

EINIGIE BEMERKUNGEN ZUM UNELASTISCHEN KNICKEN

*Shigeru Kuranishi**

SYNOPSIS

Die Knickenlast vom planmäßig mittig gedrückten Stab wird ermittelt indem der „Tangential-Modul“ anstatt des „Youngsche-Modul“ in die Eulers Formel eingesetzt wird. Die kritische Last führt einen Verzweigungspunkt und gibt zu dem der kleinst Wert an, wie Shanley angegeben. In der Arbeit wird es gezeigt daß das Verfahren auf den Stab mit beliebigem Querschnitt und beliebiger Lagerung angewandt wird. Die Abhängigkeit und deren Einflüsse auf die Biegesteigerhöhung sind dargelegen wurden.

I. EINFÜHRUNG

Es sind bereits sehr viele Stabilitätsuntersuchungen auf dem Gebiet des planmäßig mittig gedrückten Stabes im plastischen Bereich gemacht worden. Schon im Jahre 1889, ist der Einfluß des abnehmenden Elastizitätsmoduls oberhalb der Proportionalitätsgrenze Engesser¹⁾ untersucht worden. Er ersetzte die Youngschen Konstante E in der Eulerschen Formel durch den tangentialen Elastizitätsmodul E_t . Im Jahre 1895, machte er einen verbesserten Vorschlag, indem er die Spannungsumkehr an der Konvexseite des geknickten Stabes berücksichtigte, er antwortete damit der Auffassung von Jasinski. Etwas später, im Jahre 1910, wurde ein Rechenvorschlag zu diesem Problem von v. Kármán²⁾ gemacht. Im Jahre 1946, erklärte Shanley³⁾ bezüglich des Stabes mit „Sandwich-Querschnitt“, daß die Knicklast nach der Engesserschen Tangentialmodul-Theorie die minimale Verzweigungslast ergibt. Die kritische Last nach der Tangentialmodul-Theorie ist der minimale Verzweigungspunkt des Gleichgewichtszustandes, ohne Rücksicht darauf ob der Übergang zum gebogenen Zustand eine Steigerung der Druckkraft verlangt oder nicht. Im Jahre 1950, diskurrierte Pearson⁴⁾ das Stabilitätsproblem des Nichtkonservativsystems und die Ausbiegung des Stabes mit beliebigem Querschnitt über die Knicklast nach der Tangentialmodul-Theorie, indem er die zahlenmäßigen Methoden zugleich benutzte. Im Jahre 1951, bestätigten Duberg⁵⁾ und Wilder durch eingehende Forschungen die Shanleys Ergebnisse zum Stab mit „Sandwich-Querschnitt“ und dessen Lehre bezüglich des mit Federn gestützten Modellstabes. Vor kurzem machte Jonston⁶⁾ weitere zahlenmäßige Angaben über das Verhältnis zwischen Spannung- und Biegung nach Überschreitung des Verzweigungspunktes. Er berechnete unter Verwendung der elektronischen Rechenmaschine den aufeinanderfolgenden Spannungswechsel, die Spannungsumkehr (Entlastung) und den Einfluss des sich ändernden Elastizitätsmodulus. Dadurch ist es ihm gelungen, die Charakteristik von den Nachknickzuständen aufzuzeigen.

In der vorliegenden Arbeit wird Shanleys Begriff vom anderen Gesichtspunkten betrachtet. Es wird das eigenartige Verhalten vor dem Knicken im plastischen Gebiet dargelegt.

* Member, Dr. of Engg., Assistant Professor, Tohoku University.

II. KNICKEN NACH DER TANGENTILMODUL-THEORIE

Nimmt man an, daß ein planmäßig mittig belasteter Druckstab mit einem einachsigsymmetrischen Querschnitt bis zur kritischen Last gedrückt wird und in diesem Zustand, sich bei geringfügiger Laststeigerung ausgebogene Gleichgewichtslage einstellt, so werden die Druckspannungen an der Konkavseite nach dem Superpositionsprinzip zunehmen und die Zugspannungen an der Konvexseite abnehmen. Es wird hierbei die Hypothese vom Ebenbleiben des Querschnitts vorausgesetzt. Aus Abb. 1 (a) und (b) können die verwendeten Bezeichnungen für Stab und Querschnitt entnommen werden. Mit der Vergrößerung der planmäßig mittigen Druckkraft verkürzt sich gerade bleibend der Stab und die Spannung erreicht den Punkt N (nach Abb. 1 (b)). In dem Augenblick, der Stab auszuknicken beginnt, verändert sich die Spannung im Querschnitt um $\sigma_1 = E_t \epsilon_1$ an der Konkaveseite und um $\sigma_2 = E_t \epsilon_2$ an der Konvexseite (nach Abb. 1 (b)). Wenn der Krümmungsradius der Stabachse ρ ist und das Ebenbleiben des Querschnitts vorausgesetzt wird, so ergibt sich für die Dehnung:

$$1/\rho = -\epsilon_1/z_1 = -\epsilon_2/z_2 \quad (1)$$

Das Kräftegleichgewicht in x -Richtung liefert

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 dA - \int_0^{h_2} \sigma_2 dA = \Delta P \quad (2)$$

und für das Momentengleichgewicht ergibt sich

$$\int_0^{h_1} \sigma_1 g_1 dA + \int_0^{h_2} \sigma_2 g_2 dA = (P_k + \Delta P)y, \quad (3)$$

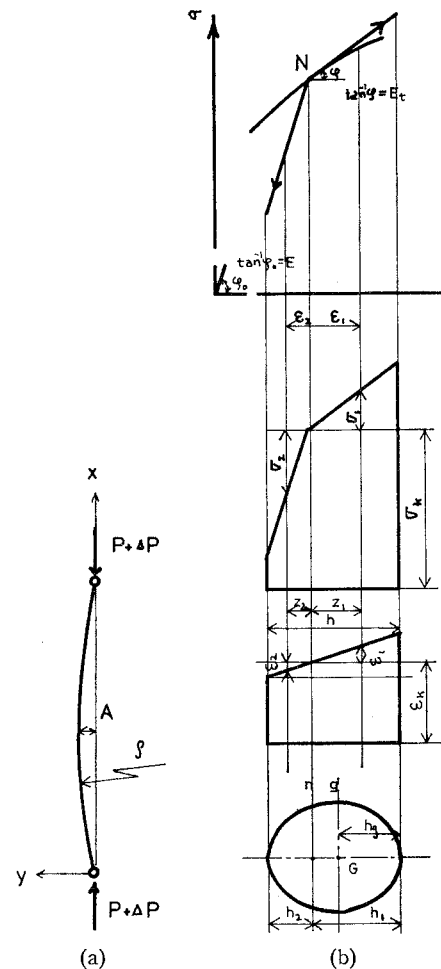


Abb. 1

wobei y die Ausbiegung der Schwerpunktsachsen nach dem Knicken darstellt. Das Verhältnis zwischen dem Krümmungsradius der Stabachse und der Spannung ist dann nach Gleichung (1)

$$1/\rho = -\sigma_1/z_1 E_t = -\sigma_2/z_2 E_t \quad (4)$$

Nach Gleichung (2) liefert es

$$-(tZ_1^n - Z_2^n)E_t/\rho = \Delta P$$

$$\text{und } Z_1^n = \int_0^{h_1} z_1 dA, \quad Z_2^n = \int_0^{h_2} z_2 dA, \quad (5)$$

$$\text{oder } -EN/\rho = \Delta P.$$

Für den Vergleich der Momente nach Gleichung (3) ergibt sich

$$EK/\rho + (P_k + \Delta P)y = 0 \quad (6)$$

worin h_g der Abstand zwischen dem Schwerpunkt und der entferntesten gedrückten Faser ist, und

$$\left. \begin{aligned} K &= I^n - (h_1 - h_g)N, \\ I^n &= tI_1^n + I_2^n, \quad t = E_t/E, \\ \text{und } I_1^n &= \int_0^{h_1} z_1^2 dA, \quad I_2^n = \int_0^{h_2} z_2^2 dA \quad \text{sind.} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Wenn die Ausbiegung y sehr klein ist, wird die Wert ΔP auch sehr klein. Vernachlässigt man das Glied von höherer als erster Kleinheitsordnung, erhält man aus Gleichung (6) den Verzweigungspunkt:

$$P_k = \frac{EK\pi^2}{l^2}. \quad (8)$$

Nun untersuchen wir eingehend die Werte K und N in Gleichung (6). Der Wert K ist abhängig von der Lage der neutralen Achsen (die Nulllinie). Er wird folgendermaßen ermittelt:

$$K = t \int_0^{h_1} z_1^2 dA + \int_0^{h_2} z_2^2 dA - (h_1 - h_g) \left(t \int_0^{h_1} z_1 dA - \int_0^{h_2} z_2 dA \right) \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} A_1 a_1 - A_2 a_2 &= A(h_1 - h_g), \\ a_1 &= \frac{1}{A} \int_0^{h_1} z_1 dA, \quad a_2 = \frac{1}{A} \int_0^{h_2} z_2 dA, \\ \text{und } (h_1 - h_g) &= \frac{1}{A} \left(\int_0^{h_1} z_1 dA - \int_0^{h_2} z_2 dA \right). \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

Wird Gleichung (9b) in Gleichung (9a) eingesetzt und umgeformt, so erhält man

$$\begin{aligned} K &= t \left\{ \int_{-h_2}^{h_1} z_1^2 dA - \int_{-h_2}^0 z_1^2 dA - (h_1 - h_g) \int_{h_2}^{h_1} z_1 dA + (h_1 - h_g) \int_{-h_2}^0 z_1 dA \right\} \\ &+ \left\{ \int_0^{h_2} z_2^2 dA + (h_1 - h_g) \int_0^{h_2} z_2 dA \right\}. \end{aligned} \quad (9c)$$

Und berücksichtigt nach die folgenden Beziehungen,

$$\begin{aligned} t \left\{ \int_{-h_1}^{h_2} z_1^2 dA - (h_1 - h_g) \int_{-h_2}^{h_1} z_1 dA \right\} &= t \{ I^n - (h_1 - h_g)^2 A \} = t I^g, \\ \int_{-h_2}^0 z_1^2 dA &= - \int_0^{-h_2} z_1^2 dA = \int_0^{h_2} z_1^2 dA \end{aligned}$$

$$\int_{-h_0}^0 z_1 dA = - \int_0^{-h_2} z_1 dA = - \int_0^{h_2} z_2 dA,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} K &= tI^g + (1-t) \left\{ \int_0^{h_2} z_2^2 dA + (h_1 - h_0) \int_0^{h_2} z_2 dA \right\} \\ &= tI^g + (1-t) \{ I_2 + A_2 a_2^2 + (h_1 - h_0)(-A_2 a_2) \} \\ &= tI^g + (1-t) \left\{ I_2 + \frac{A_1 A_2}{A} (a_1 a_2 + a_2^2) \right\}, \end{aligned} \tag{9d}$$

worin I^g das Trägheitsmoment um der Achse $g'-g'$ und I^n das Trägheitsmoment um Achse $n'-n'$ (nach Abb. 2) bezeichnet. Weil Gleichung (9d) nur die positiven Glieder enthält, kann K nur dann der minimale Wert werden, wenn a_2 Null ist. Das bedeutet daß kein auf Zug beanspruchter Teil der Querschnittsfläche vorliegt und demnach Gleichung (8) der minimale $K_k = E_t I^g$ die minimale kritische Drucklast ergibt. Es erbit sich dann als krit. Last

$$P_k = \frac{\pi^2 E_t I^g}{l^2}. \tag{10}$$

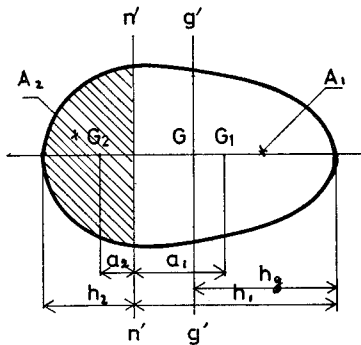


Abb. 2

In die Eulerformel den oben beschriebenen Tangentialmodul statt des Elastizitätsmodulus eingesetzt, ergibt diese auch schon von Engesser und Shanley angegebene Formel.

Für die Last nach der Tangential-Theorie ergibt sich unter Verwendung von Gleichung (6):

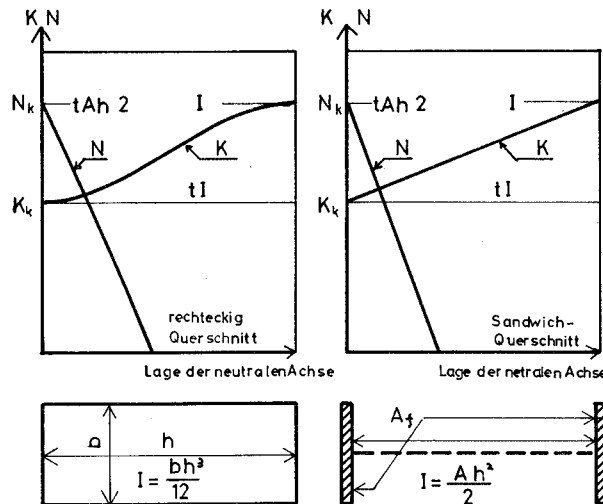


Abb. 3 Verhältnis zwischen K , N und der Lage der neutralen Achse.

$$-H_0 I^0 / \rho = P y ,$$

so dieser Ausdruck gibt auch für die anderen Eulerfälle.

Hier zeigen wir die Verhältnisse zwischen die Werte K und auch N und den Lage der neutralen Achse bei den rechteckigen Querschnitt und den Sandwich-Querschnitt in der Abb. 3. Wenn die Last P den Verzweigungspunkt P_k überschreitet, so wird eine Ausbiegung des Stabes beginnen. Doch soll der ausgebogenen Stab die höhere Last tragen. Jetzt sei der ausgebogenen Zustand über dem Verzweigungspunkt qualitativ beobachtet (Abb. 4). Wenn das Gleichgewicht der Schnittkraft ohne Entlastung bestehen bleibt, kann das Widerstandsmoment den Anteil des Moments aus ΔP nicht tragen, wie in Abb. 4 gezeigt wird. Denn $P y$ ist im Gleichgewicht mit $E_0 I^0 / \rho$, wenn y im linearen Verhältnis mit $1/\rho$ steht.

Im ausgebogenen Zustand tritt ein Entlastungsanteil im Querschnitt auf, der das Widerstandsmoment vergrößert. Über dem Verzweigungspunkt kann der Stab das Gleichgewicht im ausgebogenen Zustand mit zunehmender Biegesteifigkeit halten. Nehmen wir an daß die Biegesteifigkeit des Stabes um $E \Delta K$ größer als der minimale Werte $E K_k$ anwächst. In diesen Zustand, steht das Gleichgewicht des Moments zwischen ΔK und ΔP , so erhalten wir

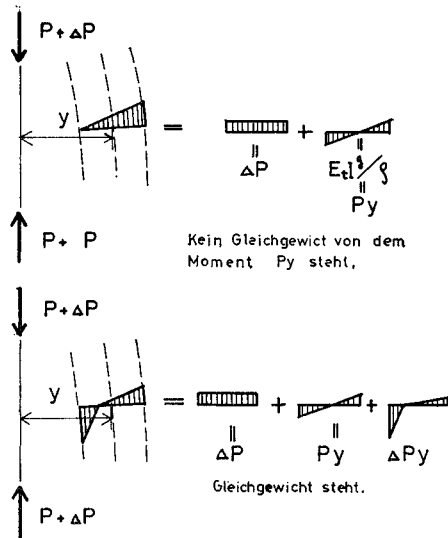


Abb. 4 Verhältnis zwischen der Last und dem Widerstandskräfte.

$$-\Delta P y = E \Delta K \frac{d^2 y}{dx^2} \tag{11}$$

worin wir $1/\rho = \frac{d^2 y}{dx^2}$ setzen. Aus Gleichung (5) erhalten wir den Verhältnis zwischen ΔK und die Ausbiegung des Stabes, dann ist

$$N_k y = \Delta K , \tag{12}$$

worin N in bezug auf die Neutralachselage, die dem Wert K den minimalen K_k gibt, als N_k bezeichnet wird. Einsetzt man diese Gleichung in Gleichung (6), so erhalten wir

$$(1 + \mu y) \frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \tag{13}$$

worin $\mu = \frac{N_k}{K_k}$, $k^2 = \frac{P}{E K_k}$ und $P = P_k + \Delta P$ sind. Offenbar gibt $y=0$ Eulersche Aufgabe, so erhalten wir, in diesem Fall, leicht die Lösung:

$$y = A \sin k_0 x , \tag{14}$$

darin A eine beliebige Konstante und $k_0 = \frac{P}{E K_k}$ ist. Wenn Gleichung (13) eine

nur wenig veränderte Lösung des Eulersche Ergebnisses liefern würde und y und auch k^2 in Form einer Potenzreihe von μ entwickelt werden könnten, so könnte man schreiben:

$$y = y_0 + \mu y_1 + \mu^2 y_2 + \dots, \quad (15)$$

$$k^2 = k_0^2 + \mu k_1 + \mu^2 k_2 + \dots, \quad (16)$$

Darin wird jede Funktion y_0, y_1, y_2, \dots die Randbedingungen an den Enden erfüllen und in bezug auf die durch die mitte der Stablänge gehende Achse symmetrisch sein. Einsetzt man Gleichung (15) und (16) in Gleichung (13) und setzt man die Summe die beiden gleich hohen Potenzen von μ stehen, gleich Null, so erhalten wir

$$y_0 + k_0 y = 0 \quad (17a)$$

$$y_1'' + k_0 y = -y_0 y_0'' - k_1 y_0 \quad (17b)$$

$$y_2'' + k_0 y_2 = -y_0 y_1'' - y_1 y_0'' - k_2 y_0 - k_1 y_1 \quad (17c)$$

.....

.....

Aus Gleichung (17a), leicht erhalten wir die Lösung:

$$y_0 = A \sin k_0 x \quad (18)$$

worin auch A eine beliebige Konstante ist. Durch Einsetzen von Gleichung (18) in Gleichung (17b), erhalten wir die zweite Differentialgleichung:

$$y_1'' + k_0 y_1 = A^2 k_0^2 \sin^2 k_0 x - A k_1 \sin k_0 x \quad (19)$$

Darin wird $\sin^2 k_0 x$ in eine Fouriersche Reihe entwickelt. Es gibt sich

$$\left. \begin{aligned} \sin^2 k_0 x &= \sum_{n=1}^{\infty} C_{1n} \sin n k_0 x, \\ n &= 1, 3, 5, \dots \\ C_{1n} &= \frac{8}{3\pi}, \frac{-8}{15\pi}, \frac{-8}{105\pi}, \dots, \frac{-8}{\pi} \left(\frac{1}{n(n^2-4)} \right) \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Um die symmetrische Lösung der Gleichung (19) zu erhalten, müssen wir den Koeffizient des Gliedes $\sin 1 k_0 x$ gleich Null setzen, so erhalten wir

$$k_1 = \frac{8}{3\pi} k_0^2 A \quad (21)$$

$$\text{und } y_1 = A^2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{C_{1n} \sin n k_0 x}{1-n^2}. \quad (22)$$

Auf gleich Weise, erhalten wir des dritte Glied in Gleichung (16):

$$k_2 = \frac{0,666}{\pi} k_0^2 A^2. \quad (23)$$

Hier können wir auch finden, daß der Wert y_2 dritte Kleinheitsordnung in A ist und in einer schnell konvergenten Fouriersche Reihe entwickelt geschrieben wird. Hierbei hat der Wert $1/\mu$ die Größenordnung in bezug auf das Maß des Querschnitts. Nehmen wir hier an, daß die Ausbiegung des Stabes, verglichen mit dem Größe des Querschnitts, sehr klein ist. In unserem Fall, sind die ersten zwei Glender von Gleichung (16) genug um die Nähe des Verzweigungspunkt zu diskurrieren und erhalten wir dann angenäherte Lösung für Gleichung (13). Daher ermitteln wir den Werte k^2 :

$$k^2 \doteq k_0^2 \left(1 + \frac{8}{3\pi} \mu A \right). \tag{24}$$

Hieraus erhalten wir die Last P :

$$P = P_k \left(1 + \frac{8}{3\pi} \mu A \right), \tag{25a}$$

$$\text{oder } P = \frac{EK_k \pi^2}{l^2} + \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{8}{3\pi} EN_k A. \tag{25b}$$

Diese Formel zeigt, daß oberhalb des Verzweigungspunktes der Stab die höhere Last noch ausbiegend tragen. (Abb. 5) Die Biegelinie zum Verzweigungspunkt ist infolge der entlang dem Stab etwa gleich verteilten Biegesteifigkeit sehr ähnlich derjenlger von der Sinusform. Zwischen dem Verzweigungspunkt und der maximalen Tragfähigkeit steigert sich die Biegesteifigkeit in der Stabmitte stärker als an den Stabenden, da die Ausbiegung der Stabachse zu den Stabenden größer wird als die sinusförmig Ausbiegung. Die Upterschied ist abhängig von der Ausbiegung A selbst, wie Gleichung (22) zeigt.

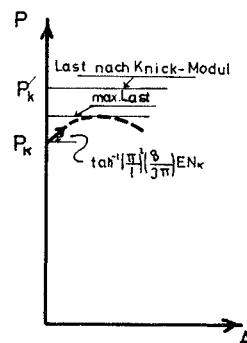


Abb. 5 Verhältnis zwischen der Last und der Ausbiegung.

III. ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird das Problem des Nachbarbereichs um dem Verzweigungspunkt behandelt und nicht das der maximalen Tragfähigkeit. Zu diesem Problem liefert Jonstons Rechnung weiter Ergebnisse. Nach seinem Ergebniss ergibt sich, daß bei einer kleine Ausbiegung (etwa $1/3000$ an $\lambda=1/100$, und $1/1500$ an $\lambda=1/35$) des Stabes (aus Aluminiumlegierung) die maximale Tragfähigkeit mit dem sich vermindernenden E erreicht wird. Unter Berücksichtigung diese Erkenntnis die normale Anfangsausbiegung des Stabes die oben erwähnte kleine Ausbiegung beinhalten. Zudem liefert die Tangentialmodul-Theorie sicher eine kritische Last, jedoch zeigt sich, in der Regal, daß die nach experimentalen Verfahre ermittelte Tragfähigkeit die maximale Last und keine Verzweigungslast ist. Daraus das experimentale Ergebnis führt also manchmal zu ungenügende Bestätigung der Tangentialmodul-Theorie. Wenn die Verschiebung der Neutralachse nicht entstehe, oder der Stab geradförmig bleibe würde die Knickenlast, unter Verwendung des Knickmodul wie v. Kármán angegeben, die maximalen Tragfähigkeit liefern. Aber, in der Tat, infolge der Ausblegung und der gleichzeitig eintretenden Span-

nungsumkehr wird die wirklich Tragfähigkeit niedriger liegen. Diese Effekt ist für den Vollquerschnitt größer als für den Sandwich-Querschnitt. Die Tragfähigkeit vom Druckstab, die anhand der geringen außermittigen Belastung, wie Jezek⁷⁾ gemacht, der anfänglichen Ausbiegung und unter Annahme des stetigen Spannungsanwachses gerechnet wird, wird einen etwas höheren Wert als den Wert unter Berücksichtigung der Spannungsumkehr ergeben. Besonderen Einfluß hat die Spannungsumkehr auf die Tragfähigkeit von Stäben aus Aluminiumlegierungen und gekrümmter Spannung-Dehnungslinie, und aus Stahle mit Eigen-
spannungen.

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Erklärung über das Plastischeknickenproblem des mittig belasteten Stabes abgegeben. Die Zunahme der Last über dem Verzweigungspunkt entsteht aus die von der Entlastung gebrachten Zunahme der Biegefestigkeit und an derjenige Verzweigungspunkt zeigt sich der Stab die mögliche und minimale Biegefestigkeit. Der Shanley Begriff gilt für Stäbe mit beliebigem einachsigsymmetrischem Profil und verschiedener Stützung.

Es ist denkbar, daß der hier dargestellte Begriff von der zunehmenden Biegefestigkeit auch auf das Ausbeulensproblem der Platte anwendbar ist.

IV. ANHANG

Während meiner Aufenthaltung in der Vereinigten Staaten von Amerika und dem Bundesrepublik Deutschland als Stipendiant im Ausland von der japanischen Regierung, wurde die vorliegende Arbeit gemacht. Ich erfuhr zur Arbeit durch meine verehrte, Herrn Prof. Dr.-Ing. L. S. Beedle und Prof. Dr.-Ing. L. Lu an der Lehigh Universität und Prof. Dr.-Ing., Dr.-Sc. Tech.h.c. O. Steinhardt und Dr.-Ing. U. Schulz an der Karlsruhe Universität, vielfältige Anregungen und wertvolle Ratschläge; es ist mir ein besonders Anliegen, ihnen für die wohlwollende Förderung zu danken.

SCHRIFTUM

- 1) Engesser, F.: Zeitschrift für Architektur und Ingenieurwesen, 1889.
- 2) v. Kármán, T.: „Die Knickfestigkeit gerader Stäbe“ Physikalische Zeitschrift, Vol. 9, 1908.
- 3) Shanley, F. R.: „Inelastic Column Theory“, J. Aero. Sci., Vol. 14, 1947.
- 4) Peason, C. E.: „Bifurcation Criterion and Plastic Buckling of Plate and Column“, J. Aero. Sci., July, 1950.
- 5) Duberg, J. E. and Wilder, T. W.: „Inelastic Column Behavior“ N.A.C.A. Tech. Note 2267, 1951.
- 6) Jonston, B. G.: „Buckling Behavior above the Tangent Modulus Load“ A.S.C.E. Jour. of Engg. Mech. Div. Em6 1961.
- 7) Jezek, K.: „Die Festigkeit von Druckstäben aus Stahl“, Julius Springer, 1937.

(Received Jan. 31, 1970)