

## 遷移マトリックス法を応用した剛節合トラスの解析

ANALYSIS OF STIFF-JOINTED TRUSSES BY THE APPLICATION OF  
TRANSFER MATRIX METHOD

遠 田 良 喜\*

By Yoshihiro Enda

**要 旨** 著者は、論文 1) において、平面ラーメン、格子構造、立体ラーメンの解析を遷移マトリックス法によって行ない公式化を試みた。本論文では、この方法をトラス構造の解析に応用し、単純トラス、連続トラス、立体トラスに対する公式化を試みたものである。

## 1. ま え が き

他の工学の分野におけると同じように、構造解析においても、連立一次方程式の処理が、問題を解く過程の一つになっている。構造体系が複雑になり、かつ大型化すると、単なる変位法の応用による解析では、多元の連立方程式を解くことになる。計算機の記憶容量を節約するために、多元の連立方程式をさける手法も種々提案されており、その例を上げると、1964/1965年に、Fenves (アメリカ)らの、電気回路の解析に用いているトポロジーと代数法則とに基づく Network 理論を、構造解析に応用した計算法<sup>2),3)</sup>、概念的には、Fenvesの手法と似ているが、遷移マトリックス法と変位法とを組みあわした Withum (西ドイツ)の手法<sup>4),5)</sup>、名古屋大学成岡教授の還元法に類似した逐次代入法による解析法<sup>6)</sup>などがある。これらの解法に共通することは、逐次計算によって、多元の連立方程式をさけていることである。

一方、連続ばり系の解析に便利に用いられている遷移マトリックス法 (あるいは、還元法)も、記憶容量の節約の面において、非常に有利な方法である。

この論文では、遷移マトリックス法をトラス構造の解析に応用して、マトリックスによる公式化を行ない、さらに、この手法に変位法による逐次計算法の概念を導入した混合的方法 (マトリックス混合法と呼ぶ)による解析法に触れる。

従来のトラス構造の解析では、各節点は摩擦のないピン結合と仮定し、部材は軸方向力のみ抵抗するものと

して行なう。しかし、橋トラスのように、おのおのの節点が溶接接合、あるいは、鋸接合によって作られている場合は、構造的に、剛節合とみなされる。この節点の剛性の影響については、古来、多くの研究者の注目を集めており、これに関して、たわみ角法に基づいた Mohr, Manderla の解法、4連モーメント式による Müller Breslau の解法、モーメント分配法を用いた解法、たわみ角分配法による鷹部屋、酒井の解法などが提案され、2次応力として別に計算するのが普通である。

この論文では、トラスの力学的挙動を、上述のように、二つの力学系には分けないで、おのおのの部材の軸方向力、せん断力、曲げモーメント、ねじりモーメントを同時に考慮し、剛節合トラスとして解析する。

遷移マトリックス法の概念を用いたトラス構造の解析法としては、H. Baldauf (西ドイツ)の研究がある<sup>7)</sup>。これは、トラスの左支点の六つの自由度を、トラスの各部材に沿って、右支点まで移行して、両端の境界条件により、自由度を求め、再び、左から右へ、各部材の断面力と変位量を計算する方法である。成岡教授の還元法<sup>6)</sup>の概念とトラスの図解法とを組みあわした平行弦連続トラスの解法<sup>8)</sup>、信州大学谷本教授の演算子法によるピン結合トラスの解法<sup>9)</sup>も、移行計算を主体とした解析法である。

本文では、これらの研究とは独立に、遷移マトリックス法をトラスの解析に応用している。この解法は、Baldaufの解法とも異なり、トラスの上、下弦材の状態量ベクトルを同時に移行する方法をとっており、トラスの格間を移行するときは、格間遷移式を用い、節点を移行するときは、斜材、垂直材、対傾構などのばね定数を導入した節点遷移式を用いる。したがって、節点を移行するときのみ、一格間手前と先の節点の変位が関係するので、これを消去しながら、移行計算をする。この解法によって、計算機の記憶容量を節約した計算プログラミングが可能となる。

\* 正会員 石川島播磨重工業 (株) 鉄構事業部橋梁基本計画室

## 2. 平面剛節合トラスの解析

### (1) 基本方程式

図-1 に示す平面剛節合トラスに面内荷重が作用する

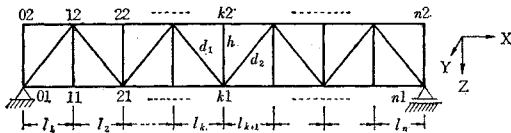


図-1

ときは、はり要素に軸方向力  $N$ 、せん断力  $Q$ 、曲げモーメント  $M$  が作用し、軸方向変位  $u$ 、たわみ  $w$ 、たわみ角  $\phi$  が生ずる。したがって、任意のはり要素  $g$  の両端におけるこれらの物理量からなる状態量ベクトル (state vector) の間には、つぎの径間遷移式が成立する。

$$\begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ N \\ Q \end{bmatrix}_g^R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -l/EF & 0 \\ 0 & 1 & -l & l^2/2EI & 0 & l^3/6EI \\ 0 & 0 & 1 & -l/EI & 0 & -l^2/2EI \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \\ M \\ N \\ Q \end{bmatrix}_g^L \quad (1)$$

ここに、 $l$  は、はり要素の長さ、 $EI$  は曲げ剛性、 $EF$  は伸び剛性を表わし、状態量ベクトルの右肩に付した  $R, L$  は、それぞれ、はりの右端、および、左端を表わす。また、断面力と変位の符号は文献<sup>1)</sup>にしたがっている。式(1)を短縮して

$$V_g^R = F_g V_g^L \quad (2)$$

と書く。ここに、 $F_g$  は、はり要素の径間マトリックスである。

式(1)を変形すると、はりの両端における断面力と変位の関係式を得る。すなわち、

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ Q_k \end{bmatrix}^g = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^g \begin{bmatrix} q_i \\ q_k \end{bmatrix}^g \quad (3)$$

ここに、 $i, k$  は、それぞれ、はりの左端、および、右端を表わし、断面力と変位の、ベクトル  $Q, q$  は、

$$Q = \begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix} \quad (4)$$

と定義する。また、係数マトリックスの部分マトリックスは、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \begin{bmatrix} 0 & -k & k' \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k'' & -k''' \end{bmatrix}, & K_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & k & k'/2 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -k'' & -k''' \end{bmatrix} \\ K_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & k & -k'/2 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & k'' & -k''' \end{bmatrix}, & K_{22} &= \begin{bmatrix} 0 & -k & -k' \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -k'' & -k''' \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} (5)$$

となる。ここに、 $k, k' \dots$  は、つぎのように求められる。  
 $k = 6EI/l^2, \quad k' = 4EI/l, \quad k'' = 12EI/l^3,$   
 $k''' = 6EI/l^2, \quad \lambda = EF/l$

平面トラスの解析式は、式(1)、(3)を基本にして、節点に集合する部材の断面力のつり合いと変位の適合条件を考えることによって、公式化される。

図-2 に示すよう

に、トラスを構成する任意のはり要素  $g$  を例にとる。部材座標系  $xyz$  で定義した、はり要素の端部における変位のベクトル  $q_i^g, q_k^g$

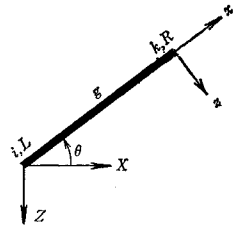


図-2

と、基準座標系  $XYZ$

で定義した節点変位のベクトル  $q_i, q_k$  との適合条件式は、

$$q_i = A_d q_i^g, \quad q_k = A_d q_k^g \quad (6)$$

によって表わされる。ここに、 $A_d$  は、つぎのように定義される。

$$A_d = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $\theta$  は、はり要素の  $X$  軸から反時計方向の角度を表わす。

つぎに、はり要素の両端における断面力のベクトル  $Q_i^g, Q_k^g$  と節点力のベクトル  $Q_i, Q_k$  とのつり合い条件式は、

$$Q_i = -A_f Q_i^g, \quad Q_k = A_f Q_k^g \quad (8)$$

となる。ここに、 $A_f$  はつぎのように定義される。

$$A_f = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (9)$$

式(8)に式(3)を代入し、さらに、式(6)を代入すると、つぎのように節点力と節点変位の関係式を得る。

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ Q_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i \\ q_k \end{bmatrix} \quad (10)$$

ここに、 $K_{11}, K_{12}, K_{21}, K_{22}$  は、基準座標系に関して変換したはり要素の剛性マトリックスである。すなわち、つぎのように計算される。

$$K_{11} = \begin{bmatrix} k \sin \theta, & k \cos \theta, & -k' \\ -\lambda \cos^2 \theta - k'' \sin^2 \theta, & (\lambda - k'') \cos \theta \sin \theta, & k''' \sin \theta \\ (\lambda - k'') \cos \theta \sin \theta, & -\lambda \sin^2 \theta - k'' \cos^2 \theta, & k''' \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(11)$$

$$K_{12} = \begin{bmatrix} -k \sin \theta, & -k \cos \theta, & -k'/2 \\ \lambda \cos^2 \theta + k'' \sin^2 \theta, & (-\lambda + k'') \cos \theta \sin \theta, & k''' \sin \theta \\ (-\lambda + k'') \cos \theta \sin \theta, & \lambda \sin^2 \theta + k'' \cos^2 \theta, & k''' \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(12)$$

$$K_{21} = \begin{bmatrix} k \sin \theta, & k \cos \theta, & -k'/2 \\ \lambda \cos^2 \theta + k'' \sin^2 \theta, & (-\lambda + k'') \cos \theta \sin \theta, & -k''' \sin \theta \\ (-\lambda + k'') \cos \theta \sin \theta, & \lambda \sin^2 \theta + k'' \cos^2 \theta, & -k''' \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(13)$$

$$K_{22} = \begin{bmatrix} -k \sin \theta, & -k \cos \theta, & -k' \\ -\lambda \cos^2 \theta - k'' \sin^2 \theta, & (\lambda - k'') \cos \theta \sin \theta, & -k''' \sin \theta \\ (\lambda - k'') \cos \theta \sin \theta, & -\lambda \sin^2 \theta - k'' \cos^2 \theta, & -k''' \cos \theta \end{bmatrix} \dots\dots\dots(14)$$

平面剛節合トラスに対する遷移方程式は、式(2)、および、式(10)を用いて、機械的に作成される。

(2) 平面剛節合トラスの遷移方程式

この解法によるトラス構造の解析では、2本の主部材(上、下弦材)の物理量からなる状態量ベクトルを、同時に、左から右へ移行する。図-1に示すトラスの任意の隣接格間  $l_k, l_{k+1}$  を例にとると、格間  $l_k$  の径間遷移式は、式(2)より

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 1 \end{bmatrix}_k^R = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & V_{01}^R \\ 0 & F_2 & V_{02}^R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 1 \end{bmatrix}_k^L \dots\dots\dots(15)$$

となる。ここに、指標1は下弦材の、2は上弦材の諸量を表わすことにする。また、係数マトリックスの  $V_{01}^R, V_{02}^R$  は、それぞれ、下弦材と上弦材に作用する外力による荷重項を表わす。

式(15)を短縮して

$$V_k^R = F_k V_k^L \dots\dots\dots(16)$$

と書く。

節点  $k1, k2$  に集合する枝部材(斜材、垂直材)の節

点力と節点変位の関係式は、式(10)より

$$Q_k = K_k q_k + S_k' q_{k-1} + S_k q_{k+1} \dots\dots\dots(17)$$

となる。ここに、

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}_k, \quad q_k = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_k \dots\dots\dots(18)$$

であり、係数マトリックス  $K_k, S_k', S_k$  は、斜材と垂直材のばね定数を要素とする剛性マトリックスであり、それぞれ、斜材の構成にしたがって、表-1より得られる。

剛節合トラスの場合は、節点  $k1, k2$  に隣接する弦材の両端における変位  $u, w, \phi$  は連続となるが、断面力  $M, N, Q$  は、枝部材の剛性の影響によって、不連続となる。したがって、節点  $k1, k2$  において、上、下弦材が連結する条件式は、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix}_{k+1,i}^L &= \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix}_{ki}^R = \begin{bmatrix} u \\ w \\ \phi \end{bmatrix}_{ki} \\ \begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}_{k+1,i}^L &= \begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}_{ki}^R + \begin{bmatrix} M \\ N \\ Q \end{bmatrix}_{ki} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

表-1

$K_k$	$\begin{bmatrix} K_{11}^h + K_{11}^{d1} + K_{11}^{d2}, & K_{12}^h \\ K_{21}^h, & K_{22}^h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} K_{11}^h, & K_{12}^h \\ K_{21}^h, & K_{22}^h + K_{22}^{d3} + K_{22}^{d4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} K_{11}^h + K_{11}^{d1} + K_{11}^{d2}, & K_{12}^h \\ K_{21}^h, & K_{22}^h + K_{22}^{d3} + K_{22}^{d4} \end{bmatrix}$
$S_k'$	$\begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{d1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{21}^{d3} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{d1} \\ K_{21}^{d3} & 0 \end{bmatrix}$
$S_k$	$\begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{d2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ K_{21}^{d4} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & K_{12}^{d2} \\ K_{21}^{d4} & 0 \end{bmatrix}$

式 (19) に式 (17) の関係を代入すると,

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 1 \end{bmatrix}_{k+1}^L = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ 1 \end{bmatrix}_k^R + \begin{bmatrix} 0 & B_1' \\ B_2' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}_{k+1} \dots\dots\dots(20 a)$$

または, 短縮して,

$$V_{k+1}^L = P_k V_k^R + B_k' q_{k-1} + B_k q_{k+1} \dots\dots(20 b)$$

を得る。上式が平面剛節合トラスの節点遷移式である。式 (20 a) の係数マトリックスの部分マトリックス  $P_{11}$ ,  $P_{12}$ ,  $P_{21}$ ,  $P_{22}$  は, いずれも, (6×6) の正方マトリックスであり,  $B_1'$ ,  $B_2'$ ,  $B_1$ ,  $B_2$  は (6×3) の矩形マトリックスである。すなわち, 斜材が 図-1 の格間  $l_k$ ,  $l_{k+1}$  のような構成のときは,

$$\left. \begin{aligned} P_{11} &= \begin{bmatrix} I_3 & O_3 \\ K_{11}^h + K_{11}^{d_1} + K_{11}^{d_2} & I_3 \end{bmatrix}, P_{12} = \begin{bmatrix} O_3 & O_3 \\ K_{12}^h & O_3 \end{bmatrix}, \\ P_{21} &= \begin{bmatrix} O_3 & O_3 \\ K_{21}^h & O_3 \end{bmatrix}, P_{22} = \begin{bmatrix} I_3 & O_3 \\ K_{22}^h & I_3 \end{bmatrix}, \\ B_1' &= \begin{bmatrix} O_3 \\ K_{12}^{d_1} \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} O_3 \\ K_{12}^{d_2} \end{bmatrix}, B_2' = B_2 = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

となる。ここに,  $I_3$  は (3×3) の単位マトリックスを,  $O_3$  は (3×3) の零マトリックスを表わす。そのほかの斜材の構成に対しても, 表-1 の剛性マトリックスを用いて, 節点遷移式の係数マトリックスが作成される。また, フレントラスの場合は, 垂直材がないから, 単に表-1 の剛性マトリックスにおいて, 垂直材のばね定数を省けばよい。

以上のようにして, トラスの各格間, 各節点に対する遷移方程式を作成することができる。

(3) 左端の境界条件式

トラスの左端の境界条件式は,

$$V_1^L = R A + B_0 q_1 \dots\dots\dots(22)$$

によって表わされる。ここに,  $A$  はトラスの左端の自由

度からなる (7×1) の初期ベクトルで,

$$A = \{a_1, a_2, 1\} \dots\dots\dots(23)$$

となる。 $a_1, a_2$  は, それぞれ, 三つの自由度を要素とする。また,  $R$  は左端の境界条件を表わす境界マトリックスで, (13×7) の矩形マトリックスであり,  $B_0$  は斜材のばね定数を要素とする (13×6) のマトリックスである。すなわち, つぎのように表わされる。

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B_0 = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ B_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots(24)$$

トラスの左端が, 図-3 に示すように, 自由になっているときは, 式 (23) におけるベクトル  $a_1, a_2$  は,

$$a_i = \{u, w, \phi\}_{oi}, i=1, 2 \dots\dots\dots(25)$$

となり, 式 (24) における境界マトリックス  $R$  の部分マ

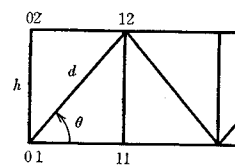


図-3

トリックスは,

$$\left. \begin{aligned} R_{11} &= \begin{bmatrix} I_3 \\ K_{11}^h + K_{11}^d \end{bmatrix}, R_{12} = \begin{bmatrix} O_3 \\ K_{12}^h \end{bmatrix}, \\ R_{21} &= \begin{bmatrix} O_3 \\ K_{21}^h \end{bmatrix}, R_{22} = \begin{bmatrix} I_3 \\ K_{22}^h \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

となる。また,  $B_0$  の部分マトリックスは, 式 (21) のときと同じようにして得られる。

トラスの左端が埋込み支持, あるいは, 単純支持の場合は, 表-2 のようにして, ベクトル  $a_1, a_2$ , および,

表-2

$a_1$	$a_i = (M, H, R)_{oi}$	$a_1 = (\phi, H, R)_{o1}$	$a_1 = (u, \phi, R)_{o1}$
$a_2$	$i=1, 2$	$a_2 = (u, w, \phi)_{o2}$	$a_2 = (u, w, \phi)_{o2}$
$R_{11}$	$\begin{bmatrix} O_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -k_h' - k_d', & 0 & 0 \\ k_h'' + k_d'' s \theta, & 1 & 0 \\ k_d''' c \theta, & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ k_h + k_d s \theta, & -k_h' - k_d', & 0 \\ -k_h'' - \lambda_d c^2 \theta - k_d'' s^2 \theta, & k_h''' + k_d''' s \theta, & 0 \\ (\lambda_d - k_d'') c \theta s \theta, & k_d''' c \theta, & 1 \end{bmatrix}$

$R_{12}$	0	$\begin{bmatrix} O_3 \\ K_{12}^h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} O_3 \\ K_{12}^h \end{bmatrix}$
$R_{21}$	0	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -k_h'/2 & 0 & 0 \\ -k_h'' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ k_h & -k_h'/2 & 0 \\ k_h'' & -k_h''' & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$R_{22}$	$\begin{bmatrix} O_3 \\ I_3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I_3 \\ K_{22}^h \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} I_3 \\ K_{22}^h \end{bmatrix}$

境界マトリックスの部分マトリックスが得られる。また、この場合は節点 11, 12 の節点遷移式における  $B_1'$  の部分マトリックスも、左端の支持条件にしたがって修正する必要がある。

(4) トラスの中間支点の移行

連続トラスのように、中間に剛支点がある場合は、支点の条件に応じて、節点遷移式の係数マトリックスを修正し、同時に、支点まで移行計算によって求めた線形関係式の一部を、最後の連立方程式として使用する。

図-4 (a), (b) に示すように、節点  $k1$  が剛支点上に

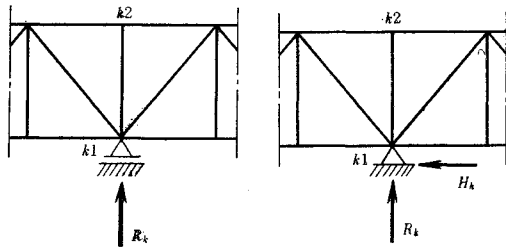


図-4 (a)

図-4 (b)

あるときは、節点  $k-1, i, ki, k+1, i (i=1, 2)$  の節点遷移式において、係数マトリックス  $B_{k-1}, P_k, B'_{k+1}$  の節点  $k1$  の変位に従属する部分マトリックスの要素を、剛支点の条件に応じて修正する。

中間支点が、図-4 (a) のように、単純支持で可動のときは、 $w_{k1}=0$  であるから、部分マトリックスを構成している  $(3 \times 3)$  の剛性マトリックスのみに、

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(27)$$

を後掛けすることによって、修正される。修正後も、節点マトリックス  $P_k$  の主対角線要素は、すべて 1 である。

トラスの左端の自由度からなる初期ベクトル  $A$  を、最初の間支点の左側まで移行すると、

$$V_k^R = U_k^R A \dots\dots\dots(28)$$

を得る。ここに、

$$U_k^R = [I - F_k D_{k-1} B_{k-1} Q]^{-1} F_k D_{k-1} P_{k-1}^* D_{k-2} \dots D_1 P_1^* R \dots\dots\dots(29)$$

である。上式のマトリックス  $D_{k-1}, P_{k-1}^*, Q$  については、3. にくわしく示す。式 (29) に得たマトリックス  $U_k^R$  は、 $(13 \times 7)$  の矩形マトリックスである。すなわち、

$$U_k^R = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} & a_{17} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} & a_{27} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{12,1} & a_{12,2} & \dots & a_{12,6} & a_{12,7} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

である。

左端の自由度からなる初期ベクトルを

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_6, 1\} \dots\dots\dots(31)$$

とすると、 $w_{k1}=0$  の条件より

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{26}x_6 + a_{27} = 0 \dots\dots\dots(32)$$

を得る。上式が最後の連立方程式の条件式となる。

剛支点  $k1$  においては、鉛直反力  $R_k$  が生ずるから、支点  $k1$  における力のつり合い式は、

$$Q_{k+1,1}^L = Q_{k1}^R + Q_{k1} + R_k \dots\dots\dots(33)$$

となる。 $R_k$  は未知量であるから、これを、式 (31) の初期ベクトル  $A$  に導入して移行計算をする。初期ベクトル  $A$  を支点の右側まで移行すると、

$$V_{k+1}^L = U_{k+1}^L A + D_k B_k Q_{k+1} \dots\dots\dots(34)$$

を得る。ここに、

$$U_{k+1}^L = D_k P_k^* D_{k-1} P_{k-1}^* \dots D_1 P_1^* R \dots\dots\dots(35)$$

となり、新しい列ベクトル  $A$  を、

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_6, 1, R_k\} \dots\dots\dots(36)$$

とすると、 $U_{k+1}^L$  はつぎのような  $(13 \times 8)$  の矩形マトリックスとなる。

$$U_{k+1}^L = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{16} & b_{17} & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{26} & b_{27} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{61} & b_{62} & \dots & b_{66} & b_{67} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{12,1} & b_{12,2} & \dots & b_{12,6} & b_{12,7} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(37)$$

最初の間中支点が、図-4 (b) のように、単純支持で可動しないときは、 $u_{k1}=w_{k1}=0$  であるから、遷移マトリックスの修正は、マトリックス  $G$  を

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (38)$$

として行なう。

また、 $u_{k1}=w_{k1}=0$  の条件より、線形関係式(28)より、

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{16}x_6 + a_{17} = 0 \dots\dots\dots (39a)$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + x_{26}x_6 + a_{27} = 0 \dots\dots\dots (39b)$$

の2式が最後の連立方程式の条件式となる。また、この場合は、支点反力として、 $H_k$  と  $R_k$  が生ずるから、支点  $k$  の力のつり合い式はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{k+1,1}^L &= N_{k1}^R + N_{k1} + H_k \\ Q_{k+1,1}^L &= Q_{k1}^R + Q_{k1} + R_k \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

新しい未知量  $H_k, R_k$  を導入した初期ベクトル  $A$  を

$$A = \{x_1, x_2, \dots, x_6, 1, H_k, R_k\} \dots\dots\dots (41)$$

とすると、式 (37) の  $U_{k+1}^L$  は、式 (40) より

$$U_{k+1}^L = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{16} & b_{17} & 0 & 0 \\ & & & & & & \\ & b_{51} & b_{52} & \dots & b_{56} & b_{57} & 1 & 0 \\ b_{61} & b_{62} & \dots & b_{66} & b_{67} & 0 & 1 & \\ & & & & & & & \\ & b_{12,1} & b_{12,2} & \dots & b_{12,6} & b_{12,7} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & 0 & \end{bmatrix} \dots\dots\dots (42)$$

となる。

中間に剛支点がある場合は、以上のような方法で、移行計算がつけられる。

(5) 右端の境界条件式

実際には部材は存在しないが、格間  $l_n$  の右端の状態量ベクトル  $V_n^R$  を節点  $n1, n2$  の右側まで移行すると、

$$V_{n+1}^L = P_n V_n^R + B_n' q_{n-1} \dots\dots\dots (43)$$

を得る。しかるのち、右端の境界条件式は、

$$R' V_{n+1}^L = 0 \dots\dots\dots (44)$$

によって表わされる。ここに、 $R'$  は右端の境界条件を表わすマトリックスで、(6×13) の矩形マトリックスである。すなわち、

$$R' = \begin{bmatrix} R_1' & 0 & 0 \\ 0 & R_2' & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (45)$$

となる。図-5(a) に示すように、右端の支持条件が、

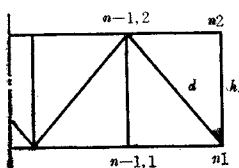


図-5 (a)

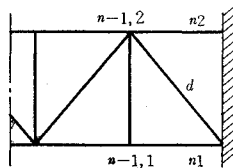


図-5 (b)

自由のときは、 $M_{n+1,i}^L = N_{n+1,i}^L = Q_{n+1,i}^L = 0, (i=1, 2)$  であるから、 $R'$  の部分マトリックス  $R_1', R_2'$  は、

$$R_1' = R_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (46)$$

となる。

右端が埋込み支持 (図-5(b)) のときは、 $u_{ni}=w_{ni}=\phi_{ni}=0, (i=1, 2)$  であるから、式 (43) において、 $P_n = I$  となり、 $R'$  の部分マトリックスは

$$R_1' = R_2' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (47)$$

となる。

右端が単純支持のときは、中間支点の場合とまったく同じように、節点遷移式の係数マトリックスを修正し、支持条件にしたがって、移行計算により求まる線形関係式の一部を連立方程式の条件式として使用し、支点反力を未知量とする。この場合の  $R'$  の部分マトリックス  $R_1', R_2'$  は式 (46) の値をとる。

3. トラス構造の移行計算

式 (20 b) に式 (16) を代入して変形すると

$$V_{k+1}^L = P_k * V_k^L + B_k q_{k+1} \dots\dots\dots (48)$$

を得る。ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_k * &= P_k F_k + B_k' \Omega \\ \Omega &= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{bmatrix}, E = [I_3, O_3] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (49)$$

である。

節点  $k=1, 2, \dots, n$  について、遷移方程式 (48) を求めると、

$$V_1^L = RA + B_0 q_1 \dots\dots\dots (50)$$

$$V_2^L = P_1 * V_1^L + B_1 q_2 \dots\dots\dots (51)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V_{n+1}^L = P_n * V_n^L \dots\dots\dots (52)$$

となる。式 (50) を式 (51) に代入し、式 (52) まで順次に代入を繰返すと、トラスの左端の自由度と中間支点の未知反力を要素とする初期ベクトル  $A$  は、トラスの右端まで移行される。すなわち、

$$V_2^L = D_1 P_1 * RA + B_1 q_2 \dots\dots\dots (53)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V_{k+1}^L = D_k P_k * D_{k-1} P_{k-1} * \dots * D_1 P_1 * RA + D_k B_k q_{k+1} \dots\dots\dots (54)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$V_{n+1}^L = D_n P_n * D_{n-1} P_{n-1} * \dots * D_1 P_1 * RA \dots (55)$$

である。ここに、 $D$  はつぎのように定義される。

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= [I - P_1 * B_0, \Omega]^{-1}, \\ D_k &= [I - P_k * D_{k-1} B_{k-1}, \Omega]^{-1}, k=2, 3, \dots, n \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (56)$$

式 (55) と右端の境界条件式 (44) より,

$$R' D_n P_n * D_{n-1} P_{n-1} * \dots * D_1 P_1 * R * A = 0 \dots (57)$$

を得る。上式と中間支点, および, 右端の支点における条件式とを連立方程式として解くと, トラスの左端の自由度, および, 未知反力が求められる。これより, つぎのように, 各弦材の状態量ベクトルが順次に計算される。

$$\left. \begin{aligned} V_1^R &= F_1 * R A, \\ \dots\dots\dots \\ V_k^R &= F_k * P_{k-1} V_{k-1}^R + F_k * B_{k-1}' q_{k-2}, \\ V_k^L &= F_k^{-1} V_k^R, \\ \dots\dots\dots \\ V_n^R &= F_n * P_{n-1} V_{n-1}^R + F_n * B_{n-1}' q_{n-2} \end{aligned} \right\} \dots (58)$$

ここに,

$$F_k * = [I - F_k B_{k-1}, \Omega]^{-1} F_k \dots\dots\dots (59)$$

である。ただし, 節点  $k1$  が剛支点の場合は,

$$\begin{aligned} V_{k+1}^R &= F_{k+1} * P_k V_k^R + F_{k+1} * B_k' q_{k-1} \\ &\quad + F_{k+1} * R_k \dots\dots\dots (60) \end{aligned}$$

となる。ここに  $R_k$  は支点  $k1$  の未知反力を要素とする (13×1) の列ベクトルである。

弦材の状態量ベクトルが求められると, 断面力と変位との関係式より, 斜材と垂直材の断面力が計算される。

### 4. 立体トラスの解析

#### (1) 立体トラスの基本方程式

2., 3. に述べた平面トラスの解析手順は, 容易に立体トラスの解析に拡張される。立体トラスの場合は, はり要素  $g$  の変位および断面力のベクトルを,

$$\left. \begin{aligned} q^g &= \{u, v, w, \delta, \phi, \psi\}^g, \\ Q^g &= \{T, M, M_z, N, V, Q\}^g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

として出発することになる。ここに,  $u, v, w$  は, はりの  $x, y, z$  軸方向の変位を表わし,  $\delta$  はねじり角,  $\phi$  は  $y$  軸回りの,  $\psi$  は  $z$  軸回りのたわみ角を表わす。また  $T$  はねじりモーメント,  $M$  は  $y$  軸回りの,  $M_z$  は  $z$  軸回りの曲げモーメントを表わし,  $N$  は軸方向力,  $V, Q$  は, それぞれ,  $y, z$  軸方向のせん断力を表わす。これより, はり要素の径間遷移式は, 文献 1) より

$$\begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix}_g^R = \begin{bmatrix} f & f' \\ 0 & f \end{bmatrix}_g \begin{bmatrix} q \\ Q \end{bmatrix}_g^L \dots\dots\dots (62)$$

となる。上式を変形すると, 立体骨組構造のはり要素に対する断面力と変位の関係式をつぎのように得る。

$$\begin{bmatrix} Q_i \\ Q_k \end{bmatrix}^g = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}^g \begin{bmatrix} q_i \\ q_k \end{bmatrix}^g \dots\dots\dots (63 a)$$

式 (62), (63 a) の部分マトリックスは, いずれも, 文献 1) を参照されたい。

#### (2) 立体トラスの遷移方程式

図-6 に示す立体トラスを例にとる。上, 下弦材を主

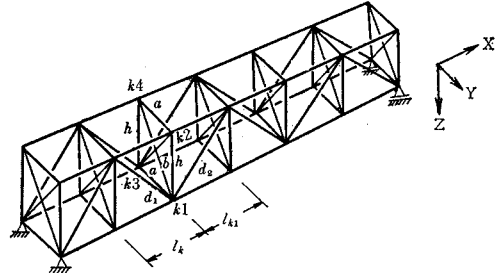


図-6

部材とし, 斜材 ( $d$ ), 垂直材 ( $h$ ), 上, 下支材 ( $a$ ), 対傾構 ( $b$ ) を枝部材とする。格間  $l_k$  の径間遷移式は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ 1 \end{bmatrix}_k^R = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 & 0 & V_{01}^R \\ 0 & F_2 & 0 & 0 & V_{02}^R \\ 0 & 0 & F_3 & 0 & V_{03}^R \\ 0 & 0 & 0 & F_4 & V_{04}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ 1 \end{bmatrix}_k^L \dots\dots\dots (63 b)$$

となる。ここに, 指標 1, 3 は下弦材の, 2, 4 は上弦材の諸量を表わすことにする。係数マトリックス (径間マトリックス) の部分マトリックスは, 式 (62) よりつぎのように得られる。

$$F_{ki} = \begin{bmatrix} f & f' \\ 0 & f \end{bmatrix}_{ki}, \quad i=1, 2, 3, 4 \dots\dots\dots (64)$$

つぎに, 節点  $k1$  に集合している枝部材の断面力と変位との関係式を, それぞれの部材について求めると,

$$Q_{k1}^{d_1} = [K_{11} \ K_{12}]_{k1} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k-1,2} \end{bmatrix}^{d_1}, \dots\dots\dots (65)$$

$$Q_{k1}^{d_2} = [K_{11} \ K_{12}]_{k1} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k+1,2} \end{bmatrix}^{d_2}, \dots\dots\dots (66)$$

$$Q_{k1}^h = [K_{11} \ K_{12}]_{k1} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k2} \end{bmatrix}^h, \dots\dots\dots (67)$$

$$Q_{k1}^a = [K_{11} \ K_{12}]_{k1} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k3} \end{bmatrix}^a, \dots\dots\dots (68)$$

$$Q_{k1}^b = [K_{11} \ K_{12}]_{k1} \begin{bmatrix} q_{k1} \\ q_{k4} \end{bmatrix}^b \dots\dots\dots (69)$$

となる。ここに,  $K_{11}, K_{12}$  は, 式 (63 a) より得られる各枝部材に対する剛性マトリックスの部分マトリックスを表わす。

節点  $k1$  に集合する枝部材の変位と基準座標系で定義した節点変位との適合条件式は,

$$\begin{aligned} q_{k1} &= A_d^{d_1} q_{k1}^{d_1} = A_d^{d_2} q_{k1}^{d_2} = A_d^h q_{k1}^h \\ &= A_d^a q_{k1}^a = A_d^b q_{k1}^b \dots\dots\dots (70) \end{aligned}$$

によって表わされる。

また、節点  $k1$  に集合する枝部材の断面力と節点  $k1$  における節点力とのつり合い条件式は、

$$\mathbf{Q}_{k1} + A_f^{d1} \mathbf{Q}_{k1}^{d1} + A_f^{d2} \mathbf{Q}_{k1}^{d2} + A_f^h \mathbf{Q}_{k1}^h + A_f^a \mathbf{Q}_{k1}^a + A_f^b \mathbf{Q}_{k1}^b = 0 \dots\dots\dots (71)$$

によって表わされる。

式(70)の適合条件を表わすマトリックス  $A_d$ , 式(71)の力のつり合い条件を表わすマトリックス  $A_f$  は、

$$A_d = A_f = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \dots\dots\dots (72)$$

となり、方向余弦を表わすマトリックス  $C$  は、各部材に対して表-3より求められる。

表-3

	斜材 $d$	上, 下支材 $a$	垂直材 $h$	対傾構 $b$
$C$	$\begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$
$\theta$	X 軸となす角	—	—	Y 軸となす角

式(71)に式(65)~(69)を代入し、さらに式(70)を代入すると、つぎの節点力と節点変位の関係式を得る。

$$\mathbf{Q}_{k1} = [\mathbf{K}_{11}^{d1} + \mathbf{K}_{11}^{d2} + \mathbf{K}_{11}^{h1} + \mathbf{K}_{11}^a + \mathbf{K}_{11}^b, \mathbf{K}_{12}^h, \mathbf{K}_{12}^a, \mathbf{K}_{12}^b]_k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} + [\mathbf{K}_{12}^{d1}, \mathbf{K}_{12}^{d2}]_k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{k-1,2} \\ \mathbf{q}_{k+1,2} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (73)$$

ここに、 $\mathbf{K}_{11}$ ,  $\mathbf{K}_{12}$  は、基準座標系に対して変換した枝

$$\mathbf{K}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{d1} + \mathbf{K}_{11}^{d2} + \mathbf{K}_{11}^{h1} + \mathbf{K}_{11}^{a1} + \mathbf{K}_{11}^{b1}, & \mathbf{K}_{12}^{h1}, & \mathbf{K}_{12}^{a1}, & \mathbf{K}_{12}^{b1} \\ \mathbf{K}_{21}^{h1}, & \mathbf{K}_{11}^{a2} + \mathbf{K}_{22}^{h1} + \mathbf{K}_{22}^{b2}, & \mathbf{K}_{21}^{b2}, & \mathbf{K}_{12}^{a2} \\ \mathbf{K}_{21}^{a1}, & \mathbf{K}_{12}^{b2}, & \mathbf{K}_{11}^{d3} + \mathbf{K}_{11}^{d4} + \mathbf{K}_{11}^{h2} + \mathbf{K}_{11}^{b2} + \mathbf{K}_{22}^{a1}, & \mathbf{K}_{12}^{h2} \\ \mathbf{K}_{21}^{b1}, & \mathbf{K}_{21}^{a2}, & \mathbf{K}_{21}^{h2}, & \mathbf{K}_{22}^{a2} + \mathbf{K}_{22}^{h2} + \mathbf{K}_{22}^{b1} \end{bmatrix}_k \dots\dots\dots (77)$$

$$\mathbf{S}_{k'} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{12}^{d1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{12}^{d3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k, \quad \mathbf{S}_k = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{K}_{12}^{d2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{K}_{12}^{d4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \dots\dots\dots (78)$$

である。ただし、おのおのの枝部材について、 $\mathbf{K}_{21} = A_f K_{21} \bar{A}_d$ ,  $\mathbf{K}_{22} = A_f K_{22} \bar{A}_d$

である。

節点  $ki$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) に枝部材が連結する条件式は

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ 1 \end{bmatrix}_{k+1}^L = \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} & 0 \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} & 0 \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} & 0 \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ 1 \end{bmatrix}_k^R + \begin{bmatrix} 0 & B_1' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2' \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} 0 & B_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \end{bmatrix}_{k+1} \dots\dots\dots (80)$$

を得る。上式が立体トラスの節点遷移式である。式(80)の部分マトリックス  $P_{11}, P_{12}, \dots, P_{44}$  は  $(12 \times 12)$  の正

部材の剛性マトリックスを表わし、 $\mathbf{K}_{11} = -A_f K_{11} \bar{A}_d$ ,  $\mathbf{K}_{12} = -A_f K_{12} \bar{A}_d \dots\dots\dots (74)$  より求められる。ただし、 $\bar{A}_d$  は  $A_d$  の転置マトリックスを表わす。まったく同じようにして、節点  $k2, k3, k4$  に集合する枝部材についても、節点力と節点変位の関係式を求め、ひとまとめにすると、

$$\mathbf{Q}_k = \mathbf{K}_k \mathbf{q}_k + \mathbf{S}_k' \mathbf{q}_{k-1} + \mathbf{S}_k \mathbf{q}_{k+1} \dots\dots\dots (75)$$

を得る。ここに、

$$\mathbf{Q}_k = \{\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3, \mathbf{Q}_4\}_k \dots\dots\dots (76)$$

$$\mathbf{q}_k = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4\}_k$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{q}_{k+1,i}^L &= \mathbf{q}_{ki}^R = \mathbf{q}_{ki} \\ \mathbf{Q}_{k+1,i}^L &= \mathbf{Q}_{ki}^R + \mathbf{Q}_{ki} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (79)$$

式(79)となる。式(79)に式(75)を代入すると、

の部分マトリックスが対応して、表-4のように構成される。また、 $B_1', B_2', B_1, B_2$  は  $(12 \times 6)$  の矩形マトリックスで、表-4のように、式(78)の部分マトリ



表-4

$P_{ij}(i=j)$		$P_{ij}(i \neq j)$		$B_i', B_i$
$I_6$	$O_6$	$O_6$	$O_6$	$O_6$
$K^d + K^h$ $+ K^a + K^b$	$I_6$	$K^h, K^a,$ $K^b$	$O_6$	$K^d$

クスによって作成される。

同じようにして、立体トラスの各格間、各節点の遷移方程式が求められる。

(3) 立体トラスの境界条件式

立体トラスの左端の自由度からなる初期ベクトルは、

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, 1\} \dots\dots\dots(81)$$

となり、 $a_i (i=1, 2, 3, 4)$  は、各弦材に対する6つの自由度を要素とする。

また左端の境界マトリックス  $R$  は

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} & R_{14} & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & R_{24} & 0 \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} & R_{34} & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(82)$$

となり、部分マトリックス  $R_{11}, R_{12}, \dots, R_{44}$  は  $(12 \times 6)$  の矩形マトリックスである。

また、立体トラスの右端の境界マトリックス  $R'$  は

$$R' = \begin{bmatrix} R_1' & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4' & 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(83)$$

となり、部分マトリックス  $R_i' (i=1, 2, 3, 4)$  は、 $(6 \times 12)$  の矩形マトリックスである。

5. 数値計算例

$$K_3 = \begin{bmatrix} 0.1174, & -0.0180, & -0.0997, & -0.0972, & 0, & -0.0363 \\ -5.8230, & -6.2870, & 0.1174, & 0.1736, & 0, & 0.0972 \\ -6.2870, & -24.091, & -0.0180, & 0, & 17.0132, & 0 \\ 0.0972, & 0, & -0.0363, & -0.1174, & -0.0180, & -0.0997 \\ 0.1736, & 0, & -0.0972, & -5.8230, & 6.2870, & -0.1174 \\ 0, & 17.0132, & 0, & 6.2870, & -24.091, & -0.0180 \end{bmatrix},$$

$$S_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -0.0202, & 0.0180, & -0.0135 \\ 0 & 0 & 0 & 5.6494, & 6.2870 & 0.0202 \\ 0 & 0 & 0 & 6.2870, & 7.0775 & -0.0180 \\ 0.0202, & 0.0180, & -0.0135, & 0 & 0 & 0 \\ 5.6494, & -6.2870, & -0.0202, & 0 & 0 & 0 \\ -6.2870, & 7.0775, & -0.0180, & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

(1) 吊橋主塔の解析

図-7 に示す幾何的条件と荷重条件とを有する吊橋主

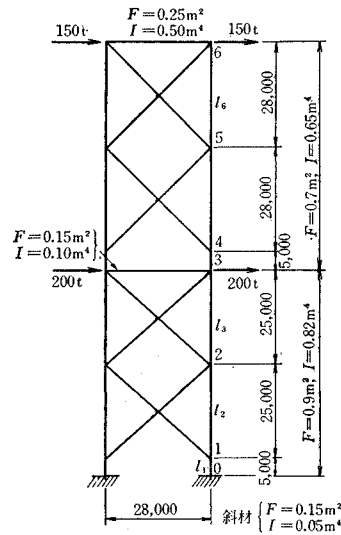


図-7

塔を解析する。2本の柱を主部材として、柱の下端の自由度からなる初期ベクトルを上端まで移行する。任意定数を  $I_0=6 \times 0.82 \text{ m}^4$ ,  $l_0=25 \text{ m}$ ,  $P_0=200 \text{ t}$  として、遷移マトリックスを無次元化する。代表的に格間  $l_3$  の格間マトリックスの部分マトリックスは、

$$F_{31} = F_{32} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.008746 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となり、節点 31, 32 の節点遷移式を作成するとき必要な節点力と節点変位の関係式における係数マトリックス  $K_3, S_3', S_3$  は、それぞれ、

$S_3=0$

となる。同じようにして、演算マトリックスを求め、式 (57) に示す移行計算を行なって、柱の下端の自由度を

未知量とする 6 元の連立方程式を得る。すなわち、

$Z \cdot \{M_1, N_1, Q_1, M_2, N_2, Q_2\}_0 = L$

ここに、

$$Z = \begin{bmatrix} 665.846 & -2.04661 & 118.553 & 449.862 & 0.928225 & 115.3847 \\ -995.270 & 3.65609 & -204.729 & -995.279 & -2.65611 & -204.730 \\ 4771.30 & -17.5232 & 516.232 & -4771.32 & -17.5232 & -515.235 \\ 449.856 & -0.928206 & 115.384 & 665.851 & 2.04661 & 118.553 \\ 995.272 & -2.65609 & 204.730 & 995.278 & 3.65611 & 204.730 \\ -4771.30 & 17.5232 & -515.232 & 4771.32 & 17.5232 & 516.235 \end{bmatrix}$$

$L = \{-7.06731, 8.26304, -1.75, -7.06729, -8.26304, -1.750\}$

$N_{02} = -9.45452 (-1890.905 \text{ t}),$

$Q_{02} = -1.75009 (-350.019 \text{ t}).$

である。この連立方程式を解くと、自由度がつぎのように求められる。

$M_{01} = 0.38582 (1929.143 \text{ t}),$

$N_{01} = 9.45452 (1890.906 \text{ t}),$

$Q_{01} = -1.75010 (-350.020 \text{ t}),$

$M_{02} = 0.38582 (1929.139 \text{ t}),$

自由度が求められると、式 (58) の関係より、再び柱の下端から上へ、各格間の状態量ベクトルが順次に計算される。最後に、断面力と変位の関係式より、枝部材の断面力が計算される。計算結果の一部として、格間  $l_1$ 、および、 $l_6$  の柱の両端における状態量ベクトルを、表 -5 に示す。

表-5

(単位 t, m)

	$V_1^L$	STRESS による計算	$V_1^R$	STRESS による計算	$V_6^L$	STRESS による計算	$V_6^R$	STRESS による計算
$w_1$	0	0	-0.000500	-0.000500	-0.004944	-0.004944	-0.005230	-0.005230
$w_1$	0	0	0.000976	0.000976	0.041054	0.041051	0.054746	0.054742
$\phi_1$	0	0	-0.000306	-0.000306	-0.000442	-0.000442	-0.000437	-0.000437
$M_1$	1929.143	1929.021	179.044	-179.030	140.446	140.505	-145.389	145.646
$N_1$	1890.906	1890.774	1890.906	-1890.774	150.246	150.193	150.246	-150.193
$Q_1$	-350.019	349.998	-350.019	-349.998	-10.208	10.219	-10.208	-10.219
$w_2$	0	0	0.000500	0.000500	0.004944	0.004944	0.005230	0.005230
$w_2$	0	0	0.000976	0.000976	0.041055	0.041051	0.054746	0.054742
$\phi_2$	0	0	-0.000306	-0.000306	-0.000442	-0.000442	-0.000437	-0.000437
$M_2$	1929.139	1929.021	179.043	-179.030	140.532	140.505	-145.825	145.646
$N_2$	-1890.905	-1890.774	-1890.905	1890.774	-150.203	-150.193	-150.203	150.193
$Q_2$	-350.019	349.998	-350.019	-349.998	-10.227	10.219	-10.227	-10.219

同じ問題を MIT で開発された STRESS<sup>5),6)</sup> によって計算した値を状態量ベクトルの右側に示した。両者の解法による値は、非常によく一致している。断面力の正負が異なるのは、断面力の符号の定義の違いによる。

(2) 単純トラスの解析

図-8 に示すように、集中荷重  $P$  が作用する剛節合単純トラスを解析する。

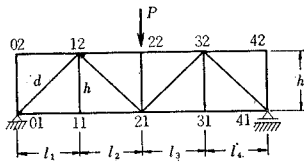


図-8

a) 幾何的条件および荷重条件

格間長  $l_1=l_2=l_3=l_4=5 \text{ m}, h=5 \text{ m}.$

弦材の曲げ剛性  $EI=2.1 \times 10^4 \text{ tm}^2,$  伸び剛性  $EF=$

$4.2 \times 10^6 \text{ t},$

垂直材  $h$  および斜材  $d$  の曲げ剛性  $EI_h=EI_d=0.5 EI,$

伸び剛性  $EF_h=EF_d=0.5 EF.$

集中荷重  $P=10 \text{ t}$

b) 計算

任意の基準定数を  $EI_0=6 EI, l_0=l_1, P_0=P$  として、演算マトリックスを無次元化する。弦材の径間マトリックスは、

$$F_{k1}=F_{k2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -0.012 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, k=1, 2, 3, 4.$$

となる。節点 11, 12 の節点遷移式を作成するときに必要な節点力と節点変位の関係式の係数マトリックス  $K_1, S_1', S_1$  は、それぞれ、

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0.5, & 0, & -0.333, & -0.5, & 0, & -0.1667 \\ -1.0, & 0, & 0.5, & 1.0, & 0, & 0.5 \\ 0 & -41.667, & 0, & 0, & 41.667 & 0 \\ 0.5, & 0, & -0.1667, & -0.8535, & 0, & -0.8047 \\ 1.0, & 0, & -0.5, & -30.816, & 0, & -0.8535 \\ 0 & 41.667, & 0, & 0, & -71.483, & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1178 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1767 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1767 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1767, & -0.1767, & -0.1178 & 0 & 0 & 0 \\ 14.9082, & 14.5546, & 0.1767 & 0 & 0 & 0 \\ 14.5546, & 14.9082, & 0.1767 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

となる。同じようにして、他の演算マトリックスを求め、式(57)の移行計算を行なって、トラスの左端の自由度と右支点の鉛直反力を未知量とする7元の連立方程式を得る。すなわち、

$$Z \cdot \{\phi_{01}, H_1, R_1, u_{02}, w_{02}, \phi_{02}, R_4\} = L$$

ここに、 $Z$ は構造系に対して一定な(7×7)の正方マトリックスであり、 $L$ は荷重に関する(7×1)の列ベクトルである。この連立方程式を解くと、つぎのように未知量が求まる。

$$\begin{aligned} \phi_{01} &= -0.041917, H_1=0, R_1=-0.5, \\ u_{02} &= 0.02361, w_{02}=0.000307, \phi_{02}=-0.041106, \\ R_4 &= -0.5. \end{aligned}$$

上の値は無次元量である。左端の自由度が求まると、再び左から右へ各格間の弦材の状態量ベクトルが計算され、最後に垂直材と斜材の断面力が計算される。計算結果の一部をSTRESSによる計算値と対比して表-6に示す。両者の値は完全に一致している。ただし、符号は断面力の定義の違いにより一部異なっている。

表-6

(単位 t, m)

	$V_1^L$	STRESS による計算	$V_1^R$	STRESS による計算	$V_2^L$	STRESS による計算	$V_2^R$	STRESS による計算
$u_1$	0	0	0.00006	0.00006	0.00006	0.00006	0.00012	0.00012
$w_1$	0	0	0.00055	-0.00055	0.00055	0.00055	0.00093	-0.00093
$\phi_1$	-0.000083	-0.000083	-0.000095	-0.000095	-0.000095	-0.000095	0	0
$M_1$	0.5796	0.5796	-0.4824	0.4824	0.3424	0.3424	-1.1383	1.1383
$N_1$	-4.9066	-4.9066	-4.9066	4.9066	-5.2502	-5.2502	-5.2502	5.2502
$Q_1$	-0.2124	0.2124	-0.2124	-0.2124	-0.2961	0.2961	-0.2961	-0.2961
$u_2$	0.000234	0.000234	0.000232	0.000232	0.000232	0.000232	0.00012	0.00012
$w_2$	0.000003	-0.000003	0.000548	-0.000548	0.000548	0.000548	0.00114	-0.00114
$\phi_2$	-0.000082	-0.000082	-0.000111	-0.000111	-0.000111	-0.000111	0	0
$M_2$	0.4442	0.4442	-0.1963	0.1963	1.1255	1.1255	-2.0582	2.0584
$N_2$	0.1790	0.1790	0.1790	-0.1790	9.3381	9.3381	9.3381	-9.3381
$Q_2$	-0.1281	0.1281	-0.1281	-0.1281	-0.6367	0.6368	-0.6367	-0.6368

## 6. 考 察

骨組構造の解析では、構造物のもっているトポロジー的性質を用いた逐次代入計算によって、多元の連立方程式をさけるのが常套になっている。この場合の計算手順には、遷移マトリックス法のように、構造物の左端の自由度を右端まで移行して、右端の境界条件により左端の

自由度を求め、もとへもどって、再び左から右へ順次に状態量ベクトルを計算する方法と、変位法概念を用いた代入計算、すなわち、最初に forward substitution により到達した節点の変位を求め、つづいて backward substitution を行ない、逆の径路をたどって、順次に各節点の変位を求めていく方法がある。この論文においては、前者の方法を用いたが、この方法のみの応用では、構造体系によっては、桁落ちにより、計算精度が著しく

低下することがある。実際に、数値計算例(1)では、主部材(柱)の剛性に比較して、枝部材(垂直材, 斜材)の剛性が小さいこと、斜材が対称に配置されていることなどによって、格間数が増えても計算精度は低下しないが、計算例(2)の場合は、格間数が多くなると、マトリックスの繰返し掛算によって得られる数値の桁数が著しく大きくなり、桁落ちにより、計算精度が低下する。

この問題に対しては、遷移マトリックス法に変位法による逐次計算法の概念を導入した混合法を用いて、移行計算の途中の線形関係式において、未知量の一部を変換しながら移行計算を進めるのが有効である。その手順をつぎに示す。

任意格間  $l_k$  にある弦材の右端における状態量ベクトル  $V_k^R$  は、式(28)に示すように、つぎの式で表わされる。

$$V_k^R = U_k^R A \dots\dots\dots(84)$$

ここに、 $A$  はトラスの左端の自由度と中間支点の未知反力を要素とする列ベクトルであり、 $U_k^R$  は移行計算によって得られる係数マトリックスである。式(84)は、つぎのように、二つの式系に分割することができる。

$$q_k^R = U_1 A_0 + X_1 M + L_1 \dots\dots\dots(85)$$

$$Q_k^R = U_2 A_0 + X_2 M + L_2 \dots\dots\dots(86)$$

ここに、 $q_k^R, Q_k^R$  は、それぞれ、弦材  $l_k$  の右端における変位と断面力のベクトルを表わし、 $A_0$  はトラスの左端の自由度のみからなる列ベクトル、 $M$  は中間支点の未知反力を要素とするベクトル、 $L_1, L_2$  は荷重に関するベクトルを表わす。

式(85)を変形すると、

$$A_0 = U_1^{-1} q_k^R - U_1^{-1} X_1 M - U_1^{-1} L_1 \dots\dots\dots(87)$$

を得る。これを式(86)に代入して  $A_0$  を消去すると、

$$Q_k^R = U_2 U_1^{-1} q_k^R - (U_2 U_1^{-1} X_1 - X_2) M - U_2 U_1^{-1} L_1 + L_2 \dots\dots\dots(88)$$

を得る。上式は、移行計算によって到達した格間  $l_k$  の弦材の右端における断面力と変位に関する方程式である。式(88)の関係をを用いて、式(84)の列ベクトル  $A$  よりトラスの左端の自由度を消去して、新しく  $q_k^R$  を未知量として導入することにより、つぎの線形関係式を得る。

$$V_k^R = \bar{U}_k^R \begin{bmatrix} q_k^R \\ 1 \\ M \end{bmatrix} \dots\dots\dots(89)$$

ここに、 $\bar{U}_k^R$  は式(88)の列ベクトル  $q_k^R, M$  の係数マトリックスおよび荷重に関するベクトル  $L_1, L_2$  によって構成されるマトリックスである。これより、再び遷移マトリックスの前掛けによって、移行計算がつづけられる。この未知量の変換を各格点において行なうと、変位法の forward substitution と同じになる。

### 7. あとがき

遷移マトリックス法を、トラス構造の解析に応用し、この方法と、変位法による逐次計算法の概念とを組み合わせた混合法について述べた。なお、混合法の有効性については、ラーメンの解析プログラムで確かめている。

遷移マトリックス法は、解析式の上からは、応力法と変位法とをかねた解法であるから、この方法を基本にして、変位法による逐次計算法として展開することも可能である。

式(3)、(63a)の剛性マトリックスは、Maxwell-Bettiの定理による対称性を表わしていない。これは、ベクトルの配列を、高次の積分と座標軸  $(x, y, z)$  の順序を考えて、一般的に決めたからである。本文では、構造解析をマトリックスによって、能率的に展開するという代数的見地より、マトリックスの対称性については、とくに考慮をはらっていない。

遷移マトリックス法は、はりの力学系を支配する微分方程式の一般解を、直接構造解析に応用した解法であり、諸種の力学問題の解析に応用される。この方法と変位法とを共用すると、FRAN や STRESS より、範囲の広い問題を扱い得る計算プログラムも可能である。

おわりに、この論文をまとめるにあたって、名古屋大学教授 成岡昌夫博士のご好意によるご指導と、たびたびの有益なご助言をいただきました。同教授に心から感謝の意を表します。

### 参考文献

- 1) 遠田 : 遷移行行列法による任意骨組構造の解析, 土木学会論文集, 160 (43.12), pp. 1-11.
- 2) Fennes, S.J., Branim, F.H. Jr. : Network-Topological Formulation of Structural Analysis, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 89, No. ST 4 (1963. 8), pp. 483-513.
- 3) STRESS : A User's Manual, The MIT Press, 1964.
- 4) Withum, D. : Berechnung räumlicher Stabwerke, Der Bauingenieur, 41 (1966), pp. 476-484.
- 5) Withum, D. : Recursive Computation of Space Frameworks, International Symposium, The Use of Electronic Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle upon Tyne, 1966, Working Session 2, Paper No. 13.
- 6) 中川・成岡 : 変形法と Reduction 法との相互関係について, 土木学会論文集, 141 (42.5), pp. 23-30.
- 7) Baldauf, H. : Beitrag zur Theorie ebener Fachwerke, Ing.-Arch. 26 (1958). pp. 338-342.
- 8) 熊野・成岡 : 平行弦連続ワレントラスの一計算法, 土木学会論文集, 132 (41.8), pp. 27-33.
- 9) Tanimoto : Operational Method for Pin-Jointed Trusses, Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 92, No. ST 3 (1966. 6), pp. 179-198.