

異方性弾性地山に開削した水平坑道周辺の 重力による応力状態

GRAVITATIONAL STRESS DISTRIBUTION ON DEEP TUNNEL
IN ANISOTROPIC ELASTIC GROUND WITH CONSTANT INCLINED SURFACE

丹羽 義次*・平島 健一**
By Yoshiji Niwa and Ken-ichi Hirashima

1. 緒 言

岩盤あるいは地盤を等質の等方性弾性体と仮定した場合、これに開削された水平坑道周辺の重力（物体力）による応力状態についての理論的ならびに実験的な研究が従来より多数行なわれている。たとえば、水平地表面下の円形断面坑道に対する山口¹⁾、安蔵²⁾、Mindlin³⁾らの研究、一定の傾斜を有する地表面下の円形坑道に対する伊藤⁴⁾の研究、くさび形地山に対する西村・高山の研究⁵⁾などである。また坑道断面を楕円形状と考えた杉原⁶⁾、小田⁷⁾の近似解および、より一般的な断面形 (ovaloid) に対する杉原⁸⁾、岡本⁹⁾、Yu⁹⁾の近似解、さらに楕円形断面の坑道に対する水平地表面の影響を考慮に入れた振動法による石田の解¹⁰⁾などである。実験的な研究としては寒天による山口、寒天土による岡本、ゼラチン模型を使った光弾性法による山本・森地の研究¹¹⁾などがある。これらの研究成果は、はじめに述べたごとく地山を等質等方の弾性体と仮定した解析が行なわれている。しかしながら、実際の地山は地質学的な歴年作用などによって異方性体とみなされるものがきわめて多い。著者らは先に、岩盤をより一般的に等質の三次元異方性弾性体と仮定し、この岩盤内に任意形状の坑道を、その弾性主軸に対して任意の角度をなして開削した場合に、任意方向の三つの独立な地山初期主応力の作用に対して坑道周縁に生じる応力および変形状態を理論的に解析した^{12), 13)}。

この論文では地山を等質の一般的な三次元異方性弾性体と考え、任意形状の断面を有する水平坑道周辺の重力（物体力）による応力分布状態を理論的に求めたものである。この論文で設定した仮定はつぎのようである。

- (a) 地山は水平または一定の傾斜の地表面を有する等質の半無限異方性弾性体である。

- (b) 応力は重力（物体力）のみによって生じる。
(c) 任意形状の坑道は水平で坑径に比し、十分深い位置に開削される。

2. 異方性弾性体に対する基礎方程式

図-1 に示すように、地山内に開削される任意形状断面の坑道軸方向に z 軸、これに直交して水平面に対し一定の傾斜角 φ_0 をもつ地表面と平行に x 軸、これと垂直

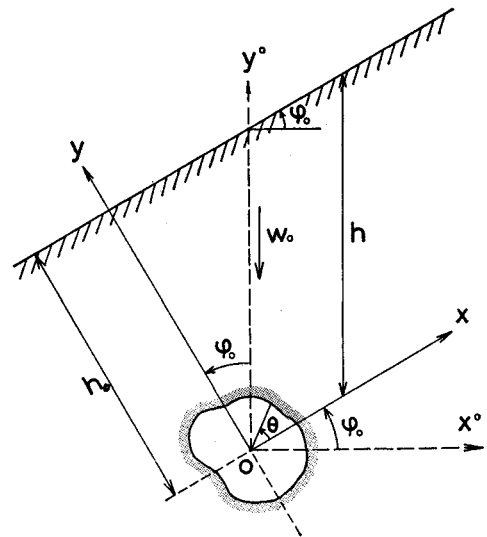


図-1 任意形状の坑道を有する半無限異方性弾性体

の方向に y 軸をとった直交デカルト座標系 (x, y, z) を設ける。この場合、異方性体と仮定した岩盤の弾性主軸は、この座標系とは無関係に任意方向に傾斜しているものとする。応力のつりあい方程式は第1節の仮定 (b)、(c) から、坑道軸方向すなわち z には無関係なものとなり、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = w_0 \sin \varphi_0 \end{aligned} \right\}$$

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= w_0 \cos \varphi_0 \dots\dots\dots(2.1) \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

ここに、 $w_0 = \rho g$ は考えている地山の単位体積当りの重量である。

さらに、異方性弾性体の応力一ひずみ関係は一般的に

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} + a_{15}\tau_{xz} + a_{16}\tau_{yz} \\ \epsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{26}\tau_{yz} \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + \dots\dots\dots + a_{66}\tau_{xy} \\ \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.2)$$

で与えられる。上式中の係数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ は考えている地山の弾性性質を示す定数である。いま、つりあい方程式 (2.1) を満たすような応力関数 $F(x, y)$ および $\psi(x, y)$ を導入すると次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \bar{U}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \bar{U}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \tau_{xz} &= \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.3)$$

ここに、 \bar{U} は重力に対するポテンシャル関数であり、いまの場合、つぎのようになる。

$$\bar{U} = w_0(x \sin \varphi_0 + y \cos \varphi_0) + C_0 \dots\dots\dots(2.4)$$

これらの応力関数 F および ψ は変位の適合条件式を満足しなければならないことから、二、三の演算のち、最終的につぎの連立偏微分方程式がえられる¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} L_4 F + L_3 \psi &= 0 \\ L_3 F + L_2 \psi &= w_0(\beta_{14} + \beta_{24}) \sin \varphi_0 \\ &\quad - w_0(\beta_{15} + \beta_{25}) \cos \varphi_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(2.5)$$

ここに、 L_2, L_3 および L_4 は、つぎのような形の微分演算子である。

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} \\ &\quad - (\beta_{14} + \beta_{36}) \cdot \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \cdot \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (\beta_{12} + \beta_{66}) \cdot \\ &\quad \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}, \quad (i, j=1, 2, 4, 5, 6) \dots\dots(2.7)$$

したがって、問題は与えられた境界条件のもとで、式 (2.5) の基礎方程式を解くことに帰着される。そこで以下では、3. で内部に坑道を持たない半無限異方性弾性体の重力による応力状態を考え、4. ではこの半無限体内に任意形状の坑道を開削した場合に、3. で求めた仮

想の坑道周縁における法線方向の垂直応力、せん断応力を打消するように外荷重をこの周縁に作用させた場合の応力状態を求める。3. および 4. で求められた応力状態を重ね合わせれば所期の問題が解けたことになる。

3. 重力による半無限異方性弾性体内の応力

$$\left. \begin{aligned} \text{式 (2.5) の特解を } F_0(x, y) \text{ および } \psi_0(x, y) \text{ とし、} \\ F_0(x, y) &= a_1 x^3 + a_2 x^2 y + a_3 x y^2 + a_4 y^3 + a_5 x^2 \\ &\quad + a_6 x y + a_7 y^2 \\ \psi_0(x, y) &= b_1 x^2 + b_2 x y + b_3 y^2 + b_4 x + b_5 y \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.1)$$

であると仮定すれば、これらは式 (2.5) の第 1 式を自動的に満足する。これらの特解の未知係数 a_1, a_2, \dots, b_4 および b_5 は、式 (2.5) の第 2 式および境界条件から決定される。

ここで考えている問題の場合の境界条件としては、図-1 のように直交座標系をとるものとすれば、地表面 ($y=h_0$) において外荷重が作用していないことから、

$$y=h_0 \text{ において、} \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = 0 \dots\dots(3.2)$$

が成立しなければならない。またすべての応力成分は座標 x の位置に無関係という条件を考慮し、さらにひずみに対する拘束条件としては、 x および z 方向 (紙面に直な方向) に無限に広がった異方性弾性体を対象としているので、 x 方向の直ひずみは重力 w_0 による力のつりあいから求められる x 方向の応力成分 $\bar{\sigma}_x^0$ のみによって生じ、その他の応力の作用に対しては平面ひずみの状態が成立しなければならないことから結局、次式が得られる。

$$\bar{\epsilon}_z^0 = 0, \quad \epsilon_x^0 = \bar{\epsilon}_x^0, \quad \tau_{xz}^0 = 0 \dots\dots\dots(3.3)$$

ここに、 $\bar{\epsilon}_x^0$ は $\bar{\sigma}_x^0$ によって生じる x 方向の直ひずみであり、次式で与えられる。

$$\bar{\epsilon}_x^0 = a_{11} \bar{\sigma}_x^0 = a_{11} w_0 (y - h_0) \sin \varphi_0 \tan \varphi_0 \dots\dots(3.4)$$

以上の諸条件から応力関数 $F_0(x, y)$ および $\psi_0(x, y)$ の未知係数およびポテンシャル関数 \bar{U} の未知係数 C_0 を決定し、応力成分を求めれば、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= w_0 \cos \varphi_0 (k_1 y - k_3 h_0) \\ \sigma_y^0 &= w_0 \cos \varphi_0 (y - h_0) \\ \tau_{xy}^0 &= w_0 \sin \varphi_0 (y - h_0) \\ \tau_{xz}^0 &= w_0 \cos \varphi_0 (k_2 y - k_4 h_0) \\ \tau_{yz}^0 &= 0 \\ \sigma_z^0 &= -\frac{1}{a_{33}} (a_{13} \sigma_x^0 + a_{23} \sigma_y^0 + a_{34} \tau_{yz}^0 + a_{35} \tau_{xz}^0 \\ &\quad + a_{36} \tau_{xy}^0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.5)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} k_1 &= 1 + \frac{\beta_{15} t_2 - \beta_{55} t_1}{\beta_{11} \beta_{55} - \beta_{15}^2}, \quad k_2 = \frac{\beta_{15} t_1 - \beta_{11} t_2}{\beta_{11} \beta_{55} - \beta_{15}^2} \\ k_3 &= \frac{\beta_{15} t_2' - \beta_{55} t_1'}{\beta_{11} \beta_{55} - \beta_{15}^2}, \quad k_4 = \frac{\beta_{15} t_1' - \beta_{11} t_2'}{\beta_{11} \beta_{55} - \beta_{15}^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \beta_{11} + \beta_{12} + \beta_{16} \tan \varphi_0 - a_{11} \tan^2 \varphi_0 \\ t_2 &= \beta_{15} + \beta_{25} + \beta_{36} \tan \varphi_0 \\ t_1' &= \beta_{12} + \beta_{16} \tan \varphi_0 - a_{11} \tan^2 \varphi_0 \\ t_2' &= \beta_{25} + \beta_{36} \tan \varphi_0 \end{aligned} \right\} (3.6)$$

式(3.5)より、任意の異方性弾性定数を有する半無限弾性体の重力による応力 σ_x^0, τ_{xz}^0 は、水平な地表面 ($\varphi_0 = 0$) の場合の表面上 ($y = h_0$) において必ずしも 0 にはならないことが観察される。なお特別な場合として等方性弾性体の場合には伊藤により求められている次式に一致する⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^0 &= w_0 \cos \varphi_0 \left(\frac{\nu_0}{1-\nu_0} + \tan^2 \varphi_0 \right) (y-h_0) \\ \tau_{xy}^0 &= w_0 \cos \varphi_0 (y-h_0) \\ \tau_{xz}^0 &= \tau_{yz}^0 = 0 \end{aligned} \right\} (3.7)$$

ここに、 ν_0 は等方性弾性体と考えた岩盤のポアソン比である。

4. 異方性弾性体内の水平坑道周辺の応力

図-1 に示すように任意形状の断面を有する坑道の重心軸が直交デカルト座標系 (x, y, z) の z 軸に一致するようにえらび、この坑道の境界が次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 \cos \theta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \cos m \theta + \beta_m \sin m \theta) \\ y_0 &= \alpha_0 \sin \theta - \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m \sin m \theta - \beta_m \cos m \theta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.1)$$

ここに、 $\alpha_m, \beta_m (m=0, 1, 2, \dots, \nu)$ は坑道の断面形状によって決まる実定数であり、 ν は正の整数を表わす。たとえば坑道の断面が円形の場合 $\alpha_m = \beta_m = 0 (m=1, 2, \dots, \nu)$ であり、楕円形の場合 $\beta_1 = \beta_m = \alpha_m = 0 (m=2, 3, \dots, \nu)$ とおけばよい。なお、Heller らは数種の矩形孔に対して偶角部の丸みを順次、変化させた場合のこれらの係数の値を求めている¹⁵⁾。

このようにすると複素平面 $z_0 (= x + iy = r e^{i\theta})$ 上の任意形状の坑道境界を

$$z_0 = \alpha_0 \zeta + \sum_{m=1}^{\nu} (\alpha_m + i \beta_m) \zeta^{-m} \dots\dots\dots(4.2)$$

によって ζ -平面の単位円上に、また坑道の外部領域を ζ -平面の単位円の外部領域に写像することができる。同様に、考えている異方性弾性体に関する特性方程式の複素根 μ_k を用いて、 $z_k = x_0 + \mu_k y_1 (k=1, 2, 3)$ によって z_0 -平面の坑道の境界上の点を z_k -平面の境界上の点に写像し、さらに写像関数：

$$z_k = \omega_k(\zeta_k) = \frac{1}{2} \left[\alpha_0 \{ (1-i\mu_k)\zeta_k + (1+i\mu_k)\bar{\zeta}_k \} + \sum_{m=1}^{\nu} \{ (\alpha_m + \mu_k \beta_m) - i(\mu_k \alpha_m - \beta_m) \} \zeta_k^{-m} + \dots\dots\dots(4.3) \right]$$

$$+ \sum_{m=1}^{\nu} \{ \alpha_m + \mu_k \beta_m \} + i(\mu_k \alpha_m - \beta_m) \} \zeta_k^{-m} \dots\dots\dots(4.3)$$

によって、 z_k -平面上の境界上及びその外部を ζ_k -平面の単位円上及びその外部に写像して考える。このようにすると坑道の境界上では $\zeta = \zeta_k = \sigma (= e^i)$ が成立する。

さて、式(4.1)で与えられるような任意形状の坑道に沿って生じる法線方向の直応力、変位を σ_a, u_a 、接線方向の直応力、変位を σ_β, u_β およびせん断応力を $\tau_{\alpha\beta}$ とすれば、応力、変位の基礎関係より次式が成立する¹⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_a + \sigma_\beta &= \sigma_x + \sigma_y \\ \sigma_a - \sigma_\beta + 2i \tau_{\alpha\beta} &= \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \cdot \frac{d\bar{z}_0}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_0} (\sigma_x - \sigma_y + 2i \tau_{xy}) \\ u_a + i u_\beta &= \left[\frac{\bar{\zeta}}{\zeta} \cdot \frac{d\bar{z}_0}{d\zeta} \cdot \frac{d\zeta}{dz_0} \right]^{1/2} (u + i v) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.4)$$

上式中の $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ および u, v は坑道の境界に沿ったデカルト座標系 (x, y, z) の座標軸方向の応力および変位成分であり、異方性弾性体の場合、それぞれつぎのように与えられる¹⁴⁾。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2 R_e [\mu_1^2 \phi_1'(z_1) + \mu_2^2 \phi_2'(z_2) + \mu_3^2 \lambda_3 \phi_3'(z_3)] \\ \sigma_y &= 2 R_e [\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2) + \lambda_3 \phi_3'(z_3)] \\ \tau_{xy} &= -2 R_e [\mu_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \phi_2'(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \phi_3'(z_3)] \\ \tau_{xz} &= 2 R_e [\mu_1 \lambda_1 \phi_1'(z_1) + \mu_2 \lambda_2 \phi_2'(z_2) + \mu_3 \phi_3'(z_3)] \\ \tau_{yz} &= -2 R_e [\lambda_1 \phi_1'(z_1) + \lambda_2 \phi_2'(z_2) + \phi_3'(z_3)] \\ \sigma_z &= -\frac{1}{a_{33}} (a_{13} \sigma_x + a_{23} \sigma_y + a_{34} \tau_{yz} + a_{35} \tau_{xz} + a_{36} \tau_{xy}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} u &= 2 R_e \sum_{k=1}^3 p_k \phi_k(z_k) - \omega_3 y + \bar{u}_0 \\ v &= 2 R_e \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(z_k) + \omega_3 x + \bar{v}_0 \\ w &= 2 R_e \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(z_k) + \bar{w}_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.6)$$

上式中の R_e は実部を示す表示であり、 λ_k, p_k, q_k および $r_k, (k=1, 2, 3)$ は考えている異方性体の弾性定数 β_{ij} および特性方程式の複素根 μ_k に関係した複素定数である。また式(4.6)の $(-\omega_3 y + \bar{u}_0), (\omega_3 x + \bar{v}_0)$ および \bar{w}_0 は対象としている物体全体の回転および剛体変位を表わす項である。

これらの応力および変位式中に表われる複素解析関数 $\phi_k(z_k)$ は式(4.1)のような断面形を有する坑道の境界に作用する外荷重応力 X_n, Y_n および Z_n が与えられれば、つぎの式によって計算することができる¹²⁾

$$\left. \begin{aligned} 2 R_e [\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) + \lambda_3 \phi_3(z_3)] &= \int_0^s Y_n ds + C_1 \\ 2 R_e [\mu_1 \phi_1(z_1) + \mu_2 \phi_2(z_2) + \mu_3 \lambda_3 \phi_3(z_3)] &= - \int_0^s X_n ds + C_2 \\ 2 R_e [\lambda_1 \phi_1(z_1) + \lambda_2 \phi_2(z_2) + \phi_3(z_3)] &= - \int_0^s Z_n ds + C_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.7)$$

ここに、 s は考えている坑道境界の弧長を表わし、 C_1 、 C_2 および C_3 は坑道の境界上で任意にえらべる定数である。

しかるに、いま考えている問題の場合に対する X_n, Y_n および Z_n は式 (3.5) の応力成分を用いて、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= -[\sigma_x^0 \cos(n, x_0) + \tau_{xy}^0 \cos(n, y_0)] \\ &= +\sigma_x^0 \frac{dy_0}{ds} - \tau_{xy}^0 \frac{dx_0}{ds} \\ Y_n &= -[\tau_{xy}^0 \cos(n, x_0) + \sigma_y^0 \cos(n, y_0)] \\ &= \tau_{xy}^0 \frac{dy_0}{ds} - \sigma_y^0 \frac{dx_0}{ds} \\ Z_n &= -[\tau_{xz}^0 \cos(n, x_0) + \tau_{yz}^0 \cos(n, y_0)] \\ &= \tau_{xz}^0 \frac{dy_0}{ds} \end{aligned} \right\} (4.8)$$

ここに、 n は坑道の境界に垂直な中心 O に向う単位ベクトルを、 s は時計まわりの単位接線ベクトルを表わし、 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \dots, \tau_{yz}^0$ は式 (3.5) で与えられる応力成分である。

る。

したがって、式 (4.8) を使って式 (4.7) の右辺の積分式を計算し ϕ_1, ϕ_2 および ϕ_3 に関する連立一次方程式を解けばよい。しかし、以後の計算が可能ないように式 (4.7) の右辺の積分式は三角級数に展開した形で求めておく必要がある。途中の演算はかなり複雑なため、最終的な計算結果のみを示すとつぎのようである。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^s Y_n ds &= \frac{w_0}{2} \cos \varphi_0 \left\{ M_0^1 + \sum_{m=1}^{2\nu} (M_m^1 \cos m\theta) \right. \\ &\quad \left. + N_m^1 \sin m\theta \right\} \\ - \int_0^s X_n ds &= \frac{w_0}{2} \cos \varphi_0 \left\{ M_0^2 + \sum_{m=1}^{2\nu} (M_m^2 \cos m\theta) \right. \\ &\quad \left. + N_m^2 \sin m\theta \right\} \\ - \int_0^s Z_n ds &= \frac{w_0}{2} \cos \varphi_0 \left\{ M_0^3 + \sum_{m=1}^{2\nu} (M_m^3 \cos m\theta) \right. \\ &\quad \left. + N_m^3 \sin m\theta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} M_0^1 &= \theta \cdot \sum_{j=1}^{\nu} j(\beta_j^2 - \alpha_j' \alpha_j'') \\ M_1^1 &= \sum_{j=2}^{\nu} \{ (A^4_{j,j-1} - A^4_{j-1,j}) - (B^4_{j,j-1} - B^4_{j-1,j}) \tan \varphi_0 \} - 2h_0(\alpha_1' - \beta_1 \tan \varphi_0) \\ N_1^1 &= \sum_{j=2}^{\nu} \{ (A^3_{j,j-1} + A^3_{j-1,j}) - (B^3_{j,j-1} + B^3_{j-1,j}) \tan \varphi_0 \} - 2h_0(\beta_1 - \alpha_1'' \tan \varphi_0) \\ M_m^1 &= \sum_{j=1}^{m-1} (A^2_{m-j,j} - B^2_{m-j,j} \tan \varphi_0) + \sum_{j=m+1}^{\nu} \{ (A^4_{j,j-m} - A^4_{j-m,j}) - (B^4_{j,j-m} - B^4_{j-m,j}) \tan \varphi_0 \} \\ &\quad - 2h_0(\alpha_m' - \beta_m \tan \varphi_0) \\ N_m^1 &= \sum_{j=1}^{m-1} (A^1_{m-j,j} - B^1_{m-j,j} \tan \varphi_0) + \sum_{j=m+1}^{\nu} \{ (A^3_{j,j-m} + A^3_{j-m,j}) - (B^3_{j,j-m} + B^3_{j-m,j}) \tan \varphi_0 \} \\ &\quad - 2h_0(\beta_m - \alpha_m'' \tan \varphi_0) \end{aligned} \right\} (4.10)$$

ただし、 $m=2, 3, \dots, \nu-1$

$$\begin{aligned} M_\nu^1 &= \sum_{j=1}^{\nu-1} (A^2_{\nu-j,j} - B^2_{\nu-j,j} \tan \varphi_0) - 2h_0(\alpha_\nu' - \beta_\nu \tan \varphi_0) \\ N_\nu^1 &= \sum_{j=1}^{\nu-1} (A^1_{\nu-j,j} - B^1_{\nu-j,j} \tan \varphi_0) - 2h_0(\beta_\nu - \alpha_\nu'' \tan \varphi_0) \\ M_{\nu+1}^1 &= \sum_{j=1}^{\nu-1} (A^2_{\nu+1-j,j} - B^2_{\nu+1-j,j} \tan \varphi_0), \quad N_{\nu+1}^1 = \sum_{j=1}^{\nu-1} (A^1_{\nu+1-j,j} - B^1_{\nu+1-j,j} \tan \varphi_0) \\ M_m^1 &= \sum_{j=m-\nu}^{\nu} (A^2_{m-j,j} - B^2_{m-j,j} \tan \varphi_0), \quad N_m^1 = \sum_{j=m-\nu}^{\nu} (A^1_{m-j,j} - B^1_{m-j,j} \tan \varphi_0) \end{aligned}$$

ただし、 $m=\nu+2, \nu+3, \dots, 2\nu$

$$\left. \begin{aligned} M_0^2 &= -\theta \cdot \tan \varphi_0 \sum_{j=1}^{\nu} j(\beta_j^2 - \alpha_j' \alpha_j'') \\ M_1^2 &= \sum_{j=2}^{\nu} \{ k_1 (B^4_{j,j-1} - B^4_{j-1,j}) - (A^4_{j,j-1} - A^4_{j-1,j}) \tan \varphi_0 \} - 2h_0(k_3 \beta_1 - \alpha_1' \tan \varphi_0) \\ N_1^2 &= \sum_{j=2}^{\nu} \{ k_1 (B^3_{j,j-1} + B^3_{j-1,j}) - (A^3_{j,j-1} + A^3_{j-1,j}) \tan \varphi_0 \} - 2h_0(k_3 \alpha_1'' - \beta_1 \tan \varphi_0) \\ M_m^2 &= \sum_{j=1}^{m-1} (k_1 B^2_{m-j,j} - A^2_{m-j,j} \tan \varphi_0) + \sum_{j=m+1}^{\nu} \{ k_1 (B^4_{j,j-m} - B^4_{j-m,j}) \\ &\quad - (A^4_{j,j-m} - A^4_{j-m,j}) \tan \varphi_0 \} - 2h_0(k_3 \beta_m - \alpha_m' \tan \varphi_0) \end{aligned} \right\}$$

$$N_m^2 = \sum_{j=1}^{m-1} (k_1 B^1_{m-j,j} - A^1_{m-j,j} \tan \varphi_0) + \sum_{j=m+1}^{\nu} \{k_1 (B^3_{j,j-m} + B^3_{im,j}) - (A^3_{j,j-m} + A^3_{j-m,j}) \tan \varphi_0\} - 2 h_0 (k_3 \alpha_m'' - \beta_m \tan \varphi_0) \quad \dots\dots\dots(4.11)$$

ただし, $m=2, 3, \dots, \nu-1$

$$M_\nu^2 = \sum_{j=1}^{\nu-1} (k_1 B^2_{\nu-j,j} - A^2_{\nu-j,j} \tan \varphi_0) - 2 h_0 (k_3 \beta_\nu - \alpha'_\nu \tan \varphi_0)$$

$$N_\nu^2 = \sum_{j=1}^{\nu-1} (k_1 B^1_{\nu-j,j} - A^1_{\nu-j,j} \tan \varphi_0) - 2 h_0 (k_3 \alpha_\nu'' - \beta_\nu \tan \varphi_0)$$

$$M^2_{\nu+1} = \sum_{j=1}^{\nu-1} (k_1 B^2_{\nu+1-j,j} - A^2_{\nu+1-j,j} \tan \varphi_0), \quad N^2_{\nu+1} = \sum_{j=1}^{\nu-1} (k_1 B^1_{\nu+1-j,j} - A^1_{\nu+1-j,j} \tan \varphi_0)$$

$$M_m^2 = \sum_{j=m-\nu}^{\nu} (k_1 B^2_{m-j,j} - A^2_{m-j,j} \tan \varphi_0), \quad N_m^2 = \sum_{j=m-\nu}^{\nu} (k_1 B^1_{m-j,j} - A^1_{m-j,j} \tan \varphi_0)$$

ただし, $m=\nu+2, \nu+3, \dots, 2\nu$

$$M_0^3 = 0$$

$$M_1^3 = k_2 \sum_{j=2}^{\nu} (B^4_{j,j-1} - B^4_{j-1,j}) - 2 h_0 k_4 \beta_1, \quad N_1^3 = k_2 \sum_{j=2}^{\nu} (B^3_{j,j-1} + B^3_{j-1,j}) - 2 h_0 k_4 \alpha_1''$$

$$M_m^3 = k_2 \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} B^2_{m-j,j} + \sum_{j=m+1}^{\nu} (B^4_{j,j-m} - B^4_{j-m,j}) \right\} - 2 h_0 k_4 \beta_m$$

$$N_m^3 = k_2 \left\{ \sum_{j=1}^{m-1} B^1_{m-j,j} + \sum_{j=m+1}^{\nu} (B^3_{j,j-m} + B^3_{j-m,j}) \right\} - 2 h_0 k_4 \alpha_m''$$

ただし, $m=2, 3, \nu-1$

$$M_\nu^3 = k_2 \sum_{j=1}^{\nu-1} B^2_{\nu-j,j} - 2 h_0 k_4 \beta_\nu, \quad N_\nu^3 = k_2 \sum_{j=1}^{\nu-1} B^1_{\nu-j,j} - 2 h_0 k_4 \alpha_\nu''$$

$$M^3_{\nu+1} = k_2 \sum_{j=1}^{\nu-1} B^2_{\nu+1-j,j}, \quad N^3_{\nu+1} = k_2 \sum_{j=1}^{\nu-1} B^1_{\nu+1-j,j}$$

$$M_m^3 = \sum_{j=m-\nu}^{\nu} B^2_{m-j,j}, \quad N_m^3 = \sum_{j=m-\nu}^{\nu} B^1_{m-j,j}$$

ただし, $m=\nu+2, \nu+3, \dots, 2\nu$

また式 (4.10)~(4.12) の中の係数 $A_{i,j}$ および $B_{i,j}$ ($i, j=1, 2, \dots, \nu$) などは次式で与えられる。

$$A^1_{i,j} = \frac{j}{i+j} (\alpha_j' \alpha_i'' + \beta_i \beta_j), \quad B^1_{i,j} = \frac{j}{i+j} (\alpha_i'' \beta_j + \beta_i \alpha_j'')$$

$$A^2_{i,j} = \frac{j}{i+j} (\beta_i \alpha_j' - \alpha_i'' \beta_j), \quad B^2_{i,j} = \frac{j}{i+j} (\beta_i \beta_j - \alpha_i'' \alpha_j'')$$

$$A^3_{i,j} = \frac{j}{i-j} (\beta_i \beta_j - \alpha_i'' \alpha_j'), \quad B^3_{i,j} = \frac{j}{i-j} (\beta_i \alpha_j' - \alpha_i'' \beta_j)$$

$$A^4_{i,j} = -\frac{j}{i-j} (\beta_i \alpha_j' + \alpha_i'' \beta_j), \quad B^4_{i,j} = -\frac{j}{i-j} (\beta_i \beta_j + \alpha_i'' \alpha_j'')$$

$$\alpha_1' = \alpha_0 + \alpha_1, \quad \alpha_k' = \alpha_k$$

$$\alpha_1'' = \alpha_0 - \alpha_1, \quad \alpha_k'' = -\alpha_k \quad (k=2, 3, \dots, \nu)$$

これより応力, 変位成分の式に表われる複素解析関数 $\phi_k(z_k)$ およびその導関数 $\phi_k'(z_k)$ は, 若干の計算ののち最終的につぎのように求められる^{12), 13)}。

$$\phi_k(z_k) = \Gamma_k \ln \zeta_k + \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{2\nu} \Gamma_{km} \zeta_k^{-m}$$

$$\phi_k'(z_k) = \frac{1}{I_k} \left(\frac{\Gamma_k}{\zeta_k} - \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{2\nu} m \Gamma_{km} \zeta_k^{-(m+1)} \right) \quad \dots\dots\dots(4.14)$$

ここに,

$$\Gamma_{1m} = (\mu_2 - \mu_3 \lambda_2 \lambda_3) \bar{a}_m + (\lambda_2 \lambda_3 - 1) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2) \bar{c}_m$$

$$\Gamma_{2m} = (\mu_3 \lambda_1 \lambda_3 - \mu_1) \bar{a}_m + (1 - \lambda_1 \lambda_3) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) \bar{c}_m$$

$$\Gamma_{3m} = (\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) \bar{a}_m + (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{b}_m + (\mu_2 - \mu_1) \bar{c}_m$$

$$(m=1, 2, \dots, 2\nu)$$

$$d = \mu_2 - \mu_1 + \lambda_2 \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) + \lambda_1 \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2)$$

$$I_k = \frac{d z_k}{d \zeta_k}, \quad (k=1, 2, 3)$$

上式中の複素係数 \bar{a}_m, \bar{b}_m および \bar{c}_m は、式 (4.9) の M_m, N_m との間につきの関係がある。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_m &= \frac{w_0}{4} \cos \varphi_0 (M_m^1 + iN_m^1), \\ \bar{b}_m &= \frac{w_0}{4} \cos \varphi_0 (M_m^2 + iN_m^2), \\ \bar{c}_m &= \frac{w_0}{4} \cos \varphi_0 (M_m^3 + iN_m^3), \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.16)$$

$(m=1, 2, \dots, 2\nu)$

なお、式 (4.14) の複素係数 $\Gamma_k, (k=1, 2, 3)$ はデカルト座標系の原点Oに作用した集中荷重に対応するような複素応力関数の係数であって、この係数 Γ_k は付録に示したような操作によって決定することができる。

したがって、式 (4.10)~(4.16) および式 (4.4)~(4.6) により、式 (4.1) で与えられる断面形状の坑道に沿う面内応力および変位を求めることができる。なお、坑道に沿っての面外 (z 軸) 方向に作用するせん断応力 $\tau_{\beta z}$ および面外変位 $w_{\beta z}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\beta z} &= -\tau_{xz} \sin \theta' + \tau_{yz} \cos \theta' \\ w_{\beta z} &= w \tan \theta' = w \times \frac{x_0}{y_0} \\ \theta' &= \tan^{-1} \left(\frac{dx_0}{dy_0} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.17)$$

以上によって、坑道の境界上に沿った坑道周辺での応力、変位がすべて求められる。したがって 3. で求めた応力と、この節で得た応力を加え合わせれば、表記の水平坑道周辺での重力による応力状態が計算できることになる。

5. 数値計算例

ここでは概念的に理解しやすいように、主弾性係数(ヤング係数)を $E_1=E_2, E_3$, ポアソン比を $\nu_{23}=\nu_{31}, \nu_{12}$, さらに、せん断弾性係数(剛性係数)を

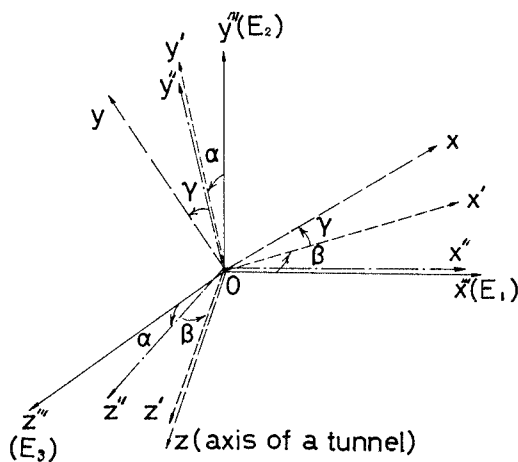


図-2 主弾性軸方向と坑道軸との関係

$$\left. \begin{aligned} 1/G_{23} &= 1/G_{31} = (1+2\nu_{23})/E_1 + 1/E_3 \\ 1/G_{12} &= (1+2\nu_{12})/E_1 + 1/E_2 \end{aligned} \right\} \dots(5.1)$$

で与えられるような横等方性の異方性弾性体を考える。また、これらの主弾性係数 E_1, E_2 および E_3 の方向は、

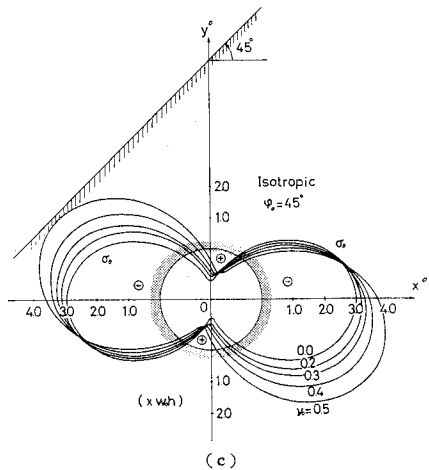
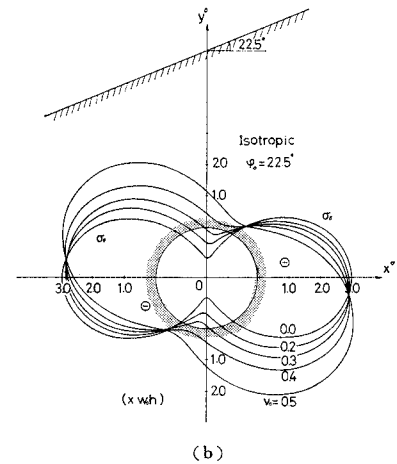
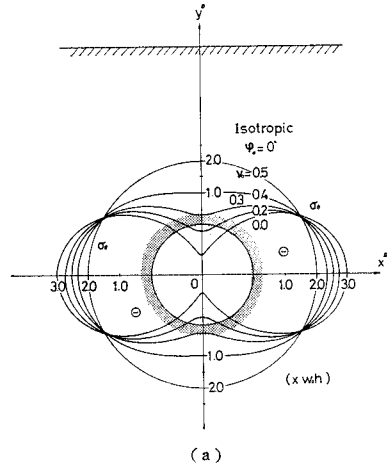


図-3 等方性弾性体内の円形坑道周縁の応力分布

図-2 に示すように、座標回転を行なう前のデカルト座標系 (x'', y'', z'') の軸方向と一致しているものとしよう¹²⁾。

まず最初に、対象とする岩盤を等質等方の弾性体とした場合の重力によって生じる円孔周縁の接線方向直応力を、ポアソン比 ν_0 をパラメーターとして図示したものが図-3 である。図-3 (b), (c) は地表面がそれぞれ $\varphi_0 = 22.5^\circ, 45^\circ$ の傾斜面をなす場合のものである。これらの場合の計算は従来までに示された理論式¹¹⁾から求めることができるものであるが、この図より地表面が水平である場合、ポアソン比 ν_0 の影響によって円孔周縁の応力分布は顕著な差異を示す。しかしながら地表面の傾斜角 φ_0 が大きくなるにつれてポアソン比の変化はそれほど大きな影響を与えず、とくに $\varphi_0 = 45^\circ$ ではポアソン比が大きくなるにつれて、円孔周縁の応力分布は山側下部および谷側上部の位置の圧縮応力が多少増大する程度であることが指摘できる。なお、等質等方の場合に対し、伊藤は双極座標を使って地表面の影響ならびに坑道の掘削によって除かれる岩塊の重量の影響を考慮に入れた厳密解を与えているが⁴⁾、それらの結果 ($h=10a, \nu_0=0.2$ の場合) と上記のものを比較すると、水平地表面の場合 ($\varphi_0=0^\circ$) にはほとんど差異はないが、傾斜角 φ_0 が 45° のものに対しては大きいところで $\pm 5\%$ 程度の差が認められる。

つぎに異方性弾性係数比 $e = E_1/E_3 (= E_2/E_3)$ が 3.0 でポアソン比 $\nu_{23} = \nu_{31} = 0.15, \nu_{12} = 0.25$ で与えられるような異方性弾性岩盤に円形の坑道を開削した場合に、重力によって円孔周縁に生じる応力分布を 図-4 (a), (b), (c) に示す。図-4 (a) は水平な地表面を有する場合に、主弾性軸が紙面に対して面外回転した場合の接線方向の直応力 σ_θ の分布図である。 $\alpha = 45^\circ, \beta = \gamma = 0^\circ$ あるいは $\beta = 45^\circ, \alpha = \gamma = 0^\circ$ の場合には σ_θ の他に面外せん断応力 $\tau_{\theta z}$ が作用することになる。図-4 (b), (c) は地表面が $\varphi_0 = 45^\circ$ の傾斜をなす場合の同様の応力分布を図示したものである。この図より、 y 軸を中心軸にして主弾性軸が面外回転する場合 (図-4 (b)) と x 軸を中心軸にして面外回転をする場合 (図-4 (c)) では圧縮応力の卓越する位置および大きさに顕著な差が生じることが注目される。図-5 は異方性弾性係数比 e が 1.0~10.0 に変化する場合の円孔周縁の応力分布の一例である。この例では地表面は水平とし、かつ主弾性軸と座標系 (x, y, z) の軸とは一致しているものとした。

つぎに、一定傾斜の地表面を有する半無限異方性弾性体に任意形状の坑道を開削した場合の重力によって生じる応力分布の一例として、矩形の坑道の場合に対する孔周縁の応力分布を展開図として 図-6 (a), (b), (c) に示した。これらは、それぞれ 図-4 (a), (b), (c) の円

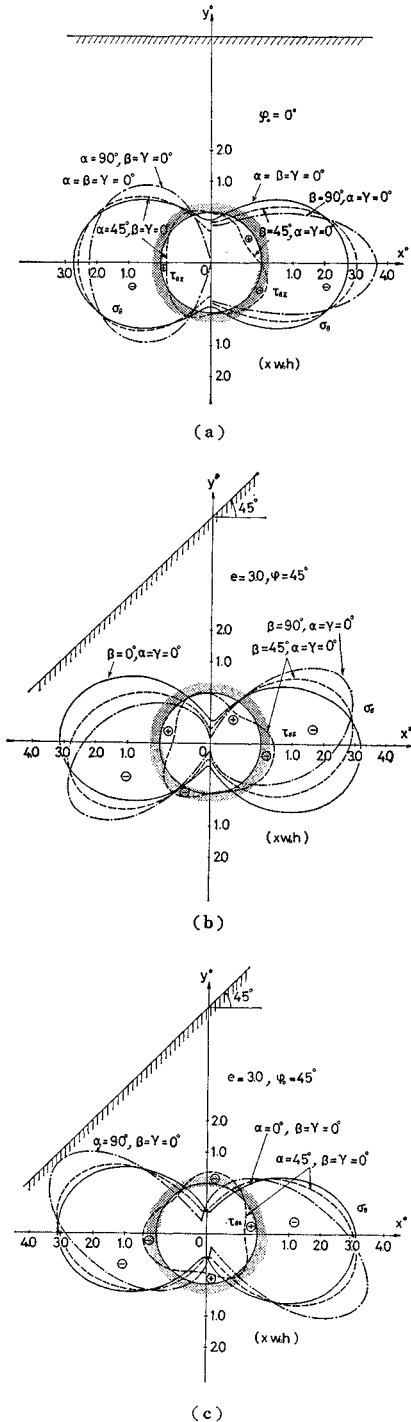


図-4 主弾性軸が面外回転した場合の円形坑道周縁の応力分布

孔の場合の応力分布に対応するような異方性弾性軸方向をもったものである。これらの図を比較すると、応力分布の傾向はだいたいにおいて類似しているが、当然のことながら、矩形孔の場合 (つまり隅角部の曲率半径 r_0 が

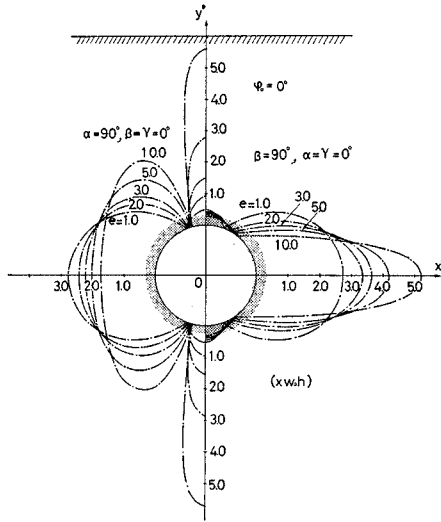


図-5 主弾性係数比 $e = E_1/E_3 (=E_2/E_3)$ が変化した場合の円形坑道周縁の応力分布

小さい場合)の方が相当大きな応力集中を生じていることがわかる。

6. 結 び

孔径に比し十分深い位置にある任意形状の坑道を含む半無限異方性弾性体の重力による応力状態についての理論的な解析を行ない、代表的な異方性弾性体として横等方性体を取りあげ、任意方向にその主軸が傾斜している場合の計算例を二、三示した。重力のみによる応力状態だけを取り扱った円孔の場合の計算結果だけをみても、地表面の傾斜角あるいは弾性定数の変化により、その分布状態にはかなりの差異がみとめられる。しかるに、実際にはここで設けた仮定の他に、もっと多くの複雑な地山状態のところらに坑道の開削が行なわれることを考えるとき、Mindlin もかつて指摘しているように、坑道周辺での応力状態を適確に把握するためには、実際の地山での応力測定を行なうことが非常に重要であるといえよう。

参 考 文 献

- 1) Yamaguti, N. : On the Stresses Around a Horizontal Circular Hole in Gravitating Elastic Solid, 土木学会誌, 15, 4 (昭和4年), pp. 291~303.
- 2) 安蔵善之輔 : 水平地表面に接して一円孔を持った重力体中の応力について, 九州大学工学彙報, 12, 3 (1938), pp. 145-160.
- 3) Mindlin, R.D. : Stress Distribution Around a Tunnel, Proc. ASCE, Apr. (1939), pp. 619-642.
- 4) 伊藤富雄 : 傾斜面の下に掘ったトンネルの周辺応力について, 土木学会誌, 36, 2 (昭和26年), pp. 77-80.
- 5) Nishimura, G. and Takayama, T. : On the Stress Distribution in the Vicinity of a Horizontal Circular Hole in a Gravitating Wedge-Shaped Elastic Solid, 地震研究所彙報, 10, 3 (1932), pp. 723-765.
- 6) 杉原武徳 : 楕円形水平坑道の周囲に於ける土圧, 日本鉱業会誌, 49, 3 (昭和8年), pp. 147-164, pp. 712-721.
- 7) 小田英一 : 巻立楕円形トンネル周辺の応力分布について, 土木学会論文集, 24 (昭和30年), pp. 12-24.
- 8) 岡本舜三 : 素掘坑の強さに関する弾性学的考察, 土木学会論文集 3 (昭和24年), pp. 60-79, pp. 159-174.
- 9) Yu, Yi-Yuan : Gravitational Stresses on Deep Tunnels, J. Appl. Mech., 19 Dec. (1952), pp. 537-542.
- 10) 石田 誠 : 水平地表面下にうがられた円断面坑道周縁の応力, 日本機械学会論文集, 7 (昭和32年), pp. 474-479.
- 11) Yamamoto, M. and Morichi, S. : Two-Dimensional Photoelastic Experiment made by Gelatine Gel, 土木学会論文集, 144 (昭和42年), pp. 39-47.
- 12) 丹羽義次・小林昭一・平島健一 : 三次元直交異方性弾性岩盤内の円形坑道周辺の応力および変形, 土木学会論文報告集, 173 (昭和45年), pp. 7-17.
- 13) 丹羽義次・小林昭一・平島健一 : 三次元異方性弾性岩盤内に開削された任意形状の坑道の周辺における応力状態, 材料, 19, 193 (昭和45年), pp. 138-144.
- 14) Lekhnitskii, S.G. : Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, San-Francisco (1963) pp. 103-158.
- 15) Heller, S.R. Jr., Brock, J.S. and Bart, R. : The

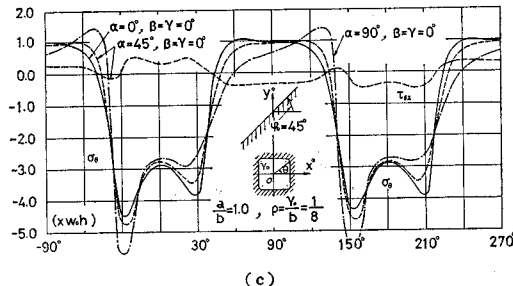
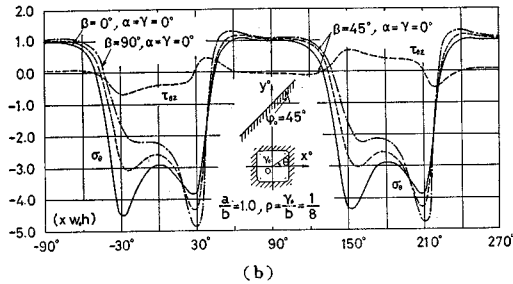
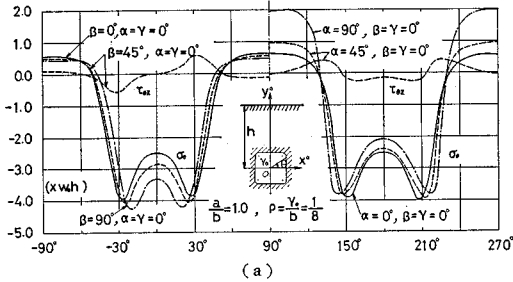


図-6 主弾性軸が面外回転した場合の矩形坑道周縁の応力分布 ($\nu=7$ まで採用)

Stresses Around a Rectangular Opening with Rounded Corners in a Uniformly Loaded Plate, Proc. 3rd U.S. Nation. Congr. Appl. Mech. (1958) pp. 357-368.

- 16) Green, A.E. and Zerna, W.: Theoretical Elasticity, Second ed., Oxford (1968) p. 323.
- 17) 前出 14), p. 156.
- 18) Niwa, Y. and Hirashima, K.: Stress Distribution Around a Tunnel with an Arbitrary Cross Section Excavated in Anisotropic Elastic Ground, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., 32, Part II, (1970) pp. 175-194.

付 録

デカルト座標系 (x, y, z) の原点 O に、おのおのの軸方向に向って作用する集中力をそれぞれ Q_x, Q_y および Q_z とすれば、異方性弾性体内に生じる変位および応力を求めるための複素解析関数 $\phi_k(z_k)$ および $\phi_k'(z_k)$ はつぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(z_k) &= \Gamma_k \ln \zeta_k \\ \phi_k'(z_k) &= \frac{1}{I_k} \cdot \frac{\Gamma_k}{\zeta_k} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.1)$$

ここに、 Γ_k は複素定数で、 Q_x, Q_y, Q_z との間につぎのような関係がある¹⁷⁾。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_1 + \Gamma_2 + \lambda_3 \Gamma_3 - \bar{\Gamma}_1 - \bar{\Gamma}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\Gamma}_3 &= -\frac{Q_y}{2\pi} i \\ \mu_1 \Gamma_1 + \mu_2 \Gamma_2 + \mu_3 \lambda_3 \Gamma_3 - \bar{\mu}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{\mu}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{\mu}_3 \bar{\lambda}_3 \bar{\Gamma}_3 &= \frac{Q_x}{2\pi} i \\ \lambda_1 \Gamma_1 + \lambda_2 \Gamma_2 + \Gamma_3 - \bar{\lambda}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{\Gamma}_3 &= \frac{Q_z}{2\pi} i \\ \rho_1 \Gamma_1 + \rho_2 \Gamma_2 + \rho_3 \Gamma_3 - \bar{\rho}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{\rho}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{\rho}_3 \bar{\Gamma}_3 &= 0 \\ q_1 \Gamma_1 + q_2 \bar{\Gamma}_2 + q_3 \Gamma_3 - \bar{q}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{q}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{q}_3 \bar{\Gamma}_3 &= 0 \\ r_1 \Gamma_1 + r_2 \Gamma_2 + r_3 \Gamma_3 - \bar{r}_1 \bar{\Gamma}_1 - \bar{r}_2 \bar{\Gamma}_2 - \bar{r}_3 \bar{\Gamma}_3 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.2)$$

したがって、この複素係数の連立一次方程式を解けば、 $\Gamma_k, (k=1, 2, 3)$ が比較的簡単に求められる。しかるに、いま考えている問題では、 Q_x, Q_y および Q_z はそれぞれ

れ M_0^2, M_0^1 および M_0^3 により、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= \frac{1}{2\theta} w_0 \cos \varphi_0 \cdot M_0^2 = \frac{1}{2} w_0 \sin \varphi_0 \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \alpha_0^2 - \sum_{j=1}^{\nu} j(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right\} \\ Q_y &= \frac{1}{2\theta} w_0 \cos \varphi_0 \cdot M_0^1 = -\frac{1}{2} w_0 \cos \varphi_0 \cdot \\ &\quad \cdot \left\{ \alpha_0^2 - \sum_{j=1}^{\nu} j(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right\} \\ Q_z &= \frac{1}{2\theta} w_0 \cos \varphi_0 \cdot M_0^3 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.3)$$

なお、坑道の開削により、とり除かれる岩塊の重量による荷重を考慮に入れる場合には、 Q_x, Q_y および Q_z の他にさらに掘削重量に相当する集中荷重 P_0 の各座標軸方向の成分、つまり P_x, P_y および P_z が原点 O の位置に作用することになる。これらの値は、いま考えている問題ではつぎの式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= P_0 \sin \varphi_0, P_y = P_0 \cos \varphi_0, P_z = 0 \\ P_0 &= -w_0 \int_c y_0 dx_0 = w_0 \pi \left\{ \alpha_0^2 - \sum_{j=1}^{\nu} j(\alpha_j^2 + \beta_j^2) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (A.4)$$

しかしながら、この掘削による岩塊重量の除去を考慮する場合、 P_x, P_y および P_z によって式 (A.2) と類似の式より得られる複素係数 Γ_k を用いて、式 (A.1) の複素解析関数から応力、変位を求めただけでは不十分である。なぜならば、原点 O の位置に作用する集中力 P_x, P_y および P_z によって、仮定の坑道周縁には接線方向応力 の他に、法線方向の直応力およびせん断応力が同時に生じることになるからである。したがって、この法線方向の直応力、せん断応力を打消すようにさらに二、三の操作が必要になる¹⁸⁾。ここでは、この掘削によって生じる応力については考慮しない。

(1970. 4. 13・受付)