

# 偏心圧縮柱の荷重・変形性状に与える ひずみ硬化の影響

## EFFECTS OF STRAIN-HARDENING ON LOAD-DEFORMATION RELATIONS OF ECCENTRICALLY LOADED COLUMNS

草 間 孝 志\*

By Takashi Kusama

### 1. ま え が き

構造物の設計に際し、その構造物が外力の増加とともに、どのような過程で、いかほどの荷重まで支持することができるかということと同時に、最大荷重に達した後の耐力の低下も、安全率の選択に関連して重要な問題である。一般に曲げと圧縮力とを同時にうける部材は、曲げのみをうける部材の場合と異なり最大荷重後の耐力低下が著しいが、鋼材のもつひずみ硬化の性質を考えるとときには、この耐力低下はある程度緩和されるものと考えられる。

軸力と曲げをうける柱の問題として、偏心圧縮をうける柱が考えられる。偏心圧縮をうける柱の研究は、古くより多くの人々によってなされているが<sup>1)</sup>、従来の研究の多くは、主として、最大荷重を求めることに主眼がおかれてきた。

最大荷重を過ぎた柱の荷重とたわみとの関係は、曲げモーメントのみをうけるはりの場合の単純塑性理論と同様に、予想される曲げモーメントの大きな点に塑性ヒンジが形成された剛一塑一剛からなる部材のつり合いより求められる。このようにして求められた荷重とたわみとの関係を表わす曲線を塑性崩壊線 (Plastic Collapse Line, Plastic Response Line) といひ<sup>2), 3)</sup>、荷重の上限値を示すものとされているが<sup>2)</sup>、ひずみ硬化の影響を考えると、必ずしも荷重の上限値を表わすとはいえないであろう。

また、いわゆる塑性ヒンジは、この点において無限大の曲率を有することになるが、実際の部材において曲率が無限大という現象はあり得ないゆえ、近年、骨組の弾塑性挙動を解析するに際し、実状に近い挙動を求めるた

め、ひずみ硬化の影響を考慮して解析を行なうことが試みられている。Lay, M.G., Smith, P.D.<sup>4)</sup> は連続ばりと両端固定ばりに横荷重が作用している場合に対し、ひずみ硬化の役割について研究を行なっており、Hrennikoff, A.P.<sup>5)</sup> はアルミニウム合金よりなる I 形断面と H 形断面を用いて実験を行ない、ひずみ硬化の存在によって、曲げモーメントの再配分が可能となり、塑性設計にはひずみ硬化の存在がきわめて重要であることを示している。さらに、Horne, M.R., Chin, M.W.<sup>6)</sup> は山形ラーメンの曲げについて研究を行ない、坂本博士他<sup>7)</sup> と加藤博士他<sup>8)</sup> は一端固定柱の柱頭に一定軸力と漸増水平力が作用した場合について、ひずみ硬化を考慮して解き、それぞれ、正確な挙動を得るためには、ひずみ硬化の影響を考慮する必要があることを述べている。

このように、一般に部材の荷重・変形性状に与えるひずみ硬化の影響はきわめて大きいと考えられるが、一方、材料が軟鋼の場合、Jezek<sup>9)</sup>、Kollbrunner<sup>10)</sup> の著書によると、細長比が約 10 か 20 より大きい偏心圧縮柱に対しては、最大荷重にひずみ硬化の影響がないことが理論的に見出されている。したがって、偏心圧縮柱の場合、細長比や偏心量の大きさによって、ひずみ硬化が最大荷重後の荷重・変形関係に与える影響はかなり異なってくるものと考えられる。

軸力と曲げモーメントとをうける部材の変形の精解を、曲げモーメント・軸力・曲率関係をもとに求める方法が、たとえば、Kármán<sup>11)</sup>、坂本博士他<sup>7)</sup> および加藤博士他<sup>8)</sup> によって研究されている。これらの研究における変形としては、たわみとたわみ角を対象として研究がなされてきたが、軸力が共存する部材の変形には、このほか材端間の縮みが考えられる。中心圧縮柱の荷重と部材の見かけの縮みとの関係については Kármán<sup>12)</sup> による実験があり、Paris<sup>13)</sup> も研究を行なっている。これらの

\* 正会員 信州大学助教授 工学部土木工学科

研究によると、柱の座屈後、見かけの縮みは急激に増大することを示している。偏心圧縮をうける柱の場合にも、最大荷重後、見かけの縮みは急激に増大することが予想され、さらに、ひずみ硬化の影響によりその傾向が異なってくるものと考えられるが、これに関する研究は見あたらないようである。

本報告は、主として、偏心圧縮柱の最大荷重後の荷重・変形状態に与えるひずみ硬化の影響を知るため、まず  $M-P-\phi$  曲線をもとに荷重・変形関係の精解を求める方法を示し、従来あまり論じられなかった材端間の縮みについても計算を行ない、ついで、たわみ、材端回転角および縮みに対する、ひずみ硬化を考慮したときの塑性崩壊線の式を誘導し、これをもとに最大荷重後の荷重・変形関係の近似式を求め、精解との比較ならびに実験により、その妥当性を検討したものである。

### 2. 曲げモーメント・軸力・曲率の関係

図-1 に示すように、理想化した応力とひずみの関係を仮定すると、軸力  $P$  と曲げモーメント  $M$  の値により、垂直応力度分布の状態は弾性、塑性、ひずみ硬化の各種組合せによって表わされ、 $M, P$  と曲率  $\phi$  との関係は、断面内でのつり合い条件より求められるが、ひずみ硬化を考慮すると、長方形断面以外の場合には複雑になり、一般に数値計算によらなくてはならない<sup>14)</sup>。

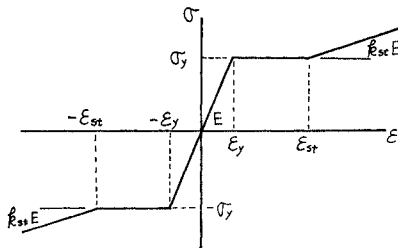


図-1

計算にあたっては、つぎの仮定を設けた。

- 1) 応力・ひずみ曲線は 図-1 にしたがうものとする。
- 2) 部材の断面は変形後も平面が保たれる。
- 3) たわみは作用する曲げモーメントの面内にのみ生ずる。すなわち、面外への座屈変形は生じないものとする。
- 4) ひずみの反転 (Strain reversal) は生じないものとする。
- 5) 部材に存在する残留応力の影響は考えない。

以上の仮定のうち、5) については、一般に圧縮材の

$$\alpha_0 = \frac{p - [\mu\phi \sum_{|\alpha_i| \leq 1} a_i i + \sum_{|\alpha_i| > 1} a_i \text{sign}(\alpha_i) - k_{st} \alpha_{st} \sum_{|\alpha_i| > \alpha_{st}} a_i \text{sign}(\alpha_i) + k_{st} \mu\phi \sum_{|\alpha_i| > \alpha_{st}} a_i i]}{\sum_{|\alpha_i| \leq 1} a_i + k_{st} \sum_{|\alpha_i| > \alpha_{st}} a_i} \dots (4)$$

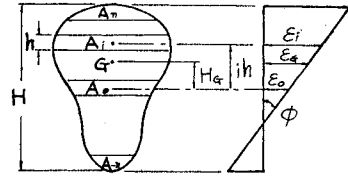


図-2

最大荷重におよぼす残留応力の影響は大きいことが認められているが、本文はさきに述べたように、主として、最大荷重後の荷重の低下を求めることに主眼をおいたゆえ、ひずみの値も大きく、残留応力の影響は小さいと判断して、簡単なためこの仮定を設けた。

図-2 に示すように、図心  $G$  に軸力  $P$  をうけ、さらに曲げモーメントも作用している 1 軸対称断面を考える。いま、断面積を  $A$  とし、断面を  $(2n+1)$  等分した  $i$  番目の要素の面積、垂直応力度をそれぞれ  $A_i, \sigma_i$  とすると、つり合い条件式は、 $H_G$  を図示の場合を正とすると、

$$P = \sum_{-n}^n A_i \sigma_i, \quad M = \sum_{-n}^n A_i \sigma_i (ih - H_G)$$

上式を  $\alpha_i = A_i/A, p = P/P_y, m = M/M_y, P_y = A \sigma_y, M_y = W \sigma_y, W =$  弾性断面係数 を用いて無次元化すると、

$$\left. \begin{aligned} p &= \sum_{-n}^n \alpha_i \frac{\sigma_i}{\sigma_y} \\ m &= r \left( \beta p + \sum_{-n}^n \alpha_i \frac{\sigma_i}{\sigma_y} i \right) \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

となる。ここに、 $\beta = \sum_{-n}^n \alpha_i i = H_G/h, r = h/s, s = W/A$  である。さらに、 $\alpha = \epsilon/\epsilon_y, \phi = \phi/\phi_y, \phi_y = M_y/EI$  を用いて無次元化すると、 $i$  番目の要素と図心におけるひずみの無次元量  $\alpha_i, \alpha_G$  は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i &= \alpha_0 + \mu\phi i \\ \alpha_G &= \alpha_0 + \mu\phi\beta \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

となる。ここに、 $\mu = \phi_y h/\epsilon_y$  である。したがって、応力とひずみの関係は圧縮を正とすると、

$$\left. \begin{aligned} \text{弾性域:} & \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_y} = \alpha_i = \alpha_0 + \mu\phi i \\ \text{塑性域: 圧縮} & \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_y} = 1 \\ & \quad \text{引張} \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_y} = -1 \\ \text{ひずみ硬化域:} & \quad \text{圧縮} \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_y} = 1 + k_{st}(\alpha_0 - \alpha_{st} + \mu\phi i) \\ & \quad \text{引張} \quad \frac{\sigma_i}{\sigma_y} = -1 + k_{st}(\alpha_0 + \alpha_{st} + \mu\phi i) \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

となる。式 (3) を式 (1) へ代入し、整理すると

を得る。上式の  $\Sigma$  は  $i=-n$  から  $n$  まで行ない、さらに  $\Sigma$  の上の不等式は、和を求めるとき対象となる要素の範囲が、不等式によって定められることを意味し、 $\text{sign}(\alpha_i)$  は  $\alpha_i$  の正負の符号を表わす。同様に、

$$m = r[-\beta p + \alpha_0 (\sum_{|a_i| \leq 1} a_i i + k_{st} \sum_{|a_i| > a_{st}} a_i i) + \mu \varphi \sum_{|a_i| \leq 1} a_i i^2 + \sum_{|a_i| > 1} a_i i \text{sign}(\alpha_i) - k_{st} \sum_{|a_i| > a_{st}} a_i i \text{sign}(\alpha_i) + k_{st} \mu \varphi \sum_{|a_i| > a_{st}} a_i i^2] \dots\dots\dots (5)$$

を得る。特別な場合として、すべての要素が弾性状態 ( $|a_i| \leq 1$ ) のときには

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= p - \mu \varphi \beta \\ \alpha_G &= p \\ m &= \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

となる。式 (4), (5), (6) は 1 軸対称断面の場合であるが、2 軸対称断面の場合には

$$\beta = 0, \quad \mu = \frac{2}{2n+1}, \quad \alpha_0 = \alpha_G \dots\dots\dots (7)$$

とおけばよい。

式 (2), (4), (5) は曲げモーメント・軸力・曲率の関係を示すものであって、たとえば、 $p$  と  $\varphi$  が与えられた場合、 $\alpha_0$  の第 1 近似値として式 (6) より  $\alpha_0 = p - \mu \varphi \beta$  と仮定すれば、これらの式より  $M-P-\phi$  の関係は trial-and-error 法によって計算することができる。図-3 は

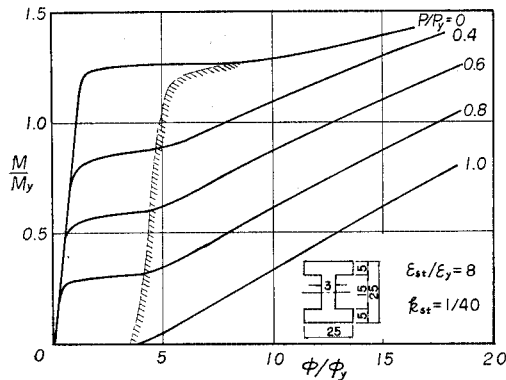


図-3

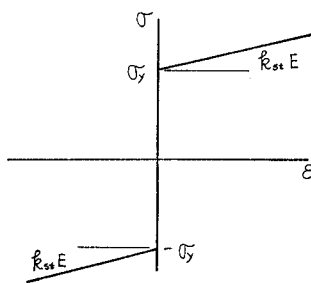


図-4

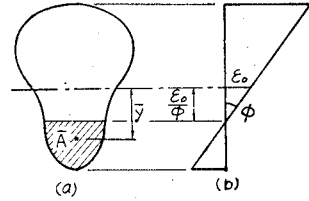


図-5

計算結果の一例で、後述の実験に用いた I 形断面の場合である。図の斜線部分の領域がひずみ硬化の影響する範囲である。

特別な場合として、応力とひずみの関係を図-4 に示すように、剛-ひずみ硬化と仮定した場合には、図心に關する断面二次モーメントを  $I_G$  とし、 $\sum_{-n}^n a_i = 1$ 、 $\sum_{-n}^n a_i i = \beta$  なることを考慮すると、

$$\alpha_0 = \frac{p - \sum_{-n}^n a_i \text{sign}(\alpha_i)}{k_{st}} - \mu \beta \varphi$$

$$m = r[-\beta p + k_{st} \beta \alpha_0 + \sum_{-n}^n a_i i \text{sign}(\alpha_i) + k_{st} \mu \varphi \sum_{-n}^n a_i i^2]$$

を得る。上式の  $\sum_{-n}^n a_i \text{sign}(\alpha_i)$ 、 $\sum_{-n}^n a_i i \text{sign}(\alpha_i)$  は、図-5 (a) の斜線部分の面積  $\bar{A}$  に関する値であり、 $\bar{A}$  部分の図心の位置を  $\bar{y}$ 、 $\bar{a} = \bar{A}/A$  とおくと

$$\sum_{-n}^n a_i \text{sign}(\alpha_i) = 1 - 2\bar{a}$$

$$\sum_{-n}^n a_i i \text{sign}(\alpha_i) = \beta + 2\bar{a} \frac{\bar{y}}{h}$$

となり、さらに、

$$\sum_{-n}^n a_i i^2 = \frac{1}{\mu r} + \beta^2$$

なることを利用して整理すると

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{p - 1 + 2\bar{a}}{k_{st}} - \frac{WHG}{I_G} \varphi \\ m &= 2\bar{a} \left( \frac{HG + \bar{y}}{s} \right) + k_{st} \varphi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

を得る。式 (8) が剛-ひずみ硬化材の 1 軸対称断面部材に対する  $M-P-\phi$  の関係を表わす式である。この式で、とくに、 $HG=0$  とおくと 2 軸対称断面の場合となる。

いま、長方形断面に適用すると、式 (8) より

$$m = \frac{3}{2} \left[ 1 - \frac{p^2}{(1 + k_{st} \varphi)^2} \right] + k_{st} \varphi \dots\dots\dots (9)$$

つぎに、I 形断面に適用する。図-6 の記号を用い

$$\left. \begin{aligned} K &= (1 - 2d/H) \\ k_j &= (1 - t/b) K^j, \quad j=1, 2, 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

とおくと、フィレット部分を無視した理想 I 形断面については次式を得る。

a) ウェブ内に中立軸がある場合

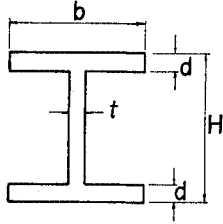


図-6

$$m = \frac{3}{2} \frac{1}{1-k_3} \left[ 1 - k_2 - \frac{K(K-k_1)(1-k_1)^2 p^2}{\{K-k_1+K(1-k_1)k_{st}\varphi\}^2} + k_{st}\varphi \right] \left. \begin{array}{l} 0 < p \leq \frac{K-k_1+K(1-k_1)k_{st}\varphi}{1-k_1} \\ \dots\dots\dots(11-a) \end{array} \right\}$$

b) フランジ内に中立軸がある場合

$$m = \frac{3}{2} \frac{1}{1-k_3} \left[ 1 - \left\{ \frac{k_1+(1-k_1)p}{1+(1-k_1)k_{st}\varphi} \right\}^2 + k_{st}\varphi \right] \left. \begin{array}{l} p > \frac{K-k_1+K(1-k_1)k_{st}\varphi}{1-k_1} \\ \dots\dots\dots(11-b) \end{array} \right\}$$

を得る。特別な場合として  $k_{st}=0$  において変形すると、式 (11-a), (11-b) は、それぞれ、

$$\frac{M}{M_p} = 1 - \frac{A^2}{4iZ} \frac{P}{P_y} \left. \begin{array}{l} 0 < \frac{P}{P_y} \leq \frac{t}{A}(H-2d) \\ \dots\dots\dots(11-a)' \end{array} \right\}$$

$$\frac{M}{M_p} = \frac{A}{2Z} \left[ H \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right) - \frac{A}{2b} \left( 1 - \frac{P}{P_y} \right)^2 \right] \left. \begin{array}{l} \frac{P}{P_y} > \frac{t}{A}(H-2d) \\ \dots\dots\dots(11-b)' \end{array} \right\}$$

となり、軸力による塑性モーメントの低下を表わす式に一致する<sup>15)</sup>。なお、 $Z$  は塑性断面係数である。

3. 荷重・変形曲線の精解

曲げと軸力をうける部材の荷重とたわみ曲線の計算には、ノモグラフによる方法<sup>16)</sup>、部材を分割して、trial-and-error 法による方法<sup>7), 8), 11)</sup>がある。

ここでは、後者の方法によったが、部材の曲がりによる縮みを求めるため、つぎのようにして計算を行なっ

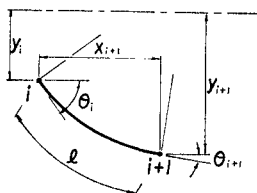


図-7

た。部材の長さ  $L$  を  $n$  等分した要素の長さを  $l$  とし、分割点を左端より順次  $0, 1, 2, \dots, n$  とする。図-7 は変形した  $i$  番目の要素を図示したものである。この要素のたわみ曲線を円弧と仮定し、図示の記号を用いると、 $i$  点と  $i+1$  点の間には次式が成立する。

$$\begin{aligned} \theta_{i+1} &= \theta_i - \phi_i l, \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{\phi_i} (\cos \theta_{i+1} - \cos \theta_i), \\ x_{i+1} &= \frac{1}{\phi_i} (\sin \theta_i - \sin \theta_{i+1}) \end{aligned}$$

とくに、 $\phi_i$  が非常に小さい場合には

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + l \left[ \left\{ 1 - \frac{(\phi_i l)^2}{3!} + \frac{(\phi_i l)^4}{5!} - \dots \right\} \sin \theta_i \right. \\ &\quad \left. - \left\{ \frac{\phi_i l}{2!} - \frac{(\phi_i l)^3}{4!} + \dots \right\} \cos \theta_i \right], \\ x_i &= l \left[ \left\{ 1 - \frac{(\phi_i l)^2}{3!} + \frac{(\phi_i l)^4}{5!} - \dots \right\} \cos \theta_i \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \frac{\phi_i l}{2!} - \frac{(\phi_i l)^3}{4!} + \dots \right\} \sin \theta_i \right] \end{aligned}$$

$i, i+1$  間の要素の縮み  $\Delta l_{i+1}$  は

$$\Delta l_{i+1} = l(\varepsilon_G)_i \cos \theta_i$$

$i+1$  点の曲げモーメントは

$$M_{i+1} = M_i + P(y_{i+1} - y_i) - Q_i x_{i+1} \dots\dots\dots(12)$$

ここに、 $Q_i$  は  $i$  点での  $y$  方向の力である。式 (12) は  $i$  点の変形と断面力より、 $i+1$  点の変形と断面力を求める式である。図-8 に示すように、両端に曲げモーメントと軸力をうけ、両端の相対変位  $\delta$  が既知なほりを考える。端モーメント  $M_A, M_B$  は偏心によるモーメントを含むものとする。いま、このほりの荷重・変形曲線を求めるためには、まず A 端の  $Q_A$  を与え、 $P$  を仮定すると、 $P, Q$  より得られる軸力と  $M_B$  の値によって、A 点の垂直応力の分布状態ならびに曲率  $\phi_A$  は式 (2), (4), (5) の  $M-P-\phi$  の関係式より試算法によって決定することができる。A 点における  $\theta$  は  $\theta_A$  であることを考慮して  $\phi_A$  を用いて式 (12) を計算すると、 $\theta_1, y_1, M_1$  が求められ、 $M_1$  が求まると、 $M-P-\phi$  の関係式より  $\phi_1$  が得られ、つぎの区間に進むと、さきと同様に  $\theta_2, y_2, M_2$  が求まる (第 1 の区間より第 2 の区間に進む前に、 $\phi_A$  の値を  $(\phi_A + \phi_1)/2$  を用いて計算を再び繰り返すと、さらによい結果が得られる)。

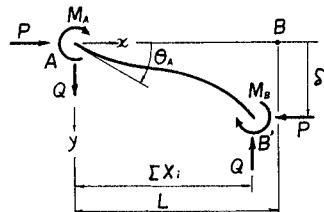


図-8

このようにして、順次計算を行なっていくと、最後に B 点のたわみ  $y_B$  が求められる。そして、この  $y_B$  が最初に与えた  $\delta$  に一致しない場合には、 $P$  を仮定しなおして、再び A 点より計算を繰り返す、 $y_B$  がある誤差範囲内で  $\delta$  に一致するまで行なう。このようにして得られた  $P$  の値が、A 点の回転角が  $O_A$  で、A、B 点の相対変位が  $\delta$  の状態につき合う荷重である。また A、B 間の見かけの縮み  $d$  は、部材の曲がりによる縮み  $d_f$  と軸力による縮み  $d_c$  との和で与えられる。

$$d = d_c + d_f \dots\dots\dots (13)$$

そして、この  $d_f$  と  $d_c$  は式 (12) より

$$\left. \begin{aligned} d_f &= L - \sum_{i=1}^n x_i \\ d_c &= \sum_{i=1}^n \Delta l_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる。

この方法による数値計算の精度を検討するため、座屈後の弾性変形を取り扱った大たわみ理論による *Elastica* の問題に適用すると、図-9 を得る。図示の線は楕円積分による厳密解であり<sup>17)</sup>、プロットした点は、材長を 5 等分して計算した場合である。このように本法はかなり大きな変形（プロットの最大値は図-9 の  $\theta = 176^\circ$ ）まで、比較的良好に合うことがわかる。そこで、後述の偏心圧縮柱の計算に対しては、材長の半分を 10 等分して計算を行なった。

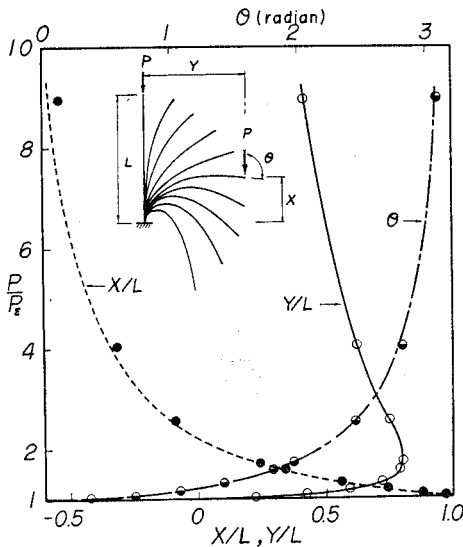


図-9

#### 4. 弾性安定線と塑性崩壊線

前述の方法は荷重・変形状を正確に求めることができるが、その計算は複雑であり、計算時間を要する。荷

重・変形状の一般的傾向を比較的簡単に求めるためには、弾性安定線と塑性崩壊線によるのが便利である。

##### (1) 弾性安定線

図-10 に示すように両端に等しい偏心量をもって軸

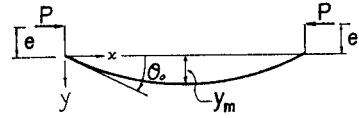


図-10

力  $P$  が作用する場合、弾性範囲に対する たわみ曲線は次式で与えられる<sup>18)</sup>。

$$y = \frac{4e}{\pi} \sum_{j=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\frac{P}{P_E}}{j \left( j^2 - \frac{P}{P_E} \right)} \sin \frac{j\pi}{L} x$$

上式の第 1 項のみをとり、核半径  $s$  と  $P_y$  を用いて無次元化すると、部材中央点のたわみ  $y_m/s$  と  $p (= P/P_y)$  の関係は

$$p = \frac{\pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{\frac{y_m}{s}}{\frac{4e}{\pi s} + \frac{y_m}{s}} \dots\dots\dots (15-a)$$

となる。部材端の回転角  $\theta_0$  については

$$p = \frac{\pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{\theta_0}{\frac{4e}{L} + \theta_0} \dots\dots\dots (15-b)$$

弾性縮み  $d$  は

$$p = \frac{1}{\epsilon_y} \frac{d}{L} \dots\dots\dots (15-c)$$

となる。式 (15-a)~(15-c) は、いわゆる弾性安定線である。なお、式中  $\lambda$  は細長比を表わす。

##### (2) 塑性崩壊線

塑性崩壊線は材料の応力・ひずみ関係を剛-塑性とし、通常の塑性解析と同様に、崩壊機構を考えることによって求められているが、ここではひずみ硬化の影響を知るため、応力-ひずみ関係を剛-ひずみ硬化と仮定した。この際、もし応力-ひずみ関係を剛-塑性-ひずみ硬化と仮定すると、断面内の中立軸の位置と、ひずみ分布より求められる  $\epsilon_{st}$  の位置によって、応力度分布状態の種類が急激に増え繁雑となる。本来、塑性崩壊線は精解によらずして、比較的簡単な式によって、荷重-変形状の概略を知ることがを目的とするとともに、一つの上限界を与えるものである。それゆえ、簡単であることと上限界を求めることも考えて、応力-ひずみ関係を剛-ひずみ硬化と仮定した。

$k_{st} \neq 0$  の場合には、式 (9), (11-a, b) より明らかのように、曲げモーメントは軸力のみならず曲率の関数

であり、曲率はたわみ曲線の関数であるから、したがって、荷重-変形関係を求めるためには、たわみ曲線を仮定しなくてはならない。たわみ形として、正弦曲線または余弦曲線を仮定することは座屈の問題によく用いられており、最大荷重を取り扱った Jezek<sup>19)</sup> の計算結果からしても、その妥当性は認められる。

そこで、たわみ曲線を

$$y = y_m \sin \frac{\pi}{L} x$$

と仮定すると、部材の中央点の曲率  $\varphi_m (= \phi_m / \phi_y)$  は

$$\varphi_m = \frac{\pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{y_m}{s}$$

で与えられる。一方、部材中央点の曲げモーメント  $m_m (= M_m / M_y)$  は

$$m_m = p \left( \frac{e}{s} + \frac{y_m}{s} \right) \dots\dots\dots (16)$$

となるから、上式と式 (11-a), (11-b) より

a) ウェブ内に中立軸がある場合

$$p = \frac{\xi_1}{\kappa} \left[ -\xi_1 \delta + \sqrt{\xi_1^2 \delta^2 + 2\kappa \left( f + \frac{k_{st} \pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{y_m}{s} \right)} \right] \left. \begin{array}{l} 0 < p \leq \frac{K \xi_1}{1 - k_1} \\ \dots\dots\dots (17-a) \end{array} \right\}$$

b) フランジ内に中立軸がある場合

$$p = \frac{1}{(1 - k_1)^2} \left[ -\zeta + \sqrt{\zeta^2 + (1 - k_1)^2 (\xi_2^2 \eta - k_1^2)} \right] \left. \begin{array}{l} p > \frac{K \xi_1}{1 - k_1} \\ \dots\dots\dots (17-b) \end{array} \right\}$$

を得る。ここに、

$$\delta = \frac{e}{s} + \frac{y_m}{s}$$

$$\xi_1 = 1 - \frac{k_1}{K} + (1 - k_1) \frac{k_{st} \pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{y_m}{s}$$

$$\kappa = \frac{3(K - k_1)(1 - k_1)^2}{K(1 - k_3)}$$

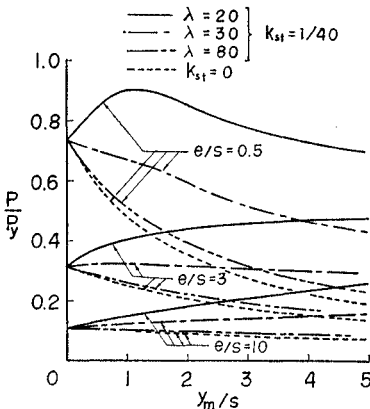


図-11

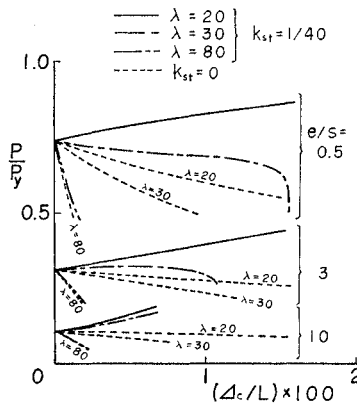


図-12

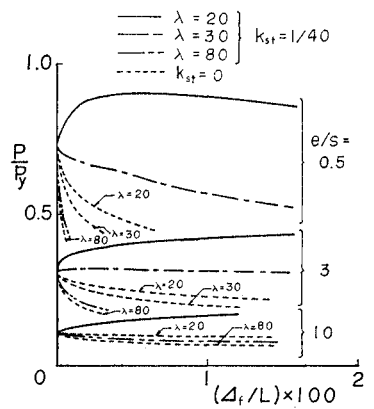


図-13

$$\xi_2 = \xi_1 + \frac{k_1}{K}$$

$$\eta = 1 + \frac{2}{3} (1 - k_3) \frac{k_{st} \pi^2}{\epsilon_y \lambda^2} \frac{y_m}{s}$$

$$\zeta = k_1 (1 - k_1) + \frac{1}{3} (1 - k_3) \xi_2 \delta$$

である。そして、材端回転角  $\theta_0$ 、曲がりによる縮み  $\Delta_f$  は

$$\theta_0 = \frac{\pi s}{L} \frac{y_m}{s} = \frac{\pi}{\sqrt{3} \lambda} \sqrt{\frac{1 - k_3}{1 - k_1}} \frac{y_m}{s} \dots\dots\dots (18)$$

$$\frac{\Delta_f}{L} = \frac{1}{2L} \int_0^L \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 dx = \frac{\pi^2}{12 \lambda^2} \frac{1 - k_3}{1 - k_1} \left( \frac{y_m}{s} \right)^2 \dots\dots\dots (19)$$

となる。さらに、軸力による縮みは近似的に

$$\frac{\Delta_c}{L} = (\epsilon_G) m$$

とおくと、

a) ウェブ内に中立軸がある場合

$$\frac{\Delta_c}{L} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{1 - k_1}{\xi_1} \frac{y_m}{s} p \dots\dots\dots (20-a)$$

b) フランジ内に中立軸がある場合

$$\frac{\Delta_c}{L} = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \frac{k_1 + (1 - k_1) p}{\xi_2} \frac{y_m}{s} \dots\dots\dots (20-b)$$

となり、見かけの縮み  $\Delta/L$  は

$$\frac{\Delta}{L} = \frac{\Delta_f}{L} + \frac{\Delta_c}{L} \dots\dots\dots (20-c)$$

で与えられる。すなわち、 $\theta_0$ 、 $\Delta/L$  に対する塑性崩壊線は  $y_m/s$  を媒介変数として得られる。長方形断面の場合には、 $K=1$ 、 $k_1=0$  とおけばよい。そしてさらに、 $k_{st}=0$  とおくと、崩壊機構より Murray<sup>20)</sup> が誘導した長方形断面の塑性崩壊線に一致する。

いま、計算例として、JIS 規定 H 形鋼 (JIS G 3192-1966) に例をとると、70 種類のうち、二、三のものを除いて、 $0.85 < K < 0.95$ 、 $0.80 < k_1 < 0.91$  であり、その平均値は  $K=0.912$ 、 $k=0.869$  となる。そして、 $\sigma_y=2400$  kg/cm<sup>2</sup>、 $E=2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>、 $k_{st}=1/40$  の場合の塑性崩壊線を計算すると、図-11~13 を得る。これらの図はそれぞれ、 $p \sim y_m/s$ 、 $p \sim \Delta_c/L$ 、 $p \sim \Delta_f/L$  に対する塑性

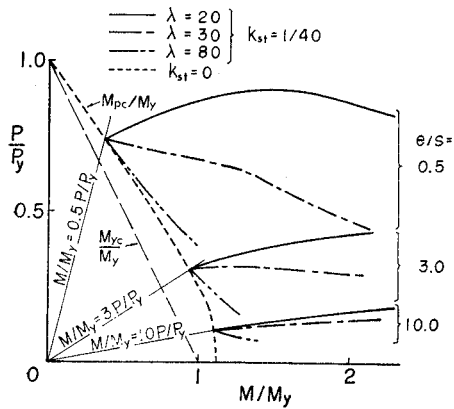


図-14

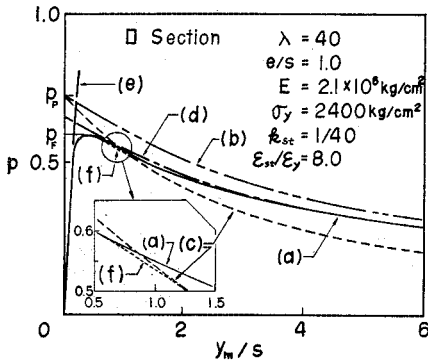


図-15

崩壊線である。図中の点線はひずみ硬化を考慮しない ( $k_{st}=0$ ) 場合である。ひずみ硬化の影響を考慮すると、細長比と偏心量の値によって、かなり異なってくるのがわかり、さらに、細長比が小さく偏心量が大きいほど荷重の低下が少ないことが予想される。また、図-14は Interaction Curve を示したものである。ひずみ硬化を考慮した場合の曲線は、式 (17) より得られた  $p \sim y_m/s$  の関係を式 (16) に代入して求めたものである。

図中の  $M_{yc}/M_y$  曲線は弾性限界を示し、 $M_{pc}/M_y$  曲線はひずみ硬化を無視したときの塑性モーメントと軸力との相関関係を示す。以上 図-11~14 より細長比が約 80 以上になれば、ひずみ硬化を考慮する必要がないといえよう。

図-15 は荷重とたわみの関係の計算結果の一例を示したものである。曲線 (a) は式 (12) を使い、ひずみ硬化を考慮して計算した精解であり、(f) はひずみ硬化を無視したときの精解、(e) は弾性安定線、(b) はひずみ硬化を考慮した塑性崩壊線を、(c) はひずみ硬化を無視

したときの塑性崩壊線を示す。図より明らかなように、曲線 (c) は必ずしも上限値を示すものではなく、ひずみ硬化を考慮した曲線 (b) は明らかに上限値を示している。さらに、(a) と (b) の曲線が同じ傾向を示していることも興味深い。(d) の曲線は曲線 (b) の  $p$  の値に 0.9 を乗じたものであって、この場合、ほとんど精解に近い曲線を示している。よって、荷重変形関係を与える近似式として、

$$p = \text{式 (17) の右辺} \times 0.9 \dots \dots \dots (21)$$

とした。式 (21) の当否を検討するため、長方形断面と前述の I 断面 ( $K=0.912, k_1=0.869$ ) に対して数値計算を行なった。なお、軟鋼を対称として、 $\alpha_{st}=10, k_{st}=1/40$  とした。計算結果を 図-16, 17, 18 に示す。図より明らかなように、式 (21) の近似式は精解と比較すると、細長比と偏心量が小さいほど、誤差が大となるが、ひずみ硬化の影響を無視した場合にくらべると、全般的に、よく一致しているといえることができる。

### 5. 実験結果

実験には SS 41 鋼を用いた。鋼材の応力・ひずみ関係を求めるため、JIS 規格 1号引張試験片 (5本) により引張試験を行なった。応力・ひずみ関係の試験結果は、図-19 に示すように、 $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \sigma_y=2400 \text{ kg/cm}^2, \alpha_{st}=\epsilon_{st}/\epsilon_y=8.0, k_{st}=E_{st}/E=1/40$  となった。 $\alpha_{st}, k_{st}$  については、軟鋼に対する Neal<sup>21)</sup> の  $\alpha_{st}=10 \sim 20, k_{st}=1/20 \sim 1/50$  および Lehigh 大学 Fritz 工学研究所における試験結果の平均値<sup>22)</sup>  $\alpha_{st}=12, k_{st}=1/42$  と比較して妥当な値と判断される。

偏心圧縮試験は 表-1 に示す 9 種類について行ない、長方形断面は弱軸まわりに、I 形断面は強軸まわりに偏

#### I Cross Section ( $K=0.912, k_1=0.869$ )

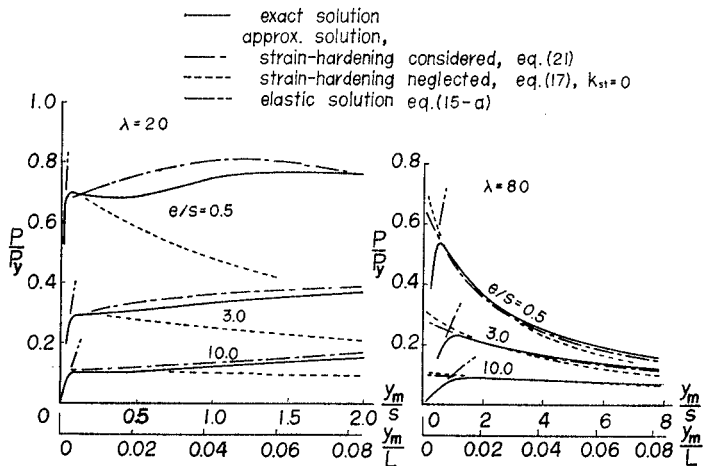


図-16

□ Cross Section ( $K=1, k_1=0$ )

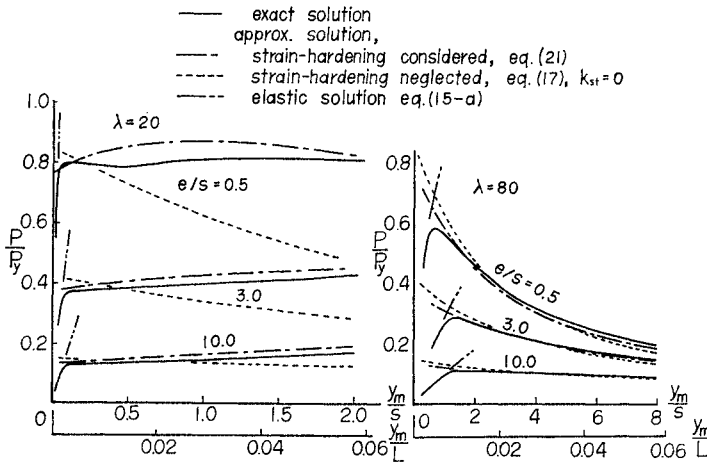


図-17

I Cross Section ( $K=0.912, k_1=0.869$ )

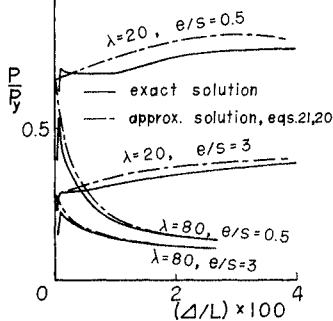


図-18

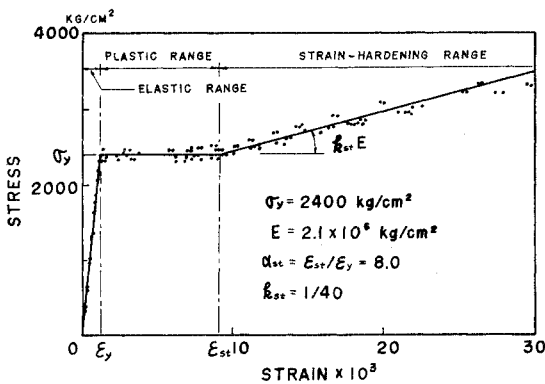


図-19

心を与え、両端にはローラー支承を用いて実験を行なった。偏心圧縮の実験に先立ち、まず弾性範囲内で中心圧縮をかけ、部材の中央点と両端より 1/4 点にそれぞれ 4 枚、計 12 枚接着したストレインゲージによって、十分正確に中心圧縮であることを確認したのち、部材の両

表-1

Test No.	Cross Section	$\lambda$	$e/s$
A-1	[Diagram of square cross-section]	70	0.5
A-2			1.0
A-3			2.5
B-1	[Diagram of rectangular cross-section, width 50]	40	0.5
B-2			1.0
B-3			20
C-1	[Diagram of I-beam cross-section]	50	1.0
C-2		40	1.0
C-3		20	1.0

端に水平にタッチさせたダイヤルゲージの読みをもとに、微小ねじによって、試験片を水平方向に移動させて、両端に所定の等しい偏心を与えるようにした。

I形断面（細長比 40,  $e/s=1.0$ ）の実験中の模様を写真-1, 2 に示す。写真-1 は最大荷重 ( $P_F=3.55$  ton,  $P_F/P_y=0.501$ ) を経過した直後の状態 ( $P=3.45$  ton,

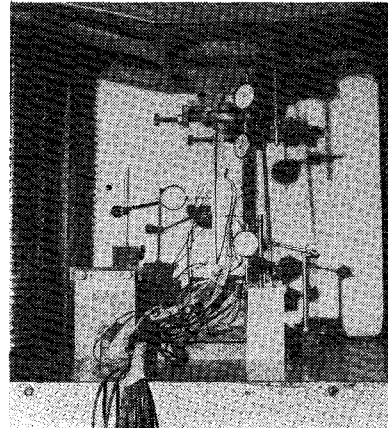


写真-1

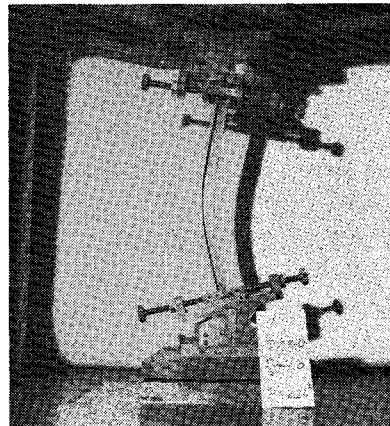


写真-2



$P/P_y=0.487$ )で、中央点のひずみの平均値は圧縮を正とすると、圧縮側が  $+2670 \times 10^{-6}$ 、引張側が  $-510 \times 10^{-6}$  である。また、このときの中央点のたわみは  $y_m=2.88$  mm ( $y_m/s=0.403$ ) である。写真-2は実験終了直前の状態 ( $P=2.26$  ton,  $P/P_y=0.319$ ) で、中央点のひずみの平均値は、圧縮側が  $+45500 \times 10^{-6}$ 、引張側が  $-21600 \times 10^{-6}$  である。このときの中央点のたわみは  $y_m=30.1$  mm ( $y_m/s=4.21$ ) である。

実験結果を図-20~23に示す。これらのうち図-20~22は荷重と中央点のたわみの関係を示したものであり、図-23は荷重と部材の両端の間の縮みの関係を示したものである。理論曲線と実験値とを比較すると、長

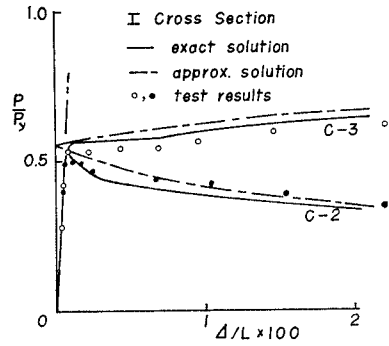


図-23

方形断面、I形断面とも細長比の小さい場合 ( $\lambda=20$ ) に誤差が大きく得られたが、全般的に予想した以上によく一致した。なお、本実験では、どの場合も実験中、局部座屈は生じなかった。

表-2は参考までに、最大荷重  $P_F/P_y$  の理論値  $p_F$  と実験値  $p_F'$  を示したものである。理論値は種々な  $y_m/s$  を与えて式(12)を用いて  $P/P_y$  を求め、その最大値をもって  $p_F$  とした。( ) 内の値はひずみ硬化を無視したときの値である。また比較のため Rankine Load  $p_R (=P_R/P_y)$  を併記した。いま、Euler Load を  $p_E=P_E/P_y=\pi^2/(\lambda^2 \epsilon_y)$  とし、式(17)の塑性崩壊線において  $y_m=0$  とおいたときの  $p$  (Squash Load) を  $p_P (=P_P/P_y)$

とすると(図-15)、Rankine Load  $p_R$  は

$$\frac{1}{p_R} = \frac{1}{p_E} + \frac{1}{p_P}$$

によって与えられる<sup>23)</sup>。なお、さきに述べたように、塑性崩壊線はひずみ硬化の影響により、かなり異なってくるが、 $p_P$  の値は式(17)より明らかなように、ひずみ硬化に影響されない。したがって、たとえ、ひずみ硬化を考慮しても、Rankine Load  $p_R$  にはひずみ硬化の影響が入らないことがわかる。

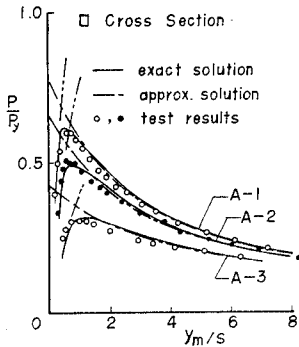


図-20

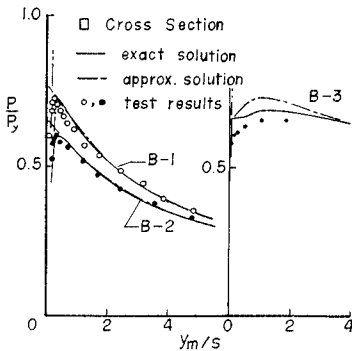


図-21

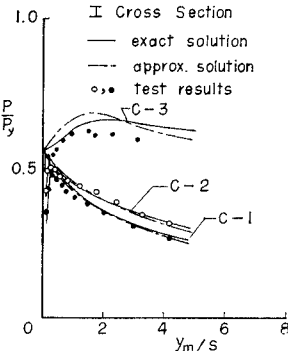


図-22

表-2

Section	$\lambda$	$e/s$	Euler Load $P_E/P_y$	Squash Load $P_P/P_y$	Rankine Load $P_R/P_y$	Maximum Load (theoretical) $P_F/P_y$	Maximum Load (experimental) $P_F'/P_y$	$P_R/P_F'$	$P_F/P_F'$
□	70	0.5	1.76	0.847	0.572	0.625	0.597	0.96	1.05
	70	1.0	1.76	0.721	0.512	0.497	0.508	1.01	0.98
	70	2.5	1.76	0.468	0.370	0.328	0.315	1.17	1.04
	40	0.5	5.40	0.847	0.732	0.738	0.723	1.01	1.02
	40	1.0	5.40	0.721	0.636	0.602	0.598	1.06	1.01
	20	1.0	21.6	0.721	0.697	0.706(0.670*)	0.650	1.06	1.09(1.03*)
I	50	1.0	3.45	0.614	0.521	0.508	0.486	1.07	1.05
	40	1.0	5.40	0.614	0.551	0.529	0.501	1.10	1.06
	20	1.0	21.6	0.614	0.597	0.673(0.570*)	0.607	0.98	1.11(0.94*)

\*  $k_{st}=0.0$

## 6. む す び

以上、偏心圧縮柱の荷重・変形状におよぼすひずみ硬化の影響について検討した。そのため、軟鋼を対象としてひずみ硬化を考慮した場合の塑性崩壊線を求め、また、同時に実験によりその妥当性を検討した。

得られた結論はつぎのとおりである。

- 1) 1軸対称断面部材の  $M-P-\phi$  関係を求める独自の方法を示し、軸力と曲げモーメントをうける部材の変形のうち、従来あまり論じられなかった部材両端間の見かけの縮みを求める方法を導いた。この方法は大变形をうける部材の弾塑性問題に役立つものと考えられる。
- 2) ひずみ硬化を考慮したときの偏心圧縮柱の荷重・変形（たわみ、両端の回転角、軸力による縮み、曲げによる見かけの縮み）関係に対する塑性崩壊線の式を誘導した。
- 3) 軟鋼の場合、ひずみ硬化を考慮した塑性崩壊線の荷重の値に 0.9 を乗ずると、荷重変形関係の近似式として用いることができる。
- 4) ひずみ硬化が影響するのは細長比が約 80 以下の柱の場合である。
- 5) 一般に、偏心量の小さいほど、また、細長比の大きいほど、荷重の低下が大きい。

終りに、本研究は、文部省内地研究員として、名古屋大学 成岡昌夫教授、福本嘯士助教授にご指導をいただいたうちの一部であり、ここに付記して感謝の意を表します。

### 参 考 文 献

- 1) Bleich, F. : "Buckling Strength of Metal Structures", McGraw-Hill, 1952, pp. 25-27.
- 2) Horne, M.R. and Merchant, W. : "The Stability of Frames", Pergamon, 1965, pp. 29-32.
- 3) Murray, N.W. : "The Determination of the Collapse Loads of Rigidly Jointed Frameworks with Members in the Axial Forces are Large", Proc. ICE, Part III, Vol. 5, 1956, pp. 213-232.
- 4) Lay, M.G. and Smith, P.D. : "Role of Strain-Hardening in Plastic Design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST 3, June, 1965.
- 5) Hrennikoff, A.P. : "Importance of Strain Hardening in Plastic Design", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 91, No. ST 4, August, 1965.
- 6) Horne, M.R. and Chin, M.W. : "Plastic Design of Portal Frames Allowing for Frame Instability and Strain-Hardening Effects", Proc. ICE, Vol. 37, 1965, pp. 163-182.
- 7) 坂本 順・宮本篤典 : "鋼構造骨組の弾塑性域における変形と安定性に関する考察 (第 II 報)", 建築学会論文報告集, 113 号, 1965.
- 8) Kato, Ben and Akiyama, Hiroshi : "Inelastic Bar Subjected to Thrust and Cyclic Bending", Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 1, January, 1969.
- 9) Jezek, K. : "Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl", Wien, Julius Springer, 1937.
- 10) Kollbrunner, C.F. und Meister, M. : "Knicken, Biegedrillknicken, Kippen", Springer-Verlag, 1961, S. 36.
- 11) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M. : "Theory of Elastic Stability", McGraw-Hill, 1961, p. 170.
- 12) 倉西正嗣 : "極限設計法", オーム, 1963, p. 21.
- 13) 吉識雅夫・山本善之 : "弾性安定論", 共立, 1965, p. 37-38.
- 14) Waszczyszyn, Z. : "Application of Multi-Point Equivalent Cross-Sections to the Calculation of Finite Deflections of Elastic-Plastic Beams with Stretchable Axis", Acta Mechanica, Vol. III/2, 1967, pp. 221-223.
- 15) Beedle, L.S. : "Plastic Design of Steel Frames", John Wiley, 1958, p. 108.
- 16) Ojalvo, M. and Fukumoto, Y. : "Nomographs for the Solution of Beam-Column Problems", Bull. No. 78, WRE, 1962.
- 17) 文献 11), p. 76.
- 18) 文献 11), p. 30.
- 19) 文献 9), S. 79.
- 20) 文献 3), p. 217
- 21) Neal, B.G. : "The Plastic Methods of Structural Analysis", Chapman and Hall, 1963, p. 19.
- 22) 文献 11), p. 4.
- 23) 文献 2), p. 35.

(1969.7.16・受付)  
(1970.9.8・再受付)