

矩形沈殿槽における沈殿物の再浮上に関する一考察

EXPRESSION OF RESUSPENSION IN A RECTANGULAR SETTLING BASIN

高松 武一郎*・内藤 正明**・芝 定孝***

By Takeichiro Takamatsu, Masaaki Naito and Sadataka Shiba

1. 緒 言

水需要の増大に関連して、高度の水処理プラントが要求されてきており、ますます現象論的にもより細かい注意をはらった設計、操作が必要となってきた。こういう観点から本論文は上水あるいは下水の水処理施設において主要な位置を占める沈殿池について、その最適設計ないしは操作を目標としつつ、その一環として沈殿池における再浮上（まきあげ）を考慮した浮遊物質の挙動の現象論的記述をしようとするものである。沈殿池の設計に際し、池底に沈殿した浮遊物質の再浮上の現象は重要な因子の一つであると思われるが、この再浮上の現象は従来の沈殿池の設計の基礎に用いられるような表面負荷率の考え方¹⁾では考慮しえないものである。本論文においては沈殿池などにおける沈殿物再浮上の問題に対する基礎的な設計資料を得るために矩形水槽について、再浮上現象を2次元の拡散方程式によって取扱っている。

流水における砂礫などの沈殿物質の再浮上については、かなり古くから、河川工学などにおいて取扱われてきたが^{2),3),4)}、それは河川の流れによる土砂の洗掘あるいは堆積によってもたらされる河床変動の問題に関連して、あるいは流れによる沈殿物の河床付近での移動の問題として論じられてきた。したがってそれらは主として底面のごく近傍における土砂などの粒子の転動ないしは滑動についてであり、それよりも上方の水面に至るまでの流れ、すなわち主流における浮遊物質の挙動に対する再浮上の影響はほとんど考慮されていない^{2),3),6),7)}。すなわち河川などの流水における粒子の運動は衝撃力理論 (Impact Theory)³⁾ とか限界掃流力 (Critical Tractive Force)³⁾ とか水圧揚力 (Hydraulic Lift)³⁾ などの考え方によって取扱われてきたものの、これらの理論は明らか

かに主流については適用範囲外といわねばならず、沈殿池の内部全体にわたる浮遊物質の濃度分布の算定に対しては有効な手段とはいえない。一方、拡散方程式が貯水池、ダムなどにおける浮遊物質の濃度分布の算定に広く用いられており⁸⁾、沈殿池内の濃度に対しても拡散方程式が Dobbins⁹⁾、Camp¹⁰⁾、合田¹¹⁾らによって用いられてきたが、ここでも拡散方程式を用い、浮遊物質再浮上の現象を、底面において合田の境界条件¹²⁾を与えることによって考慮し算定した。矩形沈殿池を対象として論じ、沈殿池内の流れは、流れ方向および水深方向の2次元として取扱った。なお従来の研究においては、2次元取扱いに際しては通常、流れの方向の拡散項は他の項に比して無視できるとして、落しているが、本論文ではこれを省略せずに厳密に求めた。ここにその拡散の基礎方程式および境界条件を明らかにし、その解析解を以下に導き、いくつかの実際の数値計算例を示す。また、この解析解をもとに再浮上の現象を記述するパラメーターについて実験的にその特性を検討する。

2. 基礎方程式および境界条件とその解^{13),14)}

矩形沈殿池に対して図-1のような、流れ方向を x 軸、水深方向（鉛直上方）を z 軸とする2次元の流れを考える。流れは x 軸方向に u の平均流速をもち、浮遊物質は下方に w_p の沈降速度をもつものとする。この矩形沈殿槽における浮遊物質の挙動を記述する2次元拡散の基礎方程式はつぎのようになる。

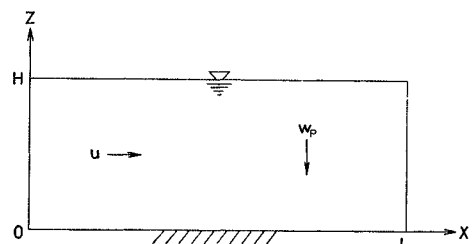


図-1 Definition Sketch for Dimensions of Settling Basin

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部衛生工学教室

** 正会員 工博 京都大学助教授 工学部衛生工学教室

*** 学生会員 工修 京都大学大学院工学研究科衛生工学専攻
博士課程在学

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} - w_p \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$$

ただし、乱れによる拡散係数（以下これをたんに拡散係数と称する） E_x, E_z は時間的、場所的に一定と仮定する。定常状態においては、

$$u \frac{\partial C}{\partial x} - w_p \frac{\partial C}{\partial z} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \dots\dots(2.1)$$

従来は通常、流れの方向の拡散項すなわち $E_x(\partial^2 C/\partial x^2)$ は無視して解かれているが、この項は、ここでは無視し難いと思われるので残す。さらにこの項を残すことにより槽の入口および出口の2つの境界条件を考慮することが可能となる。

図-1の2次元的に取扱った矩形沈殿槽の場合、境界条件は入口、出口および水面、底面においてそれぞれつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } C=C_0 \\ x=L \text{ で } \partial C/\partial x=0 \\ z=0 \text{ で } E_x(\partial C/\partial z) + kw_p C=0 \\ z=H \text{ で } E_x(\partial C/\partial z) + w_p C=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.2)$$

ここに、 C_0 は厳密には $x=+0$ （槽内の入口端）での濃度で流入濃度 C_1 （槽外）とは $C_1=C_0-(E_x/u)(\partial C/\partial x)_{x=0}$ で関係づけられるが、 C_1 は C_0 にほぼ等しく、本論文では効率を C_0 を基準としている。これらの境界条件中とくに $z=0$ すなわち槽底面における境界条件はパラメーター k を含んでいるが、このパラメーターは沈殿物質の再浮上の現象を考慮するために導入されたものである。これについては、すでに河川における河床の洗掘、堆積の問題に関連して、合田¹¹⁾によって提案され、また大気拡散における汚染物質の地表面での吸着の問題に関連して、A.S. Monin¹²⁾が導入しているものと

$$\left. \begin{aligned} a = \frac{u}{E_x} \sqrt{\frac{E_x}{u^2/E_x + w_p^2/E_z}}, \quad b_1 = 2 \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{w_p}{E_z} \sqrt{\frac{E_z}{u^2/E_x + w_p^2/E_z}}, \\ b_2 = \frac{w_p}{E_z} \sqrt{\frac{E_z}{u^2/E_x + w_p^2/E_z}}, \quad l = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{u^2/E_x + w_p^2/E_z}{E_x}}, \quad h = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{u^2/E_x + w_p^2/E_z}{E_z}} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.6)$$

ここで、固有値を λ_n とすれば、 λ_n に対する固有関数 ϕ_n は

$$\phi_n = A_n \left(\cos \lambda_n \zeta - \frac{b_1}{\lambda_n} \sin \lambda_n \zeta \right) \left[\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh \{ \sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x) \} + a \sinh \{ \sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x) \} \right] \dots\dots(2.7)$$

である。ただし、 A_n は後述する式(2.11)によって与えられる係数である。また $f(\zeta) = C_0 \exp(b_2 \zeta)$ とすれば、 $f(\zeta)$ は

$$f(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(\cos \lambda_n \zeta - \frac{b_1}{\lambda_n} \sin \lambda_n \zeta \right) \left\{ \sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} L) + a \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} L) \right\} \dots\dots(2.8)$$

なる級数形で表現される。つぎに、

$$z_n = \cos \lambda_n \zeta - (b_1/\lambda_n) \sin \lambda_n \zeta \dots\dots(2.9)$$

とおけば、 z_n は直交関数系をなし、

$$\left. \begin{aligned} \int_0^h z_m z_n d\zeta = 0, \quad (m \neq n) \\ \int_0^h z_n^2 d\zeta = \frac{h(\lambda_n^2 + b_1^2)(\lambda_n^2 + b_2^2) + (\lambda_n^2 - b_1 b_2)(b_2 - b_1)}{2 \lambda_n^2 (\lambda_n^2 + b_2^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.10)$$

したがって、

同じ意味をもつ。すなわちパラメーター k のもつ物理的意味は

- 1) $0 < k < 1$: 沈殿の傾向（沈殿物の一部分は再浮上するが大部分は沈殿する）
- 2) $k = 0$: 沈殿のみ（沈殿物の再浮上は全くない）

拡散現象においては、沈殿物の再浮上とは、浮遊物質（拡散物質）が底面において完全に拡散の系外に去るのではなく、その一部分が再び拡散の場にもどることを意味している。

沈殿物の再浮上を考慮した求める濃度分布の式は(2.1)の2階偏微分方程式を(2.2)の境界条件のもとに解くことによって得られる。ここでつぎのような座標変換を行ない(2.1)より1階の微分項を消去する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, z) = C(x, z) \exp \left\{ - \left(\frac{u}{2 E_x} x - \frac{w_p}{2 E_z} z \right) \right\} \\ x = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u^2/E_x + w_p^2/E_z}{E_x}} x \\ \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u^2/E_x + w_p^2/E_z}{E_z}} z, \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.3)$$

式(2.3)の変換により(2.1)および(2.2)はそれぞれ、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \zeta^2} - \phi = 0 \dots\dots(2.4)$$

$$\left. \begin{aligned} x=0 \text{ で } \phi = C_0 \exp(b_2 \zeta) \\ x=l \text{ で } \partial \phi / \partial x + a \phi = 0 \\ \zeta=0 \text{ で } \partial \phi / \partial \zeta + b_1 \phi = 0 \\ \zeta=h \text{ で } \partial \phi / \partial \zeta + b_2 \phi = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

ただし、式(2.5)における a, b_1, b_2, l, h 等は次式で与えられる無次元数である。

$$A_n = \frac{2 \lambda_n (\lambda_n^2 + b_2^2) C_0 \int_0^h f(\zeta') (\lambda_n \cos \lambda_n \zeta' - b_1 \sin \lambda_n \zeta') d\zeta'}{\{h(\lambda_n^2 + b_1^2)(\lambda_n^2 + b_2^2) + (\lambda_n^2 - b_1 b_2)(b_2 - b_1)\} \{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l) + a \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l)\}} \dots (2.11)$$

よって求める ϕ は

$$\phi = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda_n^2 + b_2^2) (\lambda_n \cos \lambda_n \zeta - b_1 \sin \lambda_n \zeta) [\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh\{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x)\} + a \sinh\{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x)\}]}{\{h(\lambda_n^2 + b_1^2)(\lambda_n^2 + b_2^2) + (\lambda_n^2 - b_1 b_2)(b_2 - b_1)\} \{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l) + a \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l)\}} \times \int_0^h f(\zeta') (\lambda_n \cos \lambda_n \zeta' - b_1 \sin \lambda_n \zeta') d\zeta' \dots (2.12)$$

これを式 (2.3) により逆に変換すれば,

$$\frac{C}{C_0} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \{2e^{b_1 h} (\lambda_n \sin \lambda_n h + b_1 \cos \lambda_n h) - (b_2 - b_1)\} [\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh\{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x) + a \sinh\{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} (l-x)\}]}{\{h(\lambda_n^2 + b_1^2)(\lambda_n^2 + b_2^2) + (\lambda_n^2 - b_1 b_2)(b_2 - b_1)\} \{\sqrt{\lambda_n^2 + 1} \cosh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l) + a \sinh(\sqrt{\lambda_n^2 + 1} l)\}} \times (\lambda_n \cos \lambda_n \zeta - b_1 \sin \lambda_n \zeta) e^{a x - b_2 \zeta} \dots (2.13)$$

ここに, λ_n は

$$\tan \lambda_n h = \frac{\lambda_n (b_2 - b_1)}{\lambda_n^2 + b_1 b_2} \dots (2.14)$$

で与えられる正根である。また a, b_1, b_2, l, h 等の無次元数は式 (2.6) で与えられるものである。 a は槽内の主流の平均流速 u および粒子の沈降速度 w_p と各方向の拡散係数 E_x, E_z からなる合成された速度に対する平均流速の割合を示しており $0 < a < 1$ である。この無次元数が小さいほど平均流速は相対的に減少し、沈降効率の良くなることが予想されるが、 $a=0$ は明らかに静止沈降の場合である。 b_2 も同様の意味で浮遊物質の沈降速度の相対的な大きさを示し、 $0 < b_2 < 1$ である。

3. 計算例

2. で求めた矩形沈殿槽における浮遊物質の濃度分布を示す解析解の特性を調べ同時に沈殿物の再浮上を表わすパラメーター k の物理的な意味を確かめるために若干の数値計算を行なった。簡単のため、まず、槽内の乱れは等方性とし、拡散係数は $E_x = E_z = E$ と仮定した。この仮定のもとに、沈殿物再浮上のパラメーター k 、水深 H 、槽長 L 、槽内平均流速 u 、浮遊物質の沈降速度 w_p の各値をいろいろ変化させて解の特性を調べた。

(1) 槽内平均流速 u を変化させた場合

u 以外の値、すなわち浮遊物質の沈降速度 w_p 、拡散係数 E 、再浮上のパラメーター k 、水深 H 、槽長 L 、入口断面平均濃度 C_0 をそれぞれ 0.02 cm/sec, 5 cm²/sec, 0.01, 7 cm, 80 cm, 100 unit に固定して計算した。これらの値は後ほど予定している実験との関連において、その際に予想される数値を用いたものであり、他に特別な意味はない。 u はおおよそ $1.0 \times 10^{-4} \sim 1.0 \times 10^2$ cm/sec の間で変化させ、出口の断面平均濃度 C_{EA} および出口の水面における濃度 C_{ES} ならびに (2.6) で定義した各無次元数 a, b_1, b_2, h, l 等を計算した。

ただし、出口の断面平均濃度 C_{EA} とは式 (2.13) に

において $x=l$ とし、 ζ については水深を 5 等分した点ならびに底と水面の 2 点の計 6 点、すなわち、 $\zeta=0, \zeta=h/5, \zeta=2h/5, \zeta=3h/5, \zeta=4h/5, \zeta=h$ の各点についてのそれぞれの濃度 $C_{L0}, C_{L1}, C_{L2}, C_{L3}, C_{L4}, C_{L5}$ を次式により平均したものである。

$$C_{EA} = \frac{1}{5} \left\{ \frac{1}{2} (C_{L0} + C_{L5}) + C_{L1} + C_{L2} + C_{L3} + C_{L4} \right\}$$

また、出口の水面濃度 C_{ES} とは (2.13) において、 $x=l, \zeta=h$ としたときの値である。

その結果の一部は図-2、表-1 に示すとおりである。槽内平均流速 u が小さいほど出口断面平均濃度 C_{EA} は小さいが、とくに u の値が小さいほど濃度の小さくなる割合、すなわち除去効率の良くなる割合は大きい、それも粒子の沈降速度と同程度以下ではあまり改善されない様子がうかがえる。これは沈殿池設計の際の池内平均流速決定の 1 つの目安となるものと考えられる。ただし、他の諸量は固定されたままの計算結果であるという点を念頭においておかねばならない。

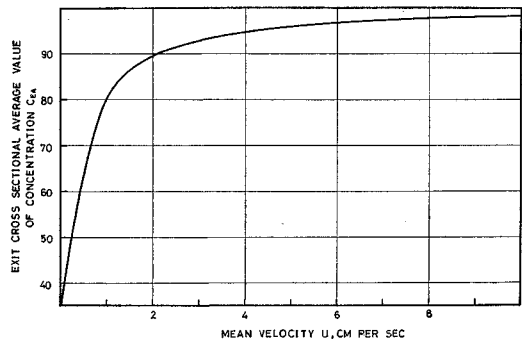


図-2 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration C_{EA} and Mean Velocity u

(2) 粒子の沈降速度 w_p を変化させた場合

u, E, k, H, L, C_0 の各値を 3 cm/sec, 5 cm²/sec, 0.01, 7 cm, 80 cm, 100 unit に固定して、 w_p を $1.0 \times 10^{-6} \sim 10$ cm/sec の範囲で変化させて計算した。その計算結果

表-1 Variations of Exit Concentration Averaged in a Cross Section C_{EA} , Concentration at Exit Water Surface C_{ES} and Dimensionless Numbers (a, b_1, b_2, h, l) With Mean Velocity u

Mmean Velocity u	Concentration C_{EA}	Concentration C_{ES}	a	b_1	b_2	h	l
1.000×10^{-1}	2.907×10	2.880×10	5.000×10^{-3}	-9.800×10^{-1}	1.000	1.400×10^{-2}	1.600×10^{-1}
5.000×10^{-1}	2.911×10	2.884×10	2.499×10^{-2}	-9.797×10^{-1}	9.997×10^{-1}	1.400×10^{-2}	1.600×10^{-1}
1.000×10^{-3}	2.917×10	2.890×10	2.994×10^{-2}	-9.788×10^{-1}	9.988×10^{-1}	1.402×10^{-2}	1.602×10^{-1}
5.000×10^{-3}	2.963×10	2.936×10	2.425×10^{-1}	-9.507×10^{-1}	9.701×10^{-1}	1.443×10^{-2}	1.649×10^{-1}
1.000×10^{-2}	3.021×10	2.993×10	4.472×10^{-1}	-8.765×10^{-1}	8.944×10^{-1}	1.565×10^{-2}	1.789×10^{-1}
5.000×10^{-2}	3.480×10	3.447×10	9.285×10^{-1}	-3.640×10^{-1}	3.714×10^{-1}	3.770×10^{-2}	4.308×10^{-1}
1.000×10^{-1}	4.028×10	3.991×10	9.806×10^{-1}	-1.922×10^{-1}	1.961×10^{-1}	7.139×10^{-2}	8.158×10^{-1}
5.000×10^{-1}	6.228×10	6.765×10	9.992×10^{-1}	-3.917×10^{-2}	3.997×10^{-2}	3.503×10^{-1}	4.003
1.000	8.102×10	8.027×10	1.000	-1.960×10^{-2}	2.000×10^{-2}	7.001×10^{-1}	8.002
2.000	8.960×10	8.878×10	1.000	-9.800×10^{-3}	1.000×10^{-2}	1.400	1.600×10
3.000	9.286×10	9.200×10	1.000	-6.533×10^{-3}	6.667×10^{-3}	2.100	2.400×10
4.000	9.456×10	9.369×10	1.000	-4.900×10^{-3}	5.000×10^{-3}	2.800	3.200×10
5.000	9.561×10	9.473×10	1.000	-3.920×10^{-3}	4.000×10^{-3}	3.500	4.400×10
1.000×10	9.777×10	9.686×10	1.000	-1.960×10^{-3}	2.000×10^{-3}	7.000	8.000×10
5.000×10	9.955×10	9.875×10	1.000	-3.920×10^{-4}	4.000×10^{-4}	3.500×10	4.000×10^2
1.000×10^2	9.979×10	9.913×10	1.000	-1.960×10^{-4}	2.000×10^{-4}	7.000×10	8.000×10^2

(The values denote the percentage of the entrance concentration.)

表-2 Variations of Exit Concentration Averaged in a Cross Section C_{ES} , Concentration at Exit Water Surface C_{EA} and Dimensionless Numbers (a, b_1, b_2, h, l) with Fall Velocity w_p

Fall Velocity w_p	Concentration C_{EA}	Concentration C_{ES}	a	b_1	b_2	h	l
1.000×10^{-6}	1.004×10^{-2}	1.004×10^2	1.000	-3.267×10^{-7}	3.333×10^{-7}	2.100	2.400×10
1.000×10^{-5}	1.006×10^{-2}	1.006×10^2	1.000	-3.267×10^{-6}	3.333×10^{-6}	2.100	2.400×10
2.000×10^{-4}	1.002×10^{-2}	1.002×10^2	1.000	-6.533×10^{-5}	6.667×10^{-5}	2.100	2.400×10
2.000×10^{-3}	9.934×10	9.925×10	1.000	-6.533×10^{-4}	6.667×10^{-4}	2.100	2.400×10
2.000×10^{-2}	9.286×10	9.200×10	1.000	-6.533×10^{-3}	6.667×10^{-3}	2.100	2.400×10
5.000×10^{-2}	8.301×10	8.110×10	9.999×10^{-1}	-1.633×10^{-2}	1.666×10^{-2}	2.100	2.400×10
8.000×10^{-2}	7.413×10	7.142×10	9.996×10^{-1}	-2.612×10^{-2}	2.665×10^{-2}	2.101	2.401×10
1.000×10^{-1}	6.872×10	6.559×10	9.994×10^{-1}	-3.265×10^{-2}	3.331×10^{-2}	2.101	2.401×10
2.000×10^{-1}	4.670×10	4.253×10	9.978×10^{-1}	-6.519×10^{-2}	6.652×10^{-2}	2.105	2.405×10
5.000×10^{-1}	1.378×10	1.088×10	9.864×10^{-1}	-1.611×10^{-1}	1.644×10^{-1}	2.129	2.433×10
8.000×10^{-1}	3.728	2.543	9.662×10^{-1}	-2.525×10^{-1}	2.577×10^{-1}	2.173	2.484×10
1.000	1.492	9.220×10^{-1}	9.487×10^{-1}	-3.099×10^{-1}	3.162×10^{-1}	2.214	2.530×10
2.000	9.800×10^{-3}	3.600×10^{-3}	8.321×10^{-1}	-5.436×10^{-1}	5.547×10^{-1}	2.524	2.885×10
4.000	8.592×10^{-8}	1.076×10^{-8}	6.000×10^{-1}	-7.840×10^{-1}	8.000×10^{-1}	3.500	4.000×10
8.000	3.031×10^{-19}	3.648×10^{-21}	3.511×10^{-1}	-9.176×10^{-1}	9.363×10^{-1}	5.981	6.835×10
1.000×10	2.803×10^{-25}	9.894×10^{-27}	2.873×10^{-1}	-9.387×10^{-1}	9.578×10^{-1}	7.308	8.352×10

(The values denote the percentage of the entrance concentration.)

の一部は 図-3, 表-2 に見られるとおりで, 沈降速度 w_p が増加すれば C_{EA} は減少し, 沈殿効率が指数関数的に良くなることを示している。これは沈殿現象においては, やはり粒子の沈降速度が中心的因子であることを如実に示しているものといえよう。

(3) 槽長 L , 水深 H を変化させた場合

槽長 L については, L を $1.0 \sim 1.0 \times 10^3$ cm, 水深 H については, H を $5.0 \times 10^{-2} \sim 3.0 \times 10$ cm の範囲で計算を行なった。図-4, 図-5 のような結果となったが, L が大きいほど出口断面平均濃度が低くなるのは当然として, H については H が小さくなれば C_{EA} が低くなっていることに注意せねばならない。これは通常よくいわれているように水深が小さいほど (たとえば2階層式の沈殿池は見かけ上, 水深は小さくなる) 除去効率

が良くなるということに一致している。しかし, (1) でも述べたように, これらの数値計算においては1つの数値を変えるさいには他の諸量に全く無関係に変化させていることを考慮しておかねばならない。実際には H を小さくすれば処理量 Q が一定ならば当然 u は増加し, したがって E も大となることが予想される。

(4) 拡散係数 E を変化させた場合

E の値を $1.0 \times 10^{-2} \sim 1.0 \times 10^3$ cm²/sec の範囲で変化させた。他の諸量は (1)~(3) と同様に u, k, H, L, C_0 はそれぞれ 3 cm/sec, 0.01, 7 cm, 80 cm, 100 unit に固定して計算した。図-6 に見られるごとく出口断面平均濃度 C_{EA} は E が変化してもあまり変化しないが, 出口水面濃度 C_{ES} は E が小さくなれば指数関数的に低下していく。

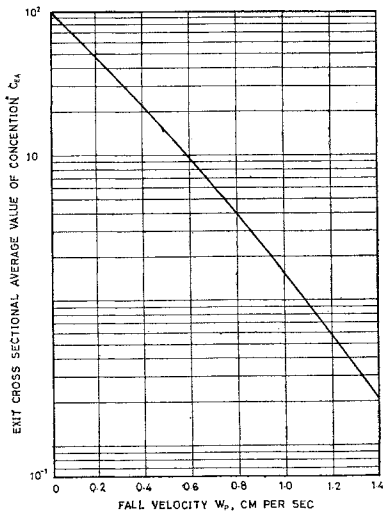


図-3 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration C_{EA} and Fall Velocity w_p

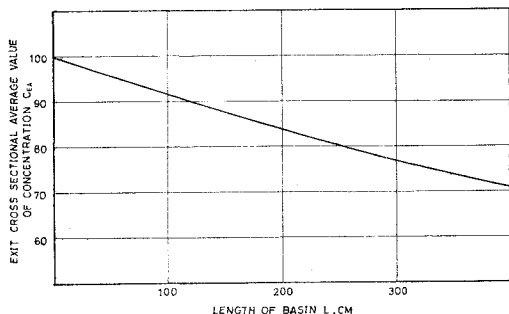


図-4 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration C_{EA} and Length of Basin L

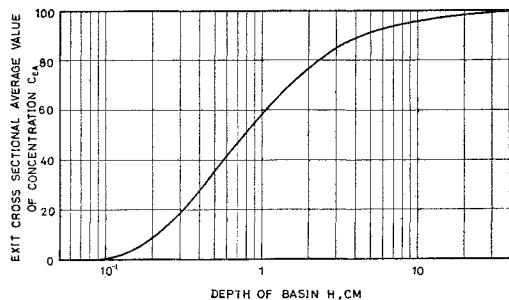


図-5 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration C_{EA} and Depth of Basin H

(5) パラメーター k を変化させた場合

パラメーター k を変化させて出口断面平均濃度 C_{EA} を求めると 図-7, 図-8 のように、槽内の濃度分布を求めると 図-9, 図-10, 図-11 のようになる。図-7,

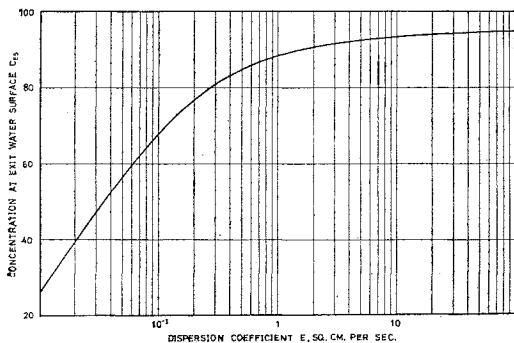


図-6 Relations Between Concentration at Exit Water Surface C_{ES} and Dispersion Coefficient E

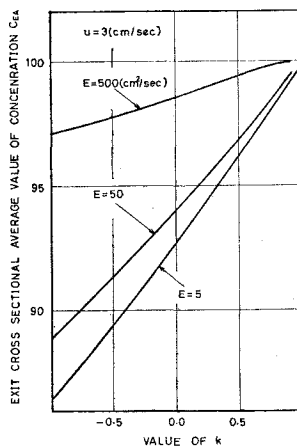
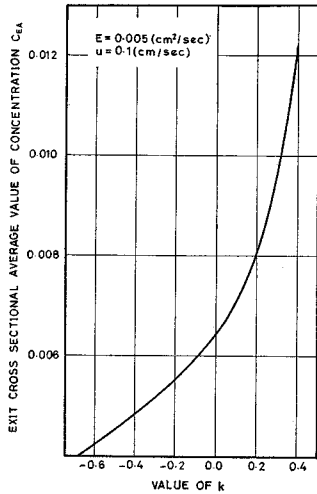
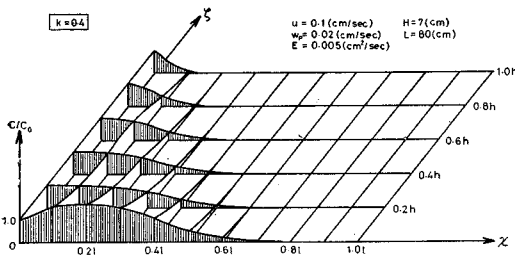


図-7 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration C_{EA} and Value of k (1)

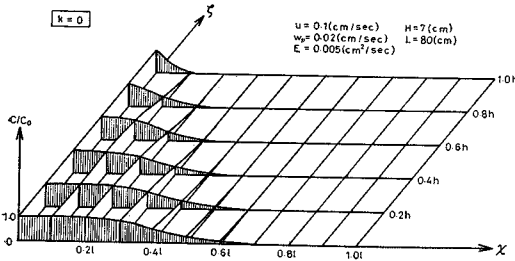
図-8 を見るといずれも再浮上パラメーター k の増加とともに C_{EA} は単調に増加しているが、これは 2. で述べた k の物理的意味、すなわち、 $0 < k < 1$ では沈殿の傾向(一部再浮上)、 $k=0$ では沈殿のみ、に対応する。 $k < 0$ では沈殿物の吸収のごとき意味をもつ(沈殿池においては、もちろん $k < 0$ は考える必要はないが k の意味を明らかにするためにこの場合についても計算した)。この k の物理的意味は 図-9, 図-10, 図-11 を見れば一層はっきりする。図-9, 図-10, 図-11 は式 (2.13) により $u=0.1$ cm/sec, $w_p=0.02$ cm/sec, $E=0.005$ cm²/sec, $H=7$ cm, $L=80$ cm の条件で再浮上パラメーター k を変えて槽内の濃度分布を求めたものである。 x は流れ方向、 ζ は鉛直上向き方向の軸で、それぞれ式 (2.3) で定義される無次元変数、 l および h はそれぞれ式 (2.6) で定義される無次元数である。 $x=0$ は槽入口、 $x=l$ は出口、 $\zeta=0$ は底、 $\zeta=h$ は水面を表わす。図中のおのおのの山の高さが無次元濃度 C/C_0 に対応している。図-9 は再浮上パラメーター k が正の



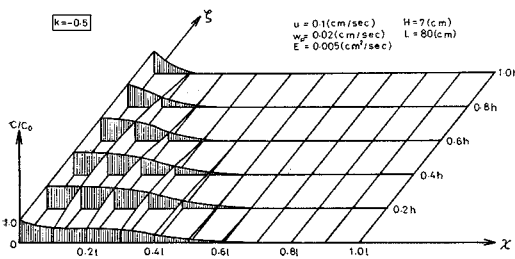
図—8 Relations Between Exit Cross Sectional Average Value of Concentration $C_{E,A}$ and Value of k (2)



図—9 Distribution of Sediment Concentration ($k > 0$)



図—10 Distribution of Sediment Concentration ($k = 0$)



図—11 Distribution of Sediment Concentration ($k < 0$)

場合の例で、 $k=0.4$ である。底すなわち $z=0$ において無次元濃度 C/C_0 は 1.0 より大きくなっており明らかに沈殿物の再浮上があることを示している。図—10 は $k=0$ すなわち沈殿物の再浮上のない場合である。図—11 は $k=-0.5$ で再浮上パラメーターが負の場合の一例であるが、底面よりの沈殿物の吸収のごとき現象に対応する。たとえば水深方向にみると無次元濃度 C/C_0 は底面においてその途中の各点 $z=0.2h$, $z=0.4h$, $z=0.6h$ 等よりも低くなっており吸収の現象がはっきりと表われている。

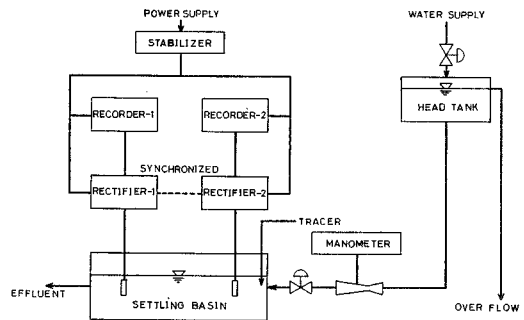
以上の数値計算の結果を検討すれば濃度分布式(2.13)は矩形沈殿槽内の浮遊物質の挙動を底面よりの再浮上をも含めて合理的に表現しており、沈殿池の設計ないしは操作に対して有効な情報を与えるものと思われる。

4. 実験によるパラメーター k の推定

式(2.13)を用いて矩形沈殿槽内の沈殿物質の再浮上を含めた濃度分布を求める際に問題となるのは式に含まれる再浮上のパラメーター k の値である。この k の値は 3. において述べたごとく現象論的考察によれば、 $0 < k < 1$ であることが予想されるが、その値は不明である。このパラメーター k の値を推定するには実験的な手段によねばならない。3. において k は 0~1 の間の値をとるということを現象論的考察によって推論したわけであるが、実際、 k はそのような範囲にあるのか、またその k の値は現実に測定されている沈殿池における水理諸量によっていかに表現されるのか、などの問題点が残されている。われわれはこれらの問題に対処すべく若干の実験を行なった。

(1) 装置の概要

実験装置は矩形沈殿槽、ヘッド・タンク、流量調整測定部よりなり、拡散係数の測定にさいしては、この他にトレーサー検出用白金電極プローブ、レクティファイヤ



図—12 Flow Diagram of Dispersion Coefficient Measuring Apparatus

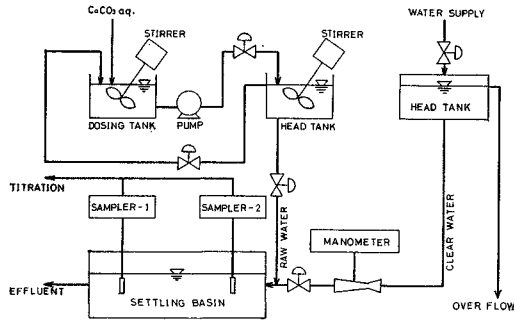


図-13 Flow Diagram of Sediment Concentration Measuring Apparatus

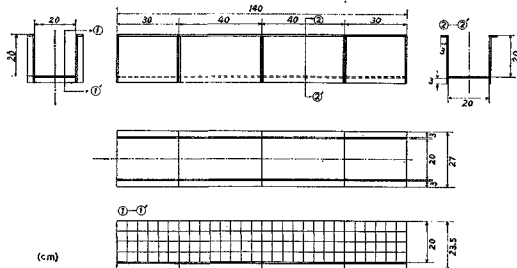


図-14 Dimensions of Model Basin

一、レコーダー、スタビライザーを付加する必要があるが、そのフローダイアグラムは 図-12 に示すようなものである。また沈降性浮遊物質の濃度測定に際しては攪拌機を備えた原水調整タンクおよび原水流入用ヘッド・タンクをこれらの代りに付加する。そのフローダイアグラムは 図-13 に示す。また濃度の測定は滴定 (EDTA 法) による定量分析を行なった。

矩形沈殿槽は 図-14 のような幅 20 cm、高さ 20 cm、長さ 140 cm の透明アクリル樹脂および塩化ビニール樹脂製で 4 つのセグメントに分割されており、ゴムパッキングおよびボルト・ナットで接合するようにし、出口の越流せきおよび入口の整流板などの変更が容易に行なえるようにしてある。沈殿部の容積は約 $7 \times 20 \times 80$ cm で、両側面は透明アクリル樹脂製とし、とくに一方の側面には 5 cm の間隔の格子を黒色で刻記してあり沈殿部の流れの様子などの観察が可能である。流入部は直径 6 mm の穴を全面に上下左右とも 1 cm おきにあけた整流板を設け、流出部には全幅越流せきを設けた。ヘッド・タンクは容積約 90 l で、地上高約 2 m の台上に設置された。流量調整は 1.5 インチのスルースバルブによって行ない、流量測定にはベンチュリー管とマンオメーターを用いた。

(2) 拡散係数 E_x, E_z の測定

上記の矩形沈殿槽およびヘッド・タンク、ベンチュリー管などの他に白金電極プローブ、レクティブファイヤー、レコーダー、スタビライザーを 図-12 のように接続し、電解質トレーサーの電気伝導度を測定し、トレーサー濃度に換算し、拡散係数を算定する。トレーサー検出用プローブは直径 6.5 mm、長さ 38 cm のガラス製支持棒の先端に直径 0.5 mm の白金電極をつけたものである。供給電源は 5 V 60 Hz でトレーサー溶液の分極を防止し、これをシリコンゲイオード 1 S 180 4 個からなるブリッジ型整流回路を通した後、レコーダーで電気伝導度対時間曲線として記録した。そしてあらかじめ作製したトレーサーの電気伝導度対濃度曲線を電算機に記憶させ、これに測定した電気伝導度対時間曲線をデータとして読込ませることにより濃度変換を行なった。なおトレーサーは NaCl 溶液にエチル・アルコールおよびメチレン・ブルーを少量加え、その比重を拡散係数を測定すべき水道水の比重とほぼ等しくなるように調整したものである。

拡散係数の算定は、流下方向 (x 軸) について、1 次元的に測定した見かけ上の拡散係数を K_x とし、これより 2 次元的に取扱った場合の拡散係数 E_x, E_z に変換して求めた。すなわち 1 次元拡散方程式を

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \dots \dots \dots (4.1)$$

とし、2 次元拡散方程式を

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \dots \dots \dots (4.2)$$

とする。実際の拡散係数の測定では 1 次元的に取扱った式 (4.1) の見かけ上の拡散係数を測定しておき、これより式 (4.2) のような 2 次元的に取扱った場合の拡散係数 E_x, E_z を求める。

槽内の流速分布が対数則にしたがうものと仮定すると、 E_x, E_z, K_x などの間の関係は Taylor¹⁶⁾, Elder¹⁷⁾ らの仮定を用いて計算すると、

$$\left. \begin{aligned} E_x &= K_x \\ E_z &= 9.6 \times 10^{-3} K_x \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.3)$$

ここに、 E_z は流れに垂直な断面における平均値である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} E_z &= \int_0^1 E(w) dw = \frac{1}{6} \kappa hu_r \\ E(w) &= \kappa hu_r w(1-w) \\ w &= \frac{z}{h} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.4)$$

ただし、 κ はカルマン定数で $\kappa \sim 0.4$, u_r は摩擦速度、 h は水深である。 K_x はモーメント法によれば、

$$K_x = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_z^2}{dt}$$

$$\sigma_{\epsilon_i} = u^2 \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ct^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} Ct dt} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ctdt}{\int_{-\infty}^{+\infty} Cdt} \right)^2 \right\} \quad (4.5)$$

である。ただし、 C はトレーサー濃度、 t は時間、 u は主流の平均流速である。式 (4.5) の算定では 2 点でトレーサーの検出を行なうから、理論的にはトレーサーの注入形式 (インパルス的なインプットあるいはユニット・ファンクショナルなインプットなど) には無関係であるという利点がある¹⁹⁾。なお、式 (4.3), (4.4), (4.5) の誘導については付録を参照されたい。

測定は底面より 1 cm, 2 cm, 4 cm, 6 cm について行ない、その結果は表-3 に示すとおりである。

本実験の範囲では K_x (あるいは E_x) の水深方向の変化は、トレーサーの底面よりの反射の影響が加わる恐れがあり信頼性の低い測点 1 cm の値をも含めて、全体として、2~3 倍程度で、オーダ的にはそれほど変化はない。分子拡散に関する測定値に比し、乱れの拡散係数の測定値は測定精度にもよるが、普通はかなりバラツキの大きいものであり、したがって本実験の場合もこの実測値から E_x の水深方向についての傾向性は見出し難く、 E_x (あるいは K_x) および E_z をほぼ一定と仮定する。この仮定は結果的には拡散係数 E_x, E_z 等の算定に

表-3 Observed Dispersion Coefficients E_x and E_z

Measuring point cm	Mean Velocity u (cm/sec)	Reynolds No. R_e	Froude No. F	Dispersion Coefficient E_x (cm ² /sec)	Dispersion Coefficient E_z (cm ² /sec)
1	1.448	5.158×10^{-2}	1.761×10^{-2}	1.055×10^1	1.013×10^{-1}
1	2.817	1.020×10^{-3}	3.377×10^{-2}	3.671×10^1	3.524×10^{-1}
1	4.110	1.512×10^{-3}	4.859×10^{-2}	2.594×10^1	2.491×10^{-1}
1	5.312	1.989×10^{-3}	6.184×10^{-2}	1.946×10^2	1.868
1	6.410	2.449×10^{-3}	7.332×10^{-2}	8.992×10^1	8.633×10^{-1}
2	7.519×10^{-1}	2.809×10^{-2}	9.314×10^{-3}	4.399	4.223×10^{-2}
2	1.460	5.552×10^{-2}	1.782×10^{-2}	5.030	4.826×10^{-2}
2	2.158	8.278×10^{-3}	2.615×10^{-2}	1.589×10^1	1.523×10^{-1}
2	2.817	1.094×10^{-3}	3.377×10^{-2}	2.949×10^1	2.831×10^{-1}
2	3.448	1.348×10^{-3}	4.091×10^{-2}	3.133×10^1	3.007×10^{-1}
2	4.093	1.610×10^{-3}	4.829×10^{-2}	5.197×10^1	4.989×10^{-1}
2	4.730	1.871×10^{-3}	5.554×10^{-2}	6.191×10^1	5.943×10^{-1}
2	5.321	2.107×10^{-3}	6.198×10^{-2}	1.031×10^2	9.900×10^{-1}
2	5.816	2.341×10^{-3}	6.678×10^{-2}	1.421×10^2	1.364
4	1.460	5.351×10^{-2}	1.782×10^{-2}	7.629	7.324×10^{-2}
4	2.149	7.966×10^{-2}	2.598×10^{-2}	1.009×10^1	9.691×10^{-2}
4	2.817	1.055×10^{-3}	3.377×10^{-2}	1.570×10^1	1.507×10^{-1}
4	3.458	1.308×10^{-3}	4.108×10^{-2}	4.686×10^1	4.499×10^{-1}
4	4.110	1.564×10^{-3}	4.859×10^{-2}	4.029×10^1	3.868×10^{-1}
4	4.711	1.811×10^{-3}	5.521×10^{-2}	8.742×10^1	8.393×10^{-1}
4	5.333	2.061×10^{-3}	6.221×10^{-2}	1.093×10^2	1.049
4	5.872	2.297×10^{-3}	6.777×10^{-2}	1.114×10^2	1.069
4	6.468	2.543×10^{-3}	7.431×10^{-2}	2.751×10^2	2.641
6	7.519×10^{-1}	2.809×10^{-2}	9.314×10^{-3}	6.206	5.958×10^{-2}
6	1.476	5.576×10^{-2}	1.811×10^{-2}	9.672	9.285×10^{-2}
6	2.155	8.273×10^{-3}	2.609×10^{-2}	1.735×10^1	1.666×10^{-1}
6	2.825	1.095×10^{-3}	3.391×10^{-2}	2.697×10^1	2.589×10^{-1}
6	3.472	1.360×10^{-3}	4.133×10^{-2}	4.072×10^1	3.909×10^{-1}
6	4.110	1.622×10^{-3}	4.859×10^{-2}	6.524×10^1	6.263×10^{-1}
6	4.741	1.883×10^{-3}	5.521×10^{-2}	9.872×10^1	9.477×10^{-1}

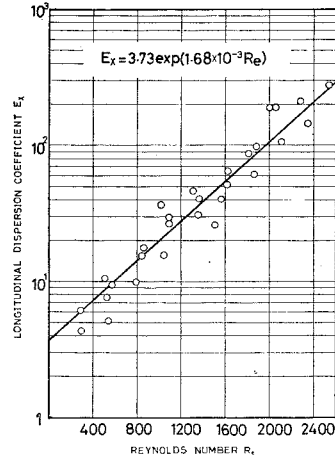


図-15 Relations Between Longitudinal Dispersion Coefficient E_x and Reynolds Number R_e

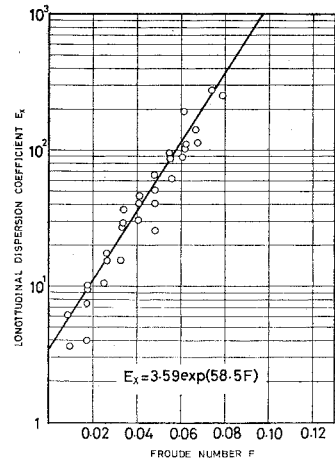


図-16 Relations Between Longitudinal Dispersion Coefficient E_x and Froude Number F

際して、これらを一定と仮定して計算を進めたことに矛盾しない。

実験結果をレイノルズ数 R_e およびフルード数 F で整理すると図-15, 図-16 のようにいずれによっても $R_e=400 \sim 2400$ あるいは $F=0.01 \sim 0.08$ 程度ではそれぞれかなり明瞭な相関が認められる。ただし、 R_e および F はつぎのように定義した。

$$\left. \begin{aligned} R_e &= \frac{uR}{\nu} \\ F &= \frac{u}{\sqrt{gh}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.6)$$

ここに、 u は槽内平均流速、 R は径深、 ν は水の動粘性係数、 g は重力加速度、 h は水深である。

ここでは u のみを変化させて拡散係数を実測したものであるが、 E_x および E_z の R_e あるいは F との関係は最小自乗法により求めるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 3.73 \exp(1.68 \times 10^{-3} R_e) \\ E_z &= 3.58 \times 10^{-2} \exp(1.68 \times 10^{-3} R_e) \end{aligned} \right\} \dots\dots (4.7)$$

$$\left. \begin{aligned} E_x &= 3.59 \exp(58.5 F) \\ E_z &= 3.45 \times 10^{-2} \exp(58.5 F) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.8)$$

(3) 濃度の測定

沈降性の浮遊物質としては、沈降性炭酸カルシウム(特級試薬)を用いた。これは白色粉末で JIS A 1202¹⁹⁾の比重試験を行なったところ比重約 2.80 (15°C の水に対して)で、土の平均比重よりもやや大きく、沈降分析で 図-17 のような粒度分布を示す。平均粒径 (D_{50}) は 1.72×10^{-2} mm, 平均沈降速度 0.026 cm/sec でシルトの性状に相当するものと思われるが、粒度はかなり均一で、その約 95% (重量百分率) がほぼ $1 \times 10^{-2} \sim 3 \times 10^{-3}$ cm/sec の間にある。沈降性物質の光度計による濃度測定では測定中に粒子の沈降によりその値は不正確になりがちであるが、本実験では炭酸カルシウムを使用しており、その濃度は EDTA 法²⁰⁾により Ca^{++} イオン濃度として、正確に測定できる。この沈降性炭酸カルシウムの約 1000 ppm 水溶液を原水として、別に攪拌機を備えたヘッド・タンクに貯え、これを水道水に混入せしめ、槽入口で濃度が 100~300 ppm になるように調整した。装置のフロー・ダイアグラムは 図-13 に示す。

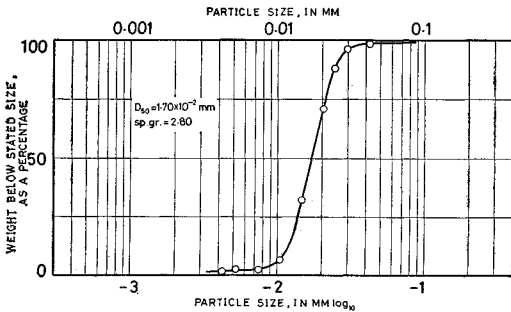


図-17 Particle Size Distribution of $CaCO_3$

濃度測定にさいしては、サンプリング時に出口の越流ぜきの影響を受けないように、出口より 15 cm 上流側(入口より 65 cm)の流れに垂直な断面内の流心において、底面より 1 cm, 3 cm, 6 cm の 3 点についてサンプリングを行ない、これらの値を平均したものをもって断面平均濃度とした。濃度は EDTA 法により 3 回滴定し

表-4 Calculated Scouring Parameter k and Experimental Conditions

Flow Rate Q (cc/sec)	Depth H (cm)	Mean Velocity u (cm/sec)	Kinematic Viscosity ν (cm ² /sec)	Concentration C_{65}/C_0 (%)	Dispersion Coefficient E_x (cm ² /sec)	Scouring Parameter k (-)
162.6	6.88	1.182	1.271×10^{-2}	81.2	3.96	0.18
250.0	7.04	1.775	1.308×10^{-2}	89.1	7.60	0.32
363.3	7.18	2.530	1.395×10^{-2}	95.7	10.5	0.58
428.3	7.29	2.920	1.271×10^{-2}	96.8	14.2	0.66

(C_{65} is the concentration at the downstream point apart 65 cm from the entrance.)

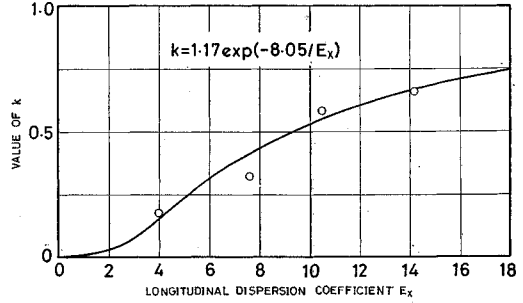


図-18 Relations Between Longitudinal Dispersion Coefficient E_x and Value of k

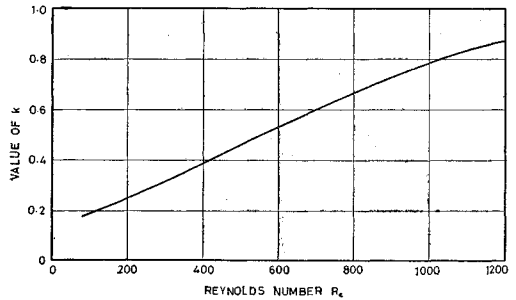


図-19 Relations Between Value of k and Reynolds Number R_e

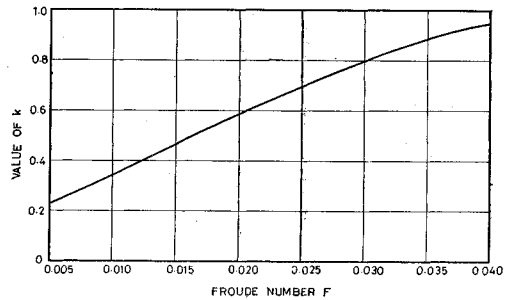


図-20 Relations Between Value of k and Froude Number F

た値の平均値である。これより再浮上のパラメーター k の推定は $C_0, u, w_p, E_x, E_z, H, L$ 等を実測により与え、適当な k の値 ($0 < k < 1$) を仮定し、電算機によりサンプリング地点の濃度をさきに求めた k を含む濃度分布式 (2.13) により計算する。そして実測した濃度と同じ計算値を与える k を試行錯誤法により求めた。その結果の一部は 表-4 に示すとおりである。

これより再浮上のパラメーター k を E_x の関数によって記述することを試みた。 k と E_x との関係は直感的考察ならびに実験値の視察により

$$k = \alpha \exp(-\beta/E_x) \dots\dots (4.9)$$

なる形が妥当であろうとおもわれる²¹⁾。ただし、 α および β は正の定

数である。この関数形に対して、 α および β を最小自乗法により推定すれば、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 1.17 \\ \beta &= 8.05 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4.10)$$

となる。 $0 < k < 1$ であるからこの α および β の推定値は、この実験範囲 ($F=0.01 \sim 0.08$) 程度の k および E_x (あるいは E_z) についてのみ妥当なものであることはいうまでもない。

この関係を $E_x=0 \sim 18 \text{ cm}^2/\text{sec}$ に対してプロットしたものが図—18 で図中の○印は測定値である。また E_x に対して、式 (4.7) の関係式を用いてレイノルズ数 R_e と k との関係を求めると図—19 のようになり、式 (4.8) の関係式を用いてフルード数 F との関係を求めると図—20 のようになる。

5. 結果の要約と結言

本論文では沈殿物の再浮上の問題は式 (2.1), (2.2) のような偏微分方程式の境界値問題として取扱えることを示し、さらに、その境界値問題の解析解 (2.13) を誘導し、その解の特性について数値計算の結果から種々の検討を行なったが、実験をも含めて以上の結果を要約するとつぎのようになる。

1) 矩形沈殿槽における沈殿物の再浮上は境界条件中の k なるパラメーターによって記述され、そのさい除去効率 E_x は式 (2.13) によって出口濃度を計算することにより与えられる。

2) k と拡散係数 E_x とは (4.9) のように

$$k = 1.17 \exp(-8.05/E_x)$$

なる関係がある。

3) 拡散係数 E_x は流れの状態の関数として

$$E_x = 3.73 \exp(1.68 \times 10^{-3} R_e) \dots\dots\dots (4.7)$$

$$E_x = 3.59 \exp(58.5 F) \dots\dots\dots (4.8)$$

のように推定される。

上のような結果にしたがって再浮上を加味した除去効率を計算することが可能である。

沈殿池のような簡単な水処理装置においてさえ、その中における現象を水理学的に見れば非常に複雑な様相を呈している。それらは短絡流、死水域、密度流、乱れによる混合あるいは沈殿物の底面よりの再浮上などである。これらはいずれも沈殿池の設計にさいしては十分に考慮されねばならない重要な問題であるが、定量的に把握するのはなかなか困難である。ここでは、これらのうち沈殿物の再浮上を定量的に記述することを試みたものである。なお、これらの結果にもとづけば、沈殿池の設計、とくに最適水深の検討が可能となるが、この結果は稿を改めて述べる。

参 考 文 献

- 1) 土木学会水理公式集改訂委員会編：水理公式集，昭和38年。
- 2) Grove Karl Gilbert：“The Transportation of Débris by Running Water”，U.S. Geological Survey, Washington D.C., 1914, Professional Paper 86.
- 3) William W. Rubey：“The Force Required to Move Particles on a Stream Bed.” U.S. Geological Survey, Washington D.C., 1938, Professional Paper No. 189-E.
- 4) Serge Leliensky：“An Introduction to Fluvial Hydraulics,” Dover Publications, Inc., New York, 1966.
- 5) H.A. Einstein：“Formulas for the Transportation of Bed Load,” Trans. A.S.C.E., Vol. 107, 1942, paper No. 2140.
- 6) Vito A. Vanoni：“Transportation of Suspended Sediment by Water”, Trans. A.S.C.E., Vol. 111, 1946, paper No. 2267.
- 7) Hsin-Kuan Lin：“Mechanics of Sediment-Ripple Formation,” J. of Hy. Div. Proc. A.S.C.E., Vol. 83, No. HY 2, April, 1957.
- 8) Task Committee on Preparation of Sedimentation Manual Committee on Sedimentation：“Sediment Transportation Mechanics; Suspension of Sediment,” J. of Hy. Div. Proc. A.S.C.E., Vol. 89, No. HY 5, Sept., 1963.
- 9) William E. Dobbins：“Effect of Turbulence on Sedimentation,” Trans. A.S.C.E., Vol. 109, 1944, paper No. 2218.
- 10) Thomas R. Camp：“Sedimentation on the Design of Settling Tanks,” Trans. A.S.C.E., Vol. 111, 1946, paper No. 2285.
- 11) Takeshi Goda：“A Study on the Mechanism of Transportation of Suspended Sediment and Its Application to Increasing the Efficiency of Sedimentation Basin”, Memoirs of the Faculty of Eng., Kyoto Univ., Vol. 15, No. 4, Oct., 1953.
- 12) 合田 健：上水浄化における水理学上の基礎的諸問題，京都大学学位論文，昭和31年。
- 13) 犬井鉄郎：応用偏微分方程式論，岩波書店，1967。
- 14) H.S. Carslaw, J.C. Jaeger：“Conduction of Heat in Solids,” Oxford Univ. Press, 1959.
- 15) A.S. Monin：“On the Boundary Condition on the Earth Surface for Diffusion Pollution,” Advances in Geophysics, Vol. 6, Academic Press, N.Y., 1959.
- 16) G. Taylor：“The Dispersion of Matter in Turbulent Flow through a Pipe,” Proc. Poy. Soc. of London, Vol. 223, No. 1155, May 20, 1954.
- 17) J.W. Elder：“The Dispersion of Marked Fluid in Turbulent Shear Flow,” J. of Fluid Mech., Vol. 5, 1959.
- 18) H.B. Fisher：“A Note on the One-dimensional Dispersion Model,” Air and Wat. Pollut., Int. Jour., Vol. 10, 1966.
- 19) 土質工学会編：土質試験法，昭和42年7月。
- 20) 日本工業用水協会編：工業用水便覧，昭和35年8月。
- 21) 高松武一郎・内藤正明：く形沈殿池効率におよぼす均一流体混合の影響，土木学会論文集，第139号，昭和42年3月。

付録 拡散係数 E_x, E_z の算定法について

1次元拡散方程式および2次元拡散方程式をそれぞれ

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \dots\dots\dots(A-1)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u \frac{\partial C}{\partial x} = E_x \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \dots\dots(A-2)$$

とする。これらは 4. の (2) における式 (4.1), (4.2) と同じものである。x 軸方向については流速 u が存在するために拡散係数 E_x あるいは K_x には乱れによる拡散の他に速度分布に基づく拡散的な効果^{16), 17)} が加わってくる。しかもこの速度分布による拡散的な効果は乱れによる拡散よりも相当大きいもので、Taylor¹⁶⁾ や Elder¹⁷⁾ の計算によればそれぞれ速度分布による拡散的な効果は乱れ自身による拡散の約 200 倍と約 80 倍にもなる。

以下にこれらの拡散係数の算定方法について述べる。(A-2) において x 軸方向の $E_x(\partial^2 C/\partial x^2)$ を無視し、さらに

$$u = \bar{u} + u'$$

$$x = \xi + \bar{u}t$$

とし、Taylor¹⁶⁾, Elder¹⁷⁾ と同様に

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial C}{\partial \xi} = 0$$

と仮定すれば (A-2) は

$$u' \frac{\partial C}{\partial \xi} = E_z \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \dots\dots\dots(A-3)$$

となる。また水深を h とし、 $z = hw$ とすれば (A-3) は

$$h^2 u' \frac{\partial C}{\partial \xi} = E_z \frac{\partial^2 C}{\partial w^2} \dots\dots\dots(A-4)$$

さらに、Taylor, Elder の仮定にしたがって C を w に独立な P と ξ に独立な Q とに分け、

$$\left. \begin{aligned} C &= P + Q \\ \frac{\partial P}{\partial w} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial \xi} &= \text{constant} \\ \frac{\partial Q}{\partial \xi} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(A-5)$$

とすると (A-4) は

$$h^2 u' \frac{\partial P}{\partial \xi} = E_z \frac{\partial^2 Q}{\partial w^2} \dots\dots\dots(A-6)$$

となり、したがって Q は

$$Q = \frac{h^2}{E_z} \frac{\partial P}{\partial \xi} \int_0^w \left(\int_0^w u' dw \right) dw \dots\dots\dots(A-7)$$

(A-5) の仮定および Fick の拡散則より

$$\int_A u' Q dA = -D_x A \frac{\partial P}{\partial \xi} \dots\dots\dots(A-8)$$

ただし、 A は流れに垂直な断面の面積で、 D_x は上式で定義される拡散係数に相当するものである。(A-7) を (A-8) に代入すれば、

$$\frac{h^2}{E_z} \int_A u' \left\{ \int_0^w \left(\int_0^w u' dw \right) dw \right\} dA = -D_x A \dots\dots\dots(A-9)$$

つぎに槽内において次式が成立すると仮定する (水路においては実験的に認められている)。

$$\frac{u_0 - u}{u_\tau} = F(w) \dots\dots\dots(A-10)$$

ただし、 u_0 は槽中央の流速、 u_τ は摩擦速度、 $F(w)$ は w の関数である。ここで槽内の流速分布が対数則にしたがうものとする、

$$F(w) = \text{constant} - \frac{1}{\kappa} \log_e(1-w) \dots\dots(A-11)$$

ただし、 κ はカルマン定数で $\kappa \sim 0.4$

(A-10) および (A-11) より速度の乱れ成分 u' は

$$u' = \frac{u_\tau}{\kappa} \{1 + \log_e(1-w)\} \dots\dots\dots(A-12)$$

(A-12) を (A-9) に代入して積分を行なえば、

$$\frac{h^2}{E_z} \left(\frac{u_\tau}{\kappa} \right)^2 \left(-\frac{2}{27} \right) = -D_x \dots\dots\dots(A-13)$$

ここで物質輸送と運動量輸送との間にレイノルズ相似則が成立するとすれば、

$$E_z(z) = -\frac{\overline{v'c'}}{\frac{\partial c}{\partial z}} = -\frac{\overline{v'u'}}{\frac{\partial u}{\partial z}} \dots\dots\dots(A-14)$$

レイノルズ応力、 $\overline{u'v'}$ はせん断応力 τ と水の密度 ρ を用いて、

$$\frac{\overline{u'v'}}{\rho} = -\frac{\tau}{\rho} \dots\dots\dots(A-15)$$

またせん断応力 τ の分布が槽内において直線的であると仮定すれば、

$$\tau = \tau_0 w \dots\dots\dots(A-16)$$

ただし、 $\tau_0 = \rho u_\tau^2$

したがって、(A-10), (A-11), (A-14), (A-15), (A-16) を用いて

$$E_z(z) = \kappa h u_\tau w (1-w) \dots\dots\dots(A-17)$$

よって $E_z(z)$ の断面平均値 E_z は

$$E_z = \int_0^1 E_z(w) dw = \frac{1}{6} \kappa h u_\tau \dots\dots\dots(A-18)$$

(A-13), (A-18) より u_τ を消去すれば、

$$E_z = \frac{3}{8} \kappa^4 D_x \dots\dots\dots(A-19)$$

カルマン定数を $\kappa = 0.4$ とすれば

$$E_z = 9.6 \times 10^{-3} D_x \dots\dots\dots(A-20)$$

E_x については乱れ自身による拡散の成分を無視すると (等方性乱れを仮定すれば (A-20) より乱れ自身による拡散は D_x の 10^{-2} 倍程度である)、

$$E_x = D_x \dots\dots\dots(A-21)$$

D_x は (A-8) から明らかなように 1次元拡散の係数と見なすことができる。したがって D_x を (A-1) の拡散係数 K_x と同じものと仮定する。以上より E_x, E_z および K_x の間の関係は、

$$\left. \begin{aligned} E_x &= K_x \\ E_z &= 9.6 \times 10^{-3} K_x \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A-22)$$

この K_x はモーメント法によって求めることができる。まず、(A-1) を $\xi = x - ut$ (以下 (A-1) と同様に u の平均値 \bar{u} を単に u と書く) なる座標変換を行ない、

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K_x \frac{\partial^2 C}{\partial \xi^2} \dots\dots\dots (A-23)$$

両辺に ξ^2 をかけ ξ について $+\infty \sim -\infty$ で積分すれば、 C はトレーサー濃度分布であり、

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial C}{\partial t} \xi^2 d\xi = 2 K_x \int_{-\infty}^{+\infty} C d\xi \dots\dots\dots (A-24)$$

したがって、

$$K_x = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} C \xi^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} C d\xi} \right\} \dots\dots\dots (A-25)$$

あるいは、

$$K_x = \frac{1}{2} \frac{d\sigma_\xi^2}{dt} \dots\dots\dots (A-26)$$

ただし、

$$\sigma_\xi^2 = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} C \xi^2 d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty} C d\xi} \dots\dots\dots (A-27)$$

しかるに $\xi_i = x - ut_i$ であるから、

$$\sigma_{\xi_i}^2 = \frac{u^2 \int_{-\infty}^{+\infty} C (t - t_i)^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dt} \dots\dots\dots (A-28)$$

t_i は観測点 i におけるトレーサーの到達時間に相当するから、

$$t_i = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ct dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dt} \dots\dots\dots (A-29)$$

よって

$$\sigma_{\xi_i}^2 = u^2 \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ct^2 dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dt} - \left(\frac{\int_{-\infty}^{+\infty} Ctdt}{\int_{-\infty}^{+\infty} C dt} \right)^2 \right\} \dots\dots\dots (A-30)$$

トレーサー応答によって得た時間対濃度曲線により (A-30) で $\sigma_{\xi_i}^2$ を計算すれば (A-22) および (A-26) を用いて E_x および E_z を算定できる。

(1970.6.18・受付)