

河川蛇行の成因についての研究*

THE FORMATION OF MEANDERS IN RIVERS

林 泰 造**
By Taizo Hayashi

1. 緒 言

河川蛇行の成因については古くから種々の学説が出されているが、未だ定説はないように思われる。1940年代頃までは、河川の蛇行は河岸の交互の侵蝕を意味するものとのみ考えられていたように思われるが、戦後、木下良作博士は両岸が侵蝕されない直立壁の矩形断面水路においても水流の蛇行は起こりうるという驚くべき実験的事実を明らかにされ、その実験結果に基づいて実際河川における蛇行形状を調査分析された^{4),5)}。

写真-1 は木下博士の論文⁴⁾中に示された硬い直立壁を有する矩形断面水路に発生した交互のサンド・ウェーブであり、水を止め河床面を露出させて撮影したものである。また、写真-2 は移動床を有する別の矩形断面水路において、水流の中に色素を投入して水流の蛇行状況を示したものである⁶⁾。

本論文で取り扱うのは、この木下博士の取り扱われた場合、すなわち、硬い直立壁を有する矩形断面水路内の交互のサンド・ウェーブの発生および水流蛇行の成因についてである。

2. 砂礫堆および交互砂礫堆（蛇行砂礫堆）の発生の現象的考察

写真-1 のように3次元的に交互に起こるサンド・ウェーブの成因を考える前に、順序としてまず2次元的なサンド・ウェーブの成因について考えてみる。

もし何らかの原因により河床面に正弦波形のサンド・ウェーブができた場合、その影響をうけて水面形状も正弦波形となるが、サンド・ウェーブと水面波形とは、流

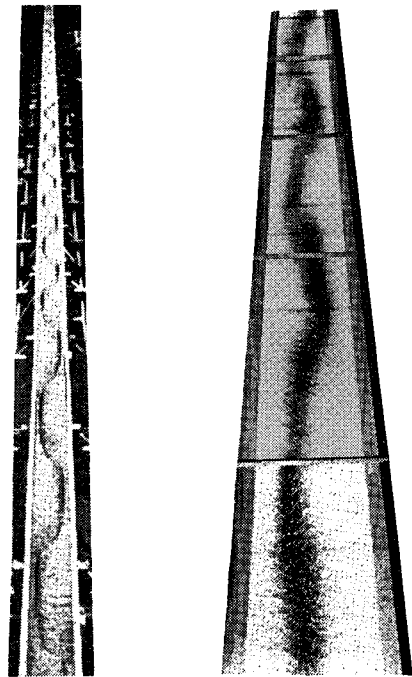


写真-1 交互
のサンド・
ウェーブ
(木下博士⁴⁾)

写真-2 水流の蛇行
(画面下部より
上部に向けて流
れる)

れが常流 ($F < 1$) の場合には逆位相 (図-1) となり、流れが射流 ($F > 1$) の場合には両者は同位相 (図-2) になる。このことは簡単な Bernoulli の定理から容易に明らかである。図-1 のサンド・ウェーブは dune といわれているが、これに砂礫堆という用語を当て、また図-2 のサンド・ウェーブは antidune といわれているが、これに反砂礫堆という言葉を用いることとする。

流砂量を表わす式については、いろいろなものがあるが、それらをグループとして大別すると、流砂量を河床面に作用するせん断力の関数として表わすものと、流砂量を流速の関数として表わすものとの2種類になる。と

* 昭和43年9月、土木学会第24回年次学術講演会¹⁾および昭和44年2月、土木学会第13回水理講演会²⁾において発表したものならびに昭和45年2月、ASCE Proceedings³⁾に発表したものをあわせて取りまとめたもの。

** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科教室

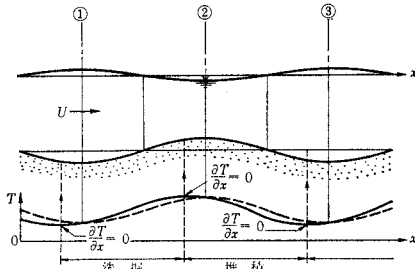


図-1 常流時のサンド・ウェーブ

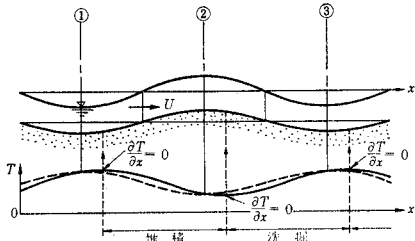


図-2 射流時のサンド・ウェーブ

ここで、河床面にサンド・ウェーブがいったんできると、それによる新たな摩擦抵抗や形状抵抗が局所せん断力の表示の上で必要となるが、これらの抵抗についてはまだあまり明らかにされていない。この点で、河床面の安定問題の研究の場合には、後者のグループの表現式を用いる方が便利である。そこで、流砂量 T を局所流速 u の関数として

$$T(x, t) = f[u(x, t)] \dots \dots \dots (1)$$

と考え、 f は u の単調増加関数であると考え、流砂量の変化は 図-1 および 図-2 のそれぞれ下部太い点線で示されるようになるはずである。その結果、図-1 においては、断面 1 と 2 の間では洗掘が起こり、2 と 3 の間では堆積が起こる。また、図-2 においては、断面 1 と 2 の間では堆積が起こり、2 と 3 の間では洗掘が起こる。このため、砂礫堆(図-1)の場合には河床面形状は下流に進行し、反砂礫堆(図-2)の場合には河床面形状は上流に向けて遡上する。しかし、断面 1, 2, 3, ……では $\partial T / \partial x = 0$ であるから、サンド・ウェーブの波底はそれ以上洗掘されず、また、波頂には堆積が起こらない。したがって、河床面に与えられた変位は下流または上流に向かって伝播はするが、サンド・ウェーブの波高には変位を生じないから、以上のようなモデルからだ河床面に与えた変位の安定性は常に中立であるということになる。

しかし、流砂量 T はその点の局所流速 u のみの関数ではなくて、 T にはもちろんその点のサンド・ウェーブの形状も関係するはずである。たとえば、図-3 の点 A と点 B とを比較すると、ポテンシャル流れを仮定する

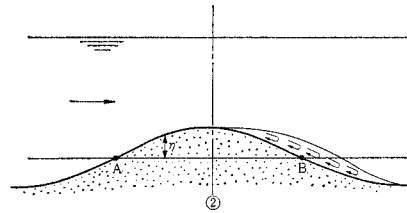


図-3 流線のはく離

限り両点における河床流速は相等しく、したがって式(1)のように仮定する限り、両点における流砂量は相等しくなるはずである。しかし、実際には 図-3 に示されるように、サンド・ウェーブの背面では流れのはく離が起こって、点 B の流砂量は点 A の流砂量とくらべて当然小さくなっているはずである。このようなことを考慮して、 T としては新たに次式をとることとする。

$$T(x, t) = \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x, t)}{\partial x} \right] \cdot f[u(x, t)] \dots (2)$$

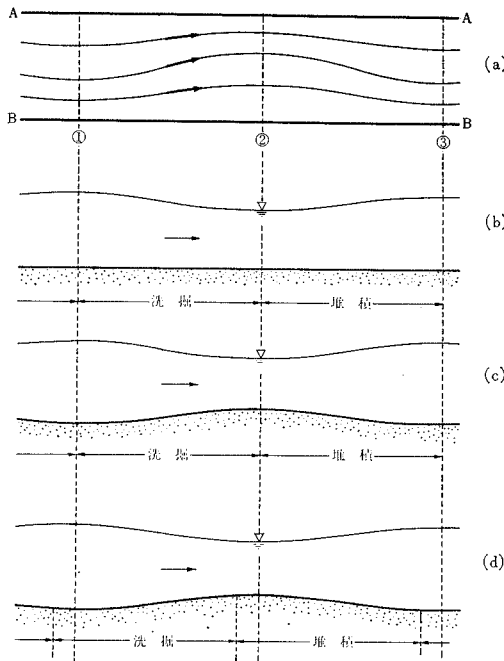
ここに、 α : 無次元の定数、 η : サンド・ウェーブの縦距、である。この場合には流砂量の変化は 図-1 および 図-2 においていずれも実線で示されるようになり、洗掘および堆積の各区間は図中に記入されているようになる。この場合には、サンド・ウェーブの波底には洗掘が起こり、波頂には堆積が起こっているから、サンド・ウェーブの振幅は次第に増大してゆく。したがって、この場合には河床面は不安定である。しかし、現象がこのような機構によっているものとするならば、理論的には河床面は常に不安定ということになり、これも現実と相違することとなる。実際の現象の説明のためには、流砂量の表現式の中にもう一つの要素を導入することが必要となる。

そこで、流砂量の式として、式(2)に代えて次式をとる。

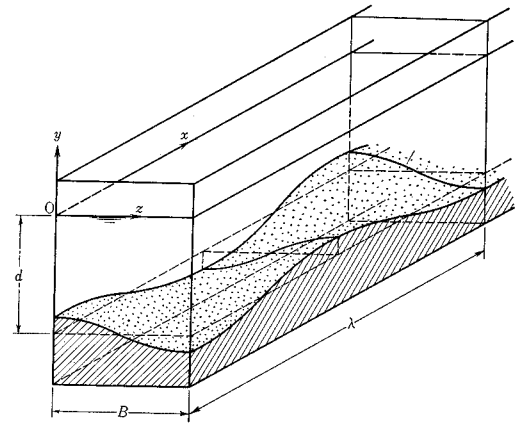
$$T(x, t) = \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, t)}{\partial x} \right] \cdot f[u(x - \delta, t)] \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 δ は局所的な掃流力とそれに応ずる掃流砂量との間に存すべきいくらかの遅れの距離である。この δ の値によって、図-1 および 図-2 の流砂量を示す太い実線はさらに修正されて、与えられた攪乱に対して河床面が安定となる場合もでてくる。

つぎに、3 次元的なサンド・ウェーブの原因について考える。図-4 (a) のように、もし何らかの原因により流線が蛇行した場合、水路の BB 縦断面は同図 (b) のようになり、簡単な Bernoulli の定理から容易に明らかのように、1, 3 で流速が最も遅く、2 で流速が最も早くなる。したがって、1, 2 の間で洗掘が起こり、2, 3 の間では堆積が起こる。そしてこの結果、BB 壁面に沿って砂礫堆が発生する。また、もし同図 (c) のように



(a): 平面
(b), (c), (d): BB 側壁に沿う縦断
図—4 河床の洗掘と堆積



図—5 交互サンド・ウェーブ

BB 壁面に沿って砂礫堆が存在している場合には、これが同図 (a) のような流線の蛇行を生ぜしめ、ここに (a) → (c) → (a) の1つのサイクルが形成される。しかし、このような経過からだけならば、図—5 に示すような3次元のサンド・ウェーブの安定性は単に中立にとどまるに過ぎない。流砂量式としてこの場合にも、式(3)に相当したものを導入することにより、図—5 のような河床面の変位が、ある場合には増幅され (図—4 (d)), また、ある場合には消滅してゆくことを説明することができる。

以上の説明は定性的なものであったが、次節以降で現象の定量的な取り扱いを行なう。

3. 2次元のサンド・ウェーブ

2次元のサンド・ウェーブの発生の理論としては、周知のように Kennedy の理論⁷⁾がある。彼は水流に2次元ポテンシャル理論を適用するとともに、流砂量と流速変化との関係に新しい見解—位相差—を導入し、サンド・ウェーブの発生の可能性および卓越波長などについて研究した。彼の単位水路幅当りの流砂量 (容積) の表現は

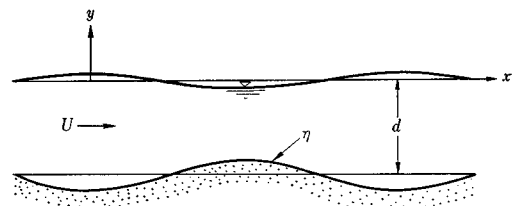
$$T(x, t) = m \cdot [\phi_x(x - \delta, -d, t)]^n$$

ここに、 δ : 遅れの距離, $\phi_x = \partial\phi/\partial x$, ϕ : 流れの速度ポテンシャル, d : 水深 ($y = -d$ は平均河床面), m, n :

定数, である。彼はこの遅れの距離 δ を 0 から λ (サンド・ウェーブの波長) まで大幅に変化させて、サンド・ウェーブの成長または消滅の条件を研究したが、この理論においては、遅れの距離 δ が重要な役割を果たしている。しかし、この距離 δ はこのままでは物理的意味のはっきりしないものであって、この明確化が望まれてきたように思われる。

本節の研究は、Kennedy の理論から出発して、この遅れの距離 δ の物理的意味づけを意図しつつ行なう。以下の計算においては式 (10) までは Kennedy の理論と内容的に同一であるが、式 (11) から以後が全く異なってくる。なお、この種の問題にポテンシャル理論を適用するという研究方法は Anderson⁸⁾ にはじまり、Kennedy⁷⁾ により発展させられたものである。一方、この種の問題の研究にせん断流モデルを使用しているものは、古くからかなり数多く行なわれており、それについての広汎な文献は Kennedy による最近の展望⁹⁾の中に示されているので、ここではこれ以上ふれない。

いま、移動河床上に $\eta(x, t) = a(t) \sin k(x - U_b t)$ で与えられるような攪乱 (図—6) を与えて、その攪乱に対する河床面の安定性について考えてみる。ここに、 a : 振幅, k : 波数, U_b : サンド・ウェーブの移動速度, であり、 $a(t)$ は時間に対してきわめて緩慢に変化する関数とする。



図—6 河床面上に与えた攪乱

平均水深を d 、攪乱の影響をうけない流速を U とし、座標軸を 図-6 に示すようにとれば、自由水面および河床面はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi(x, t) = A(t) \sin k(x - U_b t) \\ y &= -d + \eta(x, t) = -d + a(t) \sin k(x - U_b t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。ただし、 $A(t)$ ：表面波の振幅である。

流れとしては 2 次元ポテンシャル運動を仮定すれば、流体運動に課せられるべき境界条件は

$$y=0: \xi_t + U \xi_x = \phi_y \dots\dots\dots (5)$$

$$y=0: \phi_t + g \xi + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2) = \text{const.} \dots\dots (6)$$

$$y=-d: \eta_t + U \eta_x = \phi_y \dots\dots\dots (7)$$

ただし、 ϕ ：流れの速度ポテンシャル、また、下付添字はその記号による偏微分を表わす。 η および ξ の振幅は波長にくらべて非常に小さいと考えて、上記境界条件の中の非線型項を省略する。そうすると、Laplace の方程式 $\nabla^2 \phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ と境界条件 (5)~(7) を満足する速度ポテンシャルは、 $a_t \ll aUk$ および $U_b \ll U$ と仮定するとき、次式で与えられる。

$$\phi = Ux - Ua \frac{\cosh ky + F^2 kd \sinh ky}{\sinh kd - F^2 kd \cosh kd} \cos k(x - U_b t) \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 $F = U/\sqrt{gd}$ は Froude 数である。式 (4) の第 1 式と式 (8) とを式 (5) に代入すると、 $A_t \ll AUk$ の仮定のもとに、水面波とサンド・ウェーブとの振幅比を与える関係式として次式をうる。

$$\frac{A(t)}{a(t)} = - \frac{F^2 kd}{(\tanh kd - F^2 kd) \cosh kd} \dots\dots (9)$$

つぎに、河床面の変位 $\eta(x, t)$ と局所流砂量変化とを結ぶ関係式は

$$\eta_t + T_x = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 T ：水路単位幅当りの流砂量（容積レート）、である。 $T(x, t)$ の関数形としては、 $T \propto \phi_x^4$ の形を仮定することとする。これは DuBoys の式 $T = K \tau (\tau - \tau_c)$ において $\tau \propto \phi_x^2$ 、 $\tau_c \ll \tau$ の場合に相当するものである。そこで、式 (3) に対するものとして、本論文においては次式をとることとする。

$$T(x, t) = m \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, t)}{\partial x} \right] \times [\phi_x(x - \delta, -d, t)]^4 \dots\dots\dots (11)$$

ここに、 m ：無次元の係数、 α ：前節で既述の無次元定数、 δ ：前節で既述の遅れの距離、である。

式 (11) と関係式 $\phi_x(x, y, t) = U + u(x, y, t)$ とを式 (10) に代入すると、

$$\frac{\partial \eta(x, t)}{\partial t} + T \left[\alpha \frac{\partial^2 \eta(x - \delta, t)}{\partial x^2} + \frac{4}{U} \frac{\partial u(x - \delta, -d, t)}{\partial x} + 0(u^2) \right] = 0$$

ただし、 $\bar{T} = mU^4$ は水路全体としての単位幅当りの流砂量である。式 (4) の第 2 式、および式 (8) から得られる u の表現式を上式に代入すると、 $a(t)$ についてのつぎの微分方程式が得られる。

$$\frac{\dot{a}(t)}{a(t)} - k^2 \bar{T} \left[\alpha \cos k \delta - 4 \sin k \delta \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right] - k \cot k(x - U_b t) \left[U_b - \bar{T} k \left\{ \alpha \sin k \delta + 4 \cos k \delta \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right\} \right] = 0 \dots\dots (12)$$

ところで、 $a(t)$ は t のみの関数であるから、上式左辺第 3 項 $\cot k(x - U_b t)$ の係数は 0 とならねばならない。したがって、式 (12) から次式をうる。

$$a(t) = a(0) \exp \left[4 k^2 \bar{T} \sin k \delta \left\{ \frac{\alpha}{4} \cot k \delta - \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right\} t \right] \dots\dots\dots (13)$$

および

$$U_b = 4 \bar{T} k \cos k \delta \left[\frac{\alpha}{4} \tan k \delta + \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right] \dots\dots\dots (14)$$

さらに、 $\bar{T} = mU^4$ を式 (13) および式 (14) に代入し、また、 $k \delta \ll 1$ と仮定すると次式をうる。

$$a(t) = a(0) \exp \left[\frac{mg^2 \alpha}{C} F^4 k^2 \delta^2 \left\{ C - 2 F^2 kd \times \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right\} t \right] \dots\dots\dots (15)$$

および

$$U_b = 4 mg^2 d F^4 k d \left[\frac{\alpha^2}{8C} F^2 kd + \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right] \dots\dots\dots (16)$$

ただし、 C は

$$C = \alpha \sqrt{\frac{\delta}{U^2/2g}} \dots\dots\dots (17)$$

で表わされる無次元パラメーターである。遅れの距離 δ は流速 U が大なるほど当然大となるものと予想されるが、 U の何乗に比例するかは未だ直接的にはわかっていない。ここでは $\delta \propto U^2$ と仮定する。そのような場合には、 $\delta/(U^2/2g)$ は一定値をとる。一方、 α を定数と考えると、 $C = \alpha/[\delta/(U^2/2g)]$ は流速や水深、したがって Froude 数、に無関係な定数であると考えられる。

3. 2次元サンド・ウェーブの発生範囲

式 (15) をみると、同式中の中カッコ内が正であればサンド・ウェーブの振幅は時間とともに増大し、言い換えれば河床面は不安定となることがわかる。そこで

$$\Gamma = C - 2 F^2 kd \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd}$$

とおくと、 $\Gamma < 0$ および $\Gamma > 0$ がそれぞれ安定領域および不安定領域を与える。安定限界は $\Gamma = 0$ と $\tanh kd - F^2 kd = 0$ で与えられる。これらの式を F^2 に対する表現式に書直すと、それぞれ

$$F^2 = \frac{\begin{cases} F_2^2 \\ F_1^2 \end{cases}}{F_1^2} = \frac{1}{4kd \tanh kd} \times [C + 2 \pm \sqrt{(C+2)^2 - 8C \tanh^2 kd}] \dots (18)$$

および

$$F^2 = F_a^2 = \tanh kd / kd \dots (19)$$

となる。

パラメーター C の値は、直接的には未だ実験により検討されたものはないが、ここでは C にいくつかの値を仮定して、式 (18) および式 (19) によりサンド・ウェーブの発生領域を計算した。図-7, 8 および 9 はそれぞれ $C=1.5, 2.0$ および 3.0 に対する発生領域を示す。2節で既述のように、 $A/a < 0$ のサンド・ウェーブを砂礫堆、 $A/a > 0$ のサンド・ウェーブを反砂礫堆と定義して図中に記入した。

砂礫堆の発生領域は (F, kd) 面上では $0 < F < F_1$ 、反砂礫堆の発生領域は $F_a < F < F_2$ 、また、平坦面の発生領域は $F_1 < F < F_a$ および $F_2 < F$ で与えられる。したがって、 F_1 は砂礫堆の発生する Froude 数の最大値であり、 F_a は反砂礫堆の発生する Froude 数の最小値、また、 F_2 は反砂礫堆の発生する Froude 数の最大値となる。

式 (15) から、 $C=0$ の場合には不安定領域はつぎの2式ではさまれた部分のみになることがわかる。

$$F^2 = F_a^2 = \tanh kd / kd \dots (19)$$

および

$$F^2 = F_m^2 = \coth kd / kd \dots (20)$$

これらの2式は 図-7, 8 および 9 中に破線をもって示される。明らかに、その領域に発生するサンド・ウェーブは反砂礫堆となる。そこで、もし $C=0$ の場合には、砂礫堆はいっさい発生することがなく、発生するものは反砂礫堆のみであるということになるが、このようなことは実際からはずれている。

図-7, 8 および 9 からつぎのようなことが観察される。まず、平らな河床に水を流しはじめると、はじめは砂礫堆が発生する。つぎに、流速を、したがって F を徐々に大きくしてゆくと、サンド・ウェーブの状態を表わす状態点は図中で右から左上方に上ってゆき、 $F = F_1$ の曲線に到達すると、そこで砂礫堆が消滅する。その後は、さらに F を大きくしていても、 $F = F_a$ となるまでは河床は平坦である。しかし、 $F = F_a$ をこえると、今度は反砂礫堆が発生する。

式 (15) から、サンド・ウェーブの増幅の時間的割合は

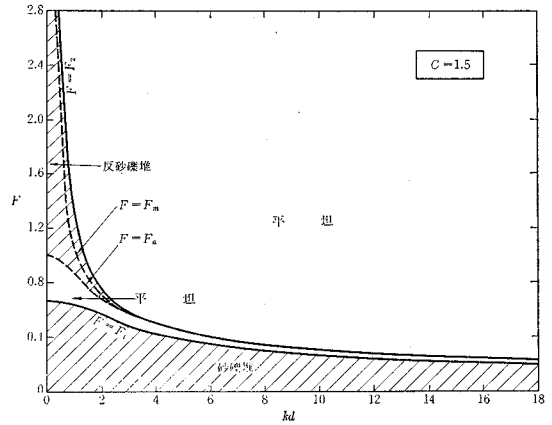


図-7 サンド・ウェーブの発生領域 (C=1.5 の場合)

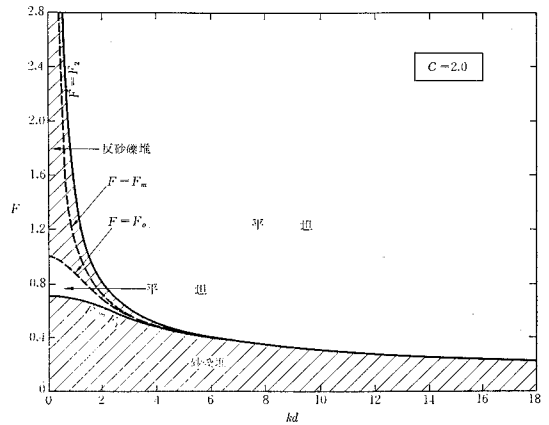


図-8 サンド・ウェーブの発生領域 (C=2.0 の場合)

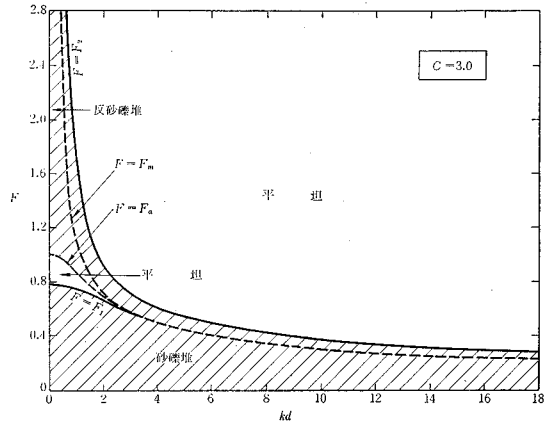


図-9 サンド・ウェーブの発生領域 (C=3.0 の場合)

$$\frac{\alpha mg^2}{C} F^4 k^2 d^2 \times \left\{ C - 2 F^2 kd \frac{1 - F^2 kd \tanh kd}{\tanh kd - F^2 kd} \right\}$$

で与えられる。図-10 は $C=2.0$ の場合のこの増幅率を $mg^2\alpha/C$ で割った比値の大きさを図示したものである。同図から、 F が増大するにつれてサンド・ウェーブの卓越波長が右方から斜左上方に向けて移ってゆく状況がみられる。

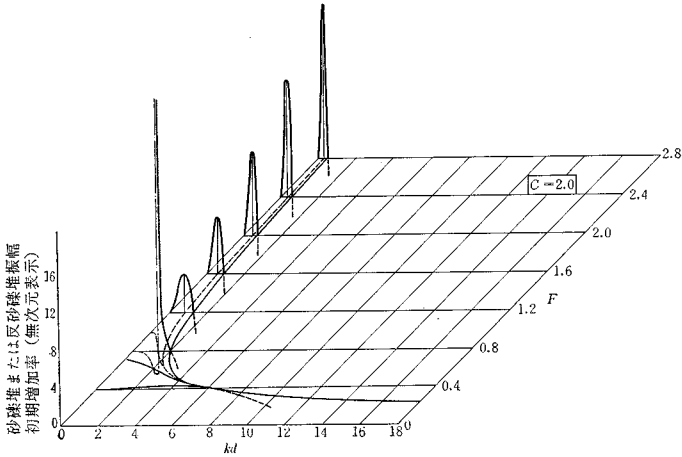


図-10 サンド・ウェーブの増幅率

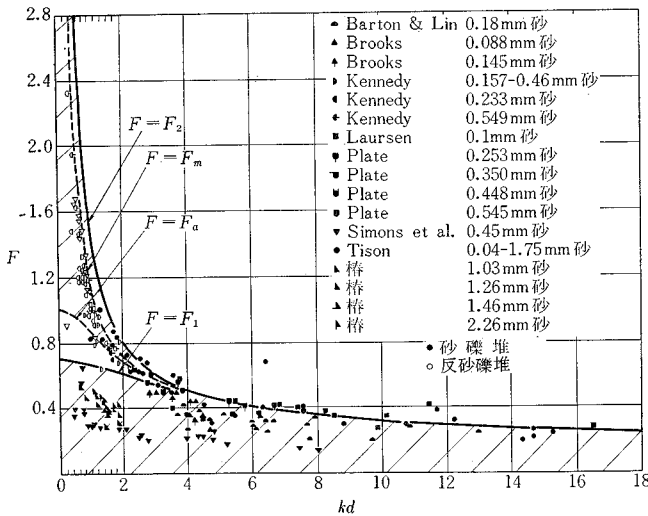


図-11 理論 (斜線部分が不安定領域) と実験値との比較

図-11 は Kennedy によって集録された従来の実験結果を筆者の理論 (図-8 に示した $C=2.0$ の場合の不安定領域) と比較したものであり、実験と理論の一致は非常によいと思われる。

C に対する 1 つの設定値 $C=2.0$ は、図-7, 8, 9 と、図-11 に示される実験値との比較から定められたものである。図-7 から、 $C=1.5$ の場合には、 F が F_a に近いときには理論上では河床面は平坦になるはずであるが、図-11 とくらべるとこれは実験結果と一致しない。このことから、1.5 は C の値としては小さすぎるように思われる。 $C=3.0$ の場合には、図-9 から、反砂礫堆が理論上では $kd > \text{約} 2$ の時にも起こるはずであるが、これも図-11 と比較するとき実験結果と一致しない。よって、3.0 は C の値としては大き過ぎるように思われる。このようにして、 $C=2.0$ をとることとしたのである。

4. 交互砂礫堆 (蛇行砂礫堆)

直立壁間の水流の蛇行は、第 2 節において既述のように、交互砂礫堆の発生とともに起こるもの、と考えて、河床面上に

$$\eta(x, z, t) = a(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \dots \dots \dots (21)$$

で与えられるような攪乱 (図-5) を与え、その攪乱に対する河床面の安定性について考えてみる。ここに、 a : サンド・ウェーブの振幅で、 $a(t)$ は時間に対してきわめて緩慢に変化する関数、 k : x 方向の波数、 U_b : サンド・ウェーブの移動速度、 l : z 方向の波数で、 $l = \pi/B$ 、 B : 水路幅、である。

従来、このような攪乱の安定性を取り扱ったものに Reynolds の研究⁽¹⁰⁾ および Callander の研究⁽¹¹⁾ がある。Reynolds は Kennedy の 2 次元砂礫堆発生理論を拡張して 3 次元砂礫堆の発生をポテンシャル理論を適用して取り扱うことを示しているが、具体的な計算はほとんど行っていない。Callander はせん断流モデルを使用して計算を行っているが、流砂量の表現式の中に 図-1, 2 に示されたような位相のずれの概念が入っていない点に理論としての難点があるように思われる。ただし、流水自身にも横振動的素因は含まれていないわけではない。そのことは足立博士が水流の微小振動の考察から示されている⁽¹²⁾。

ここでは前節までと同様にポテンシャル理論を適用して計算を行なう。前と同じように、平均水深を d 、攪乱の影響をうけない流速 (x 方向) を U とし、座標軸を 図-5 に示したようにとれば、自由水面および河床面はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} y &= \xi(x, z, t) = A(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \\ y &= -d + \eta(x, z, t) = \\ &= -d + a(t) \sin k(x - U_b t) \cos lz \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (22)$$

で表わされる。ただし、 $A(t)$: 表面波の振幅、である。

流れとして 3 次元ポテンシャル運動を仮定すれば、流体運動に課せられるべき境界条件は

$$y=0 : \xi_t + U \xi_x = \phi_y \dots \dots \dots (23)$$

$$y=0 : \phi_t + g \xi + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2) = \text{const.} \dots \dots \dots (24)$$

$$y=-d : \eta_t + U \eta_x = \phi_y \dots \dots \dots (25)$$

となる。前と同じように、 η および ξ の振幅は波長にくらべて非常に小さいと考えて、境界条件の非線型項を省略すると、Laplace の方程式 $\nabla^2\phi = \phi_{xx} + \phi_{yy} + \phi_{zz} = 0$ と境界条件式 (23)~(25) を満足する速度ポテンシャルは、 $a_t \ll aUk$ および $U_b \ll U$ の仮定のもとでは次式で与えられる。

$$\phi = Ux - \frac{Uk}{\beta} a \frac{\cosh \beta y + (F^2 k^2 d / \beta) \sinh \beta y}{\sinh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) \cosh \beta d} \times \cos k(x - U_b t) \cos lz \dots (26)$$

ただし、 $\beta = \sqrt{k^2 + l^2}$ 、 $F = U / \sqrt{gd}$ である。式 (22) の第1式と式 (26) とを式 (23) に代入すると、前と同じように、 $A_t \ll AUk$ の仮定のもとに、水面波とサンド・ウェーブの振幅比を与える関係式としての次式をうる。

$$\frac{A(t)}{a(t)} = - \frac{F^2 k^2 d / \beta}{[\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)] \cosh \beta d} \dots (26 \cdot a)$$

つぎに、流線方程式

$$\frac{dx}{\partial \phi / \partial x} = \frac{dz}{\partial \phi / \partial z} = \frac{dy}{\partial \phi / \partial y}$$

により、 $y = -d$ (平均河床面) における流線の形を求めるとつぎのようになる。

$$\frac{dx}{dz} = \frac{kl}{\beta} a \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \times \cos k(x - U_b t) \sin lz \dots (27)$$

任意の瞬間におけるこの流線と水底の形状とをあわせ示したものが 図-12 である。そこで、いま、この瞬間的な流線に沿って s 軸、それと直交して s' 軸をとると、 s 方向への流砂量は式 (11) と同様の式で表わされうはずであって、それはつぎのようである。

$$T_s = m \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(s - \delta, s', t)}{\partial s} \right] [\phi_s(s - \delta, s', t)]^4 \dots (28)$$

ただし、 T_s : s 方向への流砂量、である。サンド・ウェーブの振幅 a が小さいものとして、 a^2 以上の項を無視しながら、上式の T_s を x, z 方向への流砂量成分 T および T' に分解すると、

$$T = \bar{T} \cdot \left[1 + \alpha \frac{\partial \eta(x - \delta, z, t)}{\partial x} + \frac{4}{U} \frac{\partial \phi_1(x - \delta, -d, z, t)}{\partial x} + \dots \right] \dots (29)$$

$$T' = \bar{T} dz/dx \dots (30)$$

ただし、 $\bar{T} = mU^4$ 、 $\phi_1 = \phi - Ux$ 、である。

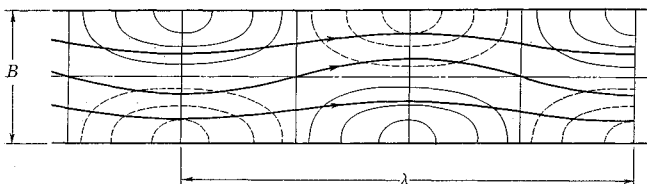


図-12 河床面上の流線

一方、河床面の変位と局所流砂量変化とを結ぶ関係式は

$$\eta_t + T_x + T' = 0 \dots (31)$$

上式に式 (29) および式 (30) を代入すると、

$$\frac{\partial \eta(x, z, t)}{\partial t} + \bar{T} \left[\alpha \frac{\partial^2 \eta(x - \delta, z, t)}{\partial x^2} + \frac{4}{U} \frac{\partial u(x - \delta, -d, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial x}{\partial x} \right] = 0 \dots (32)$$

この式に式 (21)、(26) および式 (27) の3式を代入し、2次元サンド・ウェーブのときに式 (12)、(13)、(14) を得たと同様の計算を行なうと次式をうる。

$$a(t) = a(0) \exp \left[\frac{mg^2 \alpha}{C} k^2 d^2 F^4 \left\{ C - 2 \frac{k^2 d}{\beta} F^2 \times \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)} \right\} t \right] \dots (33)$$

および

$$U_b = 4 mg^2 dk d F^4 \left[\frac{\alpha^2}{8C} k d F^2 \cdot \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{(\beta/k) \tanh \beta d - F^2 k d} \right] \left[1 + \frac{l^2}{4k^2} \right] \dots (34)$$

ただし、 C は式 (17) と同じである。

式 (33) から、同式中の中カッコ内が正であると、交互砂礫堆の振幅は時間的に増大することがみられる。そこで、2次元サンド・ウェーブのときと同様に、

$$\Gamma = C - 2 \frac{k^2 d}{\beta} F^2 \frac{1 - (F^2 k^2 d / \beta) \tanh \beta d}{\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta)}$$

とおくと、 $\Gamma < 0$ および $\Gamma > 0$ がそれぞれ3次元的攪乱に対する河床面の安定領域および不安定領域を与える。安定限界は $\Gamma = 0$ と $\tanh \beta d - (F^2 k^2 d / \beta) = 0$ とで与えられる。これらの式を F^2 に対する表現式に書き直すと、それぞれ

$$F^2 = \left\{ \frac{F_2 A^2}{F_1 A^2} \right\} = \frac{1}{4(k^2 d / \beta) \tanh \beta d} \times [C + 2 \pm \sqrt{(C + 2)^2 - 8C \tanh^2 \beta d}] \dots (35)$$

および

$$F^2 = F_{aA}^2 = \tanh \beta d / (k^2 d / \beta) = \frac{1}{kd} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{k} \right)^2} \tanh \left[\sqrt{1 + \left(\frac{l}{k} \right)^2} kd \right] \dots (36)$$

となる。

図-13, 14, 15 および 16 は、式 (35)、(36) の両式から計算されたそれぞれ $d/B = 0.02, 0.08, 0.10$ および 0.20 (ただし C の値はすべて $C = 2.0$) における交互サンド・ウェーブ発生領域である。式 (26.a) により $A/a < 0$ となるものを交互砂礫堆、 $A/a > 0$ となるものを交互反砂礫堆と定義

した。2次元サンド・ウェーブの場合（図-7, 8 および 9）とは異なって，交互砂礫堆の領域が F の小さい範囲から大きい範囲にまで連続してつながっているので，流速を0 からだんだんと増加させてゆくととき， $F > 1$ の範囲でも交互砂礫堆が発生して，交互反砂礫堆が発生しにくい理由がそこにみられる。

図-17, 18, 19 および 20 は，木下博士⁵⁾の実験資料

を筆者が整理し直したものである。同一の d/B の値に対して F をいろいろの値に変えての実験はなされていない（ F を変えると d/B の値も変わっている）ので，同博士の実験結果を d/B の値について4つのグループに大分けて，その各グループごとに図示した。この中で，図-14 と 図-19，および 図-15 と 図-20 とはほぼそれぞれで対応する組合せとなる。図-20 の実験

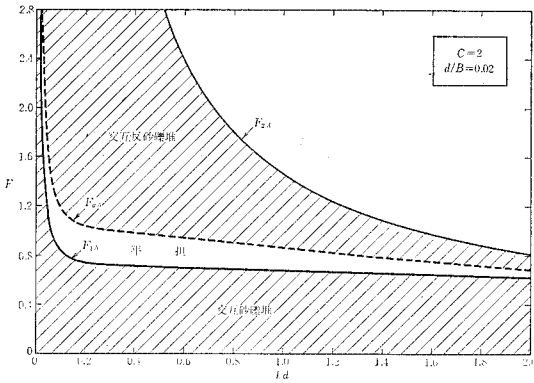


図-13 $C=2.0, d/B=0.02$ の場合の交互サンド・ウェーブの発生領域

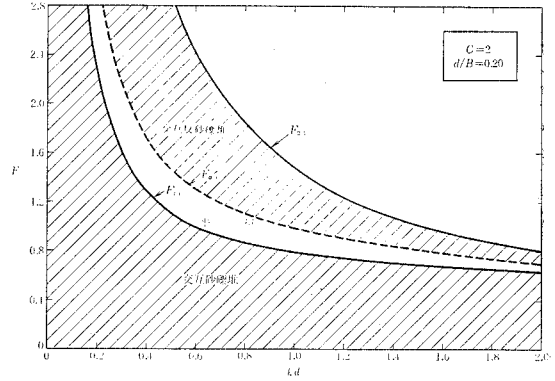


図-16 $C=2.0, d/B=0.20$ の場合の交互サンド・ウェーブの発生領域

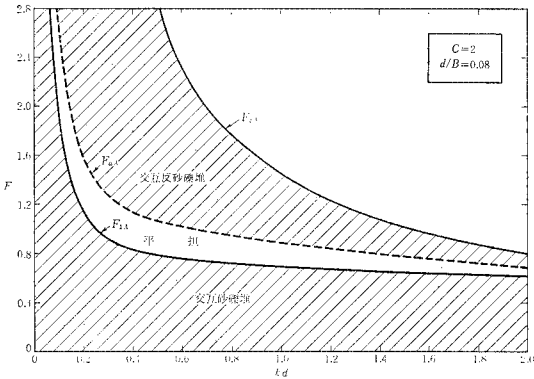


図-14 $C=2.0, d/B=0.08$ の場合の交互サンド・ウェーブの発生領域

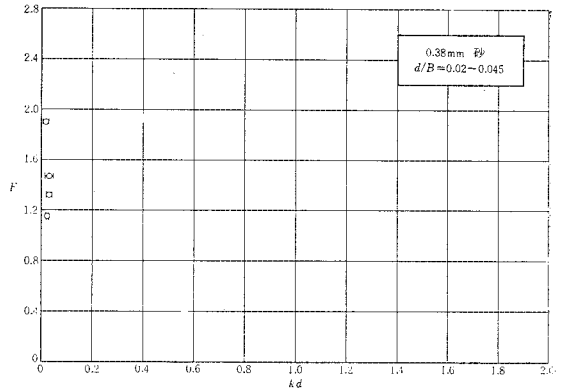


図-17 交互砂礫堆⁵⁾

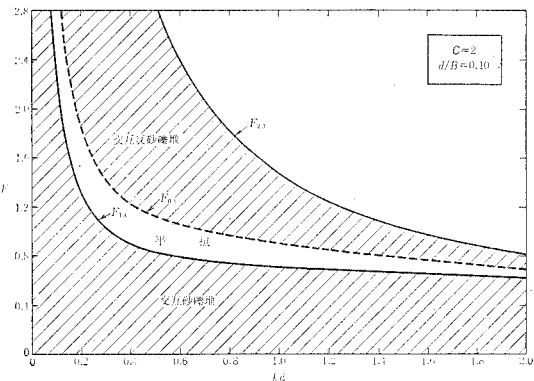


図-15 $C=2.0, d/B=0.10$ の場合の交互サンド・ウェーブの発生領域

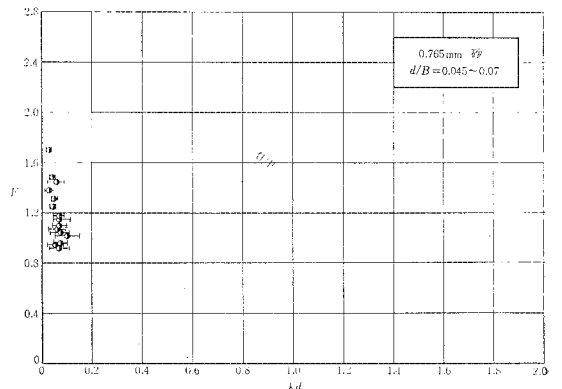


図-18 交互砂礫堆⁵⁾

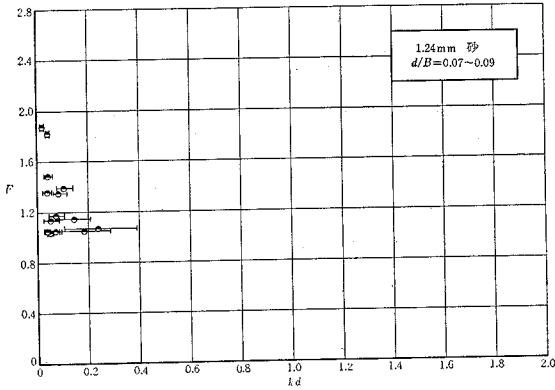


図-19 交互砂礫堆⁵⁾

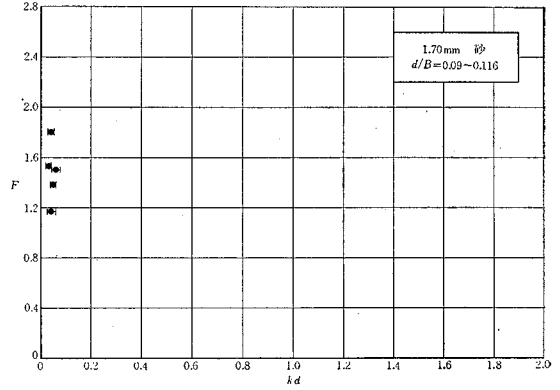


図-20 交互砂礫堆⁵⁾

結果は理論(図-15)と完全に合っていると見えよう。また、図-19の実験結果についても、その理論(図-14)との一致の度合は、やはりきわめてよいといえるものと思われる。

5. 理論結果の解釈

交互砂礫堆の発生領域については、前節における図-13~16と実験結果との対比から、理論は実験とかなりよく一致することが認められた。

いま、幅 B 、深さ d の帯状水域(図-5において河床を平坦にし、 $U=0$ とした場合に当る)の水面に

$$\xi = A \sin k(x-ct) \cos lz \dots\dots\dots(37)$$

の攪乱を与えた場合、この3次元表面波(short-crested waves)の伝播速度(x 方向)は次式で与えられる¹³⁾。

$$c^2 = \frac{g}{k} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{k}\right)^2} \tanh \left[\sqrt{1 + \left(\frac{l}{k}\right)^2} kd \right] \dots\dots\dots(38)$$

2次元表面波 $\xi = A \sin k(x-ct)$ の伝播速度は、周知のように

$$c^2 = (g/k) \tanh kd \dots\dots\dots(39)$$

であるから、3次元表面波の伝播速度式(38)は2次元表面波の伝播速度式(39)より大きくなる。いま、式(38)の波速に等しい流速 U に対する水流の Froude 数 F は、 $F^2 = U^2/gd = c^2/gd$ の関係から、

$$F^2 = \frac{1}{kd} \sqrt{1 + \left(\frac{l}{k}\right)^2} \tanh \left[\sqrt{1 + \left(\frac{l}{k}\right)^2} kd \right] \dots\dots\dots(40)$$

となるが、これは式(36)と一致する。流水の表面に波が定常波としてとどまりうるのは、流水の流速 U が遡上波の波速 c と等しい場合、すなわち、式(40)が成立する場合だけである。蛇行砂礫堆の波長についての実験値は、図-13~16と図-17~20の対比から認められるように、式(40)で与えられるものに近いことから、

砂礫堆は交互表面波(short-crested waves)の影響により生じているものとひとまず解釈される。交互表面波は互い違いの水面の隆起であるから、従来 Matthes¹⁴⁾ や Werner¹⁵⁾ が、そして最近 Anderson¹⁶⁾ が唱えているいわゆるセイシュ説がほぼ正しかったといえる。

しかし、水面の定常波だけではすぐ減衰してしまっ、交互砂礫堆を生ずるに至らないのは、ヴァイオリンの弦を爪ではじいてもすぐその振動が減衰してしまうのと同じことである。弦を弓で弾くことによりはじめてその間弦は鳴り続けるのであって、弓から弦にエネルギーが伝達される機構は、弦と弓との相対速度に対して、固体摩擦が“右下り”の特性をもつことによっている(図-21)。河川蛇行の場合にも、砂礫堆振幅を増幅させる

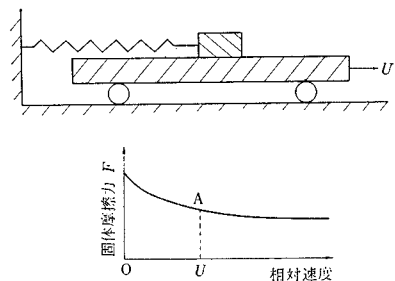


図-21 固体摩擦(物体はA点を中心にして振動する)

機構がなければ河床に砂礫堆は形成されず、砂礫堆がなければ水面の交互表面波は速かに減衰してしまうはずである。そして、この砂礫堆を増幅させる機構が、式(2)で表わされるような、流砂量の“非対称性”なのである。

6. 結 論

本研究の結果、直線水路の蛇行の成因について得られた結論のうち主なるものを示すとつぎのようである。

- 1) 河岸の交互浸蝕がなくても、蛇行は起こる。その

場合にはそれは河床の交互浸蝕によって起こされる。

- 2) 蛇行は式(2)あるいは式(28)で表現せられるような、局所流砂量の“非対称性”の機構を通して発生する。
- 3) 蛇行砂礫堆の発生領域は (F, kd) 面上で $0 < F < F_{1A}$ で与えられる。 F_{1A} は式(35)の第2式により与えられるものである。
- 4) 発生する蛇行砂礫堆の波長は 図—13~16 に示されるようであるが、ごく大ざっぱに言えば、その蛇行砂礫堆によって水流の表面に形成される3次元表面波 (short-crested waves) の波速が水流の平均流速と等しくなるような波長に近いものとなる。この意味で、蛇行の成因として従来一部に唱えられていた表面波説あるいはセイシュ説は部分的には正しいものであったといえることができる。

謝 辞: 本研究の理論的な部分の大部分は Institute of Hydraulic Research, The University of Iowa 滞在中に行なったものであって、研究の遂行に当っては同所において所長 J.F. Kennedy 博士より数々の有益な討議を与えられた。また、後に国内において、木下良作博士より多くの討議を戴いた。記して両博士に謝意を表す。

本研究における数値計算にはすべて高速電子計算機 HIPAC 103 を使用したが、これの使用には中大水理実験室川上克巳氏が当った。また、中央大学における実験の遂行には、当時大学院学生であった布本 博氏 (現在石川工業高等専門学校)、片山統雄氏 (現在新日本技術コンサルタント)、および中大実験講師今井 孝氏 らの協力を得たことを記して、これらの諸氏にも謝意を表す。

実験の遂行に当っては、昭和 42, 43 年度文部省科学研究費 (特定研究 土砂の流出, 流送による河川災害の基礎的研究 研究代表者 西畑勇夫教授) および 44 年度同研究費 (特定研究代表者 嶋 祐之教授) による補助

を受けた。記して謝意を表する次第である。

引用文献

- 1) 林 泰造: 河川蛇行性の理論, 土木学会第 24 回年次学術講演会講演集, 第 2 部, 昭和 43 年 9 月, pp. 381-384.
- 2) 林 泰造・川上克巳: 移動河床に生ずる二, 三の不安定現象, 土木学会第 13 回水理講演会講演集, 昭和 44 年 2 月, pp. 109-116.
- 3) Hayashi, T.: The formation of dunes and antidunes in open channels, Journal of Hydraulic Division, Proc. ASCE, February 1970, pp. 357-366.
- 4) 木下良作: 河床における砂礫堆の形成について, 土木学会論文集, 第 42 号, 昭和 32 年, pp. 1-21.
- 5) 木下良作: 石狩川河道変遷調査, 科学技術庁資源局資料第 36 号, 昭和 37 年.
- 6) 布本 博: 河川蛇行性の研究, 中央大学修士論文, 昭和 42 年.
- 7) Kennedy, John F.: The mechanics of dunes and antidunes in erodible-bed channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 16, Part 4, 1963, pp. 521-544.
- 8) Anderson, Alvin G.: The characteristics of sediment waves formed by flow in open channels, Proc. of the Third Midwestern Conf. on Fluid Mechanics, 1953, pp. 379-395.
- 9) Kennedy, John F.: The formation of sediment ripples, dunes, and antidunes, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, 1969.
- 10) Reynolds, A.J.: Waves on the erodible bed of an open channel, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 22, Part 1, 1965, pp. 113-133.
- 11) Callander, R. A.: Instability and river channels, Journal of Fluid Mechanics, Vol. 36, Part 3, 1969, pp. 465-480.
- 12) 足立昭平: 蛇行発生に関する微小振動の考察, 土木学会第 11 回水理講演会講演集, 昭和 42 年, pp. 19-24.
- 13) Fuchs, Robert A.: On the theory of short-crested oscillatory waves, in "Gravity Waves" edited by US Dept. of Commerce, National Bureau of Standards, 1951, pp. 187-200.
- 14) Matthes, G.H.: Basic aspects of stream meanders, Trans. AGU, Part 3, Vol. 22, 1941, pp. 632-636.
- 15) Werner, P.W.: On the origin of river meanders, Trans. AGU, Vol. 32, 1951, pp. 898-902.
- 16) Anderson, Alvin G.: On the development of stream meanders, Proc. Twelfth Congress of IAHR (Fort Collins), 1967, pp. 370-378.

(1970. 3. 30・受付)