

粘弾塑性地山内の円形トンネル覆工について

LINING OF CIRCULAR TUNNEL IN VISCOELASTIC-PLASTIC MEDIUM

桜井 春 輔*

By Shunsuke Sakurai

1. 緒 言

トンネル覆工に作用する圧力は一般に時間とともに変化するものである。この圧力は地山および覆工材料の時間に依存する力学的性質によって左右されるのはもちろんであるが、また覆工を施す時期によっても当然変化すると考えられる。したがって、覆工を適当な時期に施工することにより経済的な覆工を得ることが可能であると思われる。しかしながら、従来の研究においては、その時期について明らかにされていない。

トンネル周辺の応力分布に関しては、すでに無巻トンネルについて多くの弾塑性解が発表されている^{1)~8)}。一方、覆工の存在する場合については、谷本⁹⁾が円形トンネルに対する弾性解を求め、Yu¹⁰⁾が覆工を剛体と考えた場合の円形トンネルに対する解を得ている。また小田¹¹⁾は Yu と同様の方法によって、覆工の変形を考慮した解を発表した。しかし、これらは最初に巻立トンネルが存在し、後から重力が作用した場合に相当する解であり、初期応力の存在する地山にトンネルを掘削し、覆工を施した場合とはかなり状態が異なっている。地山を弾性体と仮定する場合には、トンネル掘削と同時に弾性変形は終了し、覆工には地圧が作用しないことになる。したがって覆工に作用する圧力は、地山の時間に依存する力学的性質によって生ずるものであり、その解析には地山のクリープを考慮しなければならない。Dimov¹²⁾は円形トンネルの覆工に作用する圧力を粘弾塑性学を応用して求め、また、平松・岡¹³⁾は理想的な塑性地盤について、ひずみ速度は偏差応力に比例すると仮定して覆工に作用する圧力の時間的変化を求めている。さらに、平松・岡¹⁴⁾は覆工に作用する圧力は、地山の内部摩擦が時間とともに低下するために生ずるものであるとしての解析も行なっている。

このように、トンネル覆工の解析において、地山を塑性体あるいは粘弾塑性体として取り扱った論文は発表されているが、その両者を同時に考慮した研究はまだないようである。実際の地山は塑性体であると同時に粘性をも示すことが知られている。したがって、ここでは地山を粘弾塑性体と仮定し、トンネル周辺の応力分布および覆工に作用する圧力を求め、さらに覆工の最適施工時期について考察を行なうことを目的としている。ただし、計算を容易にするために、地山は等質等方性を示し、その初期応力は静水圧状態であると仮定する。またトンネルは円形断面を有するものとする。地山の初期応力は一般に静水圧状態ではないが、地中内部の十分深い所では静水圧状態に近づくと考えられる¹⁵⁾。

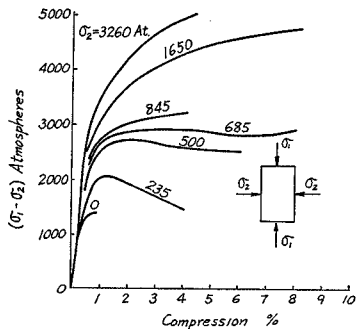
解析においては、地山を重力場と考えず、トンネル中央部の初期応力が無限遠方に作用した平面ひずみ状態として計算を行なう。したがって、ここで得られる解は立坑および水平トンネルの両者に対して近似解となる。なお、水平トンネルの場合、このような有孔無限板としての解析は、トンネルが深くなるにつれて良い近似を与えるものであり、著者の計算によれば、地表面下 150 m (トンネル半径 4.5 m の場合) より深くなれば十分信頼のもてるものであることが明らかにされている¹⁶⁾。

2. 地山の力学的性質

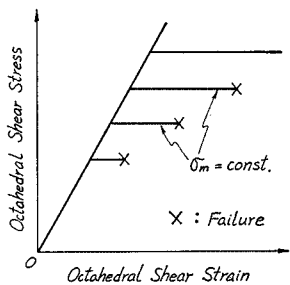
地山は弾性、塑性および粘性を示す岩盤であると仮定する。この場合、塑性流動は時間の関数として考えるべきであるが、粘性の挙動と比較すれば、その変形速度は非常に速く、したがって、トンネルの弾塑性挙動は掘削と同時に終了し、その後は地山の粘性によって挙動すると考えることができる。すなわち、掘削直後 ($t=0$) は弾塑性解析を行ない、その後 ($t>0$) は粘弾塑性解析を行えばよいことになる。

岩石の圧縮試験において、拘束応力を種々変化させた

* 正会員 Ph. D 神戸大学助教授 工学部土木工学科



図一 大理石の応力-ひずみ関係 (Von Karman による)



図二 モデル化した応力-ひずみ関係

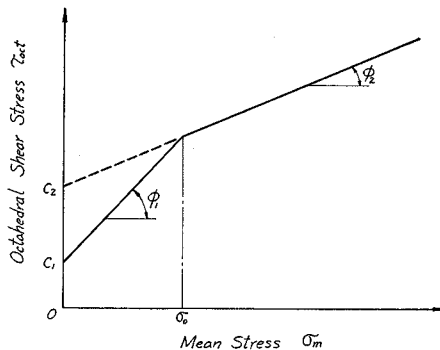
場合の応力-ひずみ関係は、一般に 図一に示すようである¹⁷⁾。なおこの論文においては圧縮応力を正とする。いま、これを 図二に示すように、正八面体せん断応力と正八面体せん断ひずみとの関係として単純化して表わすことにする。作用する応力が小さい場合は、地山は弾性を示し、次式に示すように Hooke の法則が成立すると仮定する。すなわち、

$$\sigma_{ij}' = 2G \epsilon_{ij}' \dots \dots \dots (1)$$

$$\sigma_m = 3K \epsilon_m \dots \dots \dots (2)$$

ここで、 σ_{ij}' 、 ϵ_{ij}' はそれぞれ偏差応力および偏差ひずみテンソルの成分を示し、 σ_m 、 ϵ_m は平均応力および平均ひずみを表わす。また、 G および K はそれぞれせん断弾性係数および体積弾性係数を表わす。式 (1) から地山の形状変化はそこに作用する偏差応力だけによって決定され、また、式 (2) から体積ひずみは平均応力だけによって決定されることが明らかである。すなわち、形状変化と体積変化は互いに独立である。

正八面体せん断応力が増加し、ある応力状態 (平均応力と正八面体せん断応力との関係として与えられる) に達すると降伏状態となり、正八面体せん断ひずみは急激に増加する。そしてそのひずみが、ある値 (平均応力の関数として与えられる) に達すると破壊が生ずる。この場合の降伏時の応力状態は 図三に示すように、正八面体せん断強度が平均応力の関数として表わされるものとする。これは、実際には曲線となるであろうが、計算を容易にするために 2本の直線で表わすことにする。こ



図三 岩盤の降伏時における応力状態

れを数式で表わせば次のようになる。

$$\tau_{oct} = \sigma_m \tan \phi_1 + C_1 \quad (\sigma_m \leq \sigma_0) \dots \dots \dots (3.1)$$

$$\tau_{oct} = \sigma_m \tan \phi_2 + C_2 \quad (\sigma_m > \sigma_0) \dots \dots \dots (3.2)$$

ただし、 $\phi_1 > \phi_2$ 、 $C_1 < C_2$ である。

ここで τ_{oct} は正八面体せん断応力を表わす。また、 C_1 、 C_2 は土質力学における粘着力に相当する定数、 ϕ_1 、 ϕ_2 は内部摩擦角に相当する定数である。この降伏条件は平均応力が小さい時は、地山内に存在するきれつや節理の影響を大きく受け、地山を構成する材料の性質よりもきれつなどの地山の構造によって決定されるものと考えられ、また一方、平均応力が大きくなると、きれつは閉じるために、むしろ地山を構成する材料の性質によって左右されるようになると解釈できる。なお、平均応力と平均ひずみとの関係は地山の降伏とは無関係に破壊直前まで式 (2) に示す直線関係が存在するものと仮定する。このことは、コンクリートについては、実験的に確かめられている¹⁸⁾。したがって、比較的コンクリートに近い力学的性質を示す岩石についても、この関係は成立すると考えられよう。

地山の粘弾性的変形の際にも、その形状変化と体積変化は互いに独立であると仮定すれば、その応力-ひずみ関係は偏差応力と偏差ひずみとの関係、および、平均応力と平均ひずみとの関係によって表わすことができる。いま、これらの間に線型関係が存在すると仮定すれば、次式が成立する¹⁹⁾。

$$P \sigma_{ij}' = Q \epsilon_{ij}' \dots \dots \dots (4)$$

$$P' \sigma_m = Q' \epsilon_m \dots \dots \dots (5)$$

ここで、 P 、 Q 、 P' 、 Q' は時間に関する線型オペレーターを表わす。

一般に平均応力と平均ひずみの関係は時間には無関係であるが、トンネル周辺のゆるんだ領域においては時間的変化を考えたほうが实际的であろう。

3. 弾塑性解析

トンネル掘削直後のその周辺の応力分布および変位は

弾塑性解析によって求められる。まず図-4に示すような円柱座標を考へる。ここで z 軸はトンネルの軸と一致する。この場合、すべての応力とひずみは θ と z に依存しないので、満足されなければならないつりあい方程式は、

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \dots\dots\dots(6)$$

となり、変位とひずみの関係は、

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \dots\dots\dots(7)$$

となる。ここで、 σ_r, σ_θ はそれぞれ半径方向および接線方向の応力を表わし、 σ_r, σ_θ は、それぞれに対応するひずみを表わす。また、 u は半径方向の変位成分である。

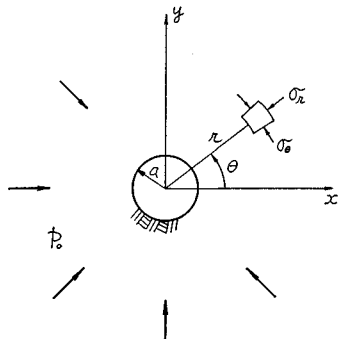


図-4 座 標 系

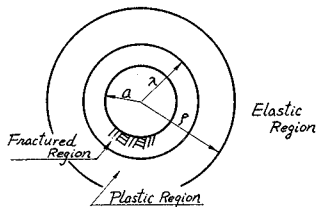


図-5 トンネル周辺に生ずる3つの領域

いま式(3)に示す降伏条件を用いれば、トンネル周辺には一般に3つの異なる応力状態の領域が存在することになる(図-5)。すなわち、トンネルから最も離れた領域で、まだ降伏応力状態に達していない弾性領域(elastic region)と、その内側において式(3.2)に示す降伏条件を満足している領域(これを塑性領域(plastic region)と呼ぶ)、および、最も内側において式(3.1)の降伏条件を満足している領域(これをゆるみ領域(fractured region)と呼ぶ)であり、これらは同心円として表わされる。しかし、これらすべての領域がつねに存在するとはかぎらず、地山の力学的性質および初期応力に応じてつぎに示す3つの場合が考へられる。すなわち、

- ① 弾性、塑性、ゆるみ領域の存在する場合
- ② 弾性、ゆるみ領域の存在する場合
- ③ 弾性領域のみ存在する場合

なお、数学的には弾性および塑性領域の存在する場合が考へられるが、後で述べるように実際の地山において、これらの領域の存在することはあり得ないであろう。

つぎに、おのおの場合におけるトンネル周辺の応力分布および変位を求め、さらに、トンネルの安定条件についての考察を行なう。

(1) 弾性、塑性、ゆるみ領域の存在する場合

a) 弾性領域における応力分布および変位

この領域においては、式(1)、(2)に示すHookeの法則が成立する。いま、塑性領域との境界において、

$$\sigma_\theta - \sigma_r = S_0 \dots\dots\dots(8)$$

と仮定すれば、この場合の応力分布はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{S_0}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + p_0 \\ \sigma_\theta &= \frac{S_0}{2} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 + p_0 \\ \sigma_z &= p_0 \end{aligned} \right\} (r \geq \rho) \dots\dots\dots(9)$$

ここで、 S_0 は正の未知定数、 ρ は原点から弾性領域と塑性領域の境界までの距離、 p_0 は地山の初期応力を表わす。

一方、トンネル掘削によって生ずる地山のひずみは、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_r &= \frac{1}{E} \{\sigma_r - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\} = -\frac{S_0}{4G} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} \{\sigma_\theta - \nu(\sigma_r + \sigma_z)\} = \frac{S_0}{4G} \left(\frac{\rho}{r}\right)^2 \\ \epsilon_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 E はヤング係数、 G はせん断弾性係数、 ν はポアソン比を表わす。なお、トンネル掘削前のひずみは $\epsilon_r = \epsilon_\theta = \epsilon_z = (1-2\nu)p_0/E$ であるが、ここでは、掘削の影響によって生ずるひずみのみを考へる。この領域においては、式(10)から明らかなように、体積ひずみは、

$$\Delta V/V = \epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z = 0$$

となり、トンネル掘削によって地山に体積変化は生じない。すなわち、地山は非圧縮性を示す。

トンネルの半径方向の変位は次式によって表わされる。

$$u = \epsilon_\theta r = \frac{S_0 \rho^2}{4G} \left(\frac{1}{r}\right) \dots\dots\dots(11)$$

b) 塑性領域における応力分布

塑性領域におけるひずみ増分は

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \dots\dots\dots(12)$$

として表わされる。ここで、 $d\epsilon_{ij}^e$ と $d\epsilon_{ij}^p$ はそれぞれひずみ増分の弾性部分と塑性部分を表わす。いま、弾性ひずみ増分に対してはHookeの法則が成立し、塑性ひずみ増分に対してはLévy-Misesの方程式を拡張した

Reuss の式が成立すると仮定する。すなわち、

$$d \varepsilon_{ij}^p = (d \lambda) \sigma_{ij}' \dots\dots\dots(13)$$

ここで、 $d \lambda$ は正の比例係数で、スカラー量である。また、 σ_{ij}' は偏差応力を表わす。

いま平面ひずみ状態を考えているから、次式が成立する。

$$d \varepsilon_z = d \varepsilon_z^e + d \varepsilon_z^p = 0 \dots\dots\dots(14)$$

さらに、もし $d \varepsilon_z^p$ が $d \varepsilon_z^e$ に比較して非常に大きい場合には、式 (13) を考慮して近似的につぎの関係が成立する。

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2 \dots\dots\dots(15)$$

一方、 $d \varepsilon_z^p$ が $d \varepsilon_z^e$ に比較して無視できる程度に小さければ、Hooke の法則によって、次式をうる。

$$d \sigma_z = \nu (d \sigma_r + d \sigma_\theta) \dots\dots\dots(16)$$

式 (16) は応力増分間の関係であるが、地山の初期応力を考慮して全応力で表わせば、

$$\sigma_z = \nu (\sigma_r + \sigma_\theta) + (1 - 2\nu) p_0 \dots\dots\dots(17)$$

となる。したがって、真の σ_z は、式 (15) と式 (17) によって得られる値の中間にあると考えられる。

弾性領域と塑性領域の境界における σ_z の連続性はつねに満足されていることを考慮すれば、式 (17) は σ_z の上限値を与え、式 (15) はその下限値を与えることがわかる。いま

$$\sigma_r < \sigma_z < \sigma_\theta$$

の関係がつねに存在すると仮定すれば、正八面体せん断応力 τ_{oct} の値は σ_z の影響をほとんど受けない²⁰⁾。したがって、式 (3) に示す降伏条件を用いる場合、平均応力 σ_m を小さく見積れば塑性領域が大きく計算される傾向にあり、工学的には安全側である。したがって、ここでは以下の計算を容易にするために式 (15) に示す σ_z の下限値を用いることにする。

式 (15) の関係を用いれば正八面体せん断応力および平均応力はつぎのように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \tau_{oct} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_\theta - \sigma_r)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2} \\ &= (\sigma_\theta - \sigma_r) / \sqrt{6} \\ \sigma_m &= \frac{1}{3} (\sigma_r + \sigma_\theta + \sigma_z) = \frac{1}{2} (\sigma_\theta + \sigma_r) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

したがって、式 (3.2) の降伏条件はつぎのように表わされる。

$$\sigma_\theta - \sigma_r = K_1 \sigma_r + K_2 \dots\dots\dots(19)$$

ここで

$$K_1 = \frac{\sqrt{6} \tan \phi_2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \tan \phi_2}, \quad K_2 = \frac{\sqrt{6} C_2}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \tan \phi_2} \dots\dots\dots(20)$$

ただし、 K_1, K_2 はともに正でなければならず、したが

って $0 < \phi_2 < 39^\circ 13'$ の関係がつねに成立しなければならない。

式 (19) の関係を考慮して式 (6) を解けば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= D_1 r^{K_1} - \frac{K_2}{K_1} \\ \sigma_\theta &= (1 + K_1) \left(D_1 r^{K_1} - \frac{K_2}{K_1} \right) + K_2 \end{aligned} \right\} (\lambda \leq r \leq \rho) \dots\dots\dots(21)$$

ここで、 D_1 は積分定数であり、 λ は原点から塑性領域とゆるみ領域の境界までの距離である。

c) ゆるみ領域における応力分布

この領域においても σ_z は次式によって与えられるものとする。

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2 \dots\dots\dots(22)$$

したがって、式 (3.1) の降伏条件は次のように表わされる。

$$\sigma_\theta - \sigma_r = K_3 \sigma_r + K_4 \dots\dots\dots(23)$$

ここで、

$$K_3 = \frac{\sqrt{6} \tan \phi_1}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \tan \phi_1}, \quad K_4 = \frac{\sqrt{6} C_1}{1 - \frac{\sqrt{6}}{2} \tan \phi_1} \dots\dots\dots(24)$$

ϕ_1 は、当然、 $0 < \phi_1 < 39^\circ 13'$ でなければならない。応力分布は

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= D_2 r^{K_3} - \frac{K_4}{K_3} \\ \sigma_\theta &= (1 + K_3) \left(D_2 r^{K_3} - \frac{K_4}{K_3} \right) + K_4 \end{aligned} \right\} (a \leq r \leq \lambda) \dots\dots\dots(25)$$

ここで、 D_2 は積分定数である。また、 a はトンネルの半径を表わす。

d) 積分定数および各領域の境界の決定

つぎに示す境界条件によって、定数 D_1, D_2, S_0 および各領域の大きさ λ, ρ を決定することができる。境界条件はつぎのように与えられる。

- ① $r = a$ において、 $\sigma_r = 0$
- ② $r = \lambda$ において、 $\sigma_r|_{r=\lambda-0} = \sigma_r|_{r=\lambda+0}$
- ③ $\sigma_\theta|_{r=\lambda-0} = \sigma_\theta|_{r=\lambda+0}$
- ④ $r = \rho$ において、 $\sigma_r|_{r=\rho-0} = \sigma_r|_{r=\rho+0}$
- ⑤ $\sigma_\theta|_{r=\rho-0} = \sigma_\theta|_{r=\rho+0}$

まず境界条件 ① および ② から

$$D_1 = \left[\frac{K_2}{K_3} \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} + \frac{K_2}{K_1} \right] \frac{1}{\lambda^{K_1}} \dots\dots\dots(26)$$

$$D_2 = \frac{K_4}{K_3 a^{K_3}} \dots\dots\dots(27)$$

を得る。また ③ の条件から、ゆるみ領域の大きさ λ がつぎのように求まる。

$$\frac{\lambda}{a} = \left\{ \frac{K_2 K_3 - K_1 K_4}{K_4 (K_3 - K_1)} \right\}^{1/K_3} \dots\dots\dots(28)$$

したがって、ゆるみ領域が存在するための条件は、

$$K_2 > K_1 \dots\dots\dots (29)$$

となる。この条件が満足されないときは、弾性および塑性領域の存在する場合が考えられるが、実際の地山においては、式(29)の関係はつねに満足されているものと思われる。

つぎに、④、⑤の条件によって、塑性領域の大きさ ρ と未知定数 S_0 がつぎのように求まる。

$$\frac{\rho}{\lambda} = \left\{ \frac{2(\rho_0 K_1 + K_2)(K_3 - K_1)}{(2 + K_1)(K_2 K_3 - K_1 K_4)} \right\}^{1/K_1} \dots\dots (30)$$

$$S_0 = \frac{2(\rho_0 K_1 + K_2)}{2 + K_1} \dots\dots\dots (31)$$

塑性領域が存在するためには式(30)において、

$$\frac{2(\rho_0 K_1 + K_2)(K_3 - K_1)}{(2 + K_1)(K_2 K_3 - K_1 K_4)} > 1 \dots\dots\dots (32)$$

でなければならない。

e) 塑性領域における変位

この領域における静水圧成分の、トンネル掘削による変化は式(21)を用いてつぎのように表わされる。

$$\Delta p = \frac{2 + K_1}{2} \left[\left[\frac{K_4}{K_3} \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} + \frac{K_2}{K_1} \right] \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{K_1} - \frac{K_2}{K_1} \right] + \frac{K_2}{2} - p_0 \dots\dots\dots (33)$$

ここで、 $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\theta)/2$ と仮定している。この仮定によって以下の計算において変位が大きく求められるため、工学的には安全側である。式(33)はつねに負となり、したがって式(2)を考慮すれば、トンネル掘削によってこの領域の地山の体積は膨張することになる。その体積ひずみは、

$$\Delta V/V = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = \Delta p/K \dots\dots\dots (34)$$

となる。したがって、式(7)の関係をを用いれば、式(34)はつぎのように表わされる。

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} = \left\{ A_1 \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{K_1} - (B_1 + p_0) \right\} / K \dots\dots (35)$$

ここで A_1, B_1 は地山材料によって定まる定数である。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{(K_1 + 2)(K_2 K_3 - K_1 K_4)}{2 K_1 (K_3 - K_1)} \\ B_1 &= \frac{K_2}{K_1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

式(35)の解は次のように求められる。

$$u = \frac{A_1 \lambda}{K(K_1 + 2)} \left(\frac{r}{\lambda} \right)^{K_1 + 1} - (B_1 + p_0) \frac{r}{2K} + \frac{D_3}{r} \dots\dots\dots (37)$$

ここで、 D_3 は積分定数であり、弾性領域と塑性領域の境界における変位の連続条件からつぎのように決定される。

$$D_3 = \frac{S_0}{4G} \rho^2 - \frac{A_1 \lambda \rho}{K(K_1 + 2)} \left(\frac{\rho}{\lambda} \right)^{K_1 + 1} + (B_1 + p_0) \frac{\rho^2}{2K} \dots\dots\dots (38)$$

f) ゆるみ領域における変位

塑性領域におけると同様にして変位を求めることができる。まず、トンネル掘削によるこの領域の静水圧成分の変化はつぎようになる。

$$\Delta p = \frac{K_4(2 + K_3)}{2 K_3} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} + \frac{K_4}{2} - p_0 \dots\dots\dots (39)$$

この領域においても式(34)が成立すると仮定すれば、トンネルの半径方向の変位はつぎようになる。

$$u = \frac{A_2 a}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3 + 1} - (B_2 + p_0) \frac{r}{2K} + \frac{D_4}{r} \dots\dots\dots (40)$$

ここで、 A_2, B_2 は地山材料だけにより定まる定数である。

$$\left. \begin{aligned} A_2 &= \frac{K_4(2 + K_3)}{2 K_3} \\ B_2 &= \frac{K_4}{K_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

D_4 は積分定数であり、ゆるみ領域と塑性領域の境界における変位の連続条件によって

$$D_4 = \frac{A_1 \lambda^2}{K(K_1 + 2)} - \frac{A_2 a \lambda}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3 + 1} + \frac{\lambda^2}{2K} (B_2 - B_1) + D_3 \dots\dots\dots (42)$$

となる。

g) トンネルの安定条件

トンネル掘削による地山の最大せん断ひずみはトンネルの内壁に生ずる。

ゆるみ領域における主ひずみは式(40)を式(7)に代入して、次式のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{A_2(K_3 + 1)}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3} - (B_2 + p_0) \frac{1}{2K} - \frac{D_4}{r^2} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{A_2}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3} - (B_2 + p_0) \frac{1}{2K} + \frac{D_4}{r^2} \\ \varepsilon_z &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

したがってトンネル内壁に生ずる最大せん断ひずみは

$$r_{r=a} = \frac{1}{2} (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)_{r=a} = \frac{D_4}{a^2} - \frac{A_2 K_3}{2K(K_3 + 2)} \dots\dots\dots (44)$$

となる。

岩盤の破壊時におけるひずみについては確かでないが、ここでは、破壊時のせん断ひずみ強度が平均垂直ひずみの関数として定まるものと仮定する。すなわち、破壊時においては次式が成立する²¹⁾。

$$S = a' + b' \varepsilon_m \dots\dots\dots (45)$$

ここで、 S はせん断ひずみ強度を表わし、つぎのように定義される。

$$S = \sqrt{\frac{1}{6} \{ (\varepsilon_\theta - \varepsilon_r)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_r)^2 \}} \dots\dots\dots (46)$$

ϵ_m は平均垂直ひずみ

$$\epsilon_m = \frac{1}{3}(\epsilon_r + \epsilon_\theta + \epsilon_z)$$

を表わす。また、 a' および b' は材料によって定まる定数である。式 (46) によって定義される S は近似的につきのように表わされる²²⁾。

$$S \cong 0.54(\epsilon_\theta - \epsilon_r) \dots\dots\dots(47)$$

したがって、トンネル内壁における許容せん断ひずみはつぎのようになる。

$$\bar{\tau} = 0.926(a' + b'K_4/6K) \dots\dots\dots(48)$$

いま、つぎの関係が満足されていればトンネル内壁に破壊が生ずることはない。

$$\tau_{r=a} < \bar{\tau} \dots\dots\dots(49)$$

すなわち、式 (49) が成立すれば覆工なしでトンネルの空間を保つことができ、トンネルは安定である。この関係が成立しなければトンネル掘削と同時に支保工あるいは覆工を施さなければならない。式 (49) がトンネルの安定条件である。

(2) 弾性、ゆるみ領域の存在する場合

この場合のトンネル周辺の応力および変位も、(1) の場合と同様の方法によって求められる。以下に結果のみを記す。

a) 弾性領域における応力分布および変位

応力分布は次式によって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{S_1}{2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 + p_0 \\ \sigma_\theta &= \frac{S_1}{2} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^2 + p_0 \\ \sigma_z &= p_0 \end{aligned} \right\} (r \geq \lambda) \dots\dots\dots(50)$$

ここで、 λ はゆるみ領域の大きさを表わす。また未知定数 S_1 は、

$$S_1 = 2(p_0K_3 + K_4)/(2 + K_3) \dots\dots\dots(51)$$

として表わされる。

変位は次式によって与えられる。

$$u = S_1 \lambda^2 / 4 Gr \dots\dots\dots(52)$$

なお、この領域における地山は非圧縮性を示す。

b) ゆるみ領域における応力分布および変位

この領域の応力分布は (1) の場合とまったく同じである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{K_4}{K_3} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{K_3} - 1 \right\} \\ \sigma_\theta &= -\frac{K_4(1+K_3)}{K_3} \left\{ \left(\frac{r}{a}\right)^{K_3} - 1 \right\} + K_4 \\ \sigma_z &= (\sigma_r + \sigma_\theta) / 2 \end{aligned} \right\} (a \leq r \leq \lambda) \dots\dots\dots(53)$$

ここで、 K_3, K_4 は式 (24) に示す値である。また、ゆるみ領域の大きさ λ は次式によって求められる。

$$\frac{\lambda}{a} = \left\{ \frac{(2p_0 - K_4)K_3}{(2 + K_3)K_4} + 1 \right\}^{1/K_3} \dots\dots\dots(54)$$

したがって、ゆるみ領域が存在するためには、

$$p_0 > K_4/2 \dots\dots\dots(55)$$

でなければならない。

この領域における変位はつぎのように表わされる。

$$u = \frac{A_2 a}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{r}{a}\right)^{K_3 + 1} - (B_2 + p_0) \frac{r}{2K} + \frac{D_5}{r} \dots\dots\dots(56)$$

ここで、

$$D_5 = \frac{S_1 \lambda^2}{4G} - \frac{A_2 a \lambda}{K(K_3 + 2)} \left(\frac{\lambda}{a}\right)^{K_3 + 1} + (B_2 + p_0) \frac{\lambda^2}{2K} \dots\dots\dots(57)$$

c) 安定条件

トンネルの安定条件はつぎのように表わされる。

$$\tau_{r=a} = \frac{D_5}{a^2} - \frac{A_2 K_3}{2K(K_3 + 2)} < \bar{\tau} \dots\dots\dots(58)$$

ここで、許容せん断ひずみ $\bar{\tau}$ は式 (48) と同一である。

(3) 弾性領域のみ存在する場合

応力分布はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= p_0 \left\{ 1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\} \\ \sigma_\theta &= p_0 \left\{ 1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 \right\} \\ \sigma_z &= p_0 \end{aligned} \right\} (r \geq a) \dots\dots\dots(59)$$

一方、変位は

$$u = p_0 a^2 / 2 Gr \dots\dots\dots(60)$$

したがって、トンネルの安定条件は次式で与えられる。

$$\tau_{r=a} = p_0 / 2 G < \bar{\tau} \dots\dots\dots(61)$$

ここで許容せん断ひずみ $\bar{\tau}$ は

$$\bar{\tau} = 0.926(a' + b'p_0/3K) \dots\dots\dots(62)$$

である。

4. 弾塑性解析に対する考察

Link は世界各地で行なわれた現地岩盤せん断試験の結果を整理して発表した²³⁾。その一部を図-6に示す。これは岩盤の破壊条件を、Coulomb の式によって表わしたものであり、この図から明らかなように、地山の強度はそれを構成する岩石の種類とは無関係である。このことは、岩盤に存在するきれつや節理などの影響が大きく現われるためと思われる。

一方、実験室における岩石試料を用いた実験結果から、岩石の破壊時の応力は Mohr の破壊包絡線として図-7のように表わされる^{24), 25), 26)}。いま、これを現地せん断試験の結果と比較すれば、垂直応力の小さいときは現地せん断試験から求めた破壊条件により、また垂直応力が大きくなれば岩石試料としての破壊条件によって破

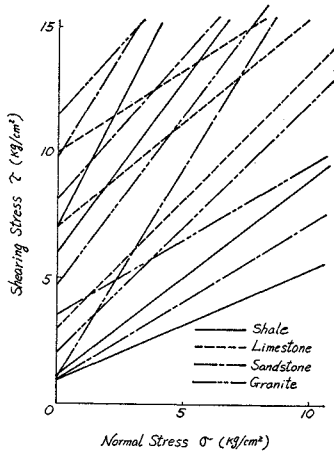


図-6 現地せん断試験による岩盤の破壊時の応力状態 (Link による)

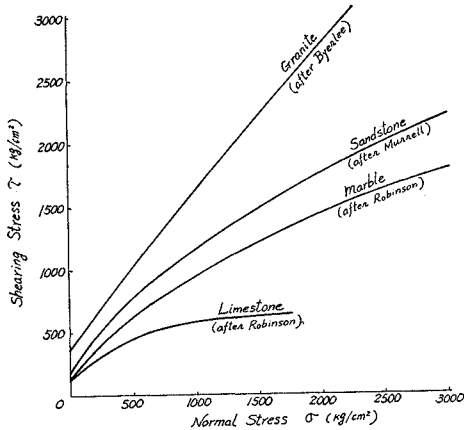


図-7 岩石の破壊時における応力状態

破壊時の応力を表わし得ることが明らかである。ここで降伏時と破壊時における応力は等しいと仮定すれば、前節の解析に用いた C_1, ϕ_1 は図-6 の C_1^* (τ 軸の切片), ϕ_1^* (直線の勾配) から、また、 C_2, ϕ_2 は図-7 の C_2^*, ϕ_2^* から次式によって求められる。ただし、図-7 においては、図-6 の結果を考慮して、垂直応力がある値より大きい範囲の曲線を近似的に直線と考える。

$$\left. \begin{aligned} \tan \phi_i &= \frac{\sqrt{6} \tan \phi_i^*}{3 \{ \sin(\pi/2 - \phi_i^*) + \cos(\pi/2 - \phi_i^*) \tan \phi_i^* \}} \\ C_i &= \frac{\sqrt{6} C_i^*}{3 \{ \sin(\pi/2 - \phi_i^*) + \cos(\pi/2 - \phi_i^*) \tan \phi_i^* \}} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots (63)$$

なお、静水圧応力成分が小さい場合は、きれつや節理

の影響が大きく現われることになり、したがって、式 (3.1) に示す降伏条件が満たされる領域 (ゆるみ領域) は、地山がゆるんだものと考えてさしつかえないであろう。

図-6 から C_1^* と ϕ_1^* は、つぎの範囲にあることがわかる。

$$1 \text{ kg/cm}^2 < C_1^* < 15 \text{ kg/cm}^2, \quad 15^\circ < \phi_1^* < 70^\circ$$

一方、 C_2^*, ϕ_2^* は C_1^*, ϕ_1^* との関係において求められるべきであり、表-1 に示す範囲が考えられる。なお、この表は、 ϕ_1^* が $15^\circ, 40^\circ, 65^\circ$ の場合についてそれぞれの値を示したものである。また、この表には式 (63) によって C_1, ϕ_1 および C_2, ϕ_2 に変換した値をも合わせて示してある。

トンネル周辺に、ゆるみ領域と塑性領域がともに存在するために必要な地山の初期応力と、その力学的性質との間の関係は式 (29), (32) によって与えられる。いま、表-1 に示す C_1, ϕ_1 および C_2, ϕ_2 の種々の組合せに対して、これらの式を図示すると、図-8 となる。この図から明らかなように、 $C_2=100 \text{ kg/cm}^2$ とすれば、存在可能な C_1, ϕ_1 および ϕ_2 のいかなる組合せに対しても、ゆるみ、塑性の両領域が存在するために必要な地山の初期応力は $p_0=250 \text{ kg/cm}^2$ 以上となる。これはトンネルが地表面下約 1000 m より深いところに掘削された場合に相当する応力である。しかし、土木の分野におけるトンネルはこれよりも浅いところに作られる場合が多く、したがって、その場合の解析には塑性領域を考慮する必要はないものと思われる。

塑性領域が生じない場合のゆるみ領域の大きさ λ と、

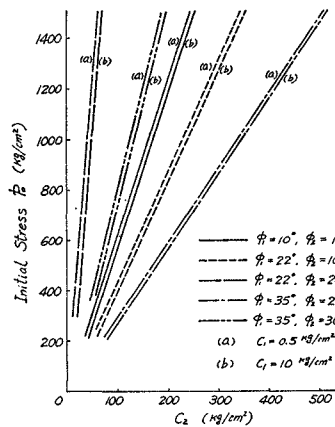


図-8 塑性およびゆるみ領域の存在に必要な地山の初期応力と力学定数との関係

表-1 岩盤の C, ϕ

	ϕ_1^*	ϕ_1	C_1^* (kg/cm ²)	C_1 (kg/cm ²)	ϕ_2^*	ϕ_2	C_2^* (kg/cm ²)	C_2 (kg/cm ²)
①	15°	11°55'	1~15	0.79~11.8	0°~15°	0° ~11°55'	500~	408~
②	40°	27°42'	1~15	0.63~ 9.4	15°~40°	11°55'~27°42'	350~	276~
③	65°	36°30'	1~15	0.35~ 5.2	35°~50°	25° 5'~31°58'	150~400	100~210

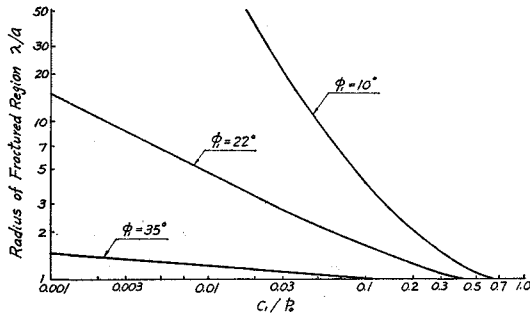


図-9 ゆるみ領域の大きさと地山の初期応力および力学定数との関係

地山の力学的性質および初期応力との関係を図-9に示す。いま $C_1/p_0 = 0.002$ ($p_0 = 250 \text{ kg/cm}^2$, $C_1 = 0.5 \text{ kg/cm}^2$) とし、Link²⁷⁾ が述べているように、地山の ϕ_1 はほとんどの場合 $\tan \phi_1^* = 1.0 \sim 1.3$ ($\phi_1 = 30^\circ \sim 33^\circ$) であるとすれば、トンネル周辺のゆるみ領域の大きさはトンネル半径の約3倍となる。したがって、土木の分野におけるトンネルのゆるみ領域の大きさはトンネル半径の3倍を越

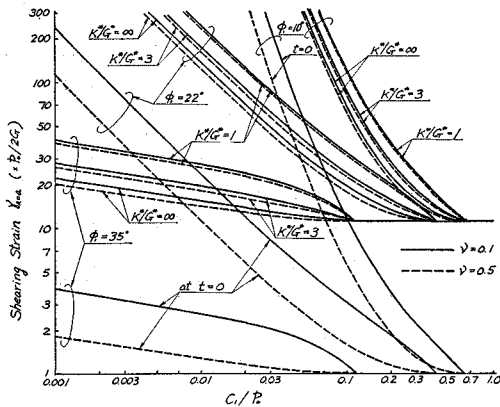


図-10 (a) $t=0$ (トンネル開削直後) および $t=\infty$ におけるトンネル内壁のせん断ひずみ ($G^*/G=0.1$)

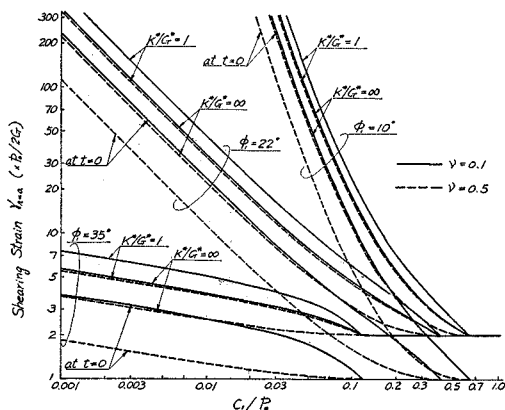


図-10 (b) $t=0$ および $t=\infty$ におけるトンネル内壁のせん断ひずみ ($G^*/G=1$)

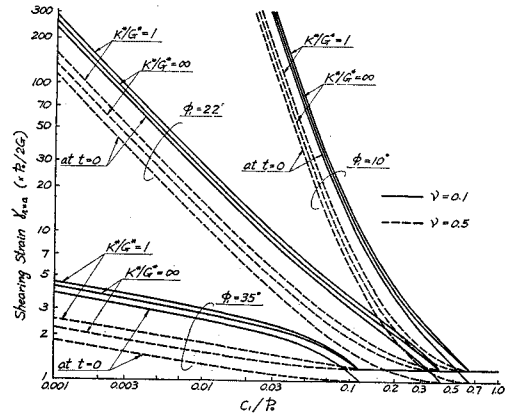


図-10 (c) $t=0$ および $t=\infty$ におけるトンネル内壁のせん断ひずみ ($G^*/G=5$)

えることはないといえる。

つぎに、トンネル内壁に生ずるせん断ひずみと地山の力学的性質および初期応力との関係を、 $t=0$ における値として図-10 (a), (b), (c) に示す。これらの図から明らかのように、ポアソン比が小さくなればせん断ひずみは大きくなる。また、 ϕ_1 が小さくなれば、せん断ひずみは急激に大きくなり、 C_1/p_0 の値によっては弾性計算によって得られるせん断ひずみ ($r_r = a = p_0/2G$) の100倍以上にもなり得る。しかし、 ϕ_1 がほとんどの場合 $\phi_1 = 30^\circ \sim 33^\circ$ であることを考えれば、せん断ひずみは弾性計算によって得られる値の10倍を越すことはまれであろう。ここで得られたせん断ひずみが、地山の許容せん断ひずみ強度以下であればトンネルは安定であるといえる。しかし、時間の経過とともにひずみは増大し、クリープ破壊によって崩壊する場合も考えられる。このような、時間を考慮した解析は次節以下において行なう。

5. 粘弾性解析

ここでは、3. で求めたトンネル周辺の応力分布を考慮して、覆工に作用する圧力の経時変化について考察を行なう。なお、4. の弾塑性解析に対する考察において明らかのように、塑性領域が生ずるのは、トンネルが非常に深い所に設けられた場合にかぎられており、したがって土木の分野においては、つぎの2つの場合を考えれば十分であろう。すなわち、

- ① 弾性、ゆるみ領域の存在する場合
- ② 弾性領域のみ存在する場合

(1) 弾性、ゆるみ領域の存在する場合

トンネルに覆工を施せばその時点から覆工には σ_{r0} の圧力が作用し、時間の経過につれて増大する。この σ_{r0} の発生によって地山内の応力は変化する。そして、その

応力の変化はすでに存在している正八面体せん断応力を減少させるように作用するため、それは弾性計算によって求められる。したがって、弾性領域内の応力分布はつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 - \frac{S_1}{2} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 + p_0 \\ \sigma_\theta &= \frac{S_1}{2} \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 - \sigma_{r0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 + p_0 \\ \sigma_z &= p_0 \end{aligned} \right\} (r \geq \lambda) \dots (64)$$

式(4)の偏差応力と偏差ひずみの間の関係を変形し $\epsilon_{ij}' = \phi(t) \sigma_{ij}'$ (65) のように表わす。ここで、 $\phi(t)$ はクリープ関数である。いま、トンネル掘削後 t_0 時間経過した後に覆工を施すとすれば、弾性領域内の主ひずみ差は、Boltzmannの重ね合せの定理を仮定して、つぎのように時間 t の関数として表わされる。

$$\epsilon_\theta - \epsilon_r = S_1 \left(\frac{\lambda}{r} \right)^2 \phi(t_0 + t) - 2 \left(\frac{a}{r} \right)^2 \int_0^t \phi(t-t_i) \cdot \frac{d\sigma_{r0}}{dt_i} dt_i \dots (66)$$

ここで t は覆工を施した時からの時間を表わす。さらに式(64)から明らかなように、弾性領域における静水圧応力成分は経時的にも変化しないので、この領域はつねに非圧縮性を示す。すなわち、

$$\epsilon_\theta + \epsilon_r = 0 \dots (67)$$

したがって、弾性領域内の変位は次式によって求められる。

$$u = \frac{S_1 \lambda^2}{2r} \phi(t_0 + t) - \frac{a^2}{r} \int_0^t \phi(t-t_i) \frac{d\sigma_{r0}}{dt_i} dt_i \dots (68)$$

つぎに、ゆるみ領域においては、すでに地山は降伏状態にあり、したがって、式(65)に示す偏差応力と偏差ひずみの関係は成立しないと考えるのが妥当であろう。この場合、ゆるみ領域はその外側に存在する弾性領域によって拘束されているため、その変形は独立には定まらず、弾性領域の変形に依存する。しかし、この領域においては静水圧応力成分に変化が生ずるため形状変化とは独立に体積変化によるクリープが生ずる。

いま、式(5)の平均応力と平均ひずみの関係を変形してつぎのように表わす。

$$\Delta V/V = \epsilon_r + \epsilon_\theta = \phi^*(t) p \dots (69)$$

ここで、 $\Delta V/V$ は体積ひずみ、 $\phi^*(t)$ はクリープ関数、 p は静水圧応力成分を表わす。したがって、覆工施工後のゆるみ領域の体積変化は覆工時を基準にとれば、

$$\Delta V/V = \{\phi^*(t_0 + t) - \phi^*(t_0)\} \Delta p \dots (70)$$

となる。ここで Δp は、この領域における静水圧応力成分の初期応力に対する変化を表わし、次式で与えられる。

$$\Delta p = \frac{1}{2} \left[\frac{K_4(2+K_3)}{K_3} \left\{ \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} + K_4 \right] - p_0 \dots (71)$$

したがって、式(71)を式(70)に代入し、3.において述べたと同様の方法によって、覆工時を基準とした変位の経時変化を求めることができる。すなわち、

$$u = \left\{ \frac{A_2 a}{K_3 + 2} \left(\frac{r}{a} \right)^{K_3 + 1} - (B_2 + p_0) \frac{r}{2} \right\} \cdot \{\phi^*(t_0 + t) - \phi^*(t_0)\} + \frac{D_0}{r} \dots (72)$$

ここで、 A_2, B_2 は式(41)に定義される定数である。また積分定数 D_0 はゆるみ領域と弾性領域との境界における連続条件から、つぎのように求められる。

$$D_0 = \frac{S_1}{2} \lambda^2 \{\phi(t_0 + t) - \phi(t_0)\} - \left\{ \frac{A_2 a \lambda}{K_3 + 2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3 + 1} - (B_2 + p_0) \frac{\lambda^2}{2} \right\} \{\phi^*(t_0 + t) - \phi^*(t_0)\} - a^2 \int_0^t \phi(t-t_i) \frac{d\sigma_{r0}}{dt_i} dt_i \dots (73)$$

つぎに、覆工の外側に作用する地山からの圧力 σ_{r0} と、その点の変位 u の関係は覆工の構造およびそれを構成する材料の力学的性質によって定まるクリープ関数 $\varphi(t)$ によってつぎのように表わされるものと仮定する。

$$u = \varphi(t) \sigma_{r0} \dots (74)$$

しかし、 σ_{r0} が時間とともに変化するので、重ね合せの定理によりその変位は一般につぎのように表わされる。

$$u = \int_0^t \varphi(t-t_i) \frac{d\sigma_{r0}}{dt_i} dt_i \dots (75)$$

いま、覆工と地山の間の連続条件がつねに満足されると仮定すれば、式(72)、(75)から結局つぎの σ_{r0} に関するボルテラ型第2種積分方程式を得る。

$$\sigma_{r0} + \lambda^* \int_0^t \varphi'(t-t_i) \sigma_{r0}(t_i) dt_i = \frac{\lambda^* S_1 \lambda^2}{2a} \left\{ \phi(t_0 + t) - \phi(t_0) \right\} + \lambda^* \left[\frac{A_2 a}{K_3 + 2} \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3 + 2} \right\} - \frac{a}{2} (B_2 + p_0) \left\{ 1 - \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \right\} \right] \{\phi^*(t_0, t) - \phi^*(t_0)\} \dots (76)$$

ここで、 $\varphi(t)$ は新たにつぎのように定義される関数である。

$$\varphi(t) \equiv \varphi(t) + a \psi(t) \dots (77)$$

また、 $\lambda^* = 1/\varphi(0)$ である。

いま、計算を容易にするために $\phi(t), \varphi(t), \psi^*(t)$ をつぎのように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \phi(t) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{G} + \frac{1}{G^*} (1 - e^{-t/\tau}) \right\} \\ \varphi(t) &= \frac{1}{M} + \frac{1}{M^*} (1 - e^{-t/\tau'}) \\ \psi^*(t) &= \frac{1}{K} + \frac{1}{K^*} (1 - e^{-t/\tau''}) \end{aligned} \right\} \dots (78)$$

ここで、 $G, G^*, K, K^*, \tau, \tau'$ は地山の力学的性質を表わす定数、また M, M^*, τ' は地山と覆工の両者の力学的性質によって決定される定数である。なお、 G, K はそれぞれせん断弾性係数および体積弾性係数を表わし、 τ, τ', τ'' は遅延時間 (retardation time) を表わす。式 (78) に示す関数に対して式 (76) の解は、つぎのようになる。

$$\sigma_{r0} = \frac{M_I}{1+\beta} + \frac{M_I(\tau' - \tau'')}{\tau'' + \tau'\beta - \tau'} e^{-t/\tau''} - \frac{\tau'\beta M_I}{(\tau'' + \tau'\beta - \tau')(1+\beta)} e^{-(1+\beta)t/\tau'} + \frac{M_{II}}{1+\beta} + \frac{M_{II}(\tau' - \tau)}{\tau + \tau\beta - \tau'} e^{-t/\tau} - \frac{\tau'\beta M_{II}}{(\tau + \tau\beta - \tau')(1+\beta)} e^{-(1+\beta)t/\tau'} \dots\dots(79)$$

ここで、

$$\beta = M/M^* \\ M_I = \frac{Ma}{2K^*} \left[p_0 \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 - 1 \right\} - \frac{K_4}{K_3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} \right] e^{-t_0/\tau''} \\ M_{II} = MS_1 \lambda^2 e^{-t_0/\tau} / 4 a G^*$$

いま $t \rightarrow \infty$ とすれば、覆工に作用する最大圧力を求めることができる。すなわち、

$$\sigma_{r0} = (M_I + M_{II}) / (1 + \beta) \dots\dots(80)$$

最も簡単な場合として、 $\varphi(t)$ が時間に無関係、すなわち、

$$\varphi(t) = A, (A: \text{定数}) \dots\dots(81)$$

とすれば、式 (80) は

$$\sigma_{r0} = \left[\frac{G^* e^{-t_0/\tau''}}{K^*} \left[p_0 \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 - 1 \right\} - \frac{K_4}{K_3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3} - 1 \right\} + \frac{S_1 e^{-t_0/\tau}}{2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \right] \cdot \left/ \left\{ \frac{G^*}{G} \left(2G \frac{A}{a} + 1 \right) + 1 \right\} \right] \dots\dots(82)$$

となる。ここで、 A は覆工の寸法およびそれを構成する材料によって定まる。

(2) 弾性領域のみ存在する場合

覆工に作用する圧力 σ_{r0} は、先に述べたと同様の方法によって、つぎに示すボルテラ型第 2 種積分方程式によって求められる。

$$\sigma_{r0} + \lambda^* \int_0^t \Phi'(t-t_i) \sigma_{r0}(t_i) dt_i \\ = p_0 a \lambda^* \{ \phi(t_0 + t) - \phi(t_0) \} \dots\dots(83)$$

ここで、 $\Phi(t)$ は式 (77) に定義した関数であり、 $\lambda^* = 1/\Phi(0)$ である。なお、この場合、地山内の静水圧応力成分に変化が生じないので、体積変化に基づくクリープは存在しない。

いま、 $\phi(t), \phi^*(t)$ が式 (78) によって表わされると仮

定すれば、式 (83) の解はつぎのように得られる。

$$\sigma_{r0} = \frac{M_{III}}{1+\beta} + \frac{M_{III}(\tau' - \tau)}{\tau + \tau\beta - \tau'} e^{-t/\tau} - \frac{M_{III}\beta\tau'}{(\tau + \tau\beta - \tau')(1+\beta)} e^{-(1+\beta)t/\tau'} \dots\dots(84)$$

ここで、

$$\beta = M/M^*, M_{III} = p_0 a M e^{-t_0/\tau} / 2 G^*$$

したがって、覆工に作用する最大圧力は、 $t \rightarrow \infty$ として

$$\sigma_{r0} = M_{III} / (1 + \beta) \dots\dots(85)$$

となる。いま、 $\varphi(t)$ が時間に無関係な場合を考えれば (式 (81))、式 (85) はつぎのようになる。

$$\sigma_{r0} = p_0 e^{-t_0/\tau} \left/ \left[\frac{G^*}{G} \left\{ 2G \left(\frac{A}{a} \right) + 1 \right\} + 1 \right] \right. \dots\dots(86)$$

6. 覆工の最適施工時期

3. において求めたトンネルの安定条件が満たされている場合には、掘削と同時に覆工を施す必要はないが、時間の経過とともに地山にクリープ破壊が生ずる可能性のある場合には、その破壊が生ずる以前に覆工を施さなければならない。覆工を施す時期についてはつぎのように考えることができる。

トンネル掘削後覆工を施さずに放置すれば、トンネル内壁に生ずる最大せん断ひずみは、弾性、ゆるみ両領域の存在する場合、式 (72) を参考にして、つぎのように得られる。

$$\gamma_{r=a} = \frac{1}{2} (\epsilon_\theta - \epsilon_r)_{r=a} = \frac{p_0 K_3 + K_4}{K_3 + 2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \phi(t) - \left\{ \frac{K_4}{4} + \frac{K_4}{2 K_3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3 + 2} - \frac{1}{2} \left(\frac{K_4}{K_3} + p_0 \right) \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \right\} \phi^*(t) \dots\dots(87)$$

また、弾性領域のみ存在する場合は

$$\gamma_{r=a} = p_0 \phi(t) \dots\dots(88)$$

となる。

いま、クリープ関数 $\phi(t), \phi^*(t)$ が式 (78) で表わされるとすれば、式 (87), (88) のせん断ひずみの最大値は $t \rightarrow \infty$ のときに生じ、その値は弾性およびゆるみ領域の存在する場合は、

$$\gamma_{r=a}^{t \rightarrow \infty} = \frac{p_0}{2G} \left[\frac{K_3 + K_4 p_0}{K_3 + 2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \left(1 + \frac{G}{G^*} \right) - \left\{ \frac{K_4/p_0}{2} + \frac{K_4/p_0}{K_3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3 + 2} - \left(\frac{K_4/p_0}{K_3} + 1 \right) \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \right\} \left(\frac{G}{K} + \frac{G}{K^*} \right) \right] \dots\dots(89)$$

また、弾性領域のみ存在する場合は、

$$\gamma_{r=a}^{t \rightarrow \infty} = \frac{p_0}{2G} \left(1 + \frac{G}{G^*} \right) \dots\dots(90)$$

となる。これらの最大せん断ひずみ $r_{r=a}^{t \rightarrow \infty}$ が地山の許容せん断ひずみ $\bar{\tau}$ より小さければ、トンネルは覆工なしで自立し得る。一方、式 (87), (88) に示すせん断ひずみ $r_{r=a}$ が $\bar{\tau}$ と等しくなる時は、その時点が覆工を施す最適時期となる。

いま、クリープ破壊に対する許容せん断ひずみが静的破壊に対するものと同一の形で表わされると仮定すれば^{*}、覆工の最適時期 t_0 はつぎのように求められる。

弾性、ゆるみ両領域が存在する場合は、

$$\frac{t_0}{\tau} = \log \left[\left(\frac{J_1}{K^*} - \frac{J_2}{2G^*} \right) / \left\{ \left(\frac{1}{K} + \frac{1}{K^*} \right) J_1 - \frac{J_2}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*} \right) + 0.926 \left(a'' + \frac{b'' K_4}{6K} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (91)$$

ここで、

$$J_1 = \frac{K_4}{4} + \frac{K_1}{2K_3} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^{K_3+2} - \frac{1}{2} \left(\frac{K_4}{K_3} + p_0 \right) \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2$$

$$J_2 = \frac{p_0 K_3 + K_4}{K_3 + 2} \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2$$

また、 a'' , b'' は地山のクリープ破壊に対する定数であり、静的破壊の場合の a' , b' に相当する。

一方、弾性領域のみ存在する場合は

$$\frac{t_0}{\tau} = \log \left[\frac{p_0}{2G^*} / \left\{ \frac{p_0}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G^*} \right) - 0.926 \left(a'' + \frac{b'' p_0}{3K} \right) \right\} \right] \dots\dots\dots (92)$$

なお、式 (91), (92) は式 (78) のクリープ関数を用い、 $\tau'' = \tau$ とした場合の結果である。

7. 粘弾性解析に対する考察

岩石のクリープについては、過去に多くの実験的研究が行なわれ、クリープ曲線の実験式や粘弾性の力学モデルが提案されている^{28), 29), 30)}。西原は岩石の変形挙動に対して 図-11 に示す力学モデルを提案し、多くの現象が説明できることを示した³¹⁾。このモデルは応力 σ , ひずみ ϵ , 時間 t の間の関係を表わすものであり、一定応力 ($\sigma = \sigma_0 = \text{const.}$) のもとでのひずみはつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon &= \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-E_2 t / \eta_2}) \quad (\sigma_0 \leq S_3) \\ \epsilon &= \frac{\sigma_0}{E_1} + \frac{\sigma_0}{E_2} (1 - e^{-E_2 t / \eta_2}) + \frac{\sigma_0 - S_3}{\eta_3} t \quad (\sigma_0 > S_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (93)$$

ここで、 E_1, E_2, η_2, η_3 は材料の力学的性質を表わす定数であり、 S_3 は降伏応力を表わす。

5. において、覆工に作用する圧力の経時的変化について述べたが、その解析において仮定したクリープ関数

* 岩石のクリープ破壊に対して用いることのできる破壊条件 (ひずみ表示) は、まだ提案されていないように思う。

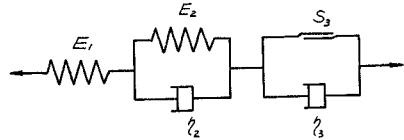


図-11 岩石の力学モデル (西原による)

(式 (78)) は式 (93) における $\sigma_0 \leq S_3$ の場合と同型のものであり、その仮定は粘弾性解析に対して無理のないものと思われる。

覆工に作用する圧力は式 (79), (84) から明らかなように地山の力学的性質のみならず覆工のそれによっても影響を受け、また覆工を施す時期によって指数的に減少する。もし $t_0 \rightarrow \infty$ とすれば、覆工には圧力が作用しないことになる。このことは実際のトンネル施工において経験することと一致する。したがって、経済的な覆工は掘削後できるだけ時間が経過した時に施工することによって得られる。

前節において述べたように、式 (89), (90) によって与えられるせん断ひずみが、許容せん断ひずみより小さければ覆工を施す必要はないが、もしこれらの値が許容せん断ひずみを越える場合は、覆工を施さなければならず、その最も経済的な時期は式 (91), (92) によって求められる。

いま、式 (89), (90) を図示すれば 図-10 (a), (b), (c) のようになる。これらの図には掘削直後 ($t=0$) のせん断ひずみも合せて示してある。掘削後覆工を施すことなく放置すれば、 $t=0$ に対するせん断ひずみの値から $t = \infty$ に対する値まで時間の経過とともに指数的に変化することになり、そのせん断ひずみと許容せん断ひずみとを比較することにより、トンネルの安定性についての検討を行なうことができる。

これらの図から明らかなように、せん断ひずみは ϕ_1 および C_1/p_0 によって大きく影響をうけるが、 K^* については、 K^*/G^* の値が 1 より小さくすることがないと考えれば、その影響をあまり大きくは受けない。一方、 G^*/G については、その値が小さくなればクリープひずみは非常に増大し、 $G^*/G=0.1$ の場合、 ν および K^* の値によっては、最大せん断ひずみはトンネル掘削直後の値の 20 倍にもなり得ることがわかる。しかし、 $G^*/G=5$ の場合は、クリープひずみはほとんど無視できる程度に小さく、その最大値は $t=0$ における値の 1.4 倍を越えることはない。

また、非圧縮性の地山 ($\nu=0.5, K^*=\infty$) は圧縮性の場合に比較してせん断ひずみは小さく現われる。したがって、地山を非圧縮性と仮定すれば工学的には危険側となる恐れがある。

つぎに、掘削直後に覆工を施した場合 ($t_0=0$) の覆工に作用する最大圧力 ($t = \infty$ における値) と地山および

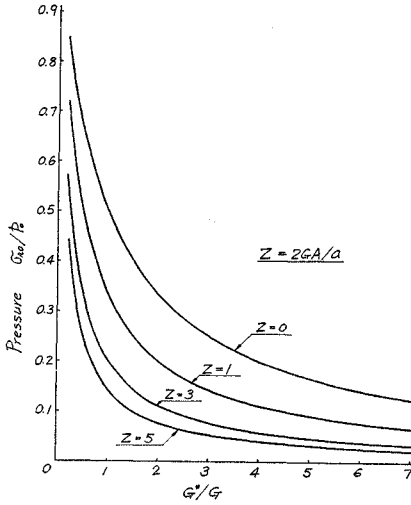


図-12 トンネル開削と同時に覆工を施した場合の覆工に作用する最大圧力 (弾性領域のみ存在する場合)

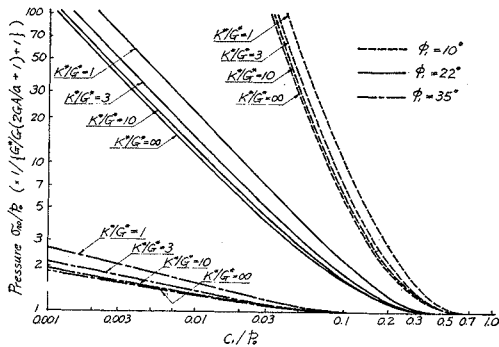


図-13 トンネル開削と同時に覆工を施した場合の覆工に作用する最大圧力 (弾性およびゆるみ領域の存在する場合)

覆工の力学的性質との関係を 図-12, 13 に示す。なお、これらは覆工の力学的性質を表わす関数 $\varphi(t)$ が時間に関係なく一定であるとした場合、($\varphi(t)=A$) の結果である。いま、覆工の外径および内径をそれぞれ a, b とすれば、定数 A はつぎのように表わされる。

$$\frac{A}{a} = \frac{a^2(1+\nu_l)}{E_l(a^2-b^2)} \left\{ \left(\frac{b}{a} \right)^2 + 1 - 2\nu_l \right\} \dots\dots(94)$$

ここで E_l, ν_l はそれぞれ覆工を構成する材料のヤング係数およびポアソン比である。

図-12 は弾性領域のみ存在する場合の結果であり、図中に示す定数 $Z (=2GA/a$: 無次元) は地山と覆工相互の剛性を表わすパラメーターである。覆工が地山に比較して剛体に近いと考えられる場合は、 $Z=0$ となり、図より明らかなように覆工に作用する圧力は最大となる。さらに、 G^*/G が 1 より小さい時はこの圧力は急激に増大し、地山の初期応力と同程度の値にもなり得ることがわかる。一方、 G^*/G が 3 より大きくなれば、圧力はあ

まり変化せず、その大きさも $0.2p_0$ より小さいと考えられる。

いま、一例として $a=5\text{ m}, b=4.5\text{ m}$ とし、さらに地山および覆工材料のポアソン比を $\nu=\nu_l=0.1$ とすれば、式 (94) を考慮して

$$Z \doteq 8.5(E/E_l) \dots\dots\dots(95)$$

となる。ここで、地山と覆工材料のヤング係数の比を $E/E_l=0.1$ とすれば、 $Z=0.85$ となり、覆工に作用する最大圧力は $G^*/G=1$ の時に地山の初期応力の約 0.35 倍となる。なお、ここで得られる結果は $\varphi(t)=A$ に対するものであり、覆工材料のクリープを考慮していないが、もしそれを考慮すれば、覆工に作用する圧力はここで得られる値よりさらに小さい値となる。したがって、ここで得られる圧力は覆工の設計に対しては安全側である。

図-13 は弾性およびゆるみ領域の存在する場合の結果である。この場合の圧力は弾性領域のみ存在すると仮定して得られる値を単位として示されている。図から明らかなように、 ϕ_1 および C_1/p_0 の影響は大きい、 K^* の影響はあまり顕著ではない。いま、 ϕ_1 が $30^\circ \sim 33^\circ$ の範囲にあると考えれば、覆工に作用する最大圧力は弾性領域のみと仮定して得られる値の 10 倍を越すことはないであろう。しかし、その場合でも、図-12 の結果と合せて考えれば、地山の初期応力と同程度か、あるいはそれ以上の圧力が作用することになる。すなわち、覆工には非常に大きな圧力が作用する場合があり、したがって、膨張性地山において覆工が容易に破損することが理解できる。

なお、図-12, 13 に示す圧力はすべてトンネル掘削と同時に覆工を施す場合に作用するものであり、適当な時間、覆工なしで放置すれば、当然この圧力を減少させることができる。

8. 結 言

(1) 地山を粘弾塑性体と仮定し、二次元平面ひずみ状態のもとで円形トンネル周辺の応力状態を解析し、トンネル周辺には一般に 3 つの異なる領域 (ゆるみ領域、塑性領域、弾性領域) の存在することを示した。

(2) 地山が岩盤の場合は、地表面下 1000 m 以内のトンネルに対して塑性領域は考慮する必要がないであろう。一方、ゆるみ領域は岩石の種類よりも、きれつ、節理などの地山の地質学的な構造によって影響を受け、その大きさはトンネル半径の 3 倍を越すことはないと考えられる。

(3) 地山の破壊条件がひずみで表わし得るならば、トンネル開削と同時に覆工を必要とするか否かの検討が

可能となる。

(4) 地山がトンネル開削直後に安定であっても、ある時間経過した後にクリープによって破壊することが考えられる。このような場合には、地山が破壊する以前に覆工を施さなければならない。したがって、覆工の最適施工時期は地山の最大せん断ひずみとクリープ破壊に対する許容せん断ひずみとを比較することによって求められる。この場合、非圧縮性の地山は圧縮性のそれと比較してせん断ひずみは小さく現われる。それゆえ地山を非圧縮性と仮定すれば工学的には危険側となる恐れがある。

(5) 覆工を施せばその時から覆工には圧力が作用し、時間とともに増加する。そして、経済的な覆工はその施工をできるだけ遅らせることによって得られる。

(6) トンネル開削と同時に覆工を施すならば、それに作用する圧力は地山の初期応力と同程度か、あるいは、それ以上になる場合があり、膨張性地山において覆工が容易に破損することが説明できる。

最後に、この研究を行なうにあたり終始有益なご指導をいただいた名古屋大学 川本朧万 助教授、さらに、いつもご支援を賜わっている名古屋大学 成岡昌夫 教授に深く感謝いたします。また、本研究は井藤忍君(神戸製鋼)に卒業研究として取り上げていただいた。ここに厚くお礼申し上げます。

なお、本研究の数値計算には神戸大学計算センターの OKITAC-5090 を利用した。

参 考 文 献

- 1) Yamaguti, N.: "On the Stresses around a Horizontal Circular Hole in Gravitating Elastic Solid", 土木学会誌, Vol. 15, No. 4, 1929 pp. 291-303.
- 2) Mindlin, R.D.: "Stress Distribution around a Tunnel", Proc. ASCE, Vol. 65, 1939, pp. 619-642.
- 3) 岡本舜三: "素掘坑の強さに関する弾性学的考察", 土木学会誌, 臨時増刊, 昭和 22, 23 年度, 論文集, pp. 60-79, pp. 159-174.
- 4) Hiramatsu, Y. and X. Oka: "Stress around a Shaft or Level Excavated in Ground with a Three-Dimensional Stress State", Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. 24, 1962, pp. 56-76.
- 5) 小田英一: "塑性体としての水平層を有する地山中のトンネル応力について", 土木学会論文集, No. 19, 1954, pp. 15-23.
- 6) Serata, S. and Gloyna, E.F.: "Principles of Structural Stability of Underground Salt Cavities", Journal of Geophysical Research, Vol. 65, No. 9, 1960, pp. 2979-2987.
- 7) 伊藤富雄: "円形立て坑の周囲における弾塑性応力状態", 土木学会論文集, No. 46, 1957, pp. 34-38.
- 8) 川本朧万: "円形立坑周辺の弾, 塑性応力状態にたいする近似解法", 土木学会論文集, No. 59, 1958, pp. 1-7.
- 9) 谷本勉之助: "巻立円形隧道の応力分布", 土木学会誌, Vol. 23, No. 4, 1937, pp. 357-379.
- 10) Yi-Yuan Yu: "Gravitational Stresses on Deep Tunnels", Journal of Applied Mechanics, Vol. 19, No. 4, 1952, pp. 537-542.
- 11) 小田英一: "巻立円形トンネル周辺の応力分布について", 土木学会論文集, No. 24, 1955, pp. 12-28.
- 12) Dimov, I.V.: "Influence of time on the Stability of the Single Horizontal Excavations", Proc. of the 1st Cong. of the Int. Soc. of Rock Mech., Lisboa, 1966, pp. 273-278.
- 13) 平松良雄・岡行俊: "塑性地盤中の盤圧現象と支保について", 日本鉱業会誌, Vol. 73, No. 826, 1957, pp. 215-220.
- 14) 平松良雄・岡行俊・吉武美登: "軟弱な地盤中に作られた空洞の支保に作用する地圧", 日本鉱業会誌, Vol. 78, No. 889, 1962, pp. 505-510.
- 15) 鈴木光・西松裕一・石島洋二: "一次地圧の測定値とその粘弾性論的考察(第1報)", 日本鉱業会誌, Vol. 83, No. 950, 1967, pp. 793-799.
- 16) 著者, 未発表論文.
- 17) T. von Karman, "Festigkeitsversuche unter allseitigem Druck", Zeitschr. Ver. deutsch. Ingenieure, Vol. 55, 1911, pp. 1749-1757.
- 18) 畑野 正: "組合せ圧縮荷重によるコンクリートの変形と破壊", 土木学会論文集, No. 143, 1967, pp. 22-27.
- 19) Lee, E.H.: "Stress Analysis in Viscoelastic Bodies", Quart. Appl. Math., Vol. 13, No. 2, 1955, pp. 183-190.
- 20) Phillips, A.: "Introduction to Plasticity" The Ronald Press, 1956, p. 143.
- 21) 文献 18).
- 22) Sokolowski, W.W.: "塑性学", (大橋義夫訳), 朝倉書店, 1959, p. 16.
- 23) Link, H.: "The Sliding Stability of Dams", Water Power, Vol. 21, 1969, pp. 99-103, pp. 135-139, pp. 172-179.
- 24) Robinson, L.H.: "The Effect of Pore and Confining Pressure on the Failure Process in Sedimentary Rock", Quart. of the Colorado School of Mines, Vol. 54, No. 3, 1959, pp. 178-199.
- 25) Murrell, S.A.F.: "The Effect of Triaxial Stress Systems on the Strength of Rocks at Atmospheric Temperatures", Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, Vol. 10, No. 3, 1966, pp. 231-281.
- 26) Byerlee, J.D.: "Frictional Characteristics of Granite under High Confining Pressure", Journal of Geophysical Research, Vol. 72, No. 14, 1967, pp. 3639-3648.
- 27) 文献 23).
- 28) Griggs, D.T.: "Creep of Rocks", Journal of Geology, Vol. 47, 1939, pp. 225-251.
- 29) Iida, K.: "Elastic and Viscous Properties of a Certain Kind of Rock", Bulletin of the Earthquake Research Institute, Univ. of Tokyo, Vol. 17, Part 1, 1939, pp. 59-78.
- 30) Parsons, R.C. and Hedley, D.G.F.: "The Analysis of the Viscous Property of Rocks for Classification", Int. J. Rock Mech. Min. Sic., Vol. 3, No. 4, 1966, pp. 325-335.
- 31) 西原正夫: "岩石のレオロジー", 楨山次郎教授記念論文集, 1961, pp. 325-332.