

## 河川蛇行の発生限界に関する研究

CONDITIONS FOR THE OCCURRENCE OF RIVER MEANDERS

鮎 川 登\*

By Noboru Sukegawa

## 1. はじめに

河川の蛇行現象は流心の変遷に伴う航路水深の維持の困難、取水口の機能低下、堤防の破堤や局所洗掘による河川災害など河川工学上の諸問題と密接に関係している。このような工学的な観点のほか自然地理学的な関心もあって河川の蛇行現象に関しては古くから観察が行なわれていた。そして地球の自転による偏向力、河道内の局所的な攪乱、流れの過剰エネルギー、水面の横振動などが蛇行の発生原因として考えられていた。Friedkin および木下は蛇行に関する実験を行ない、蛇行現象と河床形態が密接に関係していることを明らかにした。

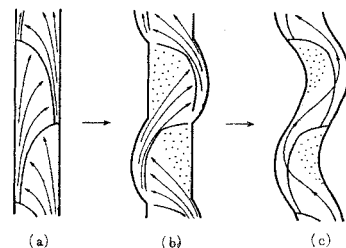
Friedkin<sup>1)</sup>[1945]は自由蛇行実験の観察結果に基づいて蛇行の発生過程をつぎのように記述している。「蛇行は局所的な河岸侵食とそれに続く sand bar の形成によって生ずる。すなわち、流れが河岸を侵食すると流れの輸送能力以上の土砂が流れに含まれることになり、堆積が生じ、侵食された河岸のすぐ下流に sand bar が形成される。そのために流れは偏向し、下流の対岸に当り河岸を侵食する。このようにして河道の蛇行が形成されていく。」

木下<sup>2)</sup>[1956]は側壁が侵食されない固定壁の直線水路においても水路床に形成される砂礫堆により流れが蛇行することを実験で示し、流れの蛇行をもたらす砂礫堆の形成が河道の蛇行の発生原因であると考えた。そして石狩川の河道変遷調査で河道の蛇行現象と砂礫堆が密接に関係していることを示した<sup>3)</sup>。なお、流れの蛇行あるいは河道の蛇行と河床形態が関係していることは古くは Engels<sup>4)</sup>[1905]や Jasmund<sup>5)</sup>[1911]などのドイツの河川技術者により<sup>6)</sup>、また最近ではソ連の Rossinsky および Kuzmin<sup>7)</sup>[1962]などによっても指摘されている。

最近、蛇行の発生に関して林<sup>8)</sup>[1969]および Callan-

der<sup>9)</sup>[1969]の研究が発表されたが、どちらの場合も河床形態すなわち砂礫堆の形成との関連において河床面の不安定問題として蛇行の発生が論じられている。林はポテンシャル流れの理論を適用し、河床面に3次元の微小攪拌を与えた場合の流れを解き、sand waves 乱クレストの下流側では流れがはく離するために流砂量が減少し、水路床が不安定性を示すと考え、3次元の微小攪乱の不安定領域を求めた。Callander は非定常流の運動方程式と連続方程式および流砂の運動方程式と連続方程式を基礎方程式として3次元の微小攪乱の安定、不安定を論じ、波長の長い微小攪乱に対してはすべての水路が不安定であることを示した。しかし、不安定領域は明確には示されていない。

本研究では流れに何かの原因で発生した攪乱により河床に砂礫堆が形成され、それによって流れが蛇行し、河岸が侵食され、河道の蛇行が生ずる(図-1)と考え、砂礫堆の形成条件をもって蛇行の発生条件であるとし、砂礫堆の形成条件を求めることを試みた。砂礫堆は河床面の不安定性が原因で形成されるものと考え、非定常流の運動方程式と連続方程式および流砂の運動方程式と連続方程式を用いて河床面の3次元の微小攪乱の中立的安定条件を求めた。つぎに、水面の微小攪乱の振幅と河床面の微小攪乱の振幅を関係づける方程式を導き、河床面の



(a) 砂礫堆の形成, 流れの蛇行  
(b) 河岸侵食, 河道蛇行の発生  
(c) 河道蛇行の形成

図-1 蛇行の形成過程

\* 正会員 工修 東京大学講師 工学部土木工学科

3次元の微小攪乱の安定および不安定領域を求めた。最後に、こうして得られた結果と林の理論結果とを比較し、また実験結果を用いて理論の妥当性を検討した。

## 2. 基礎方程式

移動床水路における3次元の微小攪乱の不安定問題を解くための基礎方程式として流水の運動方程式と連続方程式及び流砂の運動方程式と連続方程式が用いられる。

流水の運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g \frac{\partial z}{\partial x} + f_x \frac{u^2}{h} = 0 \quad \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial h}{\partial y} + g \frac{\partial z}{\partial y} + f_y \frac{v^2}{h} = 0 \quad \dots\dots\dots(2)$$

流水の連続方程式：

$$\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} + h \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(3)$$

流砂の連続方程式：

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_{bx}}{\partial x} + \frac{\partial q_{by}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 $xy$  面はある水平基準面内にとられ、 $x$  軸は流れの方向、 $y$  軸は流れと垂直に水路幅方向にとられている。 $z$  は  $xy$  面から水路床面までの高さ、 $h$  は水深、 $u, v$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向の流速、 $g$  は重力の加速度、 $f_x, f_y$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向の流れの抵抗係数、 $q_{bx}, q_{by}$  はそれぞれ  $x$  および  $y$  方向の単位幅当りの流砂量（容積比）である。

流砂の運動方程式である流砂量公式としては数多くの公式が提案されているが、粒径、比重など底質材料の特性が与えられている場合には流砂量は一般につきのように表わされる。

$$q_b = q_b(q, h); \quad q^2 = u^2 + v^2 \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 $q_b, q$  はそれぞれ流線方向の流砂量および流速である。 $x$  および  $y$  方向の流砂量  $q_{bx}$  および  $q_{by}$  は次式で与えられるものとする。

$$\left. \begin{aligned} q_{bx} &= q_b(q, h) \frac{u}{q} = q_{bx}(u, h) \\ q_{by} &= q_b(q, h) \frac{v}{q} = q_{by}(u, v, h) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(6)$$

式(6)を式(4)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + q_{x1} \frac{\partial u}{\partial x} + q_{x2} \frac{\partial h}{\partial x} + q_{y1} \frac{\partial u}{\partial y} \\ + q_{y2} \frac{\partial h}{\partial y} + q_{y3} \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots\dots(7) \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} q_{x1} &= \frac{\partial q_{bx}}{\partial u}, \quad q_{x2} = \frac{\partial q_{bx}}{\partial h}, \quad q_{y1} = \frac{\partial q_{by}}{\partial u}, \\ q_{y2} &= \frac{\partial q_{by}}{\partial h}, \quad q_{y3} = \frac{\partial q_{by}}{\partial v} \quad \dots\dots\dots(8) \end{aligned}$$

である。

いま、何かの原因で流れに微小攪乱が生じ、それによって水路床面に微小攪乱が生じた場合を考え、そのときの流速、水深および水路床高をつぎのように書くことにする。

$$u = U + u', \quad v = v', \quad h = H + h', \quad z = Z + z' \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 $U, H, Z$  はそれぞれ等流時の流速、水深および水路床高であり、 $u', v', h', z'$  はそれぞれ  $x$  方向の流速、 $y$  方向の流速、水深および水路床高の微小変動量を表わし、 $U \gg u', U \gg v', H \gg h', Z \gg z'$  とする。

式(9)を式(1)、(2)、(3)および(7)に代入し、2次の微小項を無視すると、微小変動量  $u', v', h'$  および  $z'$  に関する方程式としてつぎのような式が得られる。

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} + 2f_x \frac{U}{H} \right) u' \\ + \left( g \frac{\partial}{\partial x} + f_x \frac{U^2}{H^2} \right) h' + \left( g \frac{\partial}{\partial x} \right) z' = 0 \quad \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) v' + \left( g \frac{\partial}{\partial y} \right) h' + \left( g \frac{\partial}{\partial y} \right) z' = 0 \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\left( H \frac{\partial}{\partial x} \right) u' + \left( H \frac{\partial}{\partial y} \right) v' + \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) h' = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\begin{aligned} \left( q_{x1} \frac{\partial}{\partial x} + q_{y1} \frac{\partial}{\partial y} \right) u' + \left( q_{y3} \frac{\partial}{\partial y} \right) v' \\ + \left( q_{x2} \frac{\partial}{\partial x} + q_{y2} \frac{\partial}{\partial y} \right) h' + \left( \frac{\partial}{\partial t} \right) z' = 0 \quad \dots\dots\dots(13) \end{aligned}$$

式(10)~(13)から  $u', v', h'$  および  $z'$  のうちのいずれか3つの未知数を消去すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \left[ (Q_{x1} - Q_{x2}) \frac{\partial^6}{\partial x^5} + (Q_{y1} - Q_{y2}) \frac{\partial^6}{\partial x^5 \partial y} + (Q_{y3} - Q_{x2}) \frac{\partial^6}{\partial x^4 \partial y^2} - Q_{y2} \frac{\partial^6}{\partial x^3 \partial y^3} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ (1 - F_r^2 \right. \right. \\ \left. \left. + 4Q_{x1} - 3Q_{x2}) \frac{\partial^5}{\partial x^5} + (4Q_{y1} - 3Q_{y2}) \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} + (-3Q_{x2} + 4Q_{y3} + 1) \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} - 3Q_{y2} \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} \right\} \right. \\ \left. + \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ (3 - 5F_r^2 + 6Q_{x1} - 3Q_{x2}) \frac{\partial^4}{\partial x^4} + (6Q_{y1} - 3Q_{y2}) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (3 - 3Q_{x2} + 6Q_{y3}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \right. \\ \left. \left. - 3Q_{y2} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \right\} + \frac{1}{U^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left\{ (3 - 10F_r^2 + 4Q_{x1} - Q_{x2}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (4Q_{y1} - Q_{y2}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (3 - Q_{x2} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +4Q_{y3} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} - Q_{y2} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \Big\} + \frac{1}{U^4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} \Big\{ (1-10F_r^2 + Q_{x1}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + Q_{y1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (1+Q_{y3}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} \\
 & + \frac{1}{U^5} \frac{\partial^5}{\partial t^5} \Big( -5F_r^2 \frac{\partial}{\partial x} \Big) + \frac{1}{U^6} \frac{\partial^6}{\partial t^6} (-F_r^2) + \frac{f_x}{H} \Big[ (2Q_{x1} - 2Q_{x2}) \frac{\partial^5}{\partial x^5} + (2Q_{y1} - 2Q_{y2}) \frac{\partial^5}{\partial x^4 \partial y} \\
 & + (Q_{x1} - 4Q_{x2} + 3Q_{y3}) \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} + (Q_{y1} - 4Q_{y2}) \frac{\partial^5}{\partial x^2 \partial y^3} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \Big\{ (2-3F_r^2 + 6Q_{x1} - 4Q_{x2}) \frac{\partial^4}{\partial x^4} \\
 & + (6Q_{y1} - 4Q_{y2}) \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (4+2Q_{x1} - 8Q_{x2} + 10Q_{y3}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (2Q_{y1} - 8Q_{y2}) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \Big\} \\
 & + \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big\{ (4-13F_r^2 + 6Q_{x1} - 2Q_{x2}) \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (6Q_{y1} - 2Q_{y2}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (8+Q_{x1} - 4Q_{x2} + 11Q_{y3}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\
 & + (Q_{y1} - 4Q_{y2}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \Big\} + \frac{1}{U^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} \Big\{ (2-21F_r^2 + 2Q_{x1}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2Q_{y1} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + (4+4Q_{y3}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} \\
 & + \frac{1}{U^4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (-15F_r^2 \frac{\partial}{\partial x}) + \frac{1}{U^5} \frac{\partial^5}{\partial t^5} (-4F_r^2) \Big] + \frac{f_x^2}{H^2} \Big[ (2Q_{x1} - 4Q_{x2} + 2Q_{y3}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & + (2Q_{y1} - 4Q_{y2}) \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \frac{1}{U} \frac{\partial}{\partial t} \Big\{ -2F_r^2 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (4+2Q_{x1} - 4Q_{x2} + 6Q_{y3}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} \\
 & + (2Q_{y1} - 4Q_{y2}) \frac{\partial^3}{\partial y^3} \Big\} + \frac{1}{U^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Big\{ -8F_r^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4(1+Q_{y3}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} \Big\} + \frac{1}{U^3} \frac{\partial^3}{\partial t^3} (-10F_r^2) \\
 & + \frac{1}{U^4} \frac{\partial^4}{\partial t^4} (-4F_r^2) \Big] \Big] \phi = 0 \dots\dots\dots(14)
 \end{aligned}$$

ここで、 $\phi$  は  $u', v', h'$  および  $z'$  のうちのいずれかひとつの変数を表わす。また、 $F_r = U/\sqrt{gH}$  はフルード数であり、

$$\begin{aligned}
 Q_{x1} &= \frac{q_{x1}}{H}, \quad Q_{x2} = \frac{q_{x2}}{U}, \quad Q_{y1} = \frac{q_{y1}}{H}, \\
 Q_{y2} &= \frac{q_{y2}}{U}, \quad Q_{y3} = \frac{q_{y3}}{H} \dots\dots\dots(15)
 \end{aligned}$$

である。式 (14) が移動床水路における微小攪乱の基礎方程式である。

### 3. 水路床面の3次元の微小攪乱の中立の安定条件

次式で表わされる微小攪乱の安定限界を検討する。

$$\phi = \phi^* \exp \{ i(\alpha x + \beta y + r t) + r_1 t \} \dots\dots\dots(16)$$

ここで、 $\alpha = \pi/L$ ,  $\beta = \pi/B$ ,  $L$  は微小攪乱の半波長 (砂礫堆の長さ),  $B$  は水路幅である。 $\alpha, \beta, r, r_1$  は実数であり、 $i$  は虚数単位である。式 (16) で表わされる攪乱の振幅は  $\phi^* e^{r_1 t}$  であり、これが時間とともに減衰するか増大するか、すなわち、 $r_1 < 0$  であるか  $r_1 > 0$  であるかによって攪乱の安定、不安定が判定される。 $r_1 = 0$  のときは攪乱は時間的に減衰も増大もしない。この場合は中立の安定といわれ、攪乱の安定領域と不安定領域の境界を与える。 $r/\alpha$  は攪乱の伝播速度を与え、 $r/\alpha > 0$  のときは上流に、 $r/\alpha < 0$  のときは下流に伝播することを表わす。

ここでは、中立の安定の場合について考察する。式 (16) で  $r_1 = 0$  とし、式 (14) に代入する微小攪乱の中立の安定条件を与える式が得られる。実数部と虚数部に分けて整理するとつぎのようになる。

実数部：

$$\begin{aligned}
 (C_b + 1) & \Big[ F_r^2 C_b^5 + 4F_r^2 C_b^4 - \Big\{ 1 - 6F_r^2 + TQ_b \\
 & + (1+Q_b + 4F_r^2 W^2) \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \Big\} C_b^3 - \Big\{ 2 - 4F_r^2 \\
 & + \frac{19}{6} TQ_b + \Big( 2 + \frac{1}{6} TQ_b + 3Q_b \\
 & + 6F_r^2 W^2 \Big) \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \Big\} C_b^2 - \Big\{ 1 - F_r^2 + \frac{10}{3} TQ_b \\
 & + \Big( 1 + \frac{1}{3} TQ_b + 3Q_b + 2F_r^2 W^2 \Big) \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \\
 & - 4(1+Q_b) W^2 \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^4 \Big\} C_b - \Big\{ \frac{7}{6} TQ_b \\
 & + \Big( \frac{1}{6} T + 1 \Big) Q_b \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \\
 & - 2 \Big( \frac{4}{3} T + 1 \Big) Q_b W^2 \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^4 \Big] = 0 \dots\dots\dots(17)
 \end{aligned}$$

虚数部：

$$\begin{aligned}
 (C_b + 1)^2 & \Big[ 4F_r^2 C_b^3 + 7F_r^2 C_b^2 - \Big\{ 2 - 3F_r^2 \\
 & + 2TQ_b + 4(1+Q_b) \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \Big\} C_b \\
 & - \Big\{ \frac{7}{3} TQ_b + \Big( \frac{5}{3} T + 3 \Big) Q_b \Big( \frac{\beta}{\alpha} \Big)^2 \Big\} \Big] = 0 \\
 & \dots\dots\dots(18)
 \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
 C_b &= \frac{1}{U} \frac{r}{\alpha}, \quad W = \frac{f_x}{\beta H}, \quad Q_b = \frac{q_{bx}}{HU}, \\
 T &= 1 + \frac{2m}{1 - U_*^2/c^2} \dots\dots\dots(19)
 \end{aligned}$$

である。 $C_b$  は微小攪乱の伝播速度と流速の比を表わす無次元量、 $W$  は流れの抵抗に関する無次元量、 $Q_b$  は流

砂量と流量の比（土砂濃度）を表わす無次元量であり、 $T$  は  $U_* \gg U_{*c}$  のときは  $T=1+2m$  となり、流砂量公式として Brown 公式を用いる場合は  $T=5$ 、佐藤・吉川・芦田公式を用いる場合は  $T=3$  となる。なお、式(17) および (18) を導くさいに流砂量公式として 次式で表わされるものを用いた。

$$q_b = kU_*(U_*^2 - U_{*c}^2)^m \quad \dots\dots\dots(20)$$

ここで、 $q_b$  は単位幅当りの流砂量、 $U_*$  は摩擦速度、 $U_{*c}$  は底質の移動限界摩擦速度、 $k$  は底質の特性に関する係数、 $m$  は定数である。また抵抗公式としてはマニ

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{12 F_r^2 C_b^3 + 21 F_r^2 C_b^2 - 3(2-3 F_r^2 + 2 T Q_b) C_b - 7 T Q_b}{12(1+Q_b) C_b + (5 T + 9) Q_b} \quad \dots\dots\dots(22)$$

これを式 (17) に代入すると  $C_b$  に関する 6 次方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & [4 T F_r^2 Q_b^2 + (16 T F_r^4 W^2 + 4 T F_r^2 + 4 F_r^2) Q_b + 16 F_r^4 W^2 + 4 F_r^2] C_b^6 + \left[ -8 T Q_b^3 + \left( -32 T F_r^2 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{3} T^2 F_r^2 + \frac{59}{3} T F_r^2 - 16 T - 8 \right) Q_b^2 + \left( \frac{188}{3} T F_r^4 W^2 - 32 T F_r^2 W^2 - 32 F_r^2 W^2 + \frac{55}{3} T F_r^2 + 15 F_r^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 8 T - 16 \right) Q_b + 44 F_r^4 W^2 - 32 F_r^2 W^2 + 12 F_r^2 - 8 \right] C_b^5 + \left[ \left( -\frac{26}{3} T^2 - \frac{106}{3} T \right) Q_b^3 + \left( \frac{40}{3} T^2 F_r^2 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{328}{3} T F_r^2 W^2 - \frac{643}{18} T^2 F_r^2 + \frac{77}{2} T F_r^2 - \frac{26}{3} T^2 - \frac{208}{3} T - 26 \right) Q_b^2 + \left( \frac{274}{3} T F_r^4 W^2 - \frac{392}{3} T F_r^2 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - 72 F_r^2 W^2 + 31 T F_r^2 + 21 F_r^2 - 34 T - 42 \right) Q_b + 40 F_r^4 W^2 - 64 F_r^2 W^2 + 12 F_r^2 - 16 \right] C_b^4 + \left[ (16 T^2 W^2 \right. \\ & \left. - \frac{20}{9} T^3 - \frac{298}{9} T^2 - \frac{184}{3} T \right) Q_b^3 + \left( -\frac{800}{9} T^2 F_r^2 W^2 - 136 T F_r^2 W^2 + 16 T^2 W^2 + 32 T W^2 + \frac{65}{6} T^2 F_r^2 \right. \\ & \left. + \frac{115}{3} T F_r^2 - \frac{89}{3} T^2 - 108 T - 31 \right) Q_b^2 + \left( \frac{176}{3} T F_r^4 W^2 - \frac{484}{3} T F_r^2 W^2 + 32 T W^2 + 16 W^2 - 52 F_r^2 W^2 \right. \\ & \left. + 23 T F_r^2 + 13 F_r^2 - 44 T - 36 \right) Q_b + 12 F_r^4 W^2 - 32 F_r^2 W^2 + 16 W^2 + 4 F_r^2 - 8 \right] C_b^3 + \left[ \left( \frac{32}{3} T^3 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{190}{27} T^3 + \frac{136}{3} T^2 W^2 - \frac{221}{6} T^2 - \frac{313}{6} T \right) Q_b^3 + \left( -\frac{802}{9} T^2 F_r^2 W^2 - \frac{218}{3} T F_r^2 W^2 + \frac{176}{3} T^2 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{160}{3} T W^2 + \frac{15}{2} T^2 F_r^2 + \frac{109}{6} T F_r^2 - \frac{100}{3} T^2 - 72 T - 16 \right) Q_b^2 + \left( 14 T F_r^4 W^2 - \frac{188}{3} T F_r^2 W^2 - 12 F_r^2 W^2 \right. \right. \\ & \left. \left. + 48 T W^2 + 8 W^2 + \frac{19}{3} T F_r^2 + 3 F_r^2 - 18 T - 10 \right) Q_b \right] C_b^2 + \left[ \left( \frac{224}{9} T^3 W^2 + \frac{364}{9} T^2 W^2 - \frac{200}{27} T^3 \right. \right. \\ & \left. \left. - 29 T^2 - \frac{65}{3} T \right) Q_b^3 + \left( -\frac{266}{9} T^2 F_r^2 W^2 - 14 T F_r^2 W^2 + \frac{140}{3} T^2 W^2 + \frac{56}{3} T W^2 + \frac{35}{18} T^2 F_r^2 + \frac{7}{2} T F_r^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{37}{3} T^2 - \frac{52}{3} T - 3 \right) Q_b^2 \right] C_b + \left[ \frac{98 T^2 (4 T + 3)}{27} W^2 - \frac{7 T (5 T + 9) (4 T + 3)}{54} \right] Q_b^3 = 0 \quad \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

式 (23) の解を

$$C_b = a + b Q_b + c Q_b^2 + \dots \quad \dots\dots\dots(24)$$

とおき、これを式 (23) に代入し、 $Q_b$  の次数ごとに整理し、 $C_b$  の第 1 近似解を求めるとつぎのようになる。

$$C_b = -1 + \frac{2}{F_r^2} + O(Q_b)$$

$$C_b = -1 + \frac{F_r^2 W^2 + W \sqrt{F_r^4 W^2 + 32 F_r^2 W^2 + 8}}{2(4 F_r^2 W^2 + 1)} + O(Q_b)$$

$$C_b = -1 + \frac{F_r^2 W^2 - W \sqrt{F_r^4 W^2 + 32 F_r^2 W^2 + 8}}{2(4 F_r^2 W^2 + 1)} + O(Q_b)$$

ングの公式を用い

$$U_* = \frac{n \sqrt{g}}{H^{1/6}} U \quad \dots\dots\dots(21)$$

とした。ただし、 $Q_{y_1}$  および  $Q_{y_2}$  は他の量に比し微小なので無視した。

微小攪乱の中立の安定条件を求めるためには式 (17) と (18) を連立させて  $\beta/\alpha$  と  $C_b$  について解かなければならない。 $C_b = -1$  が解であることはすぐわかるが、これは水路床面の微小攪乱の安定には関係しないと考えられるので、他の解を求める。式 (18) から

$$C_b = -\frac{7}{6} T Q_b + O(Q_b^2)$$

$$C_b = \frac{4 T + 3}{3(F_r^2 - 2)} Q_b + O(Q_b^2)$$

$$C_b = \frac{28 T W^2 - 5 T - 9}{12(3 F_r^2 W^2 - 2 W^2 + 1)} Q_b + O(Q_b^2)$$

水路床面の微小攪乱は土砂の移動がない場合は伝播しない、すなわち  $Q_b = 0$  のときは  $C_b = 0$  となるべきであるから、上記の第 1 近似解のうち下の 3 つが水路床面の中立の安定の微小攪乱の伝播速度を表わすものと考えられる。したがって、水路床面の中立の安定の微小攪乱の伝播速度の第 1 近似解はつぎのようになる。

$$C_{b_1} = -\frac{7}{6} T Q_b, C_{b_2} = \frac{4 T + 3}{3(F_r^2 - 2)} Q_b,$$

$$C_{b_3} = \frac{28 T W^2 - 5 T - 9}{12(3 F_r^2 W^2 - 2 W^2 + 1)} Q_b \quad \dots\dots(25)$$

$Q_b$  が小さいときは式 (25) によると  $C_b$  も小さくなるので、水路床面の微小攪乱の移動による非定常性は無視でき、流れは近似的に定常であると考えてもよいと思われる。その場合には式 (1)~(3) で非定常項が無視される。そして、式 (17) および (18) を導いたと同様にしてつぎのような方程式が得られる。

実数部：

$$\left\{ 1 - F_r^2 + (1 + 2 F_r^2 W^2) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 - 4 W^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^4 \right\} C_b$$

$$+ \frac{7}{6} T Q_b + \frac{T + 6}{6} Q_b \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2$$

$$- \frac{2(4 T + 3)}{3} Q_b W^2 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^4 = 0 \quad \dots\dots(26)$$

虚数部：

$$\left\{ 2 - 3 F_r^2 + 4 \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^2 \right\} C_b + \frac{7}{3} T Q_b$$

$$+ \frac{5 T + 9}{3} Q_b \left( \frac{\beta}{\alpha} \right) = 0 \quad \dots\dots(27)$$

式 (26) と (27) から  $\beta/\alpha$  を消去すると、 $C_b$  に関する 3 次方程式が得られる。その式を解いて  $C_b$  を求めると次式が得られる。

$$C_{b_1} = -\frac{7}{6} T Q_b, C_{b_2} = \frac{4 T + 3}{3(F_r^2 - 2)} Q_b,$$

$$C_{b_3} = \frac{28 T W^2 - 5 T - 9}{12(3 F_r^2 W^2 - 2 W^2 + 1)} Q_b \quad \dots\dots(28)$$

この場合は流れの非定常項を無視したので、非定常項は流砂の連続方程式にしか含まれていない。したがって中立の微小攪乱の伝播速度としては水路床面の微小攪乱のものだけが求められていることになる。式 (25) と (28) をくらべると、水路床面の中立の微小攪乱の伝播速度については流れが定常であるとしたときの解は非定常流としたときの解の第 1 近似解になっていることがわかる。式 (28) を式 (27) に代入し、 $\beta/\alpha$  を求めるとつぎようになる。

$$\left( \frac{\beta}{\alpha} \right)_1 = \sqrt{\frac{7 T}{6(T-1)}} F_r, \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)_2 = 1,$$

$$\left( \frac{\beta}{\alpha} \right)_3 = \sqrt{\frac{5 T F_r^2 + 9 F_r^2 + 6(T-1)}{20 T F_r^2 W^2 + 36 F_r^2 W^2 + 24(T-1) W^2}} \quad \dots\dots(29)$$

式 (29) で  $(\beta/\alpha)_3$  は虚根であり、物理的な意味をもたない。したがって、土砂濃度が小さく、流れが定常であると仮定した場合の水路床面の 3 次元の微小攪乱の中立の安定条件すなわち流れが非定常であるとした場合の水路床面の 3 次元の微小攪乱の中立の安定条件の第 1 近似解はつぎようになる。

$$C_b = -\frac{7}{6} T Q_b : \frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{7 T}{6(T-1)}} F_r \quad \dots\dots(30)$$

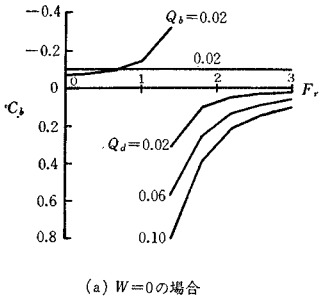
$$C_b = \frac{4 T + 3}{3(F_r^2 - 2)} Q_b : \frac{\beta}{\alpha} = 1 \quad \dots\dots(31)$$

つぎに、式 (22) と (23) を数値計算によって解き、水路床面の中立の安定条件を与える  $C_b$  と  $F_r$  および  $\beta/\alpha$  と  $F_r$  の関係を求め、式 (30) および (31) と比較しよう。式 (22) および (23) にパラメーターとして含まれる  $Q_b$  と  $W$  の値は実験データによるとつぎのような範囲である。 $Q_b$  は流砂量と流量の比 (土砂濃度 : 容積比) を表わす無次元量であり、Gilbert<sup>10)</sup> および Guy<sup>11)</sup> の実験データによると  $Q_b < 0.03$ 、木下<sup>12)</sup> の実験データによると  $Q_b < 0.20$  である。なお、 $F_r$  が大きくなると  $Q_b$  も大きくなる傾向があるが、ばらつきが非常に大きく  $Q_b$  と  $F_r$  の間には明確な関係は存在しない。 $F_r < 1.0$  のときはいずれの実験データでも  $Q_b < 0.01$  である。河川の場合については流砂量の測定データがなく確かなことはわからないが、Brown の流砂量公式により計算した結果によると  $Q_b < 0.01$  である。 $W$  は流れの抵抗に関する無次元量で次式で表わされる。

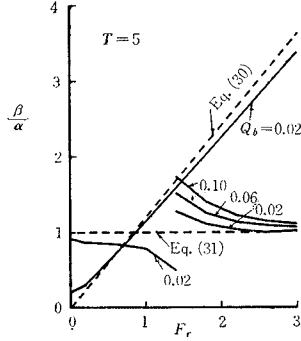
$$W = \frac{f_x}{\beta H} = \frac{f_x}{\pi} \frac{B}{H}; f_x = \left( \frac{U_*}{U} \right)^2 \quad \dots\dots(32)$$

Gilbert および Guy らの実験データによると  $W$  は 0.1 以下、大部分は 0.05 以下であり、木下の実験データによると 0.5 以下、大部分は 0.1 以下である。以上の考察に基づいてパラメーターとして  $Q_b$  を 0.02, 0.04, 0.06, 0.10 および 0.20 の 5 通り、 $W$  を 0, 0.1, 0.3 および 0.5 の 4 通りに変化させて  $0 \leq F_r \leq 3.0$  の範囲で式 (22) と (23) を数値計算により解き、 $C_b$  と  $\beta/\alpha$  を求めた。ただし、流砂量公式としては Brown 公式を用い、 $T=5$  とした。計算結果の例を図-2 および 図-3 に示す。なお、 $Q_b=0$  の場合は  $C_b$  は 0 になるが、 $\beta/\alpha$  は式 (30) および (31) と同じになる。図-3 には式 (30) および (31) で与えられる  $\beta/\alpha$  と  $F_r$  の関係が点線で示されている。

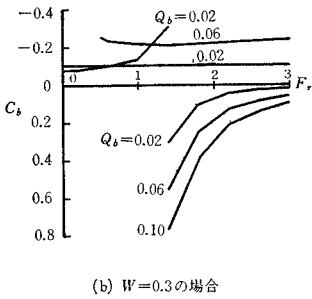
計算結果によると式 (30) に対応する中立の安定条件は  $Q_b$  が大きくなると存在しなくなる。式 (30) に対応する中立の安定条件が存在するのは  $W=0$  のときは  $Q_b$  が 0.04 以下、 $W=0.3$  のときは 0.06 以下、 $W=0.5$  のときは 0.10 以下の場合である。また  $F_r < 1.4$  の範囲では式 (31) に対応する中立の安定条件は  $Q_b$  が 0.04 以上になると存在しなくなる。 $Q_b$  が大きくなると  $Q_b^2$  以上の項も影響するようになり、中立の安定条件は式 (30) および (31) で与えられる第 1 近似解の関係からずれてくるが、図-3 によると  $Q_b$  が 0.02 以下の場合には中立の安定条件は式 (30) および (31) の関係で近似しうることがわかる。さらに、 $Q_b$  が 0.02 以下の場合には中立の安定条件は  $W$  の値にはほとんど影響されず、 $W=0$ ,



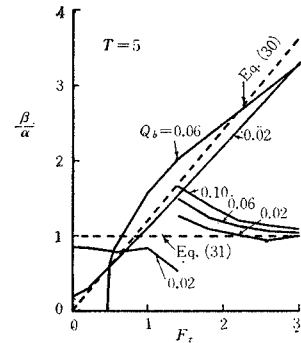
(a)  $W=0$ の場合



(a)  $W=0$ の場合



(b)  $W=0.3$ の場合



(b)  $W=0.3$ の場合

図-2 中立の微小攪乱の伝播速度

図-3 微小攪乱の中立の安定曲線

微小攪乱が、

$$[u', v', h', z'] = [U^*(t), V^*(t), H^*(t), Z^*(t)] \cdot \sin(\alpha x + \beta y + \tau t) \dots\dots\dots(36)$$

で表されるものとし、式(33)~(35)から  $u'$  と  $v'$  を消した式に式(36)を代入して整理すると次式が得られる。

$$\frac{Z^*}{A^*} = 1 - \frac{1 + (\beta/\alpha)^2}{F_r^2} \dots\dots\dots(37)$$

ここで、 $A^* = H^* + Z^*$  は水面の微小攪乱の振幅

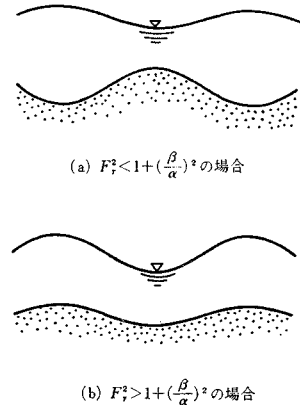


図-4 水面波と水路床波の関係

すなわち微小攪乱の抵抗項は無視してもよいことがわかる。実際河川の場合には  $Q_b$  は 0.01 以下であると考えられるので、河床面の3次元の微小攪乱の中立の安定条件は第1近似解である式(30)および(31)の関係で十分であり、流れに関しては砂礫堆の移動による非定常性は考慮しなくてもよく、また微小攪乱の抵抗項も無視してよいことがわかる。

4. 水路床面の3次元の微小攪乱の不安定領域

前節において通常の条件のもとでは、すなわち  $Q_b$  が 0.02 以下の場合には流れは定常であると考えてよく、また微小攪乱の抵抗項は無視してもよいことがわかったので、本節では非定常項および抵抗項を無視した微小攪乱に関する基礎方程式を用いて水路床面の3次元の微小攪乱の不安定領域について考察する。

式(10)~(12)で非定常項および抵抗項を無視すると次式が得られる。

$$U \frac{\partial u'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial x} + g \frac{\partial z'}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(33)$$

$$U \frac{\partial v'}{\partial x} + g \frac{\partial h'}{\partial y} + g \frac{\partial z'}{\partial y} = 0 \dots\dots\dots(34)$$

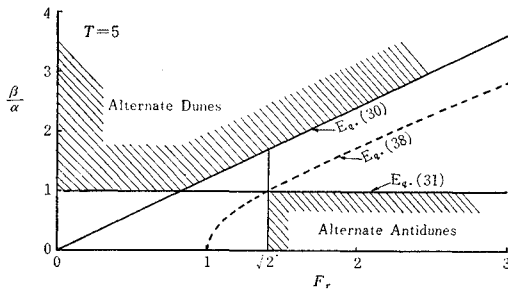
$$H \frac{\partial u'}{\partial x} + H \frac{\partial v'}{\partial y} + U \frac{\partial h'}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(35)$$

である。

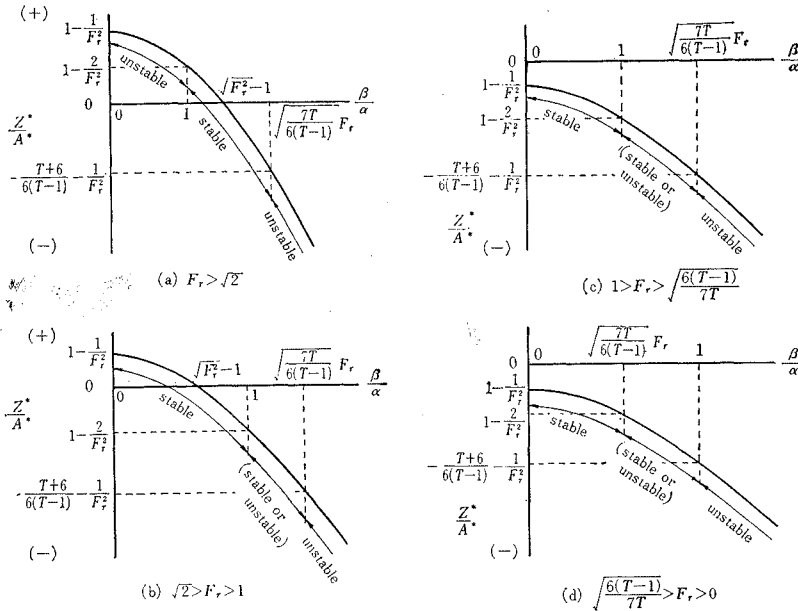
式(37)によると  $F_r^2 < 1 + (\beta/\alpha)^2$  のときは  $Z^*/A^* < 0$  となり、水面波と水路床波は逆位相になる(図-4(a))。  $F_r^2 > 1 + (\beta/\alpha)^2$  のときは  $Z^*/A^* > 0$  となり、水面波と水路床波は同位相になる(図-4(b))。すなわち、水面波と水路床波が逆位相になるか同位相になるかの境界は次式で与えられる。

$$F_r^2 = 1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \dots\dots\dots(38)$$

そして、この場合は  $Z^*/A^* = 0$  となり flat bed に対応する。水路床面の攪乱は流水中の攪乱(ここでは水面の攪乱で代表させる)が水路床に伝達されて発生発達するものと仮定し、攪乱の増幅率  $Z^*/A^*$  の絶対値がある限界値より大きくなると、水面の攪乱の影響が水路床面に現われ、水路床面に攪乱が発生するものとする。そしてこの限界値は前節で求めた中立の安定条件によって決定されるものと考え、水路床面の3次元の微小攪乱の中立の安定条件を与える式(30)および(31)と水面波の振幅と水路床波の振幅を関係づける式(37)を用いて水路床面の3次元の微小攪乱の安定および不安定の領域について考察する。式(30)、(31)および(38)で与えられる関係を図示すると図-5 のようになる。  $F_r > \sqrt{2}$  の場合について式(37)により  $Z^*/A^*$  と  $\beta/\alpha$  の関係を



図—5 砂礫堆の形成領域



図—6 水面波と水路床波の振幅の関係

示すと 図—6 (a) のようになる。この場合は  $Z^*/A^* > 0$  (図—5 の点線の右側の領域) すなわち 水面波と 水路床波が同位相になる領域では中立の安定条件は  $F_r > \sqrt{2}$  の範囲で  $\beta/\alpha = 1$  ( $C_b > 0$ ) により与えられる。これに対応する  $Z^*/A^*$  の値は式 (37) から  $Z^*/A^* = 1 - 2/F_r^2$  となり、これが上記の限界値を与える。すなわち、 $Z^*/A^*$  の値が  $1 - 2/F_r^2$  より大きくなると、水路床面は水面波と同位相の上流に伝播する 3 次元の微小攪乱に対して不安定になるものと考えられる。この領域は  $\beta/\alpha$  で考えると、式 (37) あるいは 図—6 (a) から明らかのように  $\beta/\alpha < 1$  となる。 $\sqrt{2} > F_r > 1$ ,  $Z^*/A^* > 0$  の領域では中立の安定条件は存在しないので、この領域は安定である (図—6 (b))。  $F_r > 1$ ,  $Z^*/A^* < 0$  の領域 (図—5 の点線の左側の領域) では中立の安定条件は式 (30) で与えられ、これに対応する  $Z^*/A^*$  の値は  $Z^*/A^* = -(T+6)/6(T-1) - 1/F_r^2$  となる。したがって、 $Z^*/A^*$  の絶対値が  $(T+6)/6(T-1) + 1/F_r^2$  より大きくなると水路床面は水面波と逆位相の下流に伝播する 3 次元の微

小攪乱に対して不安定になるものと考えられる (図—6 (a) および (b))。この領域は  $\beta/\alpha$  で考えると、 $\beta/\alpha > \sqrt{7T/6(T-1)} F_r$  となる。

$F_r < 1$  の場合は  $Z^*/A^* < 0$  であり、水路床波は水面波と逆位相になる。 $1 > F_r \geq \sqrt{6(T-1)/7T}$  の場合には  $Z^*/A^*$  と  $\beta/\alpha$  の関係は 図—6 (c) のようになり、 $\beta/\alpha > \sqrt{7T/6(T-1)} F_r$  のとき不安定、 $\beta/\alpha \leq 1$  のとき安定である。 $\sqrt{6(T-1)/7T} > F_r > 0$  の場合は  $\beta/\alpha > 1$  のとき不安定、 $\beta/\alpha \leq \sqrt{7T/6(T-1)} F_r$  のときは

安定である (図—6 (d))。 図—6 (b)~(d) の安定領域と不安定領域の中間の領域 “stable or unstable” では水路床面がどのような性質を示すかが明らかではない。

以上の考察に基づいて  $Q_b$  が 0.02 以下の場合について水路床面の 3 次元の微小攪乱の不安定領域を示すと 図—5 の斜線の領域になる。図中の alternate dunes の領域は水面波と逆位相の下流に伝播する 3 次元の微小攪乱の不安定領域であり、alternate antidunes の領域は水面波と同位相の上流に伝播する 3 次元の微小攪乱の不安定領域である。なお 図—6 (b)~(d) で

“stable or unstable” と記された領域は 図—5 では  $0 < F_r < \sqrt{2}$  の範囲で式 (30) と (31) の直線で囲まれた 2 つの 3 角形の領域に対応するが、この領域で水路床が実際にどのような挙動を示すかは上記の考察ではなく、この領域は alternate dunes の形成領域には含まなかった。この点に関しては今後さらに検討を加える必要がある。

$Q_b$  が大きい場合は、上述した考察にしたがうと、 $W$  が大きくなければ alternate dunes は形成されないが、alternate antidunes は  $W$  の値にかかわらず、形成領域が存在する (図—3 参照)。  $W$  は式 (32) で与えられ、 $H/B$  が小さくなると  $W$  は大きくなる。したがって、水深と水路幅の比が小さければ、 $Q_b$  がかなり大きい場合にも alternate dunes が形成されることになる。木下の実験のうち勾配が大きく水深の小さい実験ケースはこのような場合に対応するものと考えられる。このように、 $W$  が大きい場合の考察によると、急流河川あるいは勾配の急な上流部でも砂礫堆が形成され蛇行が発生する可

表一 水路床面の安定領域と不安定領域

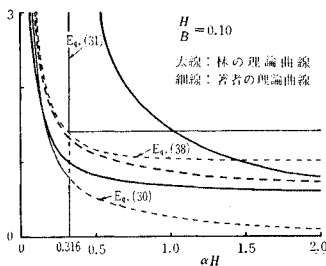
$F_r^2 < 1 + (\beta/\alpha)^2$ : 逆位相			$F_r^2 > 1 + (\beta/\alpha)^2$ : 同位相		
$\alpha\delta$	移動方向	安定・不安定	$\alpha\delta$	移動方向	安定・不安定
$0 < \alpha\delta < \pi$	—	安定	$0 < \alpha\delta < \frac{1}{2}\pi$	上流	不安定
$\pi < \alpha\delta < \frac{3}{2}\pi$	—	—	$\frac{1}{2}\pi$	不動	—
$\frac{3}{2}\pi < \alpha\delta < 2\pi$	下流	不安定	$\frac{1}{2}\pi < \alpha\delta < \pi$	下流	—
			$\pi < \alpha\delta < 2\pi$	—	安定

能性が存在することになるが、実際に、砂防ダムの堆砂面に砂礫堆が形成されていることはしばしば観測されることである。

なお、Kennedy<sup>13)</sup>によって、導入された局所的なせん断応力と流砂量との対応の遅れの距離  $\delta$  の存在を仮定して水路床面の3次元の微小攪乱の安定、不安定および伝播方向について式(37)を用いて考察すると表一に示すような結果が得られる。

5. 結果の考察

前節で導かれた水路床面の3次元の微小攪乱の不安定領域をポテンシャル流れの理論に基づく林<sup>9)</sup>の理論結果と比較するために、 $\beta/\alpha = \beta H/\alpha H = \pi H/B/\alpha H$  の関係を用いて  $F_r - \alpha H$  面に移すと図一7 のようになる。図一7 は  $H/B = 0.10$  の場合について林の理論結果(太線)と著者の理論結果(細線)を比較したものである。図一7 によると、alternate dunes の形成限界は  $\alpha H$  が小



図一7 林の理論と著者の理論による砂礫堆の形成限界の比較

いときは両者の結果はよく一致しているが、 $\alpha H$  が大きくなるとずれてくる。alternate antidunes の形成限界については林の理論で点線で示されている曲線は著者の式(38)の曲線に対応しているが、実線で示されている曲線に対応する限界は著者の理論では得られていない。また著者の理論で導かれた  $\beta/\alpha = 1$  に対応する限界曲線は林の理論では与えられていない。なお、 $\alpha H$  が小さいときに alternate dunes の形成限界が林の理論と著者の理論でよく一致することはつぎのように説明される。 $\alpha H$  が小さいときは林の理論では alternate dunes の形成限界は、

$$\alpha H \cdot F_r = \sqrt{\frac{C}{2}} \beta H \tanh \beta H \dots\dots\dots(39)$$

で与えられる。ここで、 $\beta H = \pi H/B$  であり、 $H/B$  が小さいときは  $\tanh \beta H \approx \beta H$  と書ける。したがって、式(39) はつぎのようになる。

$$\alpha H \cdot F_r = \sqrt{\frac{C}{2}} \beta H \dots\dots\dots(40)$$

一方、著者の理論によると  $\alpha H$  が小さいときの alternate dunes の形成限界は

$$\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{7T}{6(T-1)}} F_r$$

で与えられる。この式はつぎのように書きかえられる。

$$\alpha H \cdot F_r = \sqrt{\frac{6(T-1)}{7T}} \beta H \dots\dots\dots(41)$$

式(40)と(41)を比較すると、林の場合は  $C=2$  としているから、式(40)の係数は1となり、著者の場合は流砂量公式として Brown 公式を用いると  $T=5$  であるから、式(41)の係数は0.83となり、両者はほぼ一致することがわかる。式(40)と(41)が完全に一致するためには

$$C = \frac{12(T-1)}{7T} \dots\dots\dots(42)$$

でなければならない。Cは林の理論で重要な役割を演ずるパラメーターであるが、式(42)によれば、Cのおおよその値を見積ることができる。たとえば  $T=5$  のときは  $C=1.37$  になる。

つぎに、実験結果を用いて前節で導かれた結果を検討する。勾配を一定に保ち、流量を次第に増加していった実験によると、砂礫堆(alternate dunes)の長さは流量の増加にともなって次第に短くなっていき、ある限界の長さ以下になると砂礫堆は形成されなくなり、水理条件および底質の特性に応じて dunes, flat bed あるいは antidunes が形成されることが観察されている。図一5の alternate dunes の形成限界はこのような砂礫堆の長さの下限を与えるものと考えられる。また、実際河川および実験水路における観測によると水路幅より短い砂礫堆(alternate dunes)は形成されていないが、このことは式(31)で与えられる砂礫堆の形成限界の妥当性を示しているものと考えられる。さて、実験データを用いて前節の結果を検討すると図一8のようになる。alternate antidunes の領域にプロットされているデータは Englund および Hansen<sup>17)</sup> の論文から引用したものである。著者の知るかぎりでは alternate antidunes (上流に移動する砂礫堆)が形成されたことを示している論文は、これが唯一のものである。Englund らは alternate antidunes が形成された状況をつぎのように記述している。「水路の上流部には2次元の antidunes が形成されたが、下流部には3次元の antidunes が形成された。上



流部と下流部のエネルギー勾配や水深などの水理量には差異は認められなかった。」

$F_r$  と  $\alpha H$  の関係を木下<sup>14)</sup>、風間<sup>15)</sup> および井口・鮭川・吉野の実験データによって検討すると図-9 になる。砂礫堆の形成限界付近の実験データが少ないので、形成限界曲線が妥当なものであるか否かは断定できないが、実験データはすべて砂礫堆の形成領域内にプロットされており、この限りでは矛盾はない。なお、図-8 および 図-9 にプロットするのに用いられた実験データでは砂礫堆の長さとして各実験ケースで形成された砂礫堆の長さの平均値が用いられているが、砂礫堆の長さは同一の実験条件のもとでもばらつき、実際には図-8 および 図-9 にプロットされたものよりも短い長さの砂礫堆が形成されていることに注意すべきである。

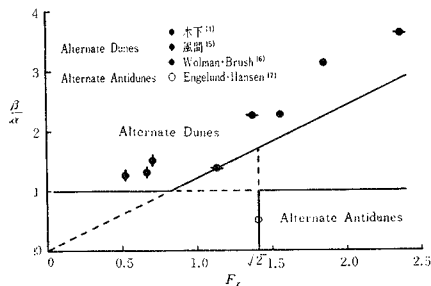


図-8 理論結果と実験結果の比較

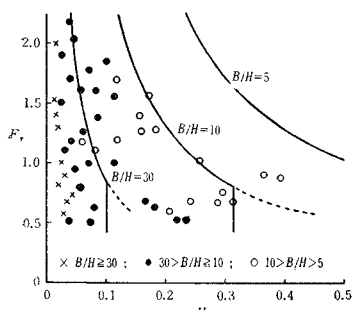


図-9 理論結果と実験結果の比較

## 6. 結 論

河道の蛇行は河床に砂礫堆が形成されることにより発生し、砂礫堆は河床面の不安定性が原因で形成されるものと考え、蛇行の発生条件に関して理論的な考察を行った。すなわち、非定常流の運動方程式と連続方程式および流砂の運動方程式と連続方程式を用いて河床面の3次元の微小攪乱の安定限界を求め、さらに水面の微小攪乱の振幅と河床面の微小攪乱の振幅を関係づける方程式を導き、河床面の3次元の微小攪乱の不安定領域を求めた。その結果、以下のことが明らかにされた。

(1) 3次元の河床形態の場合にも下流に移動するもの (alternate dunes) と上流に移動するもの (alternate antidunes) が存在する。そして、alternate dunes の長さには下限があり、alternate antidunes の長さには上限がある。また alternate antidunes はフルード数が  $\sqrt{2}$  以上でなければ形成されない。

(2) 土砂濃度  $Q_b$  が 0.02 以下の場合には砂礫堆の移動による非定常性は無視でき、流れは定常であると考えてよく、砂礫堆の形成限界は式 (30) および (31) で与えられ、形成領域は 図-5 で与えられる。

(3) 通常の河川の流れでは土砂濃度は 0.01 以下であると考えられるので、河川蛇行の発生限界は式 (30) および (31) で与えられ、発生領域は 図-5 で与えられるものと考えられる。

(4)  $Q_b$  が大きい場合には  $W$  が大きくなければ、alternate dunes は形成されないが、alternate antidunes は  $W$  の値にかかわらず  $Q_b$  が大きい場合にも形成される。 $W$  は式 (32) で与えられるので、 $H/B$  が小さいと  $W$  は大きくなる。したがって、水深と水路幅の比が小さい場合には  $Q_b$  がかなり大きくても alternate dunes が形成され、流れは蛇行するようになる。

### 参 考 文 献

- 1) Friedkin, J.F. : A laboratory study of the meandering of alluvial rivers, U.S. Waterways Experiment Station, Vicksburg, Mississippi, 1945, pp. 3.
- 2) 木下良作 : 砂礫堆に関する実験, 栃木県 砂防委託調査報告書, 1956.
- 3) 木下良作 : 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局 資料第 36 号, 1961.
- 4) Engels, H. : Untersuchungen über die Bettausbildung gerader oder schwach gekrümmter Flußstrecken mit beweglicher Sohle, Zeitschrift für Bauwesen, 1905, pp. 663-680.
- 5) Jasmund, R. : Handbuch der Ingenieurwissenschaften, Dritter Teil, Der Wasserbau, Erster Band, Die Gewässerkunde, Leipzig, Verlag von Wilhelm Engelmann, 1911, pp. 171-204, pp. 348-357.
- 6) 井口昌平・吉野文雄 : 河床形態の研究の過程について, 生産研究, 第 19 巻第 1 号, 1967, pp. 1-7.
- 7) Rossinsky, K.I. and Kuzmin, I.A. : Regularities of river channels formation composed by astatic ground, Bulletin de l'Association internationale d'hydrologie scientifique, VII<sup>e</sup> Anée, No. 4, 1962.
- 8) 林 泰造・川上克巳 : 移動床に生ずる二、三の不安定現象, 第 13 回水理講演会講演集, 土木学会, 1969, pp. 109-116.
- 9) Callander, R.A. : Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, Part 3, 1969, pp. 465-480.
- 10) Gilbert, G.K. : The transportation of debris by running water, U.S. Geological Survey Professional Paper 86, 1914.
- 11) Guy, H.P., Simons, D.B. and Richardson, E.V. : Summary of alluvial channel data from flume experiments, 1956-61, U.S. Geological Survey Professional Paper 462- I, 1966.

- 12) 木下良作：石狩川河道変遷調査一参考編一，科学技术庁資源局資料第36号，1962.
- 13) Kennedy, J.F. : The mechanics of dunes and anti-dunes in erodible-bed channels, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 16, Part 4, 1963, pp. 521-544.
- 14) 木下良作：未発表；井口昌平：砂礫堆の形成に関する水理学的考察，生研報告，第14巻第10号，1965，pp. 317に集録されている。
- 15) 風間輝雄：河床形態に関する水理学的研究，東京大学卒業論文，1968.
- 16) Wolman, M.G. and Brush, L.M. : Factors controlling the size and shape of stream channels in coarse noncohesivesands, U.S. Geological Survey Professional Paper 282-G, 1961, pp. 198.
- 17) Engelund, F. and Hansen, E. : Investigations of flow in alluvial streams, Contributions from Hydraulic Laboratory, Technical University of Denmark, Bulletin No. 9, 1966, pp. 68-70.

(1970.2.23・受付)

---