

# テーパーのついでいる固定円弧アーチの塑性崩壊荷重\*

## THE PLASTIC COLLAPSE LOADS OF TAPERED CIRCULAR FIXED ARCHES

奥村 敏 恵\*\*・松 浦 聖\*\*\*  
By Toshie Okumura and Sei Matuura

**要 旨** 図-1 に示すようなテーパーの著しくついでいる円弧アーチに、単一集中鉛直荷重が、そのスパン中央に加えられするときにかかるアーチの塑性崩壊荷重を解析的に求めたものである。

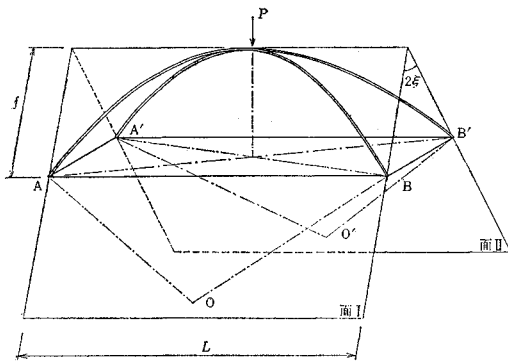


図-1 アーチ見取図

### 1. 緒 言

アーチの塑性解析に関する研究論文は、すでに数多く発表されたものがある<sup>1)~8)</sup>。しかし、ここで解析の対象としているアーチは、テーパーのついでいるアーチであるから、崩壊荷重には、そのテーパーの角度が影響を与える。したがって、この角度 $\epsilon$ の変化による影響を、とくに着目して吟味の対象としている。

ここでは、支点の構造として、固定支承の場合を考察している。解析の対象としたテーパーのついでいるアーチは、解析の便宜から、その主構は円弧アーチで、また完全塑性体から構成され、その横断面もスパン全体にわたって、一様で中実長方形断面と考えている。

崩壊荷重の算定には、降伏関節を想定していわゆる仮想仕事の原理を用いて、崩壊荷重としての上界を求めたものである。

また崩壊荷重の算定に当っては、とくに断面力として、軸力、ねじりモーメント、面内曲げモーメントおよび面外曲げモーメントの4要素を考え、したがって4次元降伏多面体なる新たな概念を考慮して算定している。またこの4つの断面力のうち、ねじりモーメントを無視した3次元的考察も、4次元的降伏の考察へ入る一つの段階としても、またそれぞれから得られる計算結果を比較したい意味をも含めて補助的に若干行なっている。それから6.のところの一部に、とくに $\epsilon=0$ のとき、いわゆるアーチを2次元的に取扱ったときのOnatとPrager<sup>2)</sup>による解析方法を参考とした数値結果と、ここで試みた解析計算結果とを比較して、検討をも加えている。以下の考察でとくに断らないかぎり4断面力を考察する場合の解析を進める。

### 2. 崩壊機構および幾何学的変形条件式

崩壊荷重の解析には、4つの断面力を考慮して、とくに算出することとする。なお3つの断面力を考慮した解析についても若干述べる。

#### (1) 断面力変位の記号および符号

図-2 に、考慮する断面力を示し、それに対応して、崩壊機構における、かく関節での変位の符号は、つぎのように考える。すなわち、面内曲げモーメントおよびそれに応じた回転角は  $M_y, \theta$  (断面の下側に引張り応力を生ぜしめる曲げモーメントを正にとる)、面外曲げモーメントおよび回転角は  $M_x, \phi$  (断面外側引張りを正)、軸力および材軸方向変位は  $N, \Delta$  (圧縮を正) としさらに、ねじりモーメントおよびねじれ角は  $T, \psi$  (支点に向って左ねじりを正) とする。なお変位回転角の符号は、断面力(モーメント)の符号と一致させる。さらに、つぎに述べる崩壊機構における頂点の変位として、面 (I) 内水平変位成分を  $U$ 、面内鉛直変位成分を  $V$ 、面外水平変位成分を  $W$  としさらにテーパーのついでたアーチの水平・鉛直変位を 図-3 のように  $R_H, R_V$  とする。

\* 土木学会第 23, 24 回年次学術講演会において一部発表

\*\* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 正会員 名古屋工業大学助教授 土木工学科

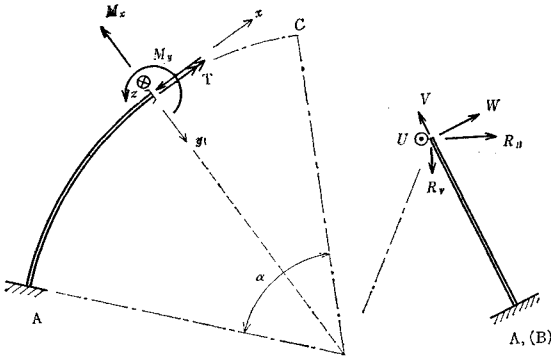


図-2 断面力の符号(面 I) 図-3 頂点 C の変位の符号(横断面図)

$$R_H = W \cos \xi - V \sin \xi \dots\dots\dots(2.1)$$

$$R_V = -W \sin \xi - V \cos \xi \dots\dots\dots(2.2)$$

ここにおいて、塑性崩壊変形の対称性連続性を考慮すると、以上の式(1)および(2.1)の変形量の満足すべき適合条件式は、つぎのように考えられる。

頂点において、

$$U=0 \dots\dots\dots(3.1)$$

$$R_H=0 \dots\dots\dots(3.2)$$

また、

$$\theta_1 + \theta_2 + \frac{1}{2} \theta_3 = 0 \dots\dots\dots(3.3)$$

$$w_1 + w_2 + \frac{1}{2} w_3 = 0 \dots\dots\dots(3.4)$$

$$w_1' + w_2' - w_3' = 0 \dots\dots\dots(3.5)$$

ここで、 $w_i (i=1, 2, 3)$  はアーチ面内で考えた鉛直軸まわりの回転角、 $w_i' (i=1, 2, 3)$  はアーチ面内で考えた水平軸まわりの回転角である。

ところで、塑性ヒンジにおけるかく変形量は、単に適合条件式(3)を満足するばかりでなく、さらに以下の5.(2)で述べる降伏条件を満足する、すなわち4次元降伏曲面(多面体)上のひずみベクトルが、正しい方向をもつように関連しているはずである。

(2) 崩壊機構

崩壊機構としては構造物が対称で、さらに負載される荷重として、中央に集中荷重  $P$  を考えているのだから、図-4 に示すごととき支点、頂点およびその中間点に塑性ヒンジが発生して対称形に塑性崩壊する機構が考えられよう。以下で述べる便宜上このような塑性ヒンジに、番号 1, 2 そして 3 (図-4 参照) をつけておくこととする。

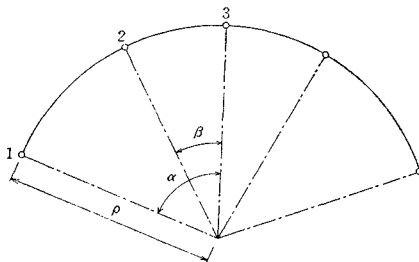


図-4 崩壊機構(実形図:降伏関節の位置)

3. 崩壊荷重の解析

(1) 基本式の誘導

ここで考えている図-5 に示すような長方形断面のテーパのついているアーチの崩壊荷重は、仮想仕事の原理を用いて計算すれば、極限解析における上界定理によって、その上界が与えられる<sup>2)</sup>。

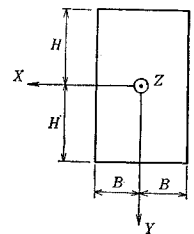


図-5 部材断面

(3) アーチの幾何学的変形条件

1, 2, 3 のかく塑性ヒンジにおいて許される部分的運動によって生ずるヒンジ3の変形  $U, V$  そして  $W$  (図-3 参照) は、運動はすべて微小であるから、幾何学的考察により、つぎの式(1)のように計算される。なお以下に示す添字は、かく塑性ヒンジの番号を表わしている。

$$U = \rho \theta_1 (1 - \cos \alpha) + \rho \theta_2 (1 - \cos \beta) + \Delta_1 \cos \alpha + \Delta_2 \cos \beta + \frac{\Delta_3}{2} \dots\dots\dots(1.1)$$

$$V = \rho (\theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta) - \Delta_1 \sin \alpha - \Delta_2 \sin \beta \dots\dots\dots(1.2)$$

$$W = \rho \{-\psi_1 (1 - \cos \alpha) - \psi_2 (1 - \cos \beta) - \phi_1 \sin \alpha - \phi_2 \sin \beta\} \dots\dots\dots(1.3)$$

さらに頂点の変位  $R_H, R_V$  は、式(1)に対して、つぎのような関係がある。

さて一般化された応力

$$m_y \equiv M_y / M_{0y} \dots\dots\dots(4.1)$$

$$n \equiv N / N_0 \dots\dots\dots(4.2)$$

$$m_x \equiv M_x / M_{0x} \dots\dots\dots(4.3)$$

$$t \equiv T / T_0 \dots\dots\dots(4.4)$$

を考え、それら式(4.2)~(4.4)の応力にそれぞれ対応した、ひずみ  $\lambda, \phi, \psi$  をここで導入することとする。ここに  $M_0, T_0$  および  $N_0$  は降伏モーメントおよび降伏力を表わす。

$$\lambda_i = N_0 / M_{0y} \Delta_i \dots\dots(5.1); \Delta_i = M_{0y} / N_0 \lambda_i = 2 L h \lambda_i$$

$$\phi_i = M_{0x} / M_{0y} \phi_i \dots\dots(5.2); \phi_i = M_{0y} / M_{0x} \phi_i = k \phi_i$$

$$\psi_i = T_0 / M_{0y} \psi_i \dots\dots(5.3); \psi_i = M_{0y} / T_0 \psi_i = q \psi_i$$

ここに、

$$h = H/4 L, k = H/B = H/L \cdot L/B, q = \frac{3 k^2}{3 k - 1} \dots\dots\dots(6)$$

ここで、あとで行なう数値計算を進めていく都合上から、式(1)および式(2)を式(5)を用いて無次元量で書き直しておくこととする。

$$\left. \begin{aligned} U &= \rho \{ \theta_1 (1 - \cos \alpha) + \theta_2 (1 - \cos \beta) + 2 h L / \rho (\lambda_1 \cos \alpha + \lambda_2 \cos \beta) + h L / \rho \lambda_3 \} \dots\dots\dots (1.1)' \\ V &= \rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h L / \rho \lambda_1 \sin \alpha - 2 h L / \rho \lambda_2 \sin \beta \} \dots\dots\dots (1.2)' \\ W &= \rho \{ -q \psi_1 (1 - \cos \alpha) - q \psi_2 (1 - \cos \beta) - k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \dots\dots\dots (1.3)' \\ R_H &= -\rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h L / \rho \lambda_1 \sin \alpha - 2 h L / \rho \lambda_2 \sin \beta \} \sin \xi \\ &\quad + \rho \{ -q \psi_1 (1 - \cos \alpha) - q \psi_2 (1 - \cos \beta) - k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \cos \xi \dots\dots\dots (2.1)' \\ R_V &= -\rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h L / \rho \lambda_1 \sin \alpha - 2 h L / \rho \lambda_2 \sin \beta \} \cos \xi \\ &\quad - \rho \{ -q \psi_1 (1 - \cos \alpha) - q \psi_2 (1 - \cos \beta) - k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \sin \xi \dots\dots\dots (2.2)' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)'$$

さて崩壊荷重(上界)を求めるために、よく知られている仮想仕事の原理を利用することになる。すなわちアーチが荷重を受けて崩壊を始めるとき、そのときの一応あやういつり合い状態においては、仮想仕事の原理が成り立つ。いま 1, 2, 3 に塑性ヒンジができて、アーチが幾何学的運動学的に仮想にして可能な変位をすると考える場合、いわゆる仮想仕事の原理

$$\sum_{(j)} P_j \delta_j = \sum_{(m)} D_m \Delta \bar{Z}_m \dots\dots\dots (7)$$

$$\sum_{(m)} D_m \Delta \bar{Z}_m \equiv W_i = M_{0y} [4(m_{y1}\theta_1 + m_{x1}\varphi_1 + n_1\lambda_1 + t_1\psi_1) + 4(m_{y2}\theta_2 + m_{x2}\varphi_2 + n_2\lambda_2 + t_2\psi_2) + 2(m_{y3}\theta_3 + m_{x3}\varphi_3 + n_3\lambda_3 + t_3\psi_3)] \dots\dots\dots (8.1)$$

また負載される荷重を  $P$  とすると、

$$\sum_{(j)} P_j \delta_j \equiv W_e = PR_V = -P [\rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h \lambda_1 L / \rho \sin \alpha - 2 h \lambda_2 L / \rho \sin \beta \} \cos \xi + \rho \{ -q \psi_1 (1 - \cos \alpha) - q \psi_2 (1 - \cos \beta) - k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \sin \xi] \dots\dots\dots (8.2)$$

したがって式(7)により、式(8.1)、(8.2)から崩壊荷重  $P$  を算定する基本式(8)が求められる。

$$P = \frac{W_i}{R_V} = - \frac{M_{0y} [4(m_{y1}\theta_1 + m_{x1}\varphi_1 + n_1\lambda_1 + t_1\psi_1) + 4(m_{y2}\theta_2 + m_{x2}\varphi_2 + n_2\lambda_2 + t_2\psi_2) + 2(m_{y3}\theta_3 + m_{x3}\varphi_3 + n_3\lambda_3 + t_3\psi_3)]}{\rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h \lambda_1 L / \rho \sin \alpha - 2 h \lambda_2 L / \rho \sin \beta \} \cos \xi + \rho \{ -q \psi_1 (1 - \cos \alpha) - q \psi_2 (1 - \cos \beta) - k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \sin \xi} \dots\dots\dots (8)$$

さてここで、さきにも触れたように、式(8)に含まれている  $\theta_i, \varphi_i, \lambda_i$  および  $\psi_i$  の間には降伏条件を満足し、さらに塑性の応力ひずみ法則したがって塑性流動の法則<sup>(9)</sup>を考慮しなければならない。いま降伏関数を  $\phi$  とすれば、塑性流動の法則によって  $\dot{\theta}_i, \dot{\varphi}_i, \dot{\lambda}_i$  および  $\dot{\psi}_i$  は

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_i &= \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial m_{yi}} \dots\dots\dots (9.1) \\ \dot{\varphi}_i &= \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial m_{xi}} \dots\dots\dots (9.2) \\ \dot{\lambda}_i &= \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial n_i} \dots\dots\dots (9.3) \\ \dot{\psi}_i &= \mu_i \frac{\partial \phi}{\partial t_i} \dots\dots\dots (9.4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

$$P = \frac{W_i}{R_V} = - \frac{M_{0y} [4(m_{y1}\theta_1 + m_{x1}\varphi_1 + n_1\lambda_1) + 4(m_{y2}\theta_2 + m_{x2}\varphi_2 + n_2\lambda_2) + 2(m_{y3}\theta_3 + m_{x3}\varphi_3 + n_3\lambda_3)]}{\rho \{ \theta_1 \sin \alpha + \theta_2 \sin \beta - 2 h \lambda_1 L / \rho \sin \alpha - 2 h \lambda_2 L / \rho \sin \beta \} \cos \xi + \rho \{ -k \varphi_1 \sin \alpha - k \varphi_2 \sin \beta \} \sin \xi} \dots\dots\dots (8)'$$

この崩壊荷重  $P$  の算定式(8)'に含まれる  $\theta_i, \varphi_i$  および  $\lambda_i$  は、さきに述べたと同じように塑性の応力ひずみ法則にしたがい、すなわち式(9.1)、(9.2)および(9.3)を考慮し、さらに適合条件式(3.1)、(3.2)、(3.3)およ

を考慮すれば、つぎのようにして式(8)により崩壊荷重は計算できる。

なお、ここに

$P_j$  :  $j$  点に作用する、ある  $P$  系外力

$D_m$  :  $P$  系外力によるアーチかく部に生じるべき応力

$\delta_j$  : 点  $j$  におけるアーチの仮想変位の  $P_j$  方向における成分

$\Delta \bar{Z}_m$  : アーチかく部の  $D_m$  に対応する仮想変位

それぞれ式(9)のように示される。

ここに、 $\mu_i$  は正のスカラ一量である。結局式(8)を式(3)と式(9)の関係を考慮して計算すれば崩壊荷重は算定されることとなる。ただしいま求めようとしている崩壊荷重の上界とみなす値は6.で述べるように、数多くの試算によって近似的に見つけられるわけである。

(2)  $M_x, M_y$  および  $N$  の3つを考えた場合

3.(1)では4つの断面力を考えたときの崩壊荷重の算定について述べられているが、ねじりモーメントをたとえば省略して、3つの断面力を考慮するときは、同じような解析手順で、式(8)'のように求められる。

び(3.4)を満足していなければならない。なお、式(3.2)、(3.4)に含まれている  $\psi_i$  の項は、この場合は消されている。

4. 組合せ応力に対する降伏条件, 降伏関数

はりの組合せ応力に対する降伏関数の厳密正解を求めることは一般に困難なため、ここでもその近似として、いわゆる降伏曲面上の 上界と 下界を 求めてみる。これは Hill と Siebel<sup>11)</sup> によって与えられた組合せ曲げとねじりの場合の (2 断面力を考慮) 手法を、ここで考えている場合にも適用すればよい (3 断面力の組合せの場合は降伏条件は降伏曲面を形成するが、4 つの断面力を考えるときでも降伏関数は、いわゆる 4 次元の降伏曲面をえがくと推定できよう)。ただし、いわゆる降伏曲面上の 上界も 数値計算が 困難なため、降伏条件としては、いわゆる降伏曲面上の 下界に基づいて、結局、3 断面力の場合は 表-1 を、4 断面力の場合は 表-3 を用いて、それ以後崩壊荷重の算定の考察をして行くこととなる。

(1) いわゆる降伏曲面上の上界

はりの変形は中立軸のまわりの純曲率の速度  $\dot{K}_x, \dot{K}_y$  に 図心まわりの単位長さあたりの純ねじれ速度  $\dot{K}_{xy}$  および軸力に関連したひずみ速度  $\dot{\epsilon}$  によって起こるとする。いま対称断面を考え、図心に原点をとる。たとえば 図-5 のように座標系をとると、部材断面の任意点でのひずみ速度は、

$$\dot{\epsilon}_z = Y\dot{K}_y + X\dot{K}_x + \dot{\epsilon}, \dot{\gamma}_{xz} = -Y\dot{K}_{xy}, \dot{\gamma}_{yz} = X\dot{K}_{xy} \dots\dots\dots(10)$$

そこで単位長さ当りの任意断面 (A) のエネルギー-逸散  $D_i$  は

$$D_i = \int_{(A)} (\sigma \dot{\epsilon}_z + \tau_x \dot{\gamma}_{xz} + \tau_y \dot{\gamma}_{yz}) dA = \int_{(A)} (\sigma X\dot{K}_x + \sigma Y\dot{K}_y + \sigma \dot{\epsilon} - \tau_x Y\dot{K}_{xy} + \tau_y X\dot{K}_{xy}) dA = M_x \dot{K}_x + M_y \dot{K}_y + N \dot{\epsilon} + T \dot{K}_{xy} \dots\dots\dots(11)$$

ここで換算した曲率をつぎのように定義する。

$$\left. \begin{aligned} k_y &= H\dot{K}_y, k_x = \beta_x H\dot{K}_x, \\ k_{xy} &= \beta_t H\dot{K}_{xy}, \Omega = \beta_n H\dot{\epsilon} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

式 (12) において、

$$\beta_x = \frac{M_{0x}}{M_{0y}}, \beta_t = \frac{T_0}{M_{0y}}, \beta_n = \frac{N_0}{M_{0y}} \dots\dots\dots(13)$$

ただし、すでに述べたように

$$\left. \begin{aligned} M_{0y}; & \text{最大塑性面内曲げモーメント} \\ M_{0x}; & \text{最大塑性面外曲げモーメント} \\ T_0; & \text{最大塑性ねじりモーメント} \\ N_0; & \text{最大塑性軸力} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

また  $2H$  は、はりの最大高さである。

式 (12), (13) により式 (11) はつぎの形にかける。

$$D_i = M_{0y}/H(m_y \dot{k}_y + m_x \dot{k}_x + n \dot{\Omega} + t \dot{k}_{xy}) \dots(15)$$

そこで式 (11) が 1 組の変形適合ひずみ速度であることがわかる。このひずみに伴って、一般化された応力は、つぎのようにして降伏条件塑性流動の法則から求められる。

ここでつぎのような降伏条件を適用する。

$$\sigma_z^2 + \alpha^2(\tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = \sigma_0^2 \dots\dots\dots(16)$$

いまの場合は  $\alpha=2$  または  $\sqrt{3}$  とすれば、Tresca または Misses の降伏条件式となる。

この式(16)を、つぎに示す塑性ポテンシャルの式(17)に代入すると式 (18) が求められる。

$$q'' = \mu \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \dots\dots\dots(17)$$

ここで、

$q''$ ; 塑性ひずみ速度

$\Phi$ ; 降伏関数

$Q$ ; 一般化された塑性応力

$\mu$ ; 任意の正のスカラ一量

$$\dot{\epsilon}_z = 2\mu\sigma_z, \dot{\gamma}_{xz} = 2\mu\alpha^2\tau_{zx}, \dot{\gamma}_{yz} = 2\mu\alpha^2\tau_{yz} \dots(18)$$

式 (10), (12) および (18) より  $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$  はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_z &= \frac{1}{2\mu H} \left( \dot{k}_y Y + \frac{1}{\beta_x} \dot{k}_x X + \frac{1}{\beta_n} \dot{\Omega} \right) \\ \tau_{zx} &= -\frac{1}{2\mu H} \cdot \frac{1}{\beta_t \alpha^2} \dot{k}_{xy} Y, \\ \tau_{yz} &= \frac{1}{2\mu H} \cdot \frac{\dot{k}_{xy}}{\beta_t \alpha^2} X \end{aligned} \right\} (19)$$

式 (19) を式 (16) に代入すれば、つぎの式 (20) を得る。

$$2\mu H = \frac{\dot{k}_{xy}}{\sigma_0 \alpha \beta_t} [(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)^2 + X^2 + Y^2]^{1/2} \dots\dots\dots(20)$$

ここに

$$\omega_1 = \frac{\beta_t}{\beta_x} \cdot \frac{\dot{k}_x}{\dot{k}_{xy}} \alpha, \omega_2 = \frac{\dot{k}_y}{\dot{k}_{xy}} \beta_t \alpha, \omega_3 = \frac{\dot{\Omega}}{\dot{k}_{xy}} \cdot \frac{\beta_t}{\beta_n} \alpha$$

式 (20) を式 (19) に代入し、

$$M_y = \int_{(A)} Y \sigma_z dA, M_x = \int_{(A)} X \sigma_z dA, N = \int_{(A)} \sigma_z dA, T = \int_{(A)} (X \tau_{yz} - Y \tau_{zx}) dA$$

を考慮すれば、求める一般応力は式 (21) となる。

$$\left. \begin{aligned} m_x &= \frac{\sigma_0}{M_{0x}} \int_{(A)} \frac{X(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)}{[(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)^2 + X^2 + Y^2]^{1/2}} dA, \\ n &= \frac{\sigma_0}{N_0} \int_{(A)} \frac{\omega_3 X + \omega_2 Y + \omega_3}{[(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)^2 + X^2 + Y^2]^{1/2}} dA, \\ m_y &= \frac{\sigma_0}{M_{0y}} \int_{(A)} \frac{Y(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)}{[(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)^2 + X^2 + Y^2]^{1/2}} dA, \\ t &= \frac{\sigma_0}{\alpha T_0} \int_{(A)} \frac{X^2 + Y^2}{[(\omega_1 X + \omega_2 Y + \omega_3)^2 + X^2 + Y^2]^{1/2}} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

すでに述べたように、ここに

$$\left. \begin{aligned} m_y &= M_y/M_{0y} \dots\dots\dots(22.1) \\ m_x &= M_x/M_{0x} \dots\dots\dots(22.2) \\ n &= N/N_0 \dots\dots\dots(22.3) \\ t &= T/T_0 \dots\dots\dots(22.4) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

式 (21) により、いわゆる降伏面上の上界が3つのパラメータ  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  の関数として定義されたが、この式 (21) の積分は簡単な断面形でも困難なため、つぎのような降伏面上での下界を見つけることとする。

(2) いわゆる降伏曲面上の下界

最初にねじりを考えない場合を考察し、つづいてこれを発展させて、ねじりも合せて4断面力を考慮した場合を考える。断面形は長方形として議論を進めることとする。ただし一般断面形にもこの方法の適用は拡張し得る。

a) 3つの断面力を考慮した場合

まずこの場合ゼロでない唯一の応力成分は軸方向の応力  $\sigma$  だけであり、断面が全塑性になると、 $\sigma$  は引張りか圧縮かの降伏応力に等しいであろう。いま 図-6.1 に示すように  $Y=f(x)$  を引張り応力と圧縮応力とを分ける面を示す式とする。そうすると、かく応力はつぎの式 (23) のようになる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \int_{-B}^B \left[ \int_{-H}^{f(X)} X(-\sigma_0) dY + \int_{f(X)}^H X(\sigma_0) dY \right] dX \\ &= -2\sigma_0 \int_{-B}^B Xf(X) dX \\ M_y &= \int_{-B}^B \left[ \int_{-H}^{f(X)} Y(-\sigma_0) dY + \int_{f(X)}^H Y(\sigma_0) dY \right] dX \\ &= \sigma_0 \int_{-B}^B (H^2 - f(X)^2) dX \\ N &= \int_{-B}^B [\sigma_0 \{H - f(X)\} - \sigma_0 \{f(X) - (-H)\}] dX \\ &= -2\sigma_0 \int_{-B}^B f(X) dX \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

そこで、いま与えられた  $M_x, N$  に対して、 $M_y$  を最大にするように変分計算をして、 $f(X)$  を決めることとする。

$$\left. \begin{aligned} \delta M_x &= -2\sigma_0 \int_{-B}^B X \delta f(X) dX, \\ \delta M_y &= -2\sigma_0 \int_{-B}^B f(X) \delta f(X) dX, \\ \delta N &= -2\sigma_0 \int_{-B}^B \delta f(X) dX \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

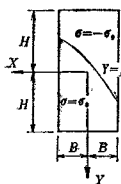


図-6.1

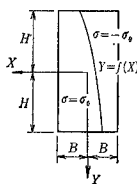


図-6.2

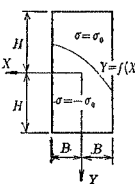


図-6.3

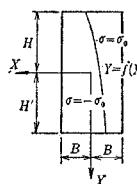


図-6.4

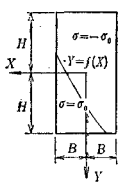


図-6.5

ところで、

$$\delta M_y + \nu_1 \delta M_x + \nu_2 (\delta N) H = 0 \dots\dots\dots(25)$$

より、式 (25) に式 (24) を代入すれば、

$$-2\sigma_0 \int_{-B}^B (-f(X) - \nu_1 X - \nu_2 H) \delta f(X) dX = 0$$

したがって

$$f(X) = -\nu_1 X - \nu_2 H \dots\dots\dots(26)$$

となり、 $Y=f(X)$  は直線となることがわかる。式 (26) を式 (23) に代入して積分すれば、式 (27) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \frac{4}{3} \sigma_0 B^3 \nu_1, \\ M_y &= \frac{2}{3} \sigma_0 B H^2 \left( 3 - 3\nu_2^2 - \nu_1^2 \frac{B^2}{H^2} \right), \\ N &= 4 \sigma_0 B H \nu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

しかるに、

$$\left. \begin{aligned} M_{0x} &= 2 B^2 H \sigma_0, \\ M_{0y} &= 2 B H^2 \sigma_0, \\ N_0 &= 4 B H \sigma_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

であり、式 (27), (28) から、式 (22.1)~(22.3) で示す無次元化された断面力は、いまの場合つぎの式 (22.1)'~(22.3)' のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} m_y &= M_y/M_{0y} = 1 - \frac{1}{3} \frac{B^2}{H^2} \nu_1^2 - \nu_2^2 \dots\dots\dots(22.1)' \\ m_x &= M_x/M_{0x} = \frac{2}{3} \frac{B}{H} \nu_1 \dots\dots\dots(22.2)' \\ n &= N/N_0 = \nu_2 \dots\dots\dots(22.3)' \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)'$$

式 (22.1)', (22.2)' および (22.3)' より、パラメータ  $\nu_1, \nu_2$  を消去すると、

$$m_y + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 = 1 \dots\dots\dots(29.1)$$

なお、式 (29.1) はその誘導からみて、つぎのような範囲に適用できることがわかる。

$$\left. \begin{aligned} n &= 0 \text{ で;} & -\frac{2}{3} \leq m_x \leq \frac{2}{3}, & m_y \geq \frac{2}{3} \\ & & -1 \leq n \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30.1)$$

全く同じようにして、図-6.2~6.4 の場合について、降伏面の方程式とその限界範囲が式 (29.2)~(29.4) および式 (30.2)~(30.4) のように求められる。

図-6.2 の場合;

$$\frac{3}{4} m_y^2 + m_x + n^2 = 1 \dots\dots\dots(29.2)$$

$n=0$  で;

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{2}{3} \leq m_y \leq \frac{2}{3}, & m_x \geq \frac{2}{3} \\ & -1 \leq n \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30.2)$$

図-6.3 の場合;

$$-m_y + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 = 1 \dots\dots\dots(29.3)$$

$$n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_x \leq \frac{2}{3}, m_y \leq -\frac{2}{3} \left. \vphantom{-\frac{2}{3}} \right\} (30.3)$$

$$-1 \leq n \leq 1$$

図-6.4 の場合;

$$\frac{3}{4} m_y^2 - m_x + n^2 = 1 \dots\dots\dots (29.4)$$

$$n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_y \leq \frac{2}{3}, m_x \leq -\frac{2}{3} \left. \vphantom{-\frac{2}{3}} \right\} (30.4)$$

$$-1 \leq n \leq 1$$

つぎに、たとえば 図-6.5 に示すような場合を考えてみる。

$$M_y = \int_{-B}^W \int_{-H}^H (-\sigma_0) Y dY \cdot dX$$

$$+ \int_W^B \int_{-H}^{f(X)} (-\sigma_0) Y \cdot dY \cdot dX$$

$$+ \int_W^B \int_{f(X)}^H \sigma_0 Y \cdot dY \cdot dX$$

$$= 2\sigma_0 \left\{ \frac{7\nu_2 - 2}{6\nu_1} (\nu_2 + 1)^2 H^3 - \frac{\nu_2^2 - 1}{2} B H^2 \right.$$

$$\left. - \frac{\nu_1 \nu_2}{2} B^2 H - \frac{\nu_1^2}{6} B^3 \right\}$$

$$M_x = -2\sigma_0 \left\{ \frac{H^3(1 + \nu_2)^3}{6\nu_1^2} - \frac{B^2(1 + \nu_2)}{2} H - \frac{\nu_1 B^3}{3} \right\}$$

$$N = 4\sigma_0 \left\{ \frac{H^2(1 - 3\nu_2)(1 + \nu_2)}{4\nu_1} \right.$$

$$\left. + \frac{\nu_2 - 1}{2} H B + \frac{\nu_1 B^2}{4} \right\} \dots\dots\dots (31)$$

ここで  $W = \frac{H(1 + \nu_2)}{\nu_1}$ ，したがって無次元化すると式 (32) のようになる。

$$m_y = \frac{(7\nu_2 - 2)(1 + \nu_2)^2}{6\nu_1} \frac{H}{B} - \frac{\nu_2^2 - 1}{2} - \frac{\nu_1 \nu_2}{2} \frac{B}{H}$$

$$- \frac{\nu_1^2}{6} \frac{B^2}{H^2}$$

$$m_x = - \left\{ \frac{(1 + \nu_2)^3}{6\nu_1^2} \frac{H^2}{B^2} - \frac{1 + \nu_2}{2} - \frac{\nu_1}{3} \frac{B}{H} \right\}$$

$$n = \frac{(1 - 3\nu_2)(1 + \nu_2)}{4\nu_1} \frac{H}{B} + \frac{\nu_2 - 1}{2} + \frac{\nu_1}{4} \frac{B}{H} \dots\dots\dots (32)$$

式 (32) より  $\nu_1, \nu_2$  を消去すれば、 $m_y, m_x, n$  の求める関係式が導かれるはずであるが、複雑となるため、このような場合の降伏条件は省略し、つぎの 5.(1) で示すような近似降伏多面体を考えて解析を進めて行くこととする。

b) 4つの断面力を考慮した場合

a) の場合に加えて、ねじりモーメントの影響を考慮して降伏条件を求めるには、まず曲げの状態と純ねじりの状態との2つの独立な応力分布状態を考え、両者組合せの状態に対しては、塑性曲げの垂直応力分布と相似で、大きさの小さい応力分布を考えると同時に、純ねじり塑性断面内のせん断応力分布と相似で大きさの小さい応力分布を考え、それらを合成し、この状態で最も適し

た下界は Misses (あるいは Tresca) の降伏条件式を満足していなければならないことに注意すればよい。

さて a) で得られた塑性曲げの垂直応力分布と相似で大きさの小さい垂直応力すなわち、 $\sigma < \sigma_0$  を考える。これに対応する無次元化した面外、面内曲げモーメントおよび軸力は、式 (27) および (28) より、式 (22.1)'' ~ (22.3)'' となる。

$$m_y = \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{B^2}{H^2} \nu_1^2 - \nu_2^2 \right) \frac{\sigma}{\sigma_0} \dots\dots\dots (22.1)''$$

$$m_x = \frac{2}{3} \frac{B}{H} \nu_1 \frac{\sigma}{\sigma_0} \dots\dots\dots (22.2)''$$

$$n = \nu_2 \frac{\sigma}{\sigma_0} \dots\dots\dots (22.3)''$$

式 (22.1)'' ~ (22.3)'' よりパラメーター  $\nu_1, \nu_2$  を消去して式 (29.1) に対応するものとして、式 (29.1)' を得る。

$$\frac{\sigma_0}{\sigma} m_y + \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^2 \left( \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 \right) = 1 \dots\dots\dots (29.1)'$$

つぎに純塑性ねじりモーメント  $T_0$  によって生ずるせん断応力分布と相似の分布を仮定し、その大きさは  $\tau < \tau_0$  と考える。すると、無次元のねじりモーメント  $t$  は、

$$t = \frac{T}{T_0} = \frac{\alpha \tau}{\sigma_0} \dots\dots\dots (22.4)''$$

ところで垂直応力  $\sigma$  とせん断応力  $\tau$  の大きさは、降伏条件式

$$\sigma^2 + \alpha^2 \tau^2 = \sigma_0^2 \dots\dots\dots (33)$$

が断面内にわたって満足されるような関係にある。このことより、式 (22.4)'' と式 (33) から、

$$\sigma_0 / \sigma = 1 / \sqrt{1 - t^2} \dots\dots\dots (34)$$

したがって、式 (34) を式 (29.1)' に代入すれば、つぎのように求める関係式 (35.1) が得られる。

$$m_y \sqrt{1 - t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 = 1 \dots\dots\dots (35.1)$$

なお式 (35.1) の適用範囲はつぎのようである。

$$t=0, n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_x \leq \frac{2}{3}, m_y \geq \frac{2}{3} \left. \vphantom{-\frac{2}{3}} \right\}$$

$$n \text{ 軸, } t \text{ 軸; } -1 \leq n \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \left. \vphantom{-1} \right\} \dots\dots\dots (36.1)$$

以上は 図-6.1 について述べたが、図-6.2, 6.3, 6.4 ついてもそれぞれつぎのようになる。

$$\frac{3}{4} m_y^2 + m_x \sqrt{1 - t^2} + n^2 + t^2 = 1 \dots\dots\dots (35.2)$$

$$t=0, n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_y \leq \frac{2}{3}, m_x \leq -\frac{2}{3} \left. \vphantom{-\frac{2}{3}} \right\}$$

$$n \text{ 軸, } t \text{ 軸; } -1 \leq n \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \left. \vphantom{-1} \right\} \dots\dots\dots (36.2)$$

$$\frac{3}{4} m_y^2 - m_x \sqrt{1 - t^2} + n^2 + t^2 = 1 \dots\dots\dots (35.3)$$

$$t=0, n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_y \leq \frac{2}{3}, m_x \geq \frac{2}{3} \left. \vphantom{-\frac{2}{3}} \right\}$$

$$n \text{ 軸, } t \text{ 軸; } -1 \leq n \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \left. \vphantom{-1} \right\} \dots\dots\dots (36.3)$$

$$-m_y \sqrt{1-t^2} + \frac{3}{4} m_x^2 + n^2 + t^2 = 1 \dots\dots\dots(35.4)$$

$$\left. \begin{aligned} t=0, n=0 \text{ で; } -\frac{2}{3} \leq m_x \leq \frac{2}{3}, m_y \leq -\frac{2}{3} \\ n \text{ 軸, } t \text{ 軸; } -1 \leq n \leq 1, -1 \leq t \leq 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36.4)$$

なお 図-6.5 に対応した 4 内力を考慮した場合の降伏条件を求めるには、式 (31) に対応して、つぎの式 (37) が一応求められる。

$$\left. \begin{aligned} m_y &= \sqrt{1-t^2} \left\{ \frac{(7\nu_2-2)(\nu_2+1)^2}{6B\nu_1} H - \frac{\nu_2^2-1}{2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\nu_1\nu_2B}{2H} - \frac{\nu_1^2B^2}{6H^2} \right\} \\ m_x &= -\sqrt{1-t^2} \left\{ \frac{H^2(1+\nu_2)^2}{6B^2\nu_1^2} - \frac{1+\nu_2}{2} - \frac{\nu_1B}{3H} \right\} \\ n &= \sqrt{1-t^2} \left\{ \frac{(1-3\nu_2)(1+\nu_2)}{4B\nu_1} H \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu_2-1}{2} + \frac{\nu_1B}{4H} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

式 (37) の  $\nu_1, \nu_2$  を消去すれば  $m_y, m_x, n, t$  の関係式が導かれるはずであるが、計算が複雑となるから、降伏条件は求めずに、この場合も 5.(2) で示すように、式 (35.1)~(35.4) を利用して、いわゆる近似降伏多面体を考えて行くこととする。

### 5. 近似降伏多面体

問題を解くために、式 (29) あるいは式 (35) を、いわゆる折平面近似で置き換えると便利である。

#### (1) 3 内力の場合の近似降伏多面体

式 (29) の対称性と球状に近い点からみて、8 辺形の近似をここでも考えることとする。このため座標系として  $m_y, m_x, n$  を 図-7 のようにとり、等高曲線  $n=0$  上に対称な点  $(0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 2/3, \pm 2/3)$  をとる。つぎに一例として第 1 象限内にある降伏面について考えてみる。 $m_x=0$  で、 $m_y=n$  となる  $n$  の位置は、式 (29.1) から  $m_x=0$  とおくと、 $m_y+n^2=1$ 、ここで  $m_y=n$  とおき  $n \geq 0$  のときは  $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  となる。したがってこの位置での  $m_x-m_y$  平面は式 (29.1) から、

$$m_y + \frac{3}{4} m_x^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \div 0.618 \dots\dots\dots(a)$$

同様に式 (29.2) について  $m_y=0$  で、 $m_x=n$  となる  $n$  の位置は  $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  である。すなわち

$$m_x + \frac{3}{4} m_y^2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \div 0.618 \dots\dots\dots(b)$$

上記の式 (a), (b) における  $m_x, m_y$  のとり得る限界は、つぎのようである。

式 (a) の場合は、

$$\begin{aligned} -H \leq f(B) \leq H \text{ より,} \\ -\frac{1+\sqrt{5}}{3} \leq m_x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{3} \\ -H \leq f(-B) \leq H \text{ より} \\ -\frac{3-\sqrt{5}}{3} \leq m_x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{3} \end{aligned}$$

これから、 $-\frac{3-\sqrt{5}}{3} \leq m_x \leq \frac{3-\sqrt{5}}{3}$ 、したがって

$$m_y \geq \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

式 (b) の場合は同様に

$$-\frac{3-\sqrt{5}}{3} \leq m_y \leq \frac{3-\sqrt{5}}{3}, m_x \geq \frac{3\sqrt{5}-5}{3}$$

ほかの象限についても同様に行なうことができ、 $n$  軸上の  $n=0, n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  で折れる降伏面は、図-7 のごとなる。

図-7 からわかるように、 $n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  上の  $m_x-m_y$  平面は不連続となっている。また不連続状態は降伏

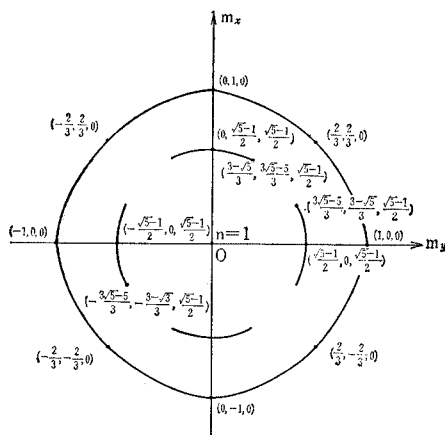


図-7 降伏曲面の考察

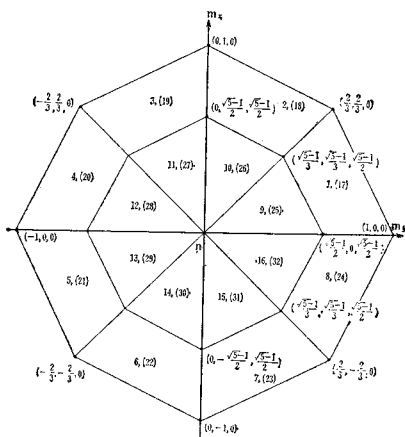


図-8 近似降伏多面体 ( $n \geq 0$ ), [図番号 ( )] は  $n \leq 0$

表-1 3 内力に対する折平面近似・降伏条件と流れ法則

面	方程式 (=1)	ひずみ割合 ( $\theta, \varphi, \lambda$ )	面	方程式 (=1)	ひずみ割合 ( $\theta, \varphi, \lambda$ )
1, 17	$m_y + 0.5 m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ 1, 0.5, \pm 0.618 ]$	9, 25	$0.618 m_y + 0.309 m_x \pm n$	$\mu [ 0.618, 0.309, \pm 1 ]$
2, 18	$0.5 m_y + m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ 0.5, 1, \pm 0.618 ]$	10, 26	$0.309 m_y + 0.618 m_x \pm n$	$\mu [ 0.309, 0.618, \pm 1 ]$
3, 19	$-0.5 m_y + m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ -0.5, 1, \pm 0.618 ]$	11, 27	$-0.309 m_y + 0.618 m_x \pm n$	$\mu [ -0.309, 0.618, \pm 1 ]$
4, 20	$-m_y + 0.5 m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ -1, 0.5, \pm 0.618 ]$	12, 28	$-0.618 m_y + 0.309 m_x \pm n$	$\mu [ -0.618, 0.309, \pm 1 ]$
5, 21	$-m_y - 0.5 m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ -1, -0.5, \pm 0.618 ]$	13, 29	$-0.618 m_y - 0.309 m_x \pm n$	$\mu [ -0.618, -0.309, \pm 1 ]$
6, 22	$-0.5 m_y - m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ -0.5, -1, \pm 0.618 ]$	14, 30	$-0.309 m_y - 0.618 m_x \pm n$	$\mu [ -0.309, -0.618, \pm 1 ]$
7, 23	$0.5 m_y - m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ 0.5, -1, \pm 0.618 ]$	15, 31	$0.309 m_y - 0.618 m_x \pm n$	$\mu [ 0.309, -0.618, \pm 1 ]$
8, 24	$m_y - 0.5 m_x \pm 0.618 n$	$\mu [ 1, -0.5, \pm 0.618 ]$	16, 32	$0.618 m_y - 0.309 m_x \pm n$	$\mu [ 0.618, -0.309, \pm 1 ]$

面全体についてもわかる。このことは実は図-6.5の状態に対する考慮が必要であることを示してはいる。しかし先にも述べたように複雑となるから、結局以上の考察から近似降伏面として、図-8 に示すような近似降伏多面体を考えて行くことにする。表-1 に多面体の方程式(降伏条件)と流れ法則を示す。

(2) 4 内力の場合のいわゆる近似降伏多面体

a) 予備的考察

まず2次元の降伏曲線は円に、3次元の降伏曲線は球に近いことより、4次元のいわゆる降伏曲面は  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$  を満足するいわゆる4次元の球に近いと類推できよう。そこでまず降伏曲面を4次元の球とし、さらにその球に内接する近似降伏多面体をまず考えて行くこととする。

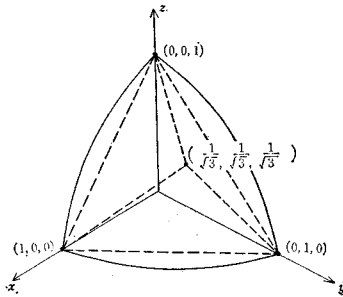


図-9

いま第1象限に例をとり、3次元でいえば図-9のように、真中にすなわち  $x=y=z$  のところに1点Aをとり、かく軸の頂点とをそれぞれ結んでできる平面(1象限に3平面)からなる24面体を近似降伏多面体と考える。なお4次元の場合、曲面を完全にすき間なく面が重複することなく内接多面体で置き換えるには、原点より放射状にのびた1直線は、多面体と必ず交点を1つ持

ち、2つ以上の交点を持たないということに注意して考える必要がある。

さて4次元の多面体でも降伏曲面がかく軸について対称であることから、近似多面体の作成には、第1象限内にあるものについてのみに考えることにする。

4次元では、3次元の場合のA点に対応して、超象限内真中の点、つまりかく方向余弦がすべて等しい直線と曲面との交点  $A'(x=y=z=w$  の点)、(0.5, 0.5, 0.5, 0.5)の点)と4つのかく軸の頂点すなわち(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0) および (0, 0, 0, 1) とを結んでできる、いわゆる超平面よりなる64面体(1象限に4平面で16象限)の似近降伏多面体が考えられる。すなわち、第1象限における5つの点に対しての、面の方程式を表-2に列挙してみる。

b) 4次元近似降伏多面体の方程式

a) では4次元の球に内接する多面体について考察したが、いま論じている問題の近似降伏多面体の方程式は、実は球に内接するのではなく、球に近いと考えられる降伏曲面に内接するものとするべきだから、A'点として式(35)より降伏曲面上の点を求めて、補正をすると、つぎのような降伏曲面に対する近似降伏多面体の64個の超平面の方程式が表-3のように得られる。以下の表では、まずかく象限とそれに属する関連5つの頂点の座標を列挙する。つづいて第1列に超平面の番号、第2列のわくに4つの頂点の座標、第3列のわくには、その4頂点より超平面の方程式を列挙する。

6. 崩壊荷重の算定および数値計算

3. で考察した解析により、塑性崩壊荷重の算定計算の手順および数値計算結果につき述べることにする。

(1) 崩壊荷重の算定

4内力を考慮した場合はつぎのようにすればよい。すなわち塑性ヒンジ1, 2および3が、近似降伏多面体上のどここの位置に占める場合が、最も近似的に正しい崩壊荷重を与えるかを決定するのは、試算による。試算による

表-2

面	4 つ の 頂 点	方 程 式
1	(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	$x + y + z - w = 1$
2	(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	$-x + y + z + w = 1$
3	(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	$x - y + z - w = 1$
4	(0, 0, 0, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0.5, 0.5, 0.5, 0.5)	$x + y - z + w = 1$



表-3

区	4つの頂点の座標	方程式	区	4つの頂点の座標	方程式
第1象限: $m_y > 0, m_x > 0, u > 0, t > 0$ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)			第3象限: $m_y < 0, m_x < 0, u > 0, t > 0$ (-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (-0.463, -0.463, 0.463, 0.463)		
1	(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$m_y + m_x + u - 0.840 t = 1$	9	(-1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y - m_x + u - 0.840 t = 1$
2	(0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$-0.840 m_y + m_x + u + t = 1$	10	(0,-1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (-0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$0.840 m_y - m_x + u + t = 1$
3	(0,0,1), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$m_y - 0.840 m_x + u + t = 1$	11	(0,0,1), (0,0,0,1), (-1,0,0,0), (-0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y + 0.840 m_x + u + t = 1$
4	(0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$m_y + m_x - 0.840 u + t = 1$	12	(0,0,0,1), (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (-0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y - m_x - 0.840 u + t = 1$
第2象限: $m_y < 0, m_x > 0, u > 0, t > 0$ (-0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (-0.463, 0.463, 0.463, 0.463)			第4象限: $m_y > 0, m_x < 0, u > 0, t > 0$ (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)		
5	(-1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (-0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y + m_x + u - 0.840 t = 1$	13	(1,0,0), (0,-1,0), (0,0,1), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$m_y - m_x + u - 0.840 t = 1$
6	(0,1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (-0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$0.840 m_y + m_x + u + t = 1$	14	(0,-1,0), (0,0,1), (0,0,0,1), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$-0.840 m_y - m_x + u + t = 1$
7	(0,0,1), (0,0,0,1), (-1,0,0,0), (-0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y - 0.840 m_x + u + t = 1$	15	(0,0,1), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$m_y + 0.840 m_x + u + t = 1$
8	(0,0,0,1), (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (-0.463, 0.463, 0.463, 0.463)	$-m_y + m_x - 0.840 u + t = 1$	16	(0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0.463, -0.463, 0.463, 0.463)	$m_y - m_x - 0.840 u + t = 1$
第5象限: $m_y > 0, m_x > 0, u < 0, t > 0$ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (0.463, 0.463, -0.463, 0.463)			第7象限: $m_y < 0, m_x < 0, u < 0, t > 0$ (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-0.463, -0.463, -0.463, 0.463)		
17	(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$m_y + m_x - u - 0.840 t = 1$	25	(-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (-0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y - m_x - u - 0.840 t = 1$
18	(0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$-0.840 m_y + m_x - u + t = 1$	26	(0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$0.840 m_y - m_x - u + t = 1$
19	(0,0,-1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$m_y - 0.840 m_x - u + t = 1$	27	(0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-1,0,0,0), (-0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y + 0.840 m_x - u + t = 1$
20	(0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$m_y + m_x + 0.840 u + t = 1$	28	(0,0,0,1), (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (-0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y - m_x + 0.840 u + t = 1$
第6象限: $m_y < 0, m_x > 0, u < 0, t > 0$ (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-0.463, 0.463, -0.463, 0.463)			第8象限: $m_y > 0, m_x < 0, u < 0, t > 0$ (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (0.463, -0.463, -0.463, 0.463)		
21	(-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (-0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y + m_x - u - 0.840 t = 1$	29	(1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$m_y - m_x - u - 0.840 t = 1$
22	(0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$0.840 m_y + m_x - u + t = 1$	30	(0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,1), (0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$-0.840 m_y - m_x - u + t = 1$
23	(0,0,-1,0), (0,0,0,1), (-1,0,0,0), (-0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y - 0.840 m_x - u + t = 1$	31	(0,0,-1,0), (0,0,0,1), (1,0,0,0), (0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$m_y + 0.840 m_x - u + t = 1$
24	(1,0,0,0), (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (-0.463, 0.463, -0.463, 0.463)	$-m_y + m_x + 0.840 u + t = 1$	32	(0,0,0,1), (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0.463, -0.463, -0.463, 0.463)	$m_y - m_x + 0.840 u + t = 1$
第9象限: $m_y > 0, m_x > 0, u > 0, t < 0$ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0.463, 0.463, 0.463, -0.463)			第11象限: $m_y < 0, m_x < 0, u > 0, t < 0$ (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, -0.463, 0.463, -0.463)		
33	(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$m_y + m_x + u + 0.840 t = 1$	41	(-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0), (-0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y - m_x + u + 0.840 t = 1$
34	(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$-0.840 m_y + m_x + u - t = 1$	42	(0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$0.840 m_y - m_x + u - t = 1$
35	(0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$m_y - 0.840 m_x + u - t = 1$	43	(0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0,0,1,0), (-0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y + 0.840 m_x + u - t = 1$
36	(0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$m_y + m_x - 0.840 u - t = 1$	44	(0,0,0,-1), (0,0,1,0), (0,-1,0,0), (-0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y - m_x - 0.840 u - t = 1$
第10象限: $m_y < 0, m_x > 0, u > 0, t < 0$ (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, 0.463, 0.463, -0.463)			第12象限: $m_y > 0, m_x < 0, u > 0, t < 0$ (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0.463, -0.463, 0.463, -0.463)		
37	(-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,1,0), (-0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y + m_x + u + 0.840 t = 1$	45	(1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$m_y - m_x + u + 0.840 t = 1$
38	(0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$0.840 m_y + m_x + u - t = 1$	46	(0,-1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,-1), (0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$-0.840 m_y - m_x + u - t = 1$
39	(0,0,1,0), (0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (-0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y - 0.840 m_x + u - t = 1$	47	(0,0,1,0), (0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$m_y + 0.840 m_x + u - t = 1$
40	(0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (-0.463, 0.463, 0.463, -0.463)	$-m_y + m_x - 0.840 u - t = 1$	48	(0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0.463, -0.463, 0.463, -0.463)	$m_y - m_x - 0.840 u - t = 1$

表-3 (つづき)

面	4つの頂点の座標	方程式	面	4つの頂点の座標	方程式
第13象限; $m_y > 0, m_x > 0, n < 0, t < 0$ (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1) (0.463, 0.463, -0.463, -0.463)			第15象限; $m_y < 0, m_x < 0, n < 0, t < 0$ (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-) (-0.463, -0.463, -0.463, -0.463)		
49	(1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$m_y + m_x - n + 0.840 t = 1$	57	(-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (-0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y - m_x - n + 0.840 t = 1$
50	(0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$-0.840 m_y + m_x - n - t = 1$	58	(0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$0.840 m_y - m_x - n - t = 1$
51	(0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$m_y - 0.840 m_x - n - t = 1$	59	(0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (-0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y + 0.840 m_x - n - t = 1$
52	(0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0,1,0,0), (0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$m_y + m_x + 0.840 n - t = 1$	60	(0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (0,-1,0,0), (-0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y - m_x + 0.840 n - t = 1$
第14象限; $m_y < 0, m_x > 0, n < 0, t < 0$ (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1) (-0.463, 0.463, -0.463, -0.463)			第16象限; $m_y > 0, m_x < 0, n < 0, t < 0$ (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (0.463, -0.463, -0.463, -0.463)		
53	(-1,0,0,0), (0,1,0,0), (0,0,-1,0), (-0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y + m_x - n + 0.840 t = 1$	61	(1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$m_y - m_x - n + 0.840 t = 1$
54	(0,1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (-0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$0.840 m_y + m_x - n - t = 1$	62	(0,-1,0,0), (0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$-0.840 m_y - m_x - n - t = 1$
55	(0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (-0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y - 0.840 m_x - n - t = 1$	63	(0,0,-1,0), (0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$m_y + 0.840 m_x - n - t = 1$
56	(0,0,0,-1), (-1,0,0,0), (0,1,0,0), (-0.463, 0.463, -0.463, -0.463)	$-m_y + m_x + 0.840 n - t = 1$	64	(0,0,0,-1), (1,0,0,0), (0,-1,0,0), (0.463, -0.463, -0.463, -0.463)	$m_y - m_x + 0.840 n - t = 1$

る場合、降伏多面体が 64 多面体であるから、単純な組合せを考えるだけでは、なかなか困難である。この場合は応力図を参考とし、さらに 2 次元的 3 次元的考察が参考となっている。

なお式 (3) で示す 5 つの幾何学的適合条件を満足しなければならぬから、この場合は、かく塑性ヒンジは、3 次元近似降伏多面体でいえば、その稜の上にある場合をも考えて計算をしている。2 つの超平面の交差をも想定しているわけである。すなわちたとえば以下の式 (38) に示すように、式 (3) の 5 つの適合条件を満足するひずみベクトルを見つけるためには、少なくとも 6 つの任意の独立なスカラー量  $\mu$  を含んだかくひずみベクトル群であるべきはずである。

つぎに実際に電子計算機で計算させようような式に書き直した一例を示してみる。

いま塑性ヒンジ 1 は、隣り合った面 1 と 2 とでできる

$$\begin{aligned} &\mu_1 \{ a_1(1 - \cos \alpha) + c_1 2 L/\rho h \cos \alpha \} + \mu_2 \{ a_2(1 - \cos \alpha) + c_2 2 L/\rho h \cos \alpha \} \\ &+ \mu_3 \{ a_3(1 - \cos \beta) + c_3 2 L/\rho h \cos \beta \} + \mu_4 \{ a_4(1 - \cos \beta) + c_4 2 L/\rho h \cos \beta \} \\ &+ \mu_5 \{ c_5 L/\rho h \} + \mu_6 \{ c_6 L/\rho h \} = 0 \dots\dots\dots (3.1)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mu_1 \{ a_1 \sin \alpha \cdot \sin \xi + k b_1 \sin \alpha \cdot \cos \xi - 2 L/\rho h c_1 \sin \alpha \cdot \sin \xi + q d_1 (1 - \cos \alpha) \cos \xi \} \\ &+ \mu_2 \{ a_2 \sin \alpha \cdot \sin \xi + k b_2 \sin \alpha \cdot \cos \xi - 2 L/\rho h c_2 \sin \alpha \cdot \sin \xi + q d_2 (1 - \cos \alpha) \cos \xi \} \\ &+ \mu_3 \{ a_3 \sin \beta \cdot \sin \xi + k b_3 \sin \beta \cdot \cos \xi - 2 L/\rho h c_3 \sin \beta \cdot \sin \xi + q d_3 (1 - \cos \beta) \cos \xi \} \\ &+ \mu_4 \{ a_4 \sin \beta \cdot \sin \xi + k b_4 \sin \beta \cdot \cos \xi - 2 L/\rho h c_4 \sin \beta \cdot \sin \xi + q d_4 (1 - \cos \beta) \cos \xi \} = 0 \dots\dots\dots (3.2)' \end{aligned}$$

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 + \mu_4 a_4 + \mu_5 \frac{1}{2} a_5 + \mu_6 \frac{1}{2} a_6 = 0 \dots\dots\dots (3.3)'$$

$$\begin{aligned} &\mu_1 (k b_1 \cos \alpha + q d_1 \sin \alpha) + \mu_2 (k b_2 \cos \alpha + q d_2 \sin \alpha) + \mu_3 (k b_3 \cos \beta + q d_3 \sin \beta) \\ &+ \mu_4 (k b_4 \cos \beta + q d_4 \sin \beta) + \mu_5 \left( \frac{1}{2} k b_5 \right) + \mu_6 \left( \frac{1}{2} k b_6 \right) = 0 \dots\dots\dots (3.4)' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\mu_1 (k b_1 \sin \alpha - q d_1 \cos \alpha) + \mu_2 (k b_2 \sin \alpha - q d_2 \cos \alpha) \\ &+ \mu_3 (k b_3 \sin \beta - q d_3 \cos \beta) + \mu_4 (k b_4 \sin \beta - q d_4 \cos \beta) - \mu_5 (q d_5) - \mu_6 (q d_6) = 0 \dots\dots\dots (3.5)' \end{aligned}$$

} ..... (3)'

いよゆる稜の上に、また塑性ヒンジ 2 は、面 3 と 4 の稜の上に、さらにまた塑性ヒンジ 3 は、面 5 と 6 の稜の上にあると仮定する (この面の番号は便宜的に名付けておくだけのものである)。かくすると塑性ひずみ速度  $\dot{\theta}_i$ ,  $\dot{\phi}_i$ ,  $\dot{\lambda}_i$ ,  $\dot{\psi}_i$  は式 (38) のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \dot{\theta}_1 &= a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2, & \dot{\theta}_2 &= a_3 \mu_3 + a_4 \mu_4, & \dot{\theta}_3 &= a_5 \mu_5 + a_6 \mu_6 \\ \dot{\phi}_1 &= b_1 \mu_1 + b_2 \mu_2, & \dot{\phi}_2 &= b_3 \mu_3 + b_4 \mu_4, & \dot{\phi}_3 &= b_5 \mu_5 + b_6 \mu_6 \\ \dot{\lambda}_1 &= c_1 \mu_1 + c_2 \mu_2, & \dot{\lambda}_2 &= c_3 \mu_3 + c_4 \mu_4, & \dot{\lambda}_3 &= c_5 \mu_5 + c_6 \mu_6 \\ \dot{\psi}_1 &= d_1 \mu_1 + d_2 \mu_2, & \dot{\psi}_2 &= d_3 \mu_3 + d_4 \mu_4, & \dot{\psi}_3 &= d_5 \mu_5 + d_6 \mu_6 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

ここに、 $\mu_1, \dots, \mu_6$  は任意の独立な正のスカラー一倍数であり、 $a_1, \dots, a_6, b_1, \dots, b_6, c_1, \dots, c_6, d_1, \dots, d_6$  は塑性ヒンジ 1, 2 および 3 の近似多面体上で占める位置を仮定すれば、それぞれ塑性流動の法則から求まるひずみ割合である。式 (38) によって式 (3) をつぎの式 (3)' のように書き直しておく。

式(3)'によって、たとえば  $\mu_1, \dots, \mu_5$  は  $\mu_6$  の関数として決定できる。ところで、ここで決定できた  $\mu_1, \dots, \mu_6$  は正の数であることが、まずヒンジの多面体上の位置を推定する場合の必要条件である。さらにまた  $R_V, W_i$  はつぎのように書き換えられる。

$$R_V = \mu_1 \{-a_1 \sin \alpha \cdot \cos \xi + k b_1 \sin \alpha \cdot \sin \xi + 2L/\rho hc_1 \sin \alpha \cdot \cos \xi + qd_1(1 - \cos \alpha) \sin \xi\} \rho$$

$$+ \mu_2 \{-a_2 \sin \alpha \cdot \cos \xi + k b_2 \sin \alpha \cdot \sin \xi + 2L/\rho hc_2 \sin \alpha \cdot \cos \xi + qd_2(1 - \cos \alpha) \sin \xi\} \rho$$

$$+ \mu_3 \{-a_3 \sin \beta \cdot \cos \xi + k b_3 \sin \beta \cdot \sin \xi + 2L/\rho hc_3 \sin \beta \cdot \cos \xi + qd_3(1 - \cos \beta) \sin \xi\} \rho$$

$$+ \mu_4 \{-a_4 \sin \beta \cdot \cos \xi + k b_4 \sin \beta \cdot \sin \xi + 2L/\rho hc_4 \sin \beta \cdot \cos \xi + qd_4(1 - \cos \beta) \sin \xi\} \rho \dots\dots\dots(2.2)''$$

$$W_i = 2M_{0y} [2\{(m_{y1}a_1 + m_{x1}b_1 + n_1c_1 + t_1d_1)\mu_1 + (m_{y1}a_2 + m_{x1}b_2 + n_1c_2 + t_1d_2)\mu_2\}$$

$$+ 2\{(m_{y2}a_3 + m_{x2}b_3 + n_2c_3 + t_3d_3)\mu_3 + (m_{y2}a_4 + m_{x2}b_4 + n_2c_4 + t_2d_4)\mu_4\}$$

$$+ \{(m_{y3}a_5 + m_{x3}b_5 + n_3c_5 + t_3d_5)\mu_5 + (m_{y3}a_6 + m_{x3}b_6 + n_3c_6 + t_3d_6)\mu_6\}] \dots\dots\dots(8.1)'$$

式(2.2)'' と式(8.1)' および式(8)を考慮して塑性崩壊荷重  $P$  は決定される。

なお3内力を考える場合も、ほとんど同じような算定手順を踏めばよいから省略する。

(2) 数値計算およびその考察

数値計算をする場合、塑性ヒンジが近似降伏多面体上のどこにあるか、すなわち(1)の式(3)'などでまず正の  $\mu$  を見つけることが問題であるが、なお  $\beta$  の位置も仮定をして試算をする必要がある。さらに数多く得られる計算結果のうち、最小の値のものが、考えているテーパのついたアーチの塑性崩壊荷重としての最も近似的に確からしい上界を与えることになる。そこで  $\beta$  は  $\alpha/2$  を中心にして  $1^\circ$  きざみで  $15$  カ所変えて考えてみた。電子計算機を使った数多くの試算により得られた結果を図にして以下に示す。いま無次元化した崩壊荷重を  $F \equiv P \cdot L / M_{0y}$  とすると、この  $F$  に影響を与える幾何学的な無次元独立変数は  $\xi, f/L$  および  $H/L$  の3つで、 $B/L$  は関係しない( $B$  は  $M_{0y}$  に関連はある)。したがって、数値計算では  $\xi; 0^\circ, 5^\circ, 15^\circ, 25^\circ, 35^\circ, 45^\circ$  を  $f/L; 1/6, 1/8,$

$1/10, 1/12, 1/14$  を、 $H/L; 1/50, 1/60, 1/75, 1/100, 1/140$  を考えて、それぞれ組み合わせて数値計算をしてみた。

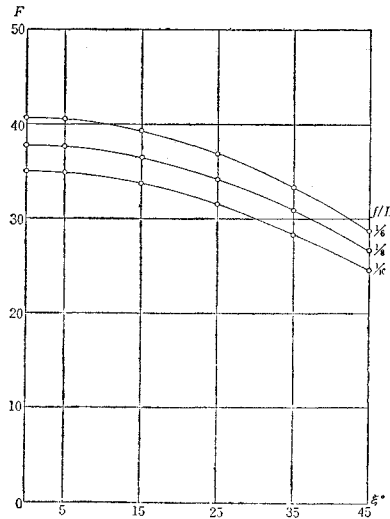


図-11 崩壊荷重  $F$  ( $H/L=1/50$ ) (4内力考慮)

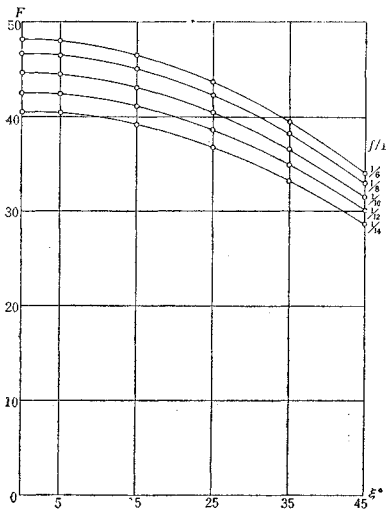


図-10 崩壊荷重  $F$  ( $H/L=1/100$ ) (4内力考慮)

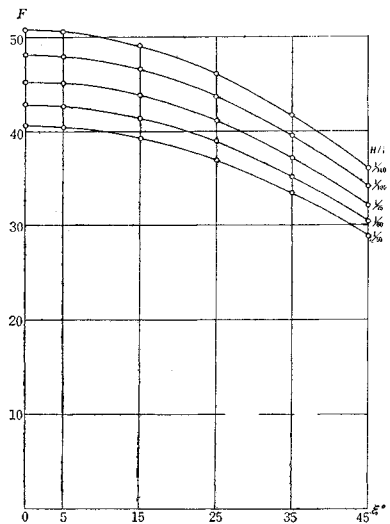


図-12 崩壊荷重  $F$  ( $f/L=1/6$ ) (4内力考慮)

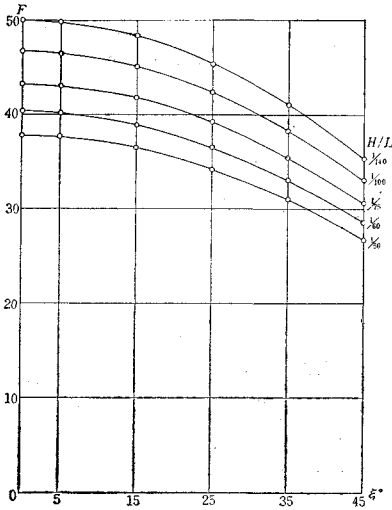


図-13 崩壊荷重  $F$   
( $f/L=1/8$ ), (4内力考慮)

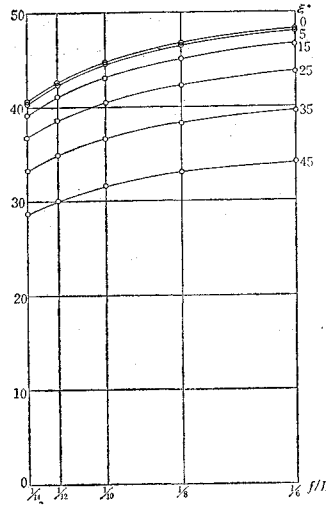


図-14 崩壊荷重  $F$   
( $H/L=1/100$ ) (4内力考慮)

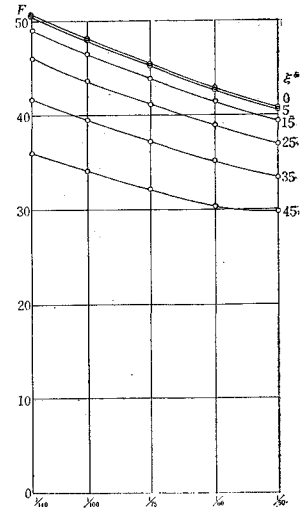


図-15 崩壊荷重  $F$   
( $f/L=1/6$ ) (4内力考慮)

なおヒンジの近似降伏多面体上の位置の取り方に対して、いわゆる稜の集まった点などに、ヒンジが生ずる場合も一応は考えられるが、3次元の場合の数値計算からおしはかっても、また数多くの試算からみて、最もよい値と思われる計算結果を与える面番号は、ほとんどの場合、ヒンジ1が面13, 15に、ヒンジ2が面5, 7にそしてヒンジ3が面13, 15に関係する場合であった。

図-10~15に内力4つを考慮した場合の崩壊荷重  $F$  の数値計算結果の一部を図にして示す。

図-10, 11は  $H/L$  を、それぞれ  $1/100, 1/50$  にとり、さらに  $f/L$  を特定なかく値にとり、その値を一定とし、テーパの角度  $\epsilon$  の変化による崩壊荷重の変化を図に示している。

図-12, 13は  $f/L$  をそれぞれ  $1/6, 1/8$  にとり、さらに  $H/L$  の特定なかく値にとり、その値を一定とし、テーパの角度  $\epsilon$  の変化による崩壊荷重の変化を図に示している。

図-14は  $H/L$  を  $1/100$  にとり、 $\epsilon$  をかく種の値にとり、その値を一定とし、 $f/L$  の変化による崩壊荷重の変化を調べたものである。

図-15は  $f/L$  を  $1/6$  にとり、 $\epsilon$  をかく種の値にとり、その値を一定とし、 $H/L$  の変化による崩壊荷重の変化を調べたものである。

以上の図から見てわかるように、集中荷重が支間中央に作用する場合、テーパの角度の変化の影響とくに注目すれば、 $\epsilon$  が  $10^\circ$  程度までは、テーパの影響もわずかであるが、総体的にみて、テーパの角度はアーチの耐荷力を減少させる傾向にあることがわかる。

(3) 2内力によるアーチの崩壊

テーパの角度  $\epsilon$  が  $0^\circ$  のアーチに対し、面内曲げモ

メント、軸力の2内力を考慮して、その塑性崩壊荷重の算定は、すでによく知られている手法<sup>14)</sup>がここでは参考となり、数値計算をしてみる。ここに4内力の考察と比較検討するため、以上の考察と対応させて簡単に述べておくこととする。

さて適合条件は式(3.1)および(3.3)の2つを満足しておればよいから、図-16(表-4)に示ような(表-1)に対応する図-8や表-3に示した降伏関数近似降伏多面体に対応した)降伏限界曲線・近似降伏多角形上のひずみにより、式(3.1)'および(3.3)'に対応して、つぎのような式(3.1)\*および(3.3)\*が書ける。

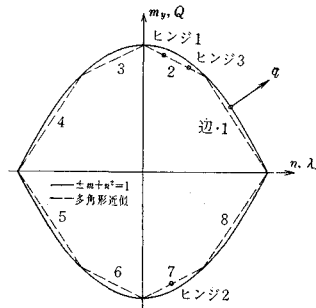


図-16 降伏限界線 (2内力の組合せ)  
( $\dot{q}$ : 塑性ひずみベクトル)

表-4

辺番号	方程式 (=1)	ひずみ割合 ( $\theta, \lambda$ )
1, 8	$\pm 2/3 m_y + n$	$\mu (\pm 2/3, 1)$
2, 7	$\pm m_y + 1/2 n$	$\mu (\pm 1, 1/2)$
3, 6	$\pm m_y - 1/2 n$	$\mu (\pm 1, -1/2)$
4, 5	$\pm 2/3 m_y - n$	$\mu (\pm 2/3, -1)$

まず塑性ひずみ速度  $\dot{\theta}_i, \dot{\lambda}_i$  は式(38)に対応して、この場合つぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= a_1 \mu_1, \lambda_1 = c_1 \mu_1; \theta_2 = a_2 \mu_2, \lambda_2 = c_2 \mu_2; \\ \theta_3 &= a_3 \mu_3, \lambda_3 = c_3 \mu_3 \end{aligned} \right\} \dots (38)^*$$

したがって、

$$\begin{aligned} &\mu_1 \{ a_1 (1 - \cos \alpha) + c_1 2 L / \rho h \cos \alpha \} \\ &+ \mu_2 \{ a_2 (1 - \cos \beta) + c_2 2 L / \rho h \cos \beta \} \\ &+ \mu_3 \{ c_3 L / \rho h \} = 0 \dots \dots \dots (3.1)^* \end{aligned}$$

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 \frac{1}{2} a_3 = 0 \dots \dots \dots (3.3)^*$$

この場合も、2つの適合条件式たる式(3.1)\*と(3.3)\*により、たとえば  $\mu_1, \mu_2$  は  $\mu_3$  によって表わされるが、これら  $\mu_1, \mu_2$  および  $\mu_3$  は正のスカラ倍数であるという必要条件を伴っている。さらに式(2.2)'、(8.1)'に対応しては、つぎの式(2.2)\*と(8.1)\*が得られる。

$$R_V = \mu_1 \{ a_1 \sin \alpha - c_1 2 L / \rho h \sin \alpha \} \rho + \mu_2 \{ a_2 \sin \beta - c_2 2 L / \rho h \sin \beta \} \dots \dots (2.2)^*$$

$$W_i = M_{0y} [ 2 \mu_1 (a_1 m_{y1} + c_1 n_1) + 2 \mu_2 (a_2 m_{y2} + c_2 n_2) + \mu_3 (a_3 m_{y3} + c_3 n_3) ] \dots \dots \dots (8.1)^*$$

以下の計算は、全く(2)の場合と同じような手順で、式(2.2)\*と(8.1)\*と式(8)を考慮すれば、崩壊荷重  $P$  は決定される。

求めようとする結果は、図-16に書き込んだように、塑性ヒンジ1, 2 および3がそれぞれ近似降伏8角形上に位置を占める場合に対応して求められる。

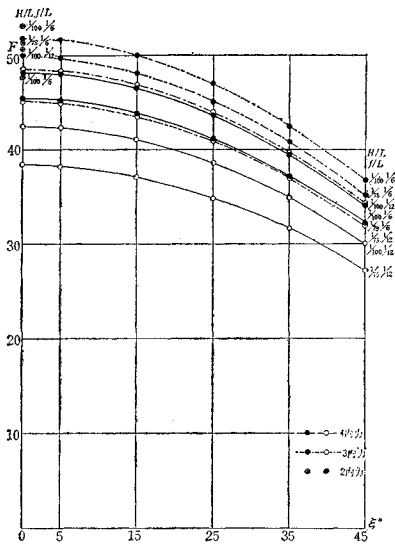


図-17 崩壊荷重  $F$  (各種内力を考慮)

数値計算結果の一部を図-17, 18に示す(2内力の場合はほかとの比較のため、2本のアーチ分として2倍してある)。図からみてもわかるように、崩壊の自由度を2, 3, 4とするにしたがって、計算で得られる崩壊荷重耐荷力は減少している。このことは平面的な崩壊と、立体的崩壊を考えると、自由度の少ない崩壊形式のためには、それだけ拘束制約されるものがある、崩壊し

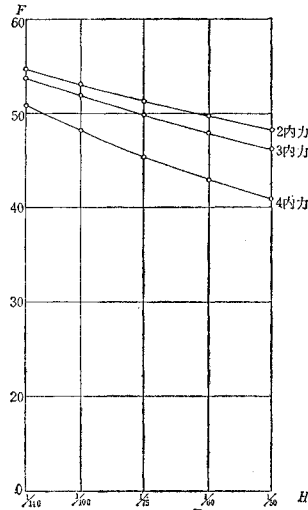


図-18 崩壊荷重 ( $f/L=1/6$ , ( $\xi=0^\circ$ )  $F$ )

難い形式となっているためと考えられよう。

## 7. 結 語

塑性崩壊荷重の解析のさい、その数値計算を容易にするためにも、種々の前提条件や仮定を設けてはいるが、4次元降伏多面体なる概念の導入により、4内力を考慮した場合の崩壊荷重の算定ができ、また一方テーパの影響も考察できた。

その結果、とくに注目される結果としては、集中荷重載荷によって崩壊荷重は、テーパ  $\xi$  の増大による減少性や、つぎに、内力を2つより3つ、4つと考慮することにより、崩壊荷重としてのその値の減少程度も明らかにされ得た。

なお、分布荷重、ヒンジ支承、I型断面などに関連した崩壊荷重の算定は、以上の考察に若干の補足をすることにより、ほとんど同じような解析過程により求められるが、つぎの機会としたい。

## 参 考 文 献

- 1) Philip G. Hodge : Plastic Analysis of Structures, McGraw-Hill, (1959), (訳書, 構造物の塑性解析, コロナ社, 昭和36年)
- 2) E.T. Onat and W. Prager : Limit Analysis of Arches, Journal of Mech. and Phys. of Solids, (1953), Vol. 1.
- 3) 横尾義貫・山肩邦男: アーチの終局状態に関する研究(集中荷重載荷の場合), 日本建築学会論文報告集 58, 昭和33年3月.
- 4) 横尾義貫・山肩邦男: アーチの終局状態に関する研究(等分布荷重の場合), 日本建築学会論文報告集 59, 昭和33年6月.
- 5) 奥村敏恵・前田幸雄・大久保禎二: アーチの極限耐荷力に関する研究, 第15回土木学会年次学術講演会概要, II部, 昭和35年5月.
- 6) 福本晴士・吉田 博: 変動くり返し荷重によるアーチの崩壊, 土木学会論文集, 第131号, 昭和41年7月.
- 7) 山崎徳也・石川信隆: 円弧アーチの弾塑性解析, 土木学会論文集, 第158号, 昭和43年10月.
- 8) 前田幸雄・藤本一男: 2ヒンジアーチの塑性崩壊荷重の算定について, 土木学会論文報告集, 第175号, 1970年3月.
- 9) 既出 2).
- 10), 11) 既出の 8), 9).
- 12) R. Hill and M.P.L. Siebel : On Combined Bending and Twisting of Thin Tubes in the Plastic Range, Phil. Mag. 42, (1951).
- 13) R. Hill and M.P.L. Siebel : On the Plastic Distortion of Solid Bars by Combined Bending and Twisting, J. Mech. and Phys. of Solids, 1. (1953).
- 14) 既出 2).

(1970. 3. 17・受付)