土木学会論文報告集
第183号・1970年11月

静荷重に対するはりの応答の極値に関する二，三の考察

SEVERAL CONSIDERATIONS ON THE EXTREME VALUES OF RESPONSE OF BEAMS TO STATIC LOAD

中川建治*
By Kenji Nakagawa

1. まえがき

土木構造物に作用する活荷重は，そのほとんどが動的なランダム荷重である。このような荷重に対する構造物の応答を，ランダム過程の解析法によって解析することが注目されている。しかし，現行示方書は，既知の静荷重（集中荷重と分布荷重）に対する極値応答を基礎とする方針を採用している。したがって，既知の静荷重に対する極値応答と，動的なランダム荷重に対する極値応答との中間的なものとして，静的なランダム荷重に対する応答を研究することは，有意義なことであろう。

著者は，すでに，静的なランダム荷重に対する構造物の応答に関する研究の一部を報告した（文献 2) 参照）が，本文はその続編である。両者のテーマの相違点は，さきの研究は確率事象の事後の検討であり，本文は確率事象の事前の予測であるという点である。すなわち，確率事象である限り理論的な（母集団の）平均値と分散値とが，実現値（標本値）の平均値と分散とはかならずしも一致しないことを含んでいるが，さきの研究では理論値と実現値との相違を認めずに，載荷荷重の平均(総和)と分散値とが確定値であるという条件を付けている。あたかも，事象が生起した後に実際に分散値と平均値を観測して，この値のもとに生起するはずの応答の平均値，分散値，極値を解析するという方法である。本文では，荷重配列現象の平均値と分散値とが理論的には既知であるが，実現値（標本値）には何の条件も付けない場合の応答の極値を研究した。したがって，内容的には，さきの研究の方が本文の研究より厳しい条件にしたがう場合であり，本文の研究がより広く一般性を持っている。

本文では，まず，平均値と分散値以外は未定の分布関数 F にしたがう確率変数の実現値 n 個 $z_i(i=1, 2\cdots n)$ と，ある条件を満足する n 個の定数 $\alpha_i(i=1, 2\cdots n)$ との相乗和 $y=\Sigma\alpha_i z_i$ を極値にするような分布関数 F を決定し，y の極値を求める。つぎに，この関係式の応用例として，静的なランダム荷重に対するはりの応答の極値を考察する。その他の例としては，換算等分布活荷重の限界てい減率と荷重配列の再現期間の限界値を考察する。

確率変数の有限 N 個の実現値の大きい方より n 個 $(n\leqq N)$ をもとにして，y の極値を論じたが，$n=1$ とすれば文献 1) に与えられているものと一致し，上位 εN 個の部分和を極値にする解を求めてより $N\to\infty$ とすれば，全体の $100\varepsilon\%$ を極大にする解となって周知のチェビシェフの不等式へ収れんすることが示された。

* 正会員　工修　山口大学助教授　工学部土木工学教室

2. 確率変数和の数値平均

(1) 非減少関数

定義域 $0\leqq F\leqq 1$ の関数 $\varphi_j(N, F)$ を

$$\varphi_j(N, F)=j\binom{N}{j}F^{N-j}(1-F)^{j-1}\cdots\cdots\cdots(2.1)$$

$$(j=1, 2\cdots N)$$

として，さらに，式(2.2)を満足する定数 α_{1j} によって，$\Phi_{1k}(N, F)$ を定義する。

$$\alpha_{1,1}\geqq\alpha_{1,2}\geqq\cdots\alpha_{1,N}\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.2)$$

$$\Phi_{1k}(N, F)=\sum_{j=1}^{k}\alpha_{1j}\varphi_j(N, F)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.3)$$

$$(k=1, 2\cdots N)$$

ここで定義された $\Phi_{1k}(N, F)$ は変数 F の非減少関数であり，$z_k(F)=\Phi_{1k}(N, F)$ とすれば，$z_k(F)$ は分布関数の逆関数であり得る。すなわち，z_k は確率変数で分布 F をもつことが可能である。

（証明）

1° $\psi_k(F)=\sum_{j=1}^{k}\varphi_j(N, F)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.4)$

とすれば，2項級数展開の関係より

$$\psi_N(F)=N\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.5)$$

を得る。

2° $\varphi_1(N,F)$ は単調増加関数であり，$\psi_1(F)$，$\Phi_{1,1}(N,F)$ が非減少関数であることは明らかである。

3° $j\neq 1, N$ とすると，$\varphi_j'(N,F_j)=0$ より $F_j=(N-j)/(N-1)$ を得る。$\varphi_j(N,0)=\varphi_j(N,1)=0$ であるから，$\varphi_j(N,F)$ は F_j で極大値となって，$(0\leqq F\leqq F_j)$ で単調増加，$(F_j\leqq F\leqq 1)$ で単調減少となる。

$$0<F_{N-1}<F_{N-2}<\cdots<F_j=\frac{N-j}{N-1}<F_{j-1}<\cdots<F_2<1 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.6)$$

4° $\varphi_N(N,F)$ は，$\varphi_N(N,0)=N$，$\varphi_N(N,1)=0$ の単調減少関数であり，式 (2.5) の関係より，$\psi_{N-1}(F)$ は非減少関数である。

5° さて，一般の $\psi_k(F)$ に対しては，式 (2.5) より

$$\psi_k(F)=\sum_1^k\varphi_j(N,F)=\sum_1^N\varphi_j(N,F)-\sum_{k+1}^N\varphi_j(N,F)=N-\sum_{k+1}^N\varphi_j(N,F) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.7)$$

を得る。$\psi_k(F)$ は区間 $(0\leqq F\leqq F_k)$ では単調増加関数である。なぜならば，$\varphi_j(N,F)$，$(j=1,2\cdots k)$ の極大点は，式 (2.6) に示すように，すべて $(F_k,1)$ の内部に存在する。同様にして，式 (2.7) における $\sum_{k+1}^N\varphi_j(N,F)$ は，区間 $(F_k,1)$ では単調減少関数となる。しかるに，$(0,F_k)$ で単調増加の $\psi_k(F)$ と，$(F_k,1)$ で単調減少の $\sum_{k+1}^N\varphi_j(N,F)$ を加えると，$(0,1)$ で定数 N になる。よって，$\psi_k(F)$ は区間 $(F_k,1)$ で単調増加となる。したがって，$\psi_k(F)$ は非減少関数である。

6° 式 (2.2) の $\alpha_{1,i}$ は，非負の定数 $\beta_{1,i}$ によって

$$\alpha_{1,i}=\alpha_{1,i+1}+\beta_{1,i} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.8)$$
$$(i=1,2\cdots N)$$

と表わされるので，式 (2.3) の $\Phi_{1k}(N,F)$ は，つぎのように，ψ_k と β_{1k} で表わされる。

$$\begin{aligned}\Phi_{1k}(N,F)&=\sum_{j=1}^k\alpha_{1,j}\varphi_j(N,F)\\&=\sum_{j=1}^k\Big(\sum_{i=j}^k\beta_{1,i}+\alpha_{1,k+1}\Big)\varphi_j(N,F)\\&=\sum_{i=1}^k\beta_{1,j}\psi_i(F)+\alpha_{1,k+1}\psi_k(F)\cdots(2.9)\end{aligned}$$

ここで，$\alpha_{1,k}$，$\beta_{1,i}$ は非負であり，$\psi_k(F)$ は非減少関数であるから，$\Phi_{1k}(N,F)$ は区間 $(0,1)$ で非減少関数であることがわかる。（証明終り）

さらに，定数 α_{1i} の条件をゆるめて，

$$\alpha_{2,1}\geqq\alpha_{2,2}\geqq\cdots\geqq\alpha_{2,N} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.10)$$

$$\Phi_{2,N}(N,F)=\sum_{j=1}^N\alpha_{2j}\varphi_j(N,F) \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.11)$$

とすれば，$\Phi_{2,N}(N,F)$ は $(0,1)$ で非減少関数である。なぜならば，

$$\alpha_{2,i}=\alpha_{2,i+1}+\beta_{2,i} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.12)$$
$$(i=1,2\cdots N)$$

とすれば，式 (2.9) より類推して

$$\begin{aligned}\Phi_{2,N}(N,F)&=\sum_{i=1}^N\beta_{2i}\psi_i(F)+\alpha_{2,N}\psi_N(F)\\&=\sum_{i=1}^N\beta_{2,i}\psi_i(F)+N\alpha_{2,N}\cdots\cdots(2.13)\end{aligned}$$

を得る。式 (2.10) と式 (2.12) より $\beta_{2,i}$ は非負であることが明らかであるから，$\alpha_{2,N}$ が負であっても，$\Phi_{2,N}(N,F)$ は非減少関数であることがわかる。

なお，$k\neq N$ の場合の $\Phi_{2,k}(N,F)$ は，式 (2.9) より

$$\begin{aligned}\Phi_{2,k}(N,F)&=\sum_{j=1}^k\alpha_{2,j}\varphi_j(N,F)\\&=\sum_{j=1}^k\beta_{2,j}\psi_j(F)+\alpha_{2,j}\psi_j(F)\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.14)\end{aligned}$$

を得る。ここで，$\alpha_{2,j}$ が負であれば，式 (2.14) は非減少関数の差を表わすので，$\Phi_{2,k}(N,F)$ の単調性は保証し得なくなる。

（2） 確率変数和の極値平均

分布関数 $F(z)$ を平均値 $\bar z$，分散値 V_z をもつ任意の分布とする。

$$\left.\begin{aligned}\bar z&=\int_0^1 z\,dF\\V_z&=\int_0^1(z-\bar z)^2dF\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.15)$$

分布 $F(z)$ にしたがう確率変数の N 個の実現値を大きい方から順に並べた順序統計量を $z_1, z_2\cdots z_N$ とする。ここで，式(2.16) を満足する定数 $\alpha_i(i=1.2\cdots n)$ を定義して，α_i と z_i との相乗和 y を最大にするような $F(z)$ を決定することを考えよう。

$$\alpha_1\geqq\alpha_2\geqq\cdots\geqq\alpha_n\geqq 0 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.16)$$

$$y=\sum_1^n\alpha_i z_i \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(2.17)$$
$$(n\leqq N)$$

式 (2.16) の条件は，式 (2.2) に対応したものであり，$n=N$ の場合は，式 (2.16) の条件を式 (2.10) に対応して，負の領域まで拡大してもよい。

さて，式 (2.17) の z_i を荷重として，α_i を影響係数に対応させるならば，y は応答に対応する。z_i が荷重であるならば，一様な確率をもって影響値 α_j に対応する可能性をもつのが一般的である。しかるに，z_i を大きい順の実現値として順序統計量として，z_i が対応する α_i にも条件式(2.16)を付けるということは，N 個の荷重が n 個の載荷点に載荷する組合せは $N(N-1)\cdots(N-n+1)$ 通りあるにもかかわらず，その中で応答を最も大きくする配列が必ず起こるという条件を付けていることになる。したがって，y を極値にする分布 F を決定して，かつ，y の平均値を求めることは，影響値の大きい部分へ大きい荷重が配置するという条件のもとに生ずるであろう応答の極大値の平均を求めることに相当する。

条件式 (2.16) の添字を逆順にすれば，応答の極小値を求めることに対応することは明らかである。

分布 $F(z)$ をもつ確率変数の順序統計量 z_i の生起確率密度は，確率論によって，式 (2.1) で定義した $\varphi_i(N, F)$ によって与えられる（文献1）参照)。ここに，N は順序統計量の個数である。よって，y は N 個の実現値のうち大きい方から n 個によって得られる応答である。y の平均をとると，

$$\bar{y}=\int_0^1\sum_1^n \alpha_i z(F)\varphi_i(N, F)dF \quad\cdots\cdots(2.18)$$

となる。$z(F)$ としたのは，F が未知量であって，z は F の関数であるとみなしたことによる。F が z の関数であるとする場合に対する逆関数表示である。

さて，分布の平均値と分散値とを一定にして，y を極値にするような $F(z)$ を決定することは，条件式(2.15) のもとに式 (2.18) の $\bar{y}$ を極値にするような未知関数 $z(F)$ を求めることによって解決される。これは変分問題にほかならない。パラメーター λ_1, λ_2 によって

$$J=\int_0^1\{\sum_1^n \alpha_i\varphi_i(N, F)z(F)-\lambda_1 z(F)-\lambda_2 z^2(F)\}dF$$

を導き，Euler の方程式を求め，条件式 (2.15) へ代入して λ_1, λ_2 を定めると，つぎの結果を得る。

$$\sum_1^n \alpha_i\varphi_i(N, F)-\lambda_1-2\lambda_2 z(F)=0$$

$$z(F)=\frac{1}{2\lambda_2}\left\{\sum_1^n \alpha_i\varphi_i(N, F)-\lambda_1\right\} \quad\cdots\cdots(2.19)$$

$$\bar{z}=\frac{1}{2\lambda_2}\int_0^1\left\{\sum_1^n \alpha_i\varphi_i(N, F)-\lambda_1\right\}dF$$

$$=\frac{1}{2\lambda_2}\int_0^1\left\{\sum_1^n \alpha_i i\binom{N}{i}F^{N-i}(1-F)^{i-1}-\lambda_1\right\}dF$$

$$=\frac{1}{2\lambda_2}\left\{\sum_1^n \alpha_i-\lambda_1\right\} \quad\cdots\cdots(2.20)$$

$$(z-\bar{z})^2=\frac{1}{4\lambda_2^2}\left[\sum_1^n \alpha_i\{\varphi_i(N, F)-1\}\right]^2$$

$$\therefore V_z=\int_0^1(z-\bar{z})^2dF=\frac{1}{4\lambda_2^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \alpha_i\alpha_j\{\mu_{ij}(N)-1\} \quad\cdots\cdots(2.21)$$

$$\mu_{ij}(N)=i\cdot j\binom{N}{i}\binom{N}{j}\cdot\frac{\Gamma(2N-i-j+1)\Gamma(i+j-1)}{\Gamma(2N)} \quad\cdots\cdots(2.22)$$

$$\therefore \frac{1}{2\lambda_2}=\pm\sqrt{\frac{V_z}{\sum_1^n\sum_1^n \alpha_i\alpha_j\{\mu_{ij}(N)-1\}}}$$

$$\therefore z(F)=\bar{z}\pm\sqrt{\frac{V_z}{\sum\sum\alpha_i\alpha_j\{\mu_{ij}(N)-1\}}}\times\left[\sum_1^n \alpha_i\{\varphi_i(N, F)-1\}\right] \quad\cdots\cdots(2.23)$$

$\bar{y}$ を極値にする $F(z)$ の逆関数として式 (2.23) によって得られた $z(F)$ が，真の確率分布の逆関数であるためには，$z(F)$ は区間 (0, 1) で非減少関数でなければならない。しかるに，式 (2.23) の右辺の [ ] の内部は，式 (2.3) で定義した関数 $\Phi_{1k}(N, F)$ によって，非減少関数であることがわかる。

したがって，式 (2.23) で得た $z(F)$ は $\bar{y}$ を極値にする解であり，＋符号は極大に，－符号は極小に対応している。この $z(F)$ を式 (2.18) に代入すると，$\bar{y}$ の極値を得る。

$$\bar{y}_{\max}=\bar{z}\sum_1^n \alpha_i\pm\sqrt{V_z\sum_1^n\sum_1^n \alpha_i\alpha_j\{\mu_{ij}(N)-1\}} \quad\cdots\cdots(2.24)$$

式 (2.23) の $z(F)$ より分布 $F(z)$ を求めることは困難であるが，本来の目的は，条件式 (2.15) のもとに，予想し得る y の平均値の極値 $\bar{y}_{\max}$ を求めることであるから，$F(z)$ をあえて求める必要はない。式 (2.20) と式 (2.21) とより λ_1 を求めることも容易であるが，これも必要ない。

(3) $\mu_{ij}(N)$ について

式 (2.21) で定義した $\mu_{ij}(N)$ は複雑な関数であり，応答の極値を求めるについて重要であるから，いろいろな関係を示して，後の引用に備える。

1°
$$\mu_{i,j}(N)=ij\binom{N}{i}\binom{N}{j}\frac{\Gamma(2N-i-j+1)\Gamma(i+j-1)}{\Gamma(2N)}=\frac{N^2}{2N-1}\frac{\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{j-1}}{\binom{2N-2}{i+j-2}} \quad\cdots\cdots(2.25)$$

$$\mu_{i,j}(N)=\mu_{i,j}(N)=\mu_{N+1-i,N+1-j}(N) \quad\cdots\cdots(2.26)$$

$$\mu_{1,1}(N)=\frac{N^2}{2N-1} \quad\cdots\cdots(2.26)$$

$$\sum_1^N\sum_1^N \mu_{i,j}(N)=\frac{N^2}{2N-1}\sum_{s=2}^{N+1}\sum_{i=1}^{s-1}\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{s-i-1}\Big/\binom{2N-2}{s-2}+\frac{N^2}{2N-1}\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{s-1}\binom{N-1}{N-i}\binom{N-1}{N-s+i}\Big/\binom{2N-2}{s-2}$$

$$=\frac{N^2}{2N-1}\left(\sum_{s=2}^{N+1}1+\sum_{s=2}^{N}1\right)=N^2 \quad\cdots\cdots(2.27)$$

2°　$N=n$ とすると，つぎの不等式を得る。

$$\sum_1^N\sum_1^N \alpha_i\alpha_j\mu_{i,j}(N)=\frac{N^2}{2N-1}\sum_{s=2}^{N+1}\sum_{i=1}^{s-1}\alpha_i\alpha_{s-i}\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{s-i-1}\Big/\binom{2N-2}{s-2}$$

$$+\frac{N^2}{2N-1}\sum_{s=2}^{N}\sum_{i=1}^{s-1}\alpha_{N+1-i}\alpha_{N+1-s+i}\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{s-i-1}\Big/\binom{2N-2}{s-2}$$

α_i は式 (2.16) を満足しているので，$i=1, 2\cdots s-1$ であれば，

$$\alpha^2{}_{s-1} \leqq \alpha_i\alpha_{s-i} \leqq \alpha_1\alpha_{\left[\frac{s+1}{2}\right]}$$

$$\alpha_N{}^2 \leqq \alpha_{N+1-i}\alpha_{N+1-s+i} \leqq \alpha_1\alpha_{\left[\frac{2N-s+2}{2}\right]}$$

であるから，

$$\sum_1^N\sum_1^N \alpha_i\alpha_j\mu_{i,j}(N) \leqq \frac{N^2}{2N-1}\alpha_1\left\{\sum_{s=2}^{N+1}\alpha_{\left[\frac{s+1}{2}\right]}+\sum_{s=2}^{N}\alpha_{\left[\frac{2N-s+2}{2}\right]}\right\} \leqq \frac{N^2}{2N-1}\alpha_1\left(2\sum_1^N\alpha_i-\alpha_1\right) \cdots\cdots(2.28)$$

$$\sum_1^N\sum_1^N \alpha_i\alpha_j\mu_{ij}(N) \geqq \frac{N^2}{2N-1}\left(\sum_{s=2}^{N+1}\alpha^2{}_{s-1}+\alpha_N{}^2\sum_{s=2}^{N}1\right) \geqq \frac{N^2}{2N-1}\left\{\sum_1^N\alpha_i{}^2+\alpha_N{}^2(N-1)\right\} \cdots\cdots(2.29)$$

となる。ここで，$\alpha_i=\alpha$ となって，α_i がすべて等しくなれば，式 (2.28) と式 (2.29) とは等式となって，式 (2.27) に等しくなることがわかる。

3° $N\gg 1$ となって，$n<\frac{N}{2}$であれば

$$\sum_1^n\sum_1^n \alpha_i\alpha_j\mu_{ij}(N) < \sum_{s=2}^{2n}\sum_{i=1}^{s-1}\alpha_i\alpha_{s-i}\mu_{i,s-i}(N)$$

$$< \frac{N^2}{2N-1}\alpha_1\left(2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i-\alpha_1\right) \cdots\cdots(2.30)$$

を得る。

4° $N\gg 1$ であれば，Stirling の公式より

$$\frac{\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{j-1}}{\binom{2N-2}{i+j-2}} \fallingdotseq \binom{i+j-2}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j-2} \cdots\cdots(2.31)$$

を得るが，これは，非復元抽出法によって，2種の玉が同数（合計 $2N$ 個）入っている箱より抜取試験をする場合に，Nが大きく抜取る数が小さい場合は復元抽出法とほとんど変わらないという関係からも，類推できる。これより，

$$\mu_{ij}(N) \fallingdotseq \frac{N^2}{2N-1}\binom{i+j-2}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j-2} \cdots(2.32)$$

が得られる。N が大きい場合は $\mu_{ij}(N)$ を2項分布表より求められるので，便利な関係である。

ここで，あらためて ν_{ij} を定義して，$N\gg 1$ であって，式 (2.32) が十分な精度で成立する場合の計算式の簡略化を計る。

$$\nu_{ij}=\binom{i+j-2}{i-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+j-2} \cdots\cdots(2.33)$$

$$\mu_{ij}(N)=\frac{N^2}{2N-1}\nu_{ij} \cdots\cdots(2.34)$$

3. 静荷重に対するはりの応答の極値平均

対象をはりとそれに作用する車両とに限らずに，同一条件のもとに乱れる外力を静的に，かつ，ランダムに受けるような構造物へ拡張することは任意である。しかし，本文では，影響関数が既知である任意のはりの任意の区間に満載した車両の乱れによる応答（たわみ，曲げモーメントなど）の極値平均を研究対象とする。

はりの載荷全区間長 L を細分割して，区間の長さを車両の占有長さ a に等しくする。$L=na$ 車両占有長さはすべて等しく，1区間に1台配列して，2区間にわたって1台の車両が配列することも，1区間に2台以上配列することも生じないものとする。車両はn台満載するものとする。

区間には番号をつけて，影響関数のそれぞれの区間における代表値を $g_i(i=1, 2\cdots n)$ とする。ただし，区間につける番号は，影響関数の大きい方からの順にしたがうものとする。したがって，g_i には

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots g_{n-1} \geqq g_n \cdots\cdots(3.1)$$

という拘束条件を付加したことになる。

車両の重量 z は，平均値と分散値が q_0, $\sigma_q{}^2$ である分布関数 $F(z)$ にしたがう確率変数であり，$F(z)$ に関するこれ以上の情報は未知であるとする。載荷するn台の車両の重量は，z の n 個の実現値であり，大きさの順に大きい実現値から並べられたもの $z_1, z_2\cdots z_n$, とする。

$$z_1 \geqq z_2 \geqq \cdots z_{n-1} \geqq z_n \cdots\cdots(3.2)$$

$$\left.\begin{aligned} q_0&=\int_0^1 z_i dF \\ \sigma_q{}^2&=\int_0^1 (z_i-q_0)^2 dF \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.3)$$

影響関数 g_i が既知で，かつ，n 台の車両が載荷するという限り，応答の平均値と分散値は，

$$\left.\begin{aligned} &\text{全応答の平均値}=q_0\sum_1^n g_i \\ &\text{全応答の分散値}=\sigma_q{}^2\sum_1^n g_i{}^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots(3.4)$$

となることは明らかである。しかるに，本文では極値平均として

$$y=\sum_1^n g_i z_i \cdots\cdots(3.5)$$

の平均を研究する。ここに，g_i は条件式 (3.1) にしたがい，また，z_i は条件式 (3.3) を満足する分布にしたがう確率変数の順序統計量で，条件式 (3.2) にしたがう

ものとする。荷重の配列には $n!$ 通りの組合せがあるにもかかわらず，最も危険な組合せとして式 (3.5) の y を定義して，分布 $F(z)$ に対する拘束条件式 (3.3) のもとに，y を極値（最大）にするような $F(z)$ を導いて y の極値の平均を求めたならば，どのようになるであろうか。この問題は前節に求めた関係で解かれる。この場合に問題となるのは，観測する車両の台数 N と載荷区間の満載台数 n との関係である。観測台数を毎回 N 台として N 台中の重量の大きい方から n 台が g_i の大きい順に載荷するとみなす場合，N と n との関係で y の極値も大きく変化する。さらに，影響関数の符号が反転している部分へ載荷するかしないかという問題が生ずる。これは N と n との関係にも左右される要因を含んでいるので，$N=n$ の場合と $N>n$ の場合とに分けて考察する。

その他の問題として，極値平均を求める基礎方針，すなわち，観測方法の相違が重要な課題となる。式 (3.3) の荷重の平均値と分散値に基づく極値の推定方法と，式 (3.4) のような応答の平均値を基礎にする推定方法とが考えられる。本文では，それぞれの推定法による極値の平均を求めるが，推定方法の優劣は論じない。

(1) $N=n$ の場合

$N=n$ ということは，応答 y の極値平均を求めるについてくり返し観測する場合，毎回観測する車両と載荷する区間の数が等しいということである。観測値の大きいものから $z_1, z_2 \cdots z_N$ とすることは，断るまでもない。応答が負となる場合は，影響関数の主たる部分が負であることであるから，影響関数の符号の正負を反転させて，大きい方から g_i として極値平均を求める。したがって，正の応答の極値平均を求める方法を導くだけで十分であろう。

さて，影響関数 g_i は条件式 (3.1) を満足して，正から負の範囲までも含むものとする。車両の重量分布に関する拘束条件式 (3.3) は条件式 (2.15) に対応し，g_i に α_i を対応させると，式 (3.5) の応答 y は式 (2.17) の y に対応する。g_i に関する条件式 (3.1) は，$N=n$ であるから，式 (2.16) より広義の式 (2.10) に対応する。したがって，応答 y の極値平均 $\bar{y}_{\max}$ は，式 (2.24) より

$$\bar{y}_{\substack{\max\\ \min}}=q_0\sum_1^N g_i \pm \sigma_q\sqrt{\sum_1^N\sum_1^N g_i g_j\{\mu_{ij}(N)-1\}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.6)$$

となることがわかる。＋の符号は極大を，－の符号は極小を示す。ここで，g_i の条件式は式 (3.1) であることから，根号内部の非負であることを示さなければならないが，これは式 (2.21) の自乗積分の関係から非負であることは明らかである。

もし，g_i がすべて等しいならば，根号内部は 0 になることは，式 (2.27) より示されよう。

式 (3.6) の根号内部が，全応答の分散値を与える式 (3.4) の Σg_i^2 とどのような関係にあるかの目安を得るには，式 (2.28) と式 (2.29) とが適当であろう。

$$\sum_1^N\sum_1^N g_i g_j\{\mu_{ij}(N)-1\} \leqq \frac{N^2}{2N-1}\left\{2g_1\sum_1^N g_i - g_1^2 - \frac{2N-1}{N^2}(\Sigma g_i)^2\right\}$$

$$\sum_1^N\sum_1^N g_i g_j\{\mu_{ij}(N)-1\} \geqq \frac{N^2}{2N-1}\left\{\sum_1^N g_i^2 + (N-1)g_n^2 - \frac{2N-1}{N^2}(\Sigma g_i)^2\right\}$$

$$\therefore \sqrt{2g_1\sum_1^N g_i - g_1^2 - \frac{2N-1}{N^2}(\Sigma g_i)^2} \geqq \frac{\sqrt{2N-1}}{N\sigma_q}\left(\bar{y}_{\max}-q_0\sum_1^N g_i\right) \geqq \sqrt{\sum_1^N g_i^2 + (N-1)q_n^2 - \frac{2N-1}{N^2}(\Sigma g_i)^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

これらの結果より，$\bar{y}_{\max}$ は $\sqrt{N}$ の位で増大することがわかる。

著者の前回の研究では，条件式 (3.3) の確率条件より厳しい確定条件のもとで満載時には，極値として，

$$y_{\max}=q_0\sum_1^N g_i + \sigma_q\sqrt{N}\cdot\sqrt{\sum_1^N g_i^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_1^N g_i\right)^2} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.8)$$

を得ている（文献 2）参照)。

(2) $N>n$ の場合

$N>n$ と仮定することは，極値平均の統計を行なうについての観測において，毎回 N 台の車両を観測して，大きい方から n 台が載荷区間に配列する場合を仮定することである。N の増加に伴い，$N=n$ の場合より大きな極値平均を得ることは明らかである。

ここでは，影響関数 g_i の条件式 (3.1) に対して，さらに，非負を条件として付加する。したがって，g_i に α_i を対応させると，式 (2.16) を仮定することになる。式 (3.5) の y は式 (2.17) に対応するので，極値平均 $\bar{y}_{\max}$ はつぎのようになる。

$$\bar{y}_{\substack{\max\\ \min}}=q_0\sum_1^n g_i \pm \sigma_q\sqrt{\sum_1^n\sum_1^n g_i g_j\{\mu_{ij}(N)-1\}} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

ここで，正号は極大に負号は極小に対応する。

$N\gg1$ であれば，式 (2.32)～式 (2.34) より，つぎの近似式を得る。

$$\bar{y}_{\max} \fallingdotseq q_0 \sum_1^n g_i + \frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}} \times \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n g_i g_j \left(\nu_{ij} - \frac{2N-1}{N^2}\right)}$$
$$\fallingdotseq q_0 \sum_1^n g_i + \frac{N}{\sqrt{2N-1}} \sigma_q \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n g_i g_j \nu_{ij}} \quad \cdots\cdots(3.10)$$

ν_{ij} は N には無関係であり，式 (2.34) に定義されたものである。

さらに，N を増加させて，$N \gg n$ として，毎回の観則台数 N 台中の上位数パーセント，たとえば，100ε パーセントが載荷区間に配列するときの $\bar{y}_{\max}$ を求める場合は，式 (2.30) より

$$\frac{\bar{y}_{\max} - q_0 \sum_1^n g_i}{n} = \frac{\sigma_q}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\frac{1}{2n} \sum_1^n \sum_1^n g_i g_j \nu_{ij}}$$
$$< \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \sigma_q \sqrt{\frac{1}{n} \sum_1^n g_i^2} \cdots\cdots(3.11)$$

を得る。これはチェビシェフの不等式に相当する。

(3) $N > n$ で g_i の符号が変化する場合

g_i に関する条件式 (3.1) を

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_k \geqq 0 \geqq g_{k+1} \geqq \cdots \geqq g_n \cdots(3.12)$$

として，k 個は正で，$n-k$ 個は負であるとする。応答 $\bar{y}_{\max}$ は，極値平均という意義より考えて，N 台の車両の大きい方より k 台を g_i の正の部分へ，小さい方より $n-k$ 台を g_i の負の部分へ，それぞれ，配列させるべきであろう。したがって，$\bar{y}_{\max}$ を求めるについての g_i は n 個でなく，形式的には N 個あり，第1より第 k 番までは g_i そのもので，第 $(k+1)$ より第 $(N-n+k)$ 番までは0となり，第 $(N-n+k+1)$ より第 N までは，g_{k+1} より g_n が対応するような g_j $(j=1, 2\cdots N)$ を仮想すればよい。

$$g_1 \geqq g_2 \geqq \cdots \geqq g_k \geqq \underbrace{0 = 0 \cdots = 0}_{N-n\text{ 個}} \geqq g_{k+1} \geqq \cdots \geqq g_n \quad (3.13)$$

ここで，$\mu_{ij}(N)$ の対称性を示す式 (2.26) を用いると，つぎのようにして $\bar{y}_{\max}$ が得られる。

$$\bar{y}_{\substack{\max\\\min}} = q_0 \sum_1^n g_i \pm \sigma_q \bar{u} \cdots\cdots(3.14)$$

$$\bar{u} = \sum_1^k \sum_1^k g_i g_j \{\mu_{ij}(N) - 1\} + \sum_1^{n-k} \sum_1^{n-k} g_{n+1-i} g_{n+1-j} \{\mu_{N+1-i, N+1-j}(N) - 1\}$$
$$+ 2 \sum_1^k \sum_1^{n-k} g_i g_{n+1-j} \{\mu_{i, N+1-j}(N) - 1\} \cdots\cdots(3.15)$$

$$\leqq \frac{N^2}{2N-1} \left\{ \sum_1^k \sum_1^k g_i g_j \nu_{ij} + \sum_1^{n-k} \sum_1^{n-k} g_{n+1-i} g_{n+1-j} \nu_{ij} \right\} \cdots\cdots(3.16)$$

式 (3.16) で省略された第3項は，$g_i g_{n+1-j}$ は負であり，$\nu_{i,n+1-j}$ は式 (2.33) でみられるようにきわめて小さくなるからである。$n = \varepsilon N$ とすれば，式 (3.11) と全く等しい不等式を得る。

(4) 応答の平均値と分散値に基づく場合

これまで求めた関係は荷重の平均値と分散値に基づいた極値応答であるが，条件式 (3.3) より得られる式 (3.4) の値，すなわち，全応答の平均値と分散値 m_η, V_η

$$\left.\begin{array}{l} m_\eta = q_0 \sum_1^n g_i \\ V_\eta = \sigma_q^2 \sum_1^n g_i^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(3.17)$$

に基づいた極値応答を求めたならば，どのようになるであろうか。

この場合は，影響値 g_i に関する拘束条件式 (3.1) は不要であり，z_i を大きさの順に並べた順序統計量と考えることも不要である。車両観測台数 N と n との関係も考慮外となる。そのかわり，n 台ずつ載荷する状態を M 回くり返し観測して，その最大値平均を求めるという問題になり，観測回数 M が関係する。n 台の配列状態は任意とするから，M 回中の最大値の期待値 $\bar{\eta}_{M,\max}$ は当然 $\bar{\eta}_{M,\max} < \bar{y}_{\max}$ となることが予想される。

さて，平均値と分散値とを式 (3.17) の値とする任意の分布関数によって実際に与えられるであろう M 個の実現値 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_M$ のうちの最大値の期待値 $\bar{\eta}_{M,\max}$ は，式 (2.24) において，$n=1$, $g_1=1$, $N=M$ とすることによって与えられる。これは文献 1) において，M 回の試行における最大値の期待値を求める問題として解かれているので，新しい関係ではない。

$$\left.\begin{array}{l} E(\eta_k) = m_\eta = q_0 \sum_1^n g_i \\ Var(\eta_k) = V_\eta = \sigma_q^2 \sum_1^n g_i^2 \end{array}\right\} \cdots\cdots(3.18)$$
$$(k = 1, 2 \cdots M)$$

$$\eta_{M\substack{\max\\\min}} = m_y \pm \frac{M-1}{\sqrt{2M-1}} \sqrt{V_y}$$
$$= q_0 \sum_1^n g_i \pm \frac{M-1}{\sqrt{2M-1}} \sigma_q \sqrt{\sum_1^n g_i^2} \cdots(3.19)$$

M は n 台ずつ1組にしたものを M 回観測することを意味し，N は n 台の最大値を求めるために観測された車両台数を意味する。したがって，式 (3.19) の M と式 (3.10) の N を対応させるには，観測総車両数を等しい $nM=N$ とする。$\bar{y}_{\max}$ と $\bar{\eta}_{M,\max}$ とを比較すると，つぎの関係を得る。

$$\bar{y}_{\max} - q_0 \sum_1^n g_i = \frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}} \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n g_i g_j \nu_{ij}}$$

$$\geqq \frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}$$
$$=\frac{M\sigma_q}{\sqrt{2M-\dfrac{1}{n}}}\sqrt{n\sum_1^n g_i^2}$$
$$\bar{\eta}_{M,\max}-q_0\sum_1^n g_i=\frac{M-1}{\sqrt{2M-1}}\sigma_q\sqrt{\sum_1^n g_i^2}$$
$$\therefore\quad \bar{\eta}_{M,\max}<\bar{y}_{\max}\cdots\cdots(3.20)$$

さらに，つぎのような場合を考えよう。平均値と分散値とが式 (3.17) で与えられているような任意の分布関数のうち，N 回の実現値の最大値から上位 εN 番値までの平均を最大にするようなものをとり，その分布による上位 εN までの平均の最大値 $\eta_{\varepsilon,\max}$ を求める。この場合は，再度，式 (2.24) を引用して，$n=\varepsilon N$, $\alpha_i=1/\varepsilon N$, $(i=1,2,\cdots\varepsilon N)$ $\bar{z}=m_\eta$, $V_z=V_\eta$とすればよい。

$$\eta_{\varepsilon\max}=m_\eta+\sqrt{V_\eta\frac{1}{(\varepsilon N)^2}\sum_1^{\varepsilon N}\sum_1^{\varepsilon N}\{\mu_{ij}(N)-1\}}\cdots\cdots(3.21)$$

ここで，$\varepsilon\ll1$ であるから $N\to\infty$ として，不等式 (2.30) より

$$\eta_{\varepsilon\max}=q_0\sum_1^n g_i+\frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}\times\sqrt{\frac{1}{(\varepsilon N)^2}\sum_1^{\varepsilon N}\sum_1^{\varepsilon N}\nu_{ij}}$$
$$<q_0\sum_1^n g_i+\frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}\sqrt{\frac{2}{\varepsilon N}}$$
$$<q_0\sum_1^n g_i+\frac{\sigma_q}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}$$

を得る。これは全体 N 個の $100\,\varepsilon\%$ の平均値の上限界を与えるものであり，チェビシェフの不等式そのものである。式 (2.27) の展開を参照すれば，$\eta_{\varepsilon\max}$ の下限も求められる。

$$\eta_{\varepsilon\max}=q_0\sum_1^n g_i+\frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}\times\sqrt{\frac{1}{(\varepsilon N)^2}\left\{\sum_{j=1}^{\varepsilon N}\sum_{i=1}^{\varepsilon N+1-j}\nu_{ij}+\sum_{j=2}^{\varepsilon N}\sum_{i=\varepsilon N+2-j}^{\varepsilon N}\nu_{ij}\right\}}$$
$$>q_0\sum_1^n g_i+\frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}}\sqrt{\sum_1^n g_i}\sqrt{\frac{1}{\varepsilon N}}$$
$$>q_0\sum_1^n g_i+\frac{\sigma_q}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{\sum_1^n g_i^2}$$
$$\frac{\sigma_q}{\sqrt{2\varepsilon}}<\frac{\eta_{\varepsilon\max}-q_0\sum_1^n g_i}{\sqrt{\sum_1^n g_i^2}}<\frac{\sigma_q}{\sqrt{\varepsilon}}\cdots(3.22)$$

(5) 計算例

簡単な計算例によって，著者のさきの研究の結果（文献 2)）と本文の結果の比較を試みる。計算例の対象とする車両と載荷区間の影響関数とは，文献 2) で採用したものと同じものとする。

すなわち，車両1台の平均重量 q_0 とその分散値 σ_q^2 は，

$$\left.\begin{array}{l}q_0=6\,\mathrm{t}\\ \sigma_q^2=9\,\mathrm{t}\end{array}\right\}\cdots\cdots(3.23)$$

とする。載荷区間の橋梁は文献 2) で採用した8格間の単純トラスで，車両載荷可能台数 $n=8$ とする。影響関数は文献 2) で図示したような上弦材軸力 G_u, 下弦材軸力 G_L, および，斜材軸力 G_D とするが，計算例に直接関係するのは影響関数の数値であって対象構造物の具体的形状は必要としないので，図を省略して影響関数の数値のみを表—1 に示す。

表—1 影響関数

	G_u	G_L	G_D
1	−0.18750	0.23438	−0.07813
2	−0.56250	0.70313	−0.23438
3	−0.93750	1.17188	−0.39063
4	−1.31250	1.64063	−0.54688
5	−1.68750	2.10938	−0.70313
6	−2.06250	2.20313	−0.23438
7	−1.68750	1.54688	0.23438
8	−0.56250	0.51563	0.07813

さて，表—1 の影響関数 G は構造物の格点の空間的順位によって配列されているが，本文において応答の極値を推定するには，式 (3.1) を満足するように G_i を大きさの順に配列して g_i としなければならない。表—2 に示す g_{ui}, g_{Li}, g_{Di} は絶対最大応答を求めるために G_{ui}, G_{Li}, G_{Di} を再配列したものである。g_{ui}, g_{Di} は式 (3.1) にしたがっていないが，符号を反転すれば条件に従うことは明白である。

表—2 極値平均推定用の影響関数

	g_u	g_L	g_D
1	−2.06250	2.20313	−0.70313
2	−1.68750	2.10938	−0.54688
3	−1.68750	1.64063	−0.39063
4	−1.31250	1.54688	−0.23438
5	−0.93750	1.17188	−0.23438
6	−0.56250	0.70313	−0.07813
7	−0.56250	0.51563	0.07813
8	−0.18750	0.23438	0.23438

車両載荷台数 $k=n=8$ とする。g_{Di} に対しては，影響関数の符号の反転部分を省いて $n=6$ とする場合も計算するが，これは $g_{Di}'=g_{Di}$ $(i=1,2\cdots6)$, $g_{D7}'=g_{D8}'=0$ と定義される影響関数 g_D' を用いて計算することに相当する。

応答の総観測回数 N と，$n(8)$ 台を載荷するという n との関係 N/n によって応答の極値は大きく変化するので，$N/n=1, 10, 100, 1\,000$ の4つの場合について計算を行なった。$\nu_{ij}(N)$ を，$N=8, 80, 800, 8\,000$, $(i,j=1,2\cdots8)$ について求めたが，$\nu_{ij}(N)$ は対称行列なので，$N=8, 8\,000$ の場合についてのみ表—3 のようにし

表—3　$\nu_{ij}(8)$ と $\nu_{ij}(8000)$

	$\mu_{ij}(8)$								
	1	2	3	4	5	6	7	8	i ╲ j
	1.00000	0.50000	0.23077	0.09615	0.03497	0.01049	0.00233	0.00029	1
1	1.00000	0.53846	0.40385	0.24475	0.12238	0.04895	0.01428	0.00233	2
2	0.50000	0.50003	0.44056	0.36713	0.24476	0.12850	0.04895	0.01049	3
3	0.24998	0.37502	0.37505	0.40793	0.35693	0.24475	0.12238	0.03496	4
4	0.12498	0.25000	0.31254	0.31256	0.40793	0.36713	0.24476	0.09615	5
5	0.06248	0.15623	0.23439	0.27349	0.27351	0.44056	0.40385	0.23077	6
6	0.03123	0.09372	0.16405	0.21878	0.24616	0.24617	0.53846	0.50000	7
7	0.01561	0.05466	0.10935	0.16406	0.20512	0.22566	0.22567	1.00000	8
8	0.00780	0.03122	0.07028	0.11717	0.16114	0.19341	0.20955	0.20956	
i ╲ j	1	2	3	4	5	6	7	8	
	$\nu_{ij}(8000)$								

て掲げる。ただし，$\nu_{ij}(N)$ は式 (2.34) で $\mu_{ij}(N)$ と関係づけられ，$\nu_{ij}(N) \leqq 1$ であるから $\mu_{ij}(N)$

$$\left.\begin{aligned} \mu_{ij}(N) &= \frac{N^2}{2N-1}\nu_{ij}(N) \\ \nu_{ij}(N) &= \frac{\binom{N-1}{i-1}\binom{N-1}{j-1}}{\binom{2N-2}{i+j-2}} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.24)$$

よりは扱いやすい値である。条件式 (2.27) が成立していることは，表—3 の値からも明らかである。

応答 y の極値平均の式 (3.6) あるいは，式 (3.9) は，$\nu_{ij}(N)$ を用いると，

$$y_{\substack{\max\\ \min}} = q_0 \sum_1^n g \pm \frac{N\sigma_q}{\sqrt{2N-1}} \times \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n \nu_{ij}(N) g_i g_j - \frac{2N-1}{N^2}\left(\sum_1^n g_i\right)^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.25)$$

となる。あるいは，荷重の変動係数を $\zeta = \sigma_q/q_0$ とすれば，$\bar{y} = q_0 \Sigma g_i$ は平均値であるから正規化すると，

$$\frac{y_{\substack{\max\\ \min}} - \bar{y}}{\bar{y}} = \pm\zeta \frac{N}{\sqrt{2N-1}} \times \frac{\sqrt{\Sigma\Sigma\nu_{ij}(N) g_i g_j - \frac{2N-1}{N^2}(\Sigma g)^2}}{\Sigma g_i} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.26)$$

となる。

式 (3.25)，式 (3.26) における g_i を g_{ui}, g_{Li}, g_{Di}, $g_{D'i}$ として $\nu_{ij}(N)$ とともに計算したものを 表—4 に掲げる。表—4 における C_1, C_2, C_3 はそれぞれつぎの値である。

$$C_1 = \sqrt{\sum_1^n \sum_1^n \nu_{ij}(N) g_i g_j - \frac{2N-1}{N^2}\left(\sum_1^n g_i\right)^2} \Big/ \sum_1^n g_i$$

$$C_2 = \frac{N}{\sqrt{2N-1}} C_1 = (y_{\substack{\max\\ \min}} - \bar{y})/\bar{y}\zeta$$

$$C_3 = \zeta C_2 = (y_{\substack{\max\\ \min}} - \bar{y})/\bar{y}$$

表—4

	N	Σg	$\Sigma\Sigma\nu gg$	C_1	C_2	C_3	$y_{\max}$
g_u	8	−9.00000	23.3843	0.233067	0.4814	−0.24071	−66.998
	80	−9.00000	22.7468	0.505945	3.2099	−1.60496	−140.668
	800	−9.00000	22.7236	0.527295	10.5495	−5.27460	−338.828
	8 000	−9.00000	22.7198	0.529378	33.4819	−16.74094	−958.011
g_L	8	10.1250	29.4356	0.229686	0.4744	0.2372	75.161
	80	10.1250	28.5737	0.503865	3.1967	1.5984	157.851
	800	10.1250	28.5458	0.525312	10.5095	5.2548	379.978
	8 000	10.1250	28.5406	0.527400	33.3567	16.6784	1 073.965
g_D	8	−1.87502	1.80641	0.528618	1.0919	−0.5459	−17.392
	80	−1.87502	1.69321	0.675847	4.2879	−2.1439	−35.370
	800	−1.87502	1.68201	0.689893	13.8022	−6.9011	−88.888
	8 000	−1.87502	1.68167	0.691438	43.7317	−21.8659	−257.244
g_D'	8	−2.18753	1.77819	0.37043	0.7652	−0.3826	−18.147
	80	−2.18753	1.75342	0.584444	3.7080	−1.8540	−37.459
	800	−2.18753	1.75171	0.602963	12.0630	−6.0315	−92.290
	8 000	−2.18753	1.75155	0.604798	38.2520	−19.1260	−264.157

なお，表—4 の $y_{\max}$ は，応答の極値のうち絶対値の大きい方を掲げた。

表—4 よりつぎのような傾向が把握されよう。

1°　一定の n に対して $N\to\infty$ により $\sum_1^n\sum_1^n \nu_{ij}(N) g_i g_j$ は一定値に収れんする。

2°　したがって，C_1 も収れんするので，応答の極値平均の増分は $N/\sqrt{2N-1}$ に比例するようになる。この傾向は表—4 中の C_3 の変化によって示されている。

これらの結果を文献 2) の結果と比較するために，$k=8$ として文献 2) に示した計算を行なった。影響関数は表—1 の G_u, G_L, G_D とした。G_D' は g_D' と同様影響値の符号が反対（正号）である 2 区間を 0 としたものである。結果を表—5 に掲げる。

表—5 の極値は，実際に載荷した 8 台（G_D' では 6 台）の車両の重量の平均値と分散値が条件式 (3.23) を満足する場合のものである。

表—4 の極値は，理論的には条件式 (3.23) にしたが

表―5　文献 2) による計算法よりの極値

	F_n	$\bar{Y}$	$\sqrt{\bar{V}}/\bar{Y}$	Y_{max}	Y_{min}
G_u	−9.00000	−54.00000	−0.20199	−39.0752	−68.9248
G_L	10.12504	60.75024	0.20106	77.2076	44.2929
G_D	−1.87502	−11.25012	−0.28260	− 4.2344	−18.2658
G_D'	−1.87502	− 8.43759	−0.42492	− 9.3460	−16.9044

う車両が8台（g_D' では6台）載荷する場合のみを N 回観測した応答の最大値の期待値の極値である。

両者の比較により，さらにつぎのような結論が得られよう。

3°　$N=8$ とする場合の y（表―4 の極値）と Y（表―5 の極値）とを比較すると，$|y|<|Y|$ であるが，ほぼ等しい大きさをもつ。$N\gg 8$ では $|y|$ は $\sqrt{N}$ のオーダーで増加することがわかる。

4°　影響値の反対符号部分を省くと，g_D' による y は g_D による y より絶対値が大きく，G_D' による Y と G_D による Y' では Y' の方が小さい。

4．換算等分布活荷重の限界てい減率

実際の橋梁に車両が載荷する場合，重量や空間的な配列の変動などのいろいろな乱れが生ずる。本文では時間的な要因はいっさい無視して，静的な乱れの限界を考察しよう。これが換算等分布活荷重の限界てい減率に相当する。

活荷重の静的な乱れの要因は，2つに大別されよう。1つは車両の重量の乱れであり，他の1つは車両の配列の乱れである。すなわち，載荷区間長 L に k 台の車両が配列することは一つの確率事象であり，k 台の車両の全重量も一つの確率事象である。

本文でいう換算等分布活荷重の限界てい減率（略して，てい減率）とは，はりの載荷予定区間に載荷する車両の全重量を一定時間間隔で規定回数だけ観測するものとして，その規定回数で得られるであろう最大の重量の期待値を載荷予定区間長 L で割り，さらに，それを規準値で割って，L（あるいは，満載時の載荷台数 n）の関数としたものと定義する。限界というのは，規定観測回数中の最大値の予想し得る限りの最大値となる全車両重量を求めることによる。これらの極値問題は，すでに前節で導いた確率変数和の極値平均の結果によって解かれる。

まず，k 台の車両の総重量の極値平均 W_k を求めよう。車両の重量は平均値と分散値を q_0, σ_q^2 とする分布にしたがう独立な確率変数であるとする。

$$\left.\begin{aligned} q_0&=\int_0^1 z\,dF \\ \sigma_q^2&=\int_0^1 (z-q_0)^2 dF \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

k 台の車両の総重量は，式 (4.1) の仮定より平均値と分散値が kq_0, $k\sigma_q^2$ となる確率変数となる。k 台の車両が載荷している状態のみを N_q 回観測して，その中の最大値の期待値 W_k を求めるには，式 (2.24) より式 (3.19) を求めた方法にしたがえばよい。

$$W_k=kq_0\pm\frac{N_q-1}{\sqrt{2N_q-1}}\sqrt{k}\,\sigma_q\cdots\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

正符号が最大値で，負符号が最小値である。

N_q 個の観測値の中の最大値から上位 εN_q 番値までの平均を極値にするような分布により，部分平均最大値 W_k' を求めるには，式 (2.24) より式 (3.22) を導いた方法を用い，不等式 (2.28)～式 (2.20) を参照すればよい。$N_q\to\infty$, $\varepsilon\ll 1$ とすると

$$kq_0+\frac{\sigma_q}{\sqrt{2\varepsilon}}\sqrt{k}<W_k'<kq_0+\frac{\sigma_q}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{k}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

が得られる。

W_k と W_k' を kq_0 で割って，1車両あたりの増加重量比 ζ_k, ζ_k' をとるならば，それぞれ，つぎのようになる。

$$\zeta_k=\frac{W_k}{kq_0}=1+\frac{N_q-1}{\sqrt{2N_q-1}}\frac{\sigma_q}{\sqrt{k}\cdot q_0}\cdots\cdots\cdots(4.4)$$

$$1+\frac{\sigma_q}{\sqrt{2\varepsilon k}q_0}<\zeta_k'<1+\frac{\sigma_q}{\sqrt{\varepsilon k}\,q_0}\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

荷重配列の乱れをてい減率に換算するについて，一定区間 L に配列する台数 k に基づく方法と，車両間隔に基づく方法が考えられる。観測対象は車線上を長区間にわたって配列している車両であるにもかかわらず，それぞれの方法で求められる限界てい減率は一致しない。統計方法が異なるために，理論的には可能な根値現象に相違点が現われて，同一条件から推論しても異なる極値が得られるものと思われる。しかし，現象は実現し得るものに限るべきであるから，同一条件から異なる平均限界を得たときには，その共通部分，すなわち，小さい平均限界を実際の平均限界とみなすべきであろう。つぎに，2つの方法による極値，すなわち，限界てい減率を示す。この場合は車両の重量には乱れがなく，すべて一定であるとみなす。

(1)　載荷台数に基づく方法

載荷区間全長 L, 車両占有長さ a, 車両の配列方法などは前節に仮定したものと同じものとする。車線単位長さあたりの車両載荷台数の平均値と分散値とを，$\bar{r}$, V_r とする。したがって，載荷全区間 L の載荷台数 k の平均値と分散値は，

$$\left.\begin{aligned} E(k)&=\bar{r}L \\ Var(k)&=V_rL \end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(4.6)$$

となる。

さて，平均値と分散値とを式 (4.6) とする確率変数の N_r 回の観測値の最大値の期待値 $k_{\max}$ は，式 (3.19) と同様に，つぎのようになる。

$$k_{\max}=\bar{r}L+\frac{N_r-1}{\sqrt{2N_r-1}}\sqrt{V_rL}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.7)$$

$$\theta_r=\frac{k_{\max}}{n}=\bar{r}a+\frac{N_r-1}{\sqrt{2N_r-1}}a\sqrt{\frac{V_r}{L}}\cdots\cdots(4.8)$$

θ_r は満載時を1とするてい減率であり，N_q 回の最大値の期待値を用いているので，限界てい減率に相当する。

式 (4.8) を N_r に関して解けば，任意の θ_r に対する再現期間の下限を得る。

$$\left.\begin{aligned}N_r&=\sqrt{1+\tau_r^2}\left(\sqrt{1+\tau_r^2}+\tau_r\right)\\ \tau_r&=\frac{\theta_r-\bar{r}a}{a}\sqrt{\frac{L}{V_r}}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.9)$$

すなわち，てい減率が θ_r となるには，条件式 (4.6) のもとでは，少なくとも N_r 回観測しなければならない。式 (4.9) の N_r は，平均1回 θ_r となるための最小観測回数の期待値である。

(2) 車両間隔に基づく方法

車両間隔が相互に独立な同一確率分布にしたがっているものと仮定して，車両間隔の平均値と分散値とを $\bar{s}$, V_s とする。l_k を互いに隣接した k 台の車両の長さと間隔の和とすると，l_k は確率変数で，平均値と分散値とを

$$\left.\begin{aligned}E(l_k)&=k(a+\bar{s})\\ Var(l_k)&=kV_s\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.10)$$

としたものである。この条件のもとに，実現値を N_s 回観測して，その最小値をとるならば，その期待値 $l_{k\min}$ は

$$l_{k\min}=k(a+\bar{s})-\frac{N_s-1}{\sqrt{2N_s-1}}\sqrt{kV_s}\cdots\cdots(4.11)$$

となることは明らかである。

この $l_{k\min}$ が L に等しくなれば，N_s 回の観測による最大載荷台数の期待値が k であるということになる。$L=l_{k\min}$ として k を求めると

$$\begin{aligned}k&=\frac{L}{a+\bar{s}}+\frac{V_s}{2(a+\bar{s})^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}\\ &\quad\times\left\{1+\sqrt{1+\frac{4L(a+\bar{s})(2N_s-1)}{V_s(N_s-1)^2}}\right\}\\ &\fallingdotseq\frac{L}{a+\bar{s}}+\frac{V_s}{(a+\bar{s})^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}\cdots\cdots\cdots(4.12)\end{aligned}$$

となる。ここで根号の中の第2項は微小項になるので，省略する。車両間隔の分布によるてい減率 θ_s は

$$\theta_s=\frac{k}{n}=\frac{a}{a+\bar{s}}+\frac{V_sa}{L(a+\bar{s})^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}\cdots(4.13)$$

であり，式 (4.8) とは異なる結果となる。同様にして，θ_s に対する再現期間の下限を N_s と考えるなら，

$$\left.\begin{aligned}N_s&=\sqrt{1+\tau_s^2}\left(\sqrt{1+\tau_s^2}+\tau_s\right)\\ \tau_s&=\sqrt{\frac{aL}{\theta_sV_s}}\left(\theta_s-1+\frac{\bar{s}}{a}\theta_s\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.14)$$

となる。

(3) 比較検討

車線上の車両配列を，車両台数分布に基づく方法と車両間隔に基づく方法とによって，異なる限界てい減率 θ_r, θ_s を得たが，台数平均 $\bar{r}$ と間隔の平均 $\bar{s}$ との間には

$$\bar{r}=\frac{1}{a+\bar{s}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.15)$$

が成立することは当然であるから，

$$\lim_{L\to\infty}\theta_r=\lim_{L\to\infty}\theta_s=a\bar{r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.16)$$

が成立する。しかるに，θ_r は $1/\sqrt{L}$ に比例して変化して，θ_s は $1/L$ に比例して変化する。このように著しい相違が見られるので，すでに述べた理由によって，θ_r と θ_s の大小関係を比較して小さい方を限界てい減率 θ としよう。

θ_r を求めるための観測平均総延長は LN_r であり，また，θ_s を求めるための観測平均総延長は $N_s(a+\bar{s})\cdot L\theta_s/a$ であり，両者は等しくなければならない。

$$N_r=N_s\frac{(a+\bar{s})}{a}\theta_s\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.17)$$

N_r, $N_s\gg1$ であるから，式 (4.8) と式 (4.13) とを簡略化して

$$\left.\begin{aligned}\theta_r&\fallingdotseq a\bar{r}+\sqrt{N_r}\sqrt{\frac{V_r}{2L}}a\\ \theta_s&\fallingdotseq\frac{a}{a+\bar{s}}+\frac{V_saN_s}{2L(a+\bar{s})^2}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.18)$$

として，θ_r と θ_s との大小関係を導く。式 (4.15)，式 (4.17)，式 (4.18) より N_r, N_s, $\bar{s}$ を消去すると

$$(\theta_r-a\bar{r})^2\frac{V_s\bar{r}^3}{V_r}=\theta_s(\theta_s-a\bar{r})\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.19)$$

を得る。これは，式 (4.18) の近似計算によっても，θ_s と θ_r が式 (4.16) を満足していることを示している。式 (4.19) で $\theta_r=\theta_s$ として，θ_r と θ_s との曲線の交点 θ_0 を求めて，$a\bar{r}<\theta_0\leqq1$ とすれば，θ_r と θ_s が交わる条件が得られる。$\theta_0>0$ であるならば，現実的には $\theta_s\leqq\theta_r$ とみなしてよい。

$$\theta_0=\frac{a\bar{r}^4V_s}{(V_s\bar{r}^3-V_r)}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.20)$$

$\theta_0\leqq1$ より $V_s\bar{r}^4\bar{s}-V_r\geqq0$ を得るが，これより $\theta_0\geqq a\bar{r}$ であることが明らかである。$\theta_0<0$ より $V_s\bar{r}^3-V_r\leqq0$ を得るが，V_r, V_s, $\bar{r}$, $\bar{s}$ の関係をよりくわしく検討しないと，いずれの不等式が満足されるか示し得ない。

しかるに，著者は，

$$\left.\begin{array}{l} V_r-V_s\bar{r}^3>0 \\ \theta_r\geqq\theta_s \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.21)$$

であって，換算等分布活荷重の限界てい減率として θ_s を採用するべきであろうことを予測する。簡単な計算例によって実証しよう。

著者は，換算等分布活荷重についての研究を以前に報告しているので，その中の分布関数を引用する（文献 3）参照）。車両の間隔が指数分布にしたがう場合とポアソン分布にしたがう場合との２つの例で，計算例による式（4.21）の実証としては例は少ないが，十分であろうと思う。

a） ポアソン分布の場合

車両間隔がポアソン分布（パラメーター λ）にしたがう場合は，区間 $L=na$ に載荷する台数 k の平均値は，

$$\frac{n+1}{\lambda}-1<E(k)<\frac{n+1}{\lambda}$$

であることを示したが（文献 3）参照），車両間隔の平均値 $\bar{s}$ は，$\bar{s}=\lambda a$ であり，この関係を式（4.15）へ代入すると，

$$\bar{r}=\frac{1}{(\lambda+1)a}$$

を得る。k の分散については文献 3）の近似式をそのまま引用して，

$$Var(k)=\frac{n+1}{\lambda^2}=V_rL$$

とする。車両間隔 s の平均値と分散値は

$$\bar{s}=\lambda a$$

$$V_s=\lambda a^2$$

であるから，これらの関係を式（4.21）へ代入すると，条件式が満足されて，$0<\theta_s<\theta_r$ を得る。θ_s の 1 以上の値については考慮する必要はない。

$$V_r-V_s\bar{r}^3=\frac{n+1}{\lambda^2L}-\frac{\lambda}{(\lambda+1)^3a}$$

$$=\frac{\lambda}{a}\left\{\frac{1}{\lambda^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{(\lambda+1)^3}\right\}>0$$

これらの関係を式（4.13）へ代入して θ_s を求めて，限界てい減率として，$\theta_s=1$ を満足する L_0 を求めるとつぎのようになる。

$$L_0=\frac{a}{1+\lambda}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}$$

$$\theta=1 \qquad (0<L\leqq L_0)$$

$$=\frac{1}{1+\lambda}+\frac{\lambda a}{L(1+\lambda)^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)} \qquad (L_0<L)$$

b） 指数分布の場合

車両間隔が指数分布にしたがう場合は，載荷台数はポアソン分布にしたがう。したがって，車両間隔 x の分布関数を

$$F(x)=1-e^{-(\lambda/L)x}$$

と仮定すると，

$$\left.\begin{array}{l} \bar{r}=\dfrac{\lambda}{L},\ V_r=\dfrac{\lambda}{L} \\ \bar{s}=\dfrac{L}{\lambda},\ V_s=\dfrac{L^2}{\lambda^2} \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.22)$$

を得る。これらを条件式（4.21）に代入すると，

$$V_r-V_s\bar{r}^3=\frac{\lambda}{L}-\frac{\lambda}{L}=0$$

を得る。条件式が 0 になることは，θ_0 が無限大に発散することに相当するが，この不合理な点は，式（4.22）の関係は車両占有幅 a を 0 としていることによって生じている。式（4.22）の関係が式（4.15）を満足するには，$a=0$ としなければならないことからも，明らかである。a が 0 でないためには，指数分布とポアソン分布との関係を示す式（4.24）の $\bar{r}$ が，実際には，$\bar{r}<\lambda/L$ でなければならないから，条件式（4.21）は成立しているとみなしてよい。

式（4.24）の $\bar{s}$ と V_s とを式（4.13）へ代入すると，車両間隔がパラメーター λ/L の指数分布にしたがう場合の限界てい減率が得られる。

$$L_0=\frac{aL}{a\lambda+L}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}$$

$$\theta=1.0 \qquad (0<L\leqq L_0)$$

$$=\frac{a\lambda}{a\lambda+L}+\frac{aL}{(a\lambda+L)^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)} \qquad (L_0<L)$$

以上で $\theta_s<\theta_r$ であろうことが示された。

（4） 重量分布と配列分布を同時に考慮する場合

載荷区間 L が長くなっても，重量変化のみを考慮して配列の乱れを無視するならば，限界てい減率は，式（4.4）で $k=n=L/a$ として，適当に決定された N_q をもとにして

$$\theta_1=\frac{\zeta_n}{\zeta_1}=\frac{\sqrt{2N_q-1}\,q_0+\dfrac{(N_q-1)}{\sqrt{L}}\sigma_q\sqrt{a}}{\sqrt{2N_q-1}\,q_0+(N_q-1)\sigma_q}\cdots\cdots\cdots\cdots(4.23)$$

とするべきである。

重量変化を無視して車両配列の乱れのみを考慮するならば，前節で示した理由によって，

$$\theta_2=\theta_s=\frac{a}{a+\bar{s}}+\frac{V_sa}{L(a+\bar{s})^2}\frac{(N_s-1)^2}{(2N_s-1)}\cdots(4.24)$$

となる。

重量変化と配列の乱れを同時に考慮する場合は，それぞれ独立な確率変数にしたがっているものとして，両者のてい減率の積をとればよい。この場合，式（4.4）の k については，$k=L\theta_s/a$ を採用するのが合理的である。

$$\theta_3=\theta_s\frac{q_0\sqrt{2N_q-1}+\sigma_q(N_q-1)\sqrt{\dfrac{a}{L\theta_s}}}{q_0\sqrt{2N_q-1}+\sigma_q(N_q-1)}\cdots(4.25)$$

ただし，式 (4.23)～式 (4.25) の θ_i は $\theta_i \leqq 1$ の部分のみ有効であり，１以上になる部分では，$\theta_i=1$ とする。

てい減率の限界値を一応導き得たが，結論としていえることは，θ_i を定めるについて極値の再現期間に相当する（一致するとは言えない）観測回数 N_r, N_s の決定が最も重要な問題であるということである。なぜならば，q_0, σ_q の観測誤差より安易に選定される危険性をもつ N_q, N_s の変化の方が，θ_i に対してより大きな変動を与える。理論上の極値は，現実より遊離して，観測回数の増加とともに無限に増加することは，式 (3.19) からも明らかである。

5. むすび

静的に乱れた外力を構造物に作用させる前に統計的処理を行なうのが，換算等分布荷重のてい減率の考え方である。構造物に作用させるについて，応答が極値になるように載荷条件を付加して極値を求めるのが，荷重の平均値と分散値とに基づく極値応答解析である。荷重を一様の条件のもとに構造物に作用させて応答の平均値と分散値に基づいて極値応答を求める方法も考えられる。

いずれの場合についても，一応の結果を導いたが，理論的な極値であるから，実際の現象に対して過大評価を与えている。しかし，各関係式は，観測回数 N, M, ϵ などの値によって任意の値をとり得る極値平均値を与えていると解釈したならば，理論上の観測回数，あるいは，再現期間の決定基準というものがいかに構造物の安全性の検討に重要な意義を持っているかわかる。

参考文献

1) Gumbell, E.J. ; Statistics of Extremes, Columbia Univ. press, 1957.
2) 中川：はりに作用する荷重の統計的な扱いについて，土木学会論文報告集第175号，1970 年３月，pp. 15～22.
3) 中川：換算等分布活荷重の確率論的考察，土木学会論文集第127号，1966 年３月，pp. 1～8.

(1970. 5.20・受付)