar{M}_{xyi}$  および、要素内でのたわみの平均を表わす Lagrange 乗数  $\lambda_V$ 、節点におけるたわみに比例する Lagrange 乗数  $\lambda_Q$  となる。

この方法によると、境界条件は容易に導入できる。たとえば、一般的な境界条件として、単純支持された場合には normal moment  $\bar{M}_n$ 、および  $\lambda_Q$  を、連続板について  $\lambda_Q$  を、そして、column 支持の場合には  $\lambda_V$  を、それぞれ、0 にすればよい。

(3) Hybrid model

これは、compatible model と equilibrium model との中間に位置すると思われるもので、1964年に T.H.H. Pian<sup>28)</sup> が二次元問題に適用したのが最初である。この方法は、用いる変分原理によって、つぎの2つに分類される。一つは、要素内で変位分布を仮定し、一般化された potential energy の原理を用いて基本マトリックスを誘導する方法で、assumed displacement hybrid model とよばれている。これは、1966年に山本教授<sup>30)</sup>が、長方形要素を用いて、等分布荷重が作用した場合の長方形板について解析している。また、P. Tong<sup>37)</sup> は、1970年にせん断変形まで考慮した model について発表している。

もう一つは、assumed stress hybrid model とよばれるもので、1965年に Pian<sup>29)</sup> が長方形要素について、

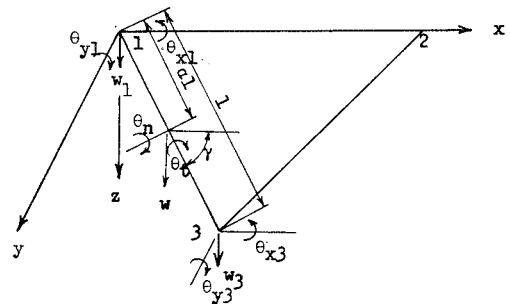
1966年に R.T. Severn<sup>30)</sup> らが長方形、および、直角三角形について、そして、1969年に R.J. Allwood<sup>35)</sup> が任意の形状の要素について、また、Severn<sup>34)</sup> らは変断面シェル要素について、これを適用している。この方法は、前者の model とは反対に、要素内ではつり合い方程式を満足する応力分布を仮定し、境界辺においては、適合条件を満足するように変位分布を仮定して、一般化された complementary energy の原理を用いて stiffness matrix を誘導するものである。ここでは、後者の assumed stress hybrid model について説明する。

いま、境界辺における変位分布を2次の関数で仮定すると、適合条件を満足する変位関数は表-1のようになる。つぎに、要素内で仮定される応力分布はつり合い条件を満足させるために、表-2のように仮定される。ここで、関数  $f_i(x, y)$  は何次の多項式で仮定してもよいが、1次関数で仮定すれば、係数ベクトル  $\alpha$  は9 (SMT-9) となり、2次関数では17 (SMT-17)、3次関数では27 (SMT-27) となる。

この方法の大きな特長は、つぎのようである。

- (1) 境界辺でのみ変位分布を仮定するため、任意の形状の要素がまったく同じ手法によって誘導できる。

表-1 hybrid model の変位の仮定



辺 1-3 について

$$\begin{Bmatrix} \theta_t \\ \theta_n \\ w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cA & sA & 0 & cD & sD & c \\ sB & -cB & -F & sE & -cE & F \\ -sG & cG & H & -sI & cI & J \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{x1} \\ \theta_{y1} \\ w_1 \\ \theta_{x3} \\ \theta_{y3} \\ w_3 \end{Bmatrix}$$

ここで  $s = \sin \gamma, c = \cos \gamma$

$$\begin{aligned} A &= 1-a & E &= -2a+3a^2 & H &= 1-3a^2+2a^3 \\ B &= 1-4a+3a^2 & F &= 6(-a+a^2)l & I &= l(-a^2+a^3) \\ D &= a & G &= l(a-2a^2+a^3) & J &= 3a^2-2a^3 \end{aligned}$$

表-2 hybrid model の応力の仮定

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_1(x, y) \frac{8z}{t} & \sigma_y &= f_2(x, y) \frac{8z}{t} & \tau_{xy} &= f_3(x, y) \frac{8z}{t} & \tau_{xz} &= f_4(x, y) \left(1-4\frac{z^2}{t^2}\right) t & \tau_{yz} &= f_5(x, y) \left(1-4\frac{z^2}{t^2}\right) t \\ f_1(x, y) &= B_1 + B_2x + B_3y & & + B_4x^2 + B_5xy + B_6y^2 & & + B_{16}x^3 + B_{19}x^2y + B_{20}xy^2 + B_{21}y^3 \\ f_2(x, y) &= B_7 + B_8x + B_9y & & + B_{10}x^2 + B_{11}xy + B_{12}y^2 & & + B_{22}x^3 + B_{23}x^2y + B_{24}xy^2 + B_{25}y^3 \\ f_3(x, y) &= B_{13} + B_{14}x + B_{15}y + B_{16}x^2 - (B_4 + B_{12})xy + B_{17}y^2 & & + B_{26}x^3 - \frac{1}{2}(B_{18} + B_{24})x^2y - \frac{1}{2}(B_{19} + 3B_{23})xy^2 + B_{27}y^3 \\ f_4(x, y) &= (B_2 + B_{16}) & & + (B_4 - B_{12})x + (B_5 + 2B_{17})y & & + \frac{1}{2}(3B_{18} - B_{24})x^2 + (B_{19} - 3B_{23})xy + (B_{20} + 3B_{27})y^2 \\ f_5(x, y) &= (B_9 + B_{14}) & & + (B_{11} + 2B_{15})x - (B_4 - B_{12})y & & + (B_{23} + 3B_{26})x^2 - (3B_{18} - B_{24})xy - \frac{1}{2}(B_{19} - 3B_{23})y^2 \end{aligned}$$

(2) 最終的な未知数は、節点変位のみであるから、要素内での応力分布を何次の多項式で仮定しても、未知数の大きさは変わらない。

(4) Mixed model

いままで述べた3つの model では、最終的な未知数は変位のみか、または、応力のみかのどちらかであった。したがって、計算の結果、求められた未知量を用いて応力、または、変位を計算するために、実際に必要とする結果の収束性が悪くなるという欠点がある。たとえば、compatible model においては、要素内で変位が仮定されるので、曲げ・ねじりモーメントの収束性は変位にくらべて悪くなる。

そこで、L.R. Herrmann<sup>39),40)</sup> は、三角形要素の節点での未知数に曲げ・ねじりモーメント、および、たわみの両方を仮定し、Reissner<sup>38)</sup> の変分原理を用いて解析を行なっている。すなわち、曲げ・ねじりモーメント、および、たわみをそれぞれ要素内で線形に変化させると、境界辺での適合条件を満足させるためには3節点三角形要素となる。たとえば、要素内での曲げ・ねじりモーメント、および、たわみの分布を面積座標によって表わすことづぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \{\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3\} \begin{bmatrix} M_{x1} & M_{y1} & M_{xy1} & w_1 \\ M_{x2} & M_{y2} & M_{xy2} & w_2 \\ M_{x3} & M_{y3} & M_{xy3} & w_3 \end{bmatrix} \dots\dots(2.1)$$

ここで、 $M_{x1}$ ,  $w_1$ , などは、それぞれの節点における値である。そして、これらを Reissner の式に代入し、変分を行なうと、未知量と外力との関係を表わす基本マトリックスが得られる。

3. Compatible model

1961年、A. Adini によって9個の変位の自由度をもつ三角形要素の stiffness matrix が誘導されて以来、O. C. Zienkiewicz, R.W. Clough, J.H. Argyris らをはじめとして、多くの研究者により、この stiffness matrix の誘導が行なわれている。そして、これらのほとんどは compatible model に含まれるものである。この model において、まず、要素内で仮定される変位関数  $w(x, y)$  は、収束条件として、つぎの2つの条件を満足しなければならない。

a) すべての剛体変位とひずみ一様の条件とが、仮定される変位関数に含まなければならない。

b) 仮定される変位関数は要素内で連続であり、変位、および、normal slope ( $\partial w / \partial n$ ) は、境界辺に沿って連続でなければならない。

三角形要素の場合、とくに、b) の条件を満足させることが困難であるが、よい精度の解を得るために必要である。このことは Clough らの論文より明らかであり、初期の Adini らによって誘導されたものを除いて、ほとんどの論文はこの境界辺での normal slope の連続性を満足させるために、どのように変位を仮定するかを論じている。

ここでは、収束条件を満足するように仮定される変位関数について述べ、これを用いて誘導される2, 3の三角形要素について述べる。

(1) 変位関数

要素内で仮定される変位関数を完全多項式によって表示すると、要素内でどの方向についても変位に拘束も与えず、また、完全多項式を用いることによって、当然、変位は要素内で連続となり、すべての剛体変位とひずみ一様の状態が含まれる。したがって、この完全多項式の項数と三角形要素の変位の自由度とを一致させることによって、さきの述べた2つの収束条件を満足する変位関数を容易に見出すことができる<sup>13),14)</sup>。

たとえば、二次元要素について考えてみると、 $x-y$  座標系における  $n$  次の完全多項式の項数  $T$  は、

$$T = (n+1)(n+2)/2 \dots\dots\dots(3.1)$$

となる。境界辺での変位の連続性を満足させるためには、それぞれの境界辺で  $(n+1)$  の条件が必要であるから、三角形要素については、

$$S = 3(n+1) \dots\dots\dots(3.2)$$

の条件が必要である。ここで、要素の頂点での変位を頂点変位、辺上の節点での変位を辺上変位、内部にある節点での変位を内部変位とし、要素のすべての変位を節点変位とよぶことにする。

三角形要素のそれぞれの辺において、頂点変位から得られる適合条件式は2個あるから、すべての頂点変位から得られる適合条件は6個となるので、式(3.2)から、収束条件を満足させるためには、さらに、

$$S - 6 = 3(n+1) - 6 \dots\dots\dots(3.3)$$

の条件が必要となる。したがって、要素の頂点変位以外に  $3(n+1) - 6$  の辺上変位をもうけることによって、変位の連続性は満足される。また、内部変位は、この適合条件式には関係しないから、(頂点変位 + 辺上変位)の自由度を  $N$ 、内部変位の自由度を  $M$  とすると、式(3.2), (3.3) から、つぎの関係が成立すればよい。

$$N + M = (n+1)(n+2)/2 \dots\dots\dots(3.4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} N &= 3n \\ M &= (n-1)(n-2)/2 \quad (n \geq 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

である。したがって、式(3.4), (3.5) から、二次元要

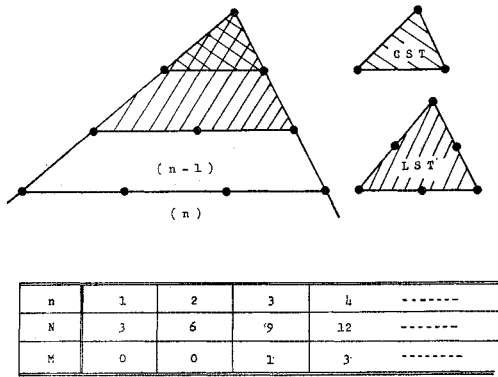


図-1

素の場合には、何次の完全多項式を用いても、図-1のように、すべての拘束条件を満足した変位関数は得られる。現在、最も多く用いられている CST (constant strain triangular element) は  $n=1$  の場合であって、 $n=2$  (LST : linear strain triangular element) の場合との比較が行なわれている。

しかし、板曲げ要素の場合には、境界辺でのたわみのほかに、normal slope の連続性をも考慮しなくてはならない。たわみに関しては、式 (3.2) と同様になる。

$$S_1 = 3(n+1) \dots\dots\dots (3.6)$$

また、normal slope の次数  $n'$  に関しても、同様に、

$$S_2 = 3(n'+1) \dots\dots\dots (3.7)$$

の条件式が必要となるから、合計、

$$S = 3(n+n') + 6 \dots\dots\dots (3.8)$$

の条件式が必要となる。

一般に、頂点変位の自由度をたわみの  $m$  階微分までとすると、すべての頂点変位の自由度  $N_1$  は、

$$N_1 = 3(m+1)(m+2)/2 \dots\dots\dots (3.9)$$

となる。要素の境界辺において、頂点変位から得られる適合条件式は、たわみに関して、 $2(m+1)$ 、normal slope に関して  $2m$ 、合計  $(4m+2)$  となる。したがって、変位の連続性を満足させるために必要な変位の自由度  $N$  は、式 (3.8)、(3.9) から、つぎのようになる。

$$N = N_1 + \{3(n+n') + 6 - 3(4m+2)\} \\ = 3(n+n+1') - 7.5m + 1.5m^2 \dots\dots\dots (3.10)$$

a)  $m=1$  の場合

この場合、頂点変位がたわみ  $w$ 、たわみ角  $w_x = \partial w / \partial x$ 、 $w_y = \partial w / \partial y$  の3個である。したがって、要素のすべての節点変位の自由度は最小限9個必要であるから、要素内で仮定される変位関数は、3次以上の完全多項式でなければならない。式 (3.10) から、必要な節点変位の自由度  $N$  は、一般に、 $n'=n-1$  であるから、

$$N = 6n - 6 \dots\dots\dots (3.11)$$

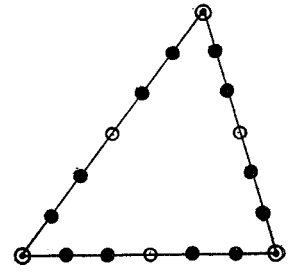
となり、式 (3.4) から、つぎの関係が成立すればよい。

$$6n - 6 \leq (n+1)(n+2)/2 \quad (n \geq 3) \dots\dots\dots (3.12)$$

したがって、内部変位の自由度  $M$  は、

$$M = T - N = (n-2)(n-7)/2 \quad (n \geq 7) \dots\dots (3.13)$$

となる。式 (3.12)、(3.13) から、7次以上の完全多項式を用いると、たとえば、図-2のような三角形要素が誘導されるが、実際には、節点変位と一般座標との間の関係を示す、いわゆる  $C$  マトリックスが singular となる<sup>13),14)</sup>。すなわち、 $m=1$  の場合には、一般に、完全多項式を用いて、拘束条件を満足した三角形要素を誘導することはできないといえる。



- ⊙  $w, w_x, w_y$
- $w, w_n$
- $w_n$

図-2

b)  $m=2$  の場合

この場合、頂点変位がたわみ  $w$ 、たわみ角  $w_x, w_y$ 、曲率  $w_{xx} = \partial^2 w / \partial x^2$ 、 $w_{yy}$ 、および、ねじり率  $w_{xy}$  の6個であるから、5次以上の完全多項式を用いなければならない。

必要な変位の自由度  $N$  は、式 (3.10) から、

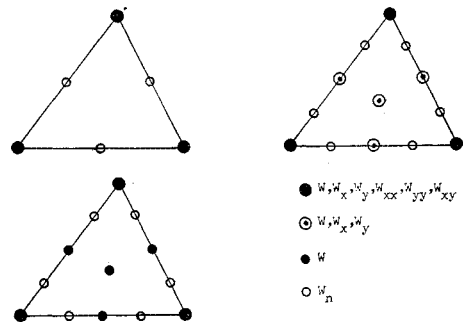
$$N = 6n - 9 \dots\dots\dots (3.14)$$

となり、内部変位の自由度  $M$  は、

$$M = (n-4)(n-5)/2 \quad (n \geq 5) \dots\dots\dots (3.15)$$

となる。ゆえに、5次以上の完全多項式を用いることによって、図-3のように、拘束条件を満足した三角形要素は得られる。

つぎに、 $n'=n-2$  とした場合には、式 (3.7) から、normal slope に関する拘束条件により辺上変位の自由



- $w, w_x, w_y, w_{xx}, w_{yy}, w_{xy}$
- ⊙  $w, w_x, w_y$
- $w$
- $w_n$

n	5	6	7	8	-----
N	21	27	33	39	-----
M	0	1	3	6	-----

図-3

度は減少する。たとえば、5次の多項式を用いた場合、 $n'=n-1$  の場合には、要素の変位の自由度は21であるが、 $n'=n-2$  とした場合には、normal slope は境界辺に沿って3次に変化するため、辺上変位はそれぞれの頂点変位によって表わされるから、変位の自由度は18となる。

(2) 種々の三角形要素

a) 3次の完全多項式を用いた場合 ( $m=1$ )

$m=1$  の場合には、完全多項式を用いても三角形要素を誘導することは不可能であることをのべたが、かりに誘導されても、変位の自由度が36以上となり、工学的に無意味である。

そこで、R.W. Clough<sup>6)</sup> らは要素を3つの領域に分け、それぞれの領域で、要素の境界辺となる辺での normal slope が線形に変化するように変位を仮定している。また、O.C. Zienkiewicz<sup>7)</sup> らも、収束条件を満足するような変位パターンを仮定しているが、これは境界辺での normal slope を強制的に連続させているため、連続性を満足していない要素の方がよい結果を得るという傾向がある。

そこで、C.A. Felippa<sup>9),10)</sup> らは、要素をさらに3つ

の subelement に分け、それぞれの subelement 内で3次の完全多項式で表わされた変位関数を用いて誘導している (LCCT-12)。以下、この方法について述べる。要素を図-4のように、3つの subelement に分ける。ここで、0点は重心にとると、解析しやすい。それぞれの subelement 内で、変位関数を3次の完全多項式で仮定すると、要素 (complete element) の変位の自由度は、たわみ  $w_i$ 、たわみ角  $\theta_{xi} = (-\partial w / \partial y)_i$ 、 $\theta_{yi} = (\partial w / \partial x)_i$ 、( $i=1, 2, 3$ )、および、辺上変位  $\theta_i = (\partial w / \partial n)_i$ 、( $i=4, 5, 6$ ) の合計12となる。ここで、式(2.1)と同様に、仮定される変位関数を面積座標によって表わすと、積分が簡単になり、また、座標変換が容易になる

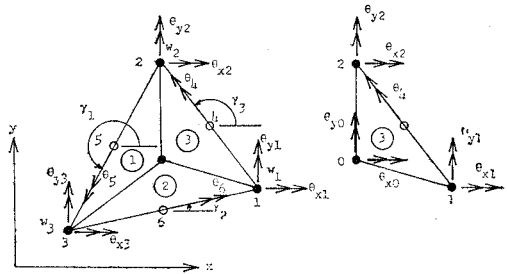
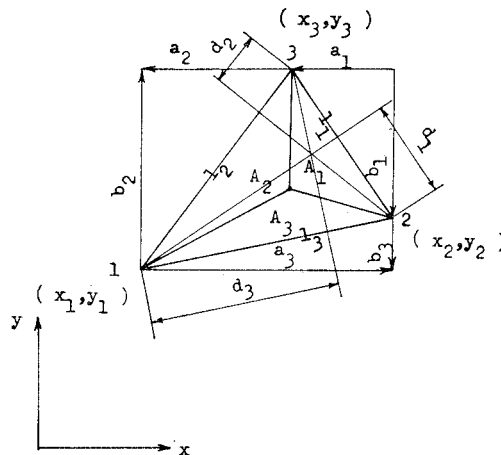


図-4 LCCT-12

表-3 LCCT-12 の場合変位関数



$$L_i = A_i/A$$

$$2A = a_3b_2 - a_2b_3$$

$$\lambda_i = d_i/l_i$$

$$\mu_i = 1 - \lambda_i$$

$$w^{(3)} = \phi^{(3)} r$$

$$r = \langle w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, w_2, \theta_{x2}, \theta_{y2}, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \theta_4, \theta_5, \theta_6 \rangle$$

$$\phi^{(3)} = \{ \phi_{w1}^{(3)}, \phi_{\theta_{x1}}^{(3)}, \phi_{\theta_{y1}}^{(3)}, \phi_{w2}^{(3)}, \phi_{\theta_{x2}}^{(3)}, \phi_{\theta_{y2}}^{(3)}, \phi_{w3}^{(3)}, \phi_{\theta_{x3}}^{(3)}, \phi_{\theta_{y3}}^{(3)}, \phi_{\theta_4}^{(3)}, \phi_{\theta_5}^{(3)}, \phi_{\theta_6}^{(3)} \}$$

$$\phi_{w1}^{(3)} = L_1^2(3-2L_1) + 6\mu_3L_1L_2L_3 + L_2^2\{3(\lambda_2-\mu_3)L_1 + (2\mu_3-\lambda_2)L_3 - 3\mu_3L_2\}$$

$$\phi_{\theta_{x1}}^{(3)} = -L_1^2(b_3L_2 - b_3L_2) - (b_1 - b_3\mu_3)L_1L_2L_3 - \frac{1}{6}L_3^2\{3(b_2\lambda_2 + b_3\mu_3 - 2b_1)L_1 + 3(b_3\mu_3 - b_1)L_2 + (3b_1 - b_2\lambda_2 - 2b_3\mu_3)L_3\}$$

$$\phi_{w2}^{(3)} = L_2^2(3-2L_2) + 6\lambda_3L_1L_2L_3 + L_3^2\{3(\mu_1-\lambda_3)L_2 + (2\lambda_3-\mu_1)L_3 - 3\lambda_3L_1\}$$

$$\phi_{\theta_{x2}}^{(3)} = -L_2^2(b_3L_1 - b_1L_3) - (b_3\lambda_3 - b_2)L_1L_2L_3 - \frac{1}{6}L_3^2\{3(2b_2 - b_3\lambda_3 - b_1\mu_1)L_2 + 3(b_2 - b_3\lambda_3)L_1 + (-3b_2 + b_1\mu_1 + 2b_3\lambda_3)L_3\}$$

$$\phi_{w3}^{(3)} = L_3^2\{3(1+\mu_2)L_1 + 3(1+\lambda_1)L_2 + (1-\mu_2-\lambda_1)L_3\}$$

$$\phi_{\theta_{x3}}^{(3)} = -\frac{1}{6}L_3^2\{3(3b_1 + b_2 + b_1\lambda_1)L_2 + (b_2\mu_2 - b_1\lambda_1)L_3 - 3(b_1 + 3b_2 + b_2\mu_2)L_1\}$$

$$\phi_{\theta_4}^{(3)} = \frac{4A}{3l_3}\{6L_1L_2L_3 + L_3^2(5L_3 - 3)\} \quad \phi_{\theta_5}^{(3)} = \frac{4A}{3l_1}\{L_3^2(3L_2 - L_3)\} \quad \phi_{\theta_6}^{(3)} = \frac{4A}{3l_2}\{L_3^2(3L_1 - L_3)\}$$

$\phi_{\theta_{yi}}^{(3)}$  は  $\phi_{\theta_{xi}}^{(3)}$  の  $b$  を  $a$  にかえる

ので便利である。

それぞれの subelement 内で仮定された変位関数は、complete element の境界辺に沿っての normal slope の連続性は満足しているが、内部の境界辺での normal slope の連続性は満足していない。これを満足させるために、内部の境界辺の midpoint に節点 7, 8, 9 を考える。そして、たとえば、辺 0-3 において、subelement ① における normal slope  $\theta_7^{(1)}$  と subelement ③ における  $\theta_7^{(3)}$  について、 $\theta_7^{(1)} + \theta_7^{(3)} = 0$  の関係によって満足される。そして、これらの関係から、それぞれの subelement 内で仮定された 0 点の変位  $w_0, \theta_{x0}, \theta_{y0}$  は、それぞれの節点変位によって表わされるので、最終的には、変位の自由度は 12 となる。

以上のようにして、すべての収束条件を満足した変位関数  $w$  は、たとえば、subelement ③ について、表-3 に示されたようになる。subelement ①, ② については、表-3 のすべての添字を 1-2-3 ならば 2-3-1 に、4-5-6 ならば 5-6-4 に変えるとよい。

以下、あとに述べる CCT-21 の手法にしたがって、それぞれの subelement で stiffness matrix は誘導されるので、これを重ね合わせることによって、complete element の stiffness matrix は誘導される。

LCCT-12 は  $n' = n - 1$  の場合であるが、 $n' = n - 2$  の場合には、この LCCT-12 における辺上変位  $\theta_4 \sim \theta_6$  が、境界辺に沿って線形に変化するとし、それぞれの頂点変位によって表わすと、要素の変位の自由度は 9 となる (LCCT-9)。

つぎに、これを適用して、LCCT-12 の一つの境界辺でのみ normal slope が線形に変化する要素を考える (LCCT-11)。これらを 4 個重ね合わせることによって、四辺形要素 Q-19 が誘導される。

**b) 5 次の完全多項式を用いた場合 ( $m=2$ )**

$m=2$  の場合、前に述べたように、5 次以上の完全多項式を用いなければならない。J.H. Argyris<sup>(12)</sup> は、5, 6, 7 次の変位関数を用いた場合の要素についての論文を發表しており、また、K. Bell<sup>(15), (16)</sup> も  $x$ - $y$  座標系を用いて、5 次の変位関数による stiffness matrix を誘導している。

高次の多項式で変位関数を仮定した方が、同じ mesh に切った場合については、当然、精度はよいが、構造全体の未知量から比較すると、図-3 のように、一要素の変位の自由度が 5 次の場合には 21, 6 次の場合には 28, 7 次の場合には 36 と、高次にとればとるほど、未知量の増大という compatible model の欠点が現われてくるので、収束条件を満足する最小限の多項式を用いた方が有利と思われる。したがって、ここでは面積座標による 5 次の変位関数を用いた場合の三角形要素 (CCT-21)

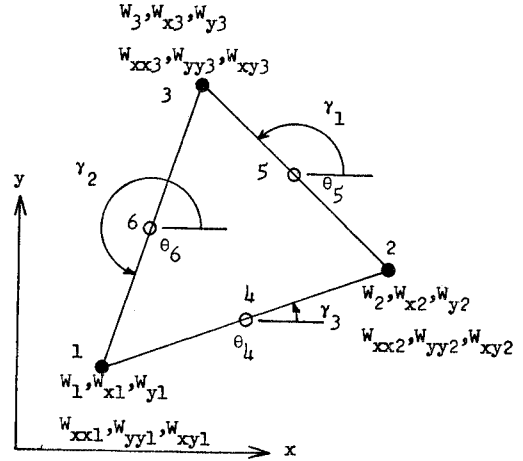


図-5 CCT-21

を誘導したが、6 次以上の場合についてもまったく同様にして誘導できる。

面積座標による 5 次の変位関数  $w$  は、つぎのように表わされる。

$$\begin{aligned}
 w = & \alpha_1 L_1^5 + \alpha_2 L_2^5 + \alpha_3 L_3^5 + \alpha_4 L_2^4 L_3 + \alpha_5 L_2^4 L_1 \\
 & + \alpha_6 L_3^4 L_1 + \alpha_7 L_3^4 L_2 + \alpha_8 L_1^4 L_2 + \alpha_9 L_1^4 L_3 \\
 & + \alpha_{10} L_2^3 L_3^2 + \alpha_{11} L_2^3 L_1^2 + \alpha_{12} L_3^3 L_1^2 \\
 & + \alpha_{13} L_3^3 L_2^2 + \alpha_{14} L_1^3 L_2^2 + \alpha_{15} L_1^3 L_3^2 \\
 & + \alpha_{16} L_1^3 L_2 L_3 + \alpha_{17} L_1 L_2^3 L_3 + \alpha_{18} L_1 L_2 L_3^3 \\
 & + \alpha_{19} L_1 L_2^2 L_3^2 + \alpha_{20} L_1^2 L_2 L_3^2 + \alpha_{21} L_1^2 L_2^2 L_3 \\
 & \dots \dots \dots (3.16)
 \end{aligned}$$

式 (3.16) に節点座標を代入すると (図-5 参照)，

$$r = C a \dots \dots \dots (3.17)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 r^T = & \langle w_1, w_{x1}, w_{y1}, w_{xx1}, w_{yy1}, w_{xy1}, w_2, \\
 & w_{x2}, w_{y2}, w_{xx2}, w_{yy2}, w_{xy2}, w_3, w_{x3}, \\
 & w_{y3}, w_{xx3}, w_{yy3}, w_{xy3}, \theta_4, \theta_5, \theta_6 \rangle \\
 & \dots \dots \dots (3.18)
 \end{aligned}$$

$$C = \text{表-4} \dots \dots \dots (3.19)$$

$$a^T = \langle a_1, a_2, a_3, \dots, a_{19}, a_{20}, a_{21} \rangle \dots \dots \dots (3.20)$$

である。つぎに、曲率・ねじり率は、式 (3.16) を微分することによってつぎのように得られる。

$$\kappa = \begin{Bmatrix} w_{xx} \\ w_{yy} \\ 2w_{xy} \end{Bmatrix} = B a \dots \dots \dots (3.21)$$

ここで、曲率・ねじり率は要素内で 3 次式で変化するから、積分を簡単にするために、式 (3.21) をつぎのように変形する。

$$B = \Phi_x T_n \dots \dots \dots (3.22)$$

ここで、

$$\Phi_x = \begin{bmatrix} \phi_x & & \\ & \phi_x & \\ & & \phi_x \end{bmatrix} \dots \dots \dots (3.23)$$



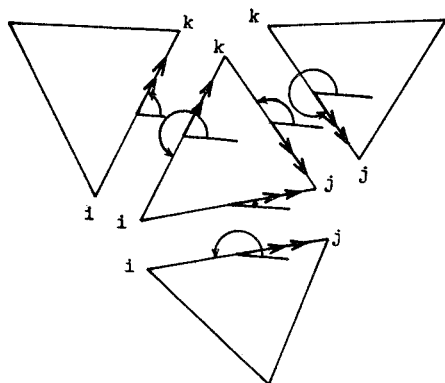


図-6

である。

以上のように、stiffness matrix は比較的簡単に誘導されるが、ここで辺上変位  $\theta_i$  の取り扱いに注意しなくてはならない。要素の stiffness matrix を誘導する場合には、計算を簡単にするために、図-4, 5 のように  $\theta_i$  の方向を定めたが、構造全体の stiffness matrix を求めるときには、図-6 のように、 $\theta_i$  の方向を一定にしなければならない。したがって、 $0 \leq r \leq \pi/2$ ,  $3\pi/2 < r < 2\pi$  の場合にはそのままよいが、 $\pi/2 < r \leq 3\pi/2$  の場合には、要素内で仮定された方向と構造全体における方向とは逆になるので、 $\theta_i$  に関する stiffness matrix の行、列の符号を反対にして重ね合わさなければならない。

また、LCCT-9 の場合と同様に、 $n' = n - 2$  の場合には、境界辺での normal slope が 3 次式で変化するとし、CCT-21 の辺上変位  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$  を消去した変位の自由度が 18 の要素になる (CCT-18)。

つぎに、CCT-18, 21 における一般的な境界条件は、図-7 に示すとおりである。これは、力学的、および、幾何学的境界条件を満足している。J.H. Argyris や K. Bell もこの考え方で境界条件を定めているが、これについては、minimum potential energy の原理からいって、幾何学的境界条件のみでよいという意見<sup>17)</sup>もある。ここでは、前者の考え方から、境界条件が自由な場合には、節点変位をつぎのようにすると便利である。

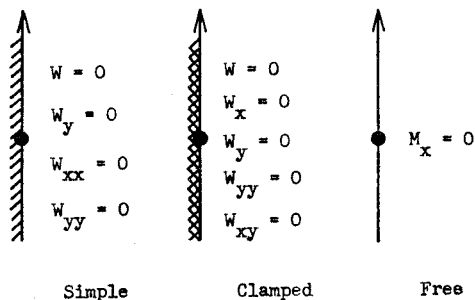


図-7 境界条件

$$\begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} \\ w_{yy} \\ w_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{1-\nu^2} & \frac{-\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ & & & & \frac{1}{1-\nu^2} & 0 \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ w_x \\ w_y \\ w_{xx} + \nu w_{yy} \\ w_{yy} + \nu w_{xx} \\ w_{xy} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (3.29)$$

4. 精度の比較、および、考察

板曲げ解析に用いられる有限要素法の 4 つの model の特性は、前に述べたように、用いられる変分原理、要素内での応力、変位の仮定、要素境界での力、変位の適合性などにある。

有限要素法では、要素内で応力、または、変位分布を仮定するので、つり合い条件、および、適合条件の両方を満足するように仮定することは、一般には困難である。compatible, equilibrium, および、hybrid model のおのおのの model が、要素内、および、要素の境界でどのような条件を満足しているかが、表-7 に示されている。

表-7

Model	Internal Equilibrium	Boundary Equilibrium	Internal Compatibility	Boundary Compatibility
Compatible	NO	NO	YES	YES
Equilibrium	YES	YES	NO	NO
Hybrid Stress assumed	YES	NO	NO	YES

これらの 3 つの model を用いて得られた結果は、正確にそれぞれの条件を満足した model であるならば、図-8 のように、compatible model の場合には lower bound の解を、equilibrium model の場合には upper bound の解を、そして、hybrid model の場合には、一般に、その中間の解が得られることが予想される。

ここでは、この 3 つの model を比較するために、図-9 のように、周辺単純、または、固定支持された正方形板に等分布荷重が作用した場合の結果を比較している。図-10 には、mesh の大きさを変化させた場合の種々の compatible model についての解の収束性が示されている。この図から明らかのように、CCT-18, 21



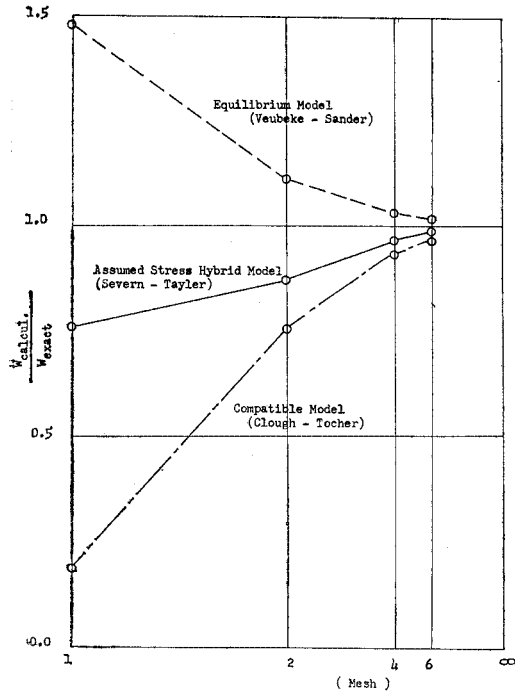


図-8 周辺固定された正方形板の中央に集中荷重が作用したときの荷重作用点のたわみ

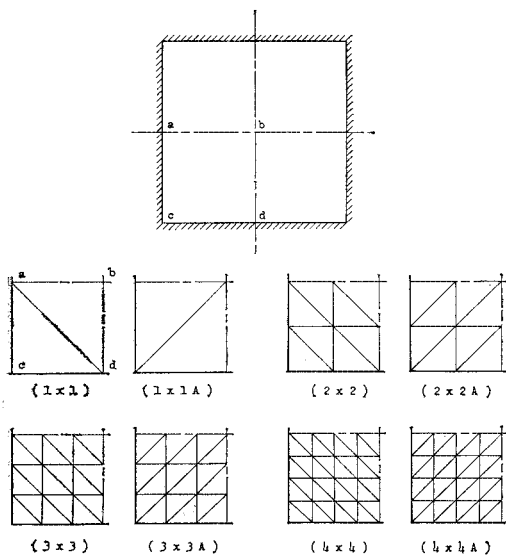


図-9

の結果がほかの model にくらべて収束性がよい。しかし、compatible model の場合には、とくに、未知量の増大という欠点がある。そこで、図-10 において、括弧の数字で未知数の大きさを示している。ただし、この値は、図-9 のように、正方形板の 1/4 を解析した場合の値である。これからわかるように、未知量で比較しても、CCT-18, 21 はよりよい収束性を示している。

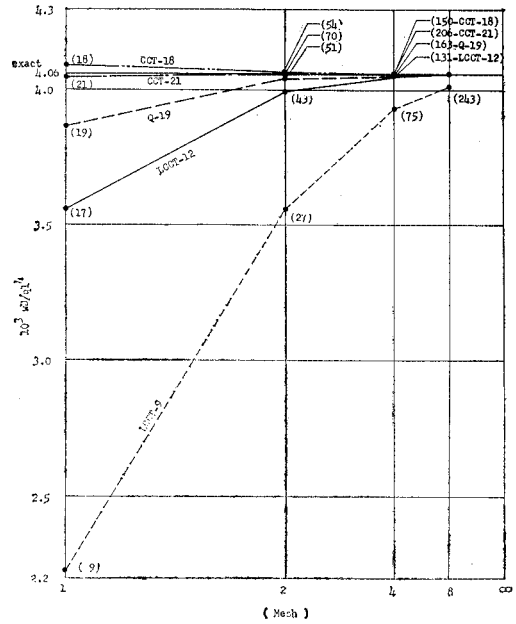


図-10 周辺単純支持された正方形板に等分布荷重が作用した場合のたわみ

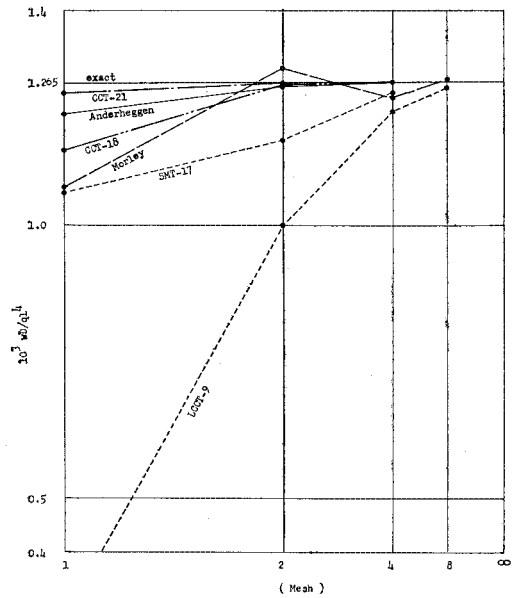


図-11 周辺固定された正方形板に等分布荷重が作用した場合の中央のたわみ

つぎに、図-11, 12 には、固定支持された場合の種々の model についての解の収束性が示されている。図-11 は、板の中央点のたわみについて、図-12 は、中央点の曲げモーメント ( $M_x = M_y$ ) について比較してある。図-12 から明らかなように、CCT-18, 21 は頂点変位として曲率・ねじり率まで仮定しているので、いままでの compatible model のように、節点における曲げ

表-8

Mesh	Deflection $w$ at Pt. $b$		$M_x$ at Pt. $b$		$M_{xy}$ at Pt. $c$		Deflection $w$ at Pt. $b$		$M_{xy}$ at Pt. $c$	
	CCT-18	CCT-21	CCT-18	CCT-21	CCT-18	CCT-21	CCT-18	CCT-21	CCT-18	CCT-21
1×1	409	406	489	491	-308	-317	113	114	-649	-591
1×1 A	406	406	474	465	-343	-340	115	115	-672	-694
2×2	406	406	479	480	-320	-323	115	116	-615	-609
2×2 A	406	406	479	479	-330	-328	116	116	-601	-613
3×3	406	406	479	479	-323	-324	116	116	-610	-609
3×3 A	406	406	479	479	-327	-324	116	116	-610	-609
4×4	406		479		-324		116		-610	
4×4 A	406		479		-325		116		-610	
Exact	406		479		-325		116			
Multiplier	$10^{-5}ql^4/D$		$10^{-4}ql^2$				$10^{-4}Pl^2/D$		$10^{-4}P$	
Load	Uniform Load $q$						Concentrated Load $P$			

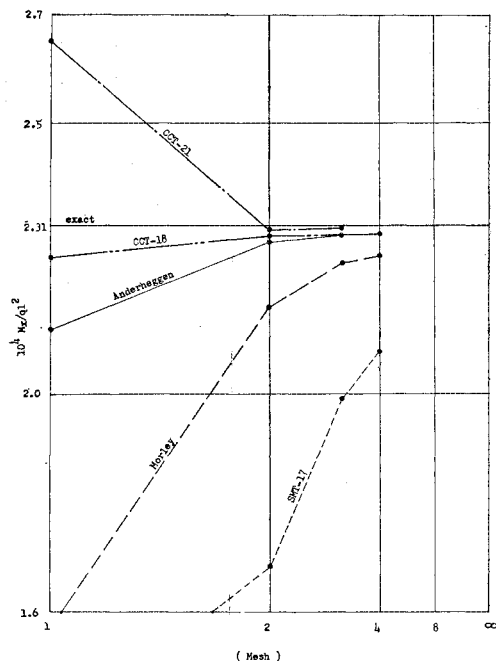
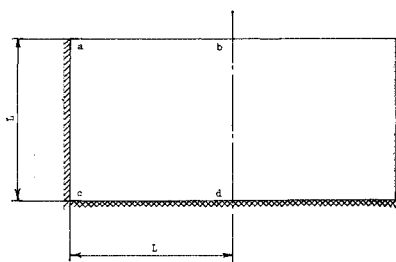


図-12 周辺固定正された方形板に等分布荷重が作用した場合の中央の曲げモーメント  $M_x$

モーメントの不連続性、および、得られた変位より曲げ・ねじりモーメントを計算することによる精度の減少という欠点はない。

したがって、このような単純な形状、荷重条件、および、境界条件の場合には、CCT-18, 21 は有効な model であることがわかる。そこで、表-8 には、CCT-18, 21 を用いた場合の mesh の切り方 (図-9) による精度、および、収束性について示してあるが、mesh の切り方による結果の差異は、いままでの compatible model のような大きな差異はない。

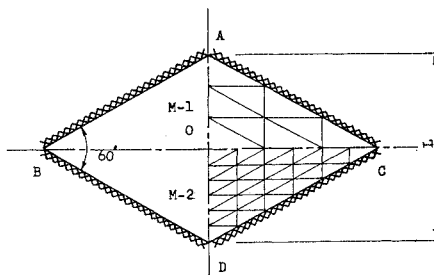
最後に、簡単な適用例として、CCT-18, 21 を用いて、周辺固定されたひし形板、および、相対する二辺が単純



Poisson,  $s$  ratio  $\nu=0.3$

Mesh	Unkno-wns	Deflection $w$ at point $b$	Moment		
			$M_x$ at point $b$	$M_y$ at point $d$	$M_{xy}$ at point $a$
1×1	29	581	108	333	75.9
2×2	70	582	117	320	86.1
Timoshenko		582	117	319	
Multiplier		$10^{-4}qL^4/D$	$10^{-3}qL^2$	$-10^{-3}qL^2$	$10^{-3}qL^2$

図-13 相対する二辺が単純支持され、他の二辺が自由、および固定の長方形板に等分布荷重が作用する場合のたわみと曲げモーメント



Mesh	Deflection $w$ at point 0	Bending Moment	
		$M_x$ at point 0	$M_y$ at point 0
M-1	9.19	1.87	2.01
M-2	7.82	1.56	1.99
M. Hamada <sup>(4)</sup>	7.69	1.56	1.98
Multiplier	$10^{-4}qL^4/D$	$10^{-2}qL^2$	$10^{-2}qL^2$

図-14 周辺固定されたひし形板に等分布荷重が作用した場合のたわみと曲げモーメント

支持,ほかの二辺が自由と固定された長方形板に等分布荷重が作用した場合の結果が, 図-13, 14 に示されているが, よい精度の解を与えている。

以上のことから, 一般に, つぎのような結論が導き出される。

(1) 一般には, compatible model では lower bound の解が, equilibrium model では upper bound の解が, そして, hybrid model ではその中間付近の解が得られることが予想されるが, 種々の計算結果において, equilibrium, hybrid model には, このような傾向を示さないものもある。

(2.1) compatible model の中では, CCT-18, 21 がほかの model よりもすぐれている。そして, 6 次以上の変位関数を仮定しても, 誘導の過程は CCT-21 の場合と同様に容易であるが, 未知量と精度とをどの程度必要とするかの両方の点を考慮すると, 必要最小限度の次数の変位関数を仮定する方が望ましいと思われる。この点からいうと, LCCT-9, 12 でも十分利用できる範囲のあることが予想される。

(2.2) equilibrium model の場合には, 未知量の点からでは Morley の model, そして, 誘導の簡単さからでは Anderheggen の model が有利であると思われる。

(2.3) hybrid model の場合には, 応力分布を高次の多項式で仮定するほど, 剛な stiffness matrix となるが, その誘導が複雑となる。したがって, 応力分布を 2 次の多項式で仮定した三角形要素 (SMT-17), および, 四辺形要素 (SMQ-17) を用いれば, ある程度の精度の解が得られることが予想される。

(3) 以上のことから, 現在の段階において, 未知量, および, 誘導の複雑さなどの点を考慮しても, CCT-18 が最も容易に高い精度が得られる model であると思われる。しかし, 未知量の多いことが問題となる場合には, hybrid, mixed model などが考慮されるべきであり, これらの model については, 今後, さらに研究を続けていきたいと思う。

## 5. あとがき

有限要素法における 4 つの model を板曲げ要素の場合について説明し, 簡単な適用例で精度の比較を行なった。ここでは, 三角形板曲げ要素についての基本的な考え方を示したにとどまったが, 今後は, さらに複雑な形式・境界条件の場合について研究するつもりである。そして, 三角形板曲げ要素が確立されると, 振動, 座屈その他の問題への応用は容易であるので, 板曲げ解析の分野はさらに大きく開けるとと思われる。

なお, 本研究における計算は, 東京大学大型計算機センター HITAC 5020 E, および, 京都大学大型計算機センター FACOM 230-60 を使用した。

## 参考文献

- 1) Washizu, K. : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity", Pergamon Press, Oxford, 1968.
- 2) McLay, R.W. : "A Special Variational Principles for the Finite Element Method", J. AIAA, 7(1969). pp. 533-534.
- 3) Bogner, F.K., Fox, R.L. and Schmit, L.A. : "The Generation of Interelement-Compatible Stiffness and Mass Matrices by Use of Interpolation Formulas", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
- 4) Dawe, D.J. : "On Assumed Displacements for the Rectangular Plate Bending", J. Roy. Aeron. Soc., 71 (1967), pp. 722-724.
- 5) Deak, A.L. and Pian, T.H.H. : "Application of the Smooth-Surface Interpolation to the Finite Element Analysis", J. AIAA, 5 (1967), pp. 187-189.
- 6) Clough, R.W. and Tocher, J.L. : "Finite Element Stiffness Matrices for Analysis of Plate Bending", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
- 7) Bazeley, G.P., Cheung, Y.K., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C. : "Triangular Elements in Plate Bending-Conforming and Nonconforming Solutions", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
- 8) Slyper, H.A. : "Development of Explicit Stiffness and Mass Matrices for a Triangular Plate Bending Element", Int. J. Solids Structures, 5 (1969), pp. 241-249.
- 9) Felippa, C.A. : "Refined Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Two Dimensional Structures", SESM Report No. 66-22, Univ. of California, Berkeley, California, 1966.
- 10) Felippa, C.A. and Clough, R.W. : "A Refined Quadrilateral Element of Plate Bending", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson Air Force Base, Ohio, Oct. 1968.
- 11) Argyris, J.H., Bosshard, W., Fried, I. and Hilber, H.M. : "A Full Compatible Plate Bending Element", Institut für Statik und Dynamik der Luft-und Raumfahrtkonstruktion, Univ. Stuttgart, Report Nr. 42, Dec. 1967.
- 12) Argyris, J.H., Fried, I. and Scharpf, D.W. : "The TUBA Family of Plate Element for the Matrix Displacement Method", J. Roy. Aeron. Soc., 72 (1968), pp. 701-708.
- 13) Dune, P.C. : "Complete Polynomial Displacement Fields for Finite Element Method", J. Roy. Aeron. Soc., 72 (1968), pp. 245-246.
- 14) Irons, B.M., Ergatoudis, J. and Zienkiewicz, O.C. : "Comments on Complete Polynomial Displacement Field for Finite Element Methods", J. Roy. Aeron. Soc., 72 (1968), pp. 709-711.
- 15) Edited by Holand, I. and Bell, K. : "Finite Element Method in Stress Analysis", Tapir, Trondheim, Nor-

- way, 1969.
- 16) Bell, K. : "A Refined Triangular Plate Bending Element", Int. J. Numerical Methods in Eng., 1 (1969), pp. 101-122.
  - 17) Cowper, G.R., Lindberg, G.M. and Olson, M.D. : "Static and Dynamic Application of a High-Precision Triangular Bending Element", J. AIAA, 7 (1969), pp. 1957-1965.
  - 18) Irons, B.M. : "A Conforming Quartic Triangular Element for Plate Bending", Int. J. Numerical Methods in Eng., 1 (1969), pp. 95-108.
  - 19) Fraeijs de Veubeke, B. : "A Conforming Finite Element for Plate Bending", Int. J. Solids Structures, 4 (1969), pp. 95-108.
  - 20) Fraeijs de Veubeke, B. : "Matrix Method of Structural Analysis", Pergamon Press, Oxford, 1964, pp. 165-201.
  - 21) Fraeijs de Veubeke, B. : "Bending and Stretching of Plate-Special Models for Upper and Lower Bounds", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  - 22) Fraeijs de Veubeke, B. and Sander, G. : "Upper and Lower Bounds to Structural Deformation by Dual Analysis in Finite Elements", AFFDL-TR-66-199, 1967.
  - 23) Fraeijs de Veubeke, B. and Sander, G. : "An Equilibrium Model for Plate Bending", Int. J. Solids Structures, 4 (1968), pp. 447-468.
  - 24) Morley, L.S.D. : "A Triangular Equilibrium Element with Linearly Varying Bending Moment for Plate Bending Problem", J. Roy. Aeron. Soc., 71 (1967), pp. 715-719.
  - 25) Elias, Z.M. : "Duality in Finite Element Methods", Proc. ASCE, 94 (1968), EM 4, pp. 931-946.
  - 26) Morley, L.S.D. : "The Triangular Equilibrium Element in the Solution of Plate Bending Problems", Aeron. Quart., 19 (1968), pp. 149-169.
  - 27) Anderheggen, E. : "Finite Element Plate Bending Equilibrium Analysis", Proc. ASCE, 95 (1969), EM 4, pp. 841-857.
  - 28) Pian, T.H.H. : "Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions", J. AIAA, 2 (1964), pp. 1333-1336.
  - 29) Pian, T.H.H. : "Element Stiffness Matrices for Boundary Compatibility and Prescribed Boundary Stresses" Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  - 30) Severn, R. T. and Tayler, P. R. : "The Finite Element Method for Flexure of Slabs when Stress Distributions are assumed", Proc. Inst. Civ. Eng., 34 (1966), pp. 153-170.
  - 31) Pian, T.H.H. and Tong, P. : "Rationalization in Deriving Elements Stiffness Matrix by Assumed Stress Approach", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1968.
  - 32) Pian, T.H.H. : "Formulation of Finite Element Methods for Solid Continua", Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969.
  - 33) Pian, T.H.H. and Tong, P. : "Basis of Finite Element Methods for Solid Continua", Int. J. Numerical Methods in Eng., 1 (1969), pp. 3-27.
  - 34) Dunger, R. and Severn, R.T. : "Triangular Finite Elements of Variable Thickness and their Application to Plate and Shell Problems", J. Strain Analysis, 4 (1969), pp. 10-21.
  - 35) Allwood, R.J. and Corns, M.M. : "A Polygonal Finite Element for Plate Bending Problems Using the Assumed Stress Approach", Int. J. Numerical Methods in Eng., 1 (1969), pp. 135-149.
  - 36) Yamamoto, Y. : "A Formulation of Matrix Displacement Method", Dept. of Aeronautics and Astronautics, M.I.T., 1966.
  - 37) Tong, P. : "New Displacement Hybrid Finite Element Models for Solid Continua", Int. J. Numerical Methods in Eng., 2 (1970), pp. 73-77.
  - 38) Reissner, E. : "On a Variational Theorem in Elasticity", J. Math. Phys., 29 (1950), pp. 90-95.
  - 39) Herrmann, L.R. : "A Bending Analysis for Plates", Proc. Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. 1965.
  - 40) Herrmann, L.R. : "Finite Element Bending Analysis for Plates", Proc. ASCE, 93 (1967), EM 5, pp. 13-26.
  - 41) Herrmann, L.R. : "Elasticity Equations for Incompressible and Nearly Incompressible Materials by Variational Theorem", J. AIAA, 3(1965), pp. 1896-1900.
  - 42) Conner, J.J., and Will, G.T. : "A Mixed Finite Element Shallow Shell Formulation", Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, Tokyo, 1969.
  - 【43】 吉田 裕 : 有限要素法による平板曲げの解析, 生産研究, 22 (1970), pp. 28~33.
  - 44) 太田・浜田・鷺島・西村・増井 : 一様分布荷重を受ける周辺固定ひし形板の静的たわみ, 機械学会論文集, 28・188 (1962), pp. 421~427.

(1970. 4. 20・受付)