

## トラスの非線型問題の数値解析

NUMERICAL ANALYSIS OF NONLINEAR PROBLEMS  
OF PIN-JOINTED TRUSSES吉 沢 孝 和\*  
By Norikazu Yoshizawa

## 1. ま え が き

構造解析における非線型問題は、一般に、材料固有の非線型特性を考慮する場合と、構造自体の有限変位を考慮する場合とにおいて生ずる。さらに、これら両者の影響を同時に考えなければならない場合もあり得るが、これは高度に複雑なものとなり、数値解析に依存せざるを得ないであろう<sup>1)</sup>。

構造材料の応力-ひずみ法則の非線型領域を考慮した研究は、はりおよび剛節構造物に関しては多く見受けられるが、ピン結合トラスに関するものは、比較的少ない現状である。これは、在来の塑性解析理論が主として鋼材料に注目し、その力学特性を理想化した弾塑性体<sup>2)</sup>として取り扱ってきたことに起因する<sup>3)</sup>。

近年に至って、J.E. Goldberg と R.M. Richard が応力-ひずみ曲線を Ramberg-Osgood の多項式で表示し、変形法<sup>4)</sup>と応力法<sup>5)</sup>とを用いてトラスの解析を行なっている。この方法は、軽金属等のごく単純で連続的な応力-ひずみ特性を有する材料については有効であるが、鋼材料の塑性硬化領域を考慮するような場合には、曲線形状が複雑となり、適用が不可能である。また、R.C. Hensley と J.J. Azar は、応力-ひずみ曲線を有限個数の折線要素を連続させて表示し、塑性領域に入ったトラス部材の応力解析に仮想力 (fictitious force) を設定してその値を補正していく反復法<sup>6)</sup>を提案した。応力-ひずみ曲線のこのような扱いかたは、材料特性を忠実に解析に導入できる点ですぐれており、コンピューター解析に適した手法と考えられる。ただし、この文献に示された解法によると、部材数と同数の仮想力を設定し、各荷重段階ごとにこれらの仮想力の値を反復演算で収束させなければならない点に能率上の問題を感じる。

構造物の変形の影響を考慮した有限変位問題に関する研究は、T.J. Poskitt<sup>1)</sup>、A. Jennings<sup>7)</sup>、S.A. Saafan<sup>8)</sup>、藤野・大坂<sup>9)</sup>、長谷川・成岡<sup>10)</sup>、大地・船木<sup>11)</sup>、後藤<sup>12)</sup>らの各氏により行なわれている。これらの研究はいずれも、材料の力学特性が線型法則で与えられるものとして展開されたものである。

材料の非線型特性とともに、系の有限変形を考慮した解法は、はりに関しては山崎・太田・後藤<sup>13)</sup>の各氏、平面骨組系に関しては堀井・川原<sup>14)</sup>の両氏によって提案されている。これらの解析理論は、応力-ひずみ曲線の特性を解析式に導入する手法として、いずれも非線型近似式を用いている。

構造用鋼材は一般に、その応力度が降伏点をこえてから極限強度に至るまでの間において、かなりの抵抗力を有する<sup>15),16)</sup>。したがって、鋼トラスの部材応力がこのような領域に入ってから解析に、完全弾塑性理論<sup>17)</sup>を適用することは、とくにトラスの耐荷能力の検討を行なう際に不自然さがある。このような場合には、解析にひずみ硬化領域の影響<sup>18),19)</sup>をとり入れることによって、より正確にトラスの挙動を論ずることができるものと考ええる。なお、鋼材の非線型特性を考慮するときには、降伏点における大きなひずみがともなうために、有限変位理論による検討<sup>20)</sup>がなされなければならない。

筆者は、材料の応力-ひずみ曲線の表示に文献 6) の思想をとり入れ、変形法を用いて微小変位理論および有限変位理論によるトラスの解析を行なった。ここに報告するのは、鋼材料でつくられたピン結合トラスの基本的な二、三の系の数値解析の結果である。その内容は、

- (a) 材料の力学特性がトラスの挙動におよぼす影響
- (b) トラスの耐荷能力の検討
- (c) 有限変位理論による検討

に大別される。計算は荷重漸増法<sup>21),22)</sup>を用いているが、とくに鋼材料の力学特性をとり扱う場合には、計算能率をたかめる上において、各種の考慮が必要である。な

\* 正会員 信州大学助手 工学部土木工学教室

お、非線型領域に入ったトラスの力学挙動を説明する都合から、二、三の用語を設定した。

## 2. 応力-ひずみ曲線

任意形状の応力-ひずみ曲線を、図-1 に示すように有限個数の線分を連続させてあらわす。要素線分の数に適当に多くとることにより、材料の特性を十分正確にあらわすことができる。この表示法はとくに、構造用鋼材の表示に適している。また、引張側と圧縮側とで異なる特性を有するような材料にも適用することができる。

図において、部材の応力度  $\sigma$  が、 $\sigma(i) < \sigma < \sigma(i+1)$  の範囲で規定されるとき、この部材の応力度は、応力領域 (i) または簡単に domain (i) であると定義する。

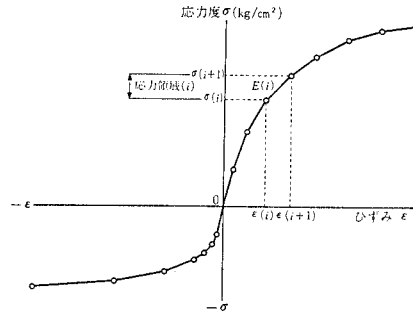
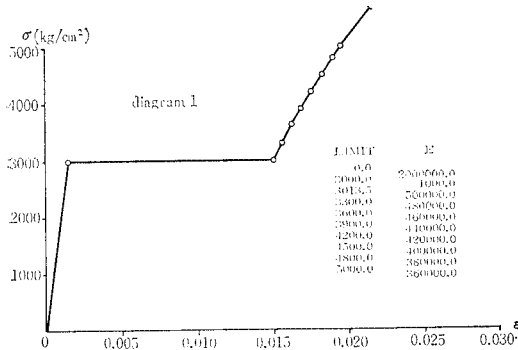
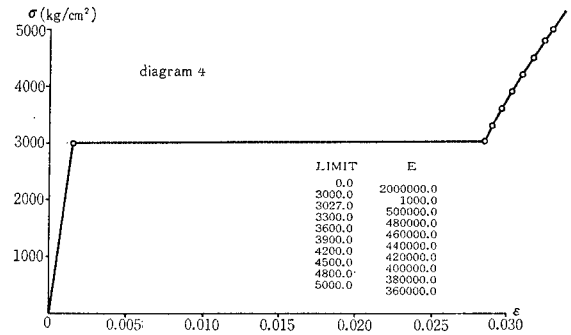


図-1 応力領域

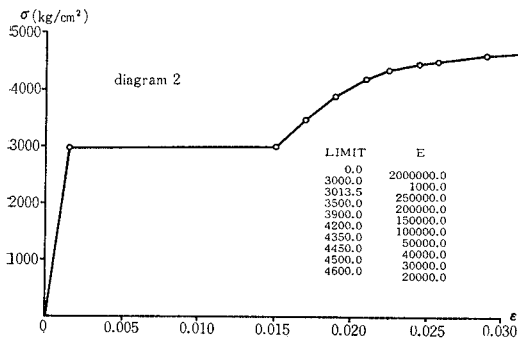
この領域においては、弾性係数は一定値  $E(i)$  で与えられる。また、応力値  $\sigma(i), \sigma(i+1), \dots$  に対応するひずみを  $\epsilon(i), \epsilon(i+1), \dots$  とする。応力領域は、引張側、圧縮側のそれぞれについて、応力-ひずみ曲線の原点から順



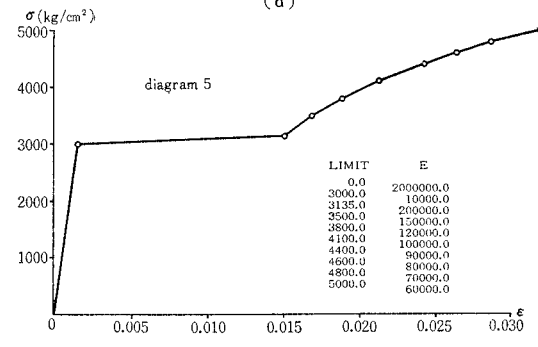
(a)



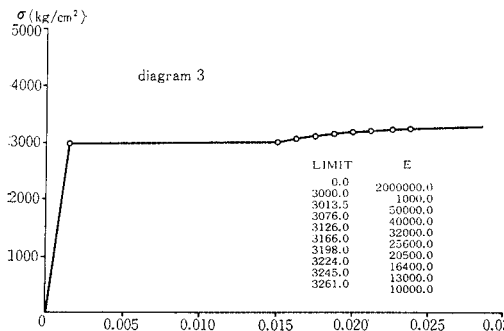
(d)



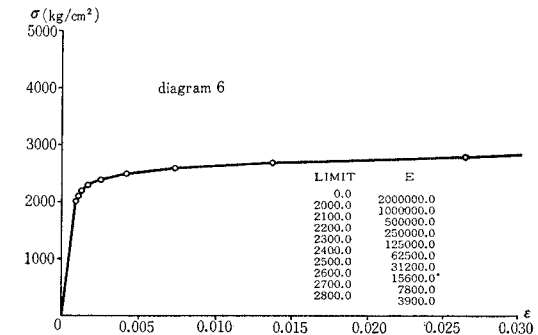
(b)



(e)



(c)



(f)

図-2 応力-ひずみ曲線

に, domain (1), domain (2),... と定める。

図-2 に本文の計算に用いた応力-ひずみ曲線を示す。図の中に示した数値の  $E$  は弾性係数, LIMIT は応力領域が変化する際の応力度で, いずれも  $\text{kg/cm}^2$  の単位である。diagram 1 は, 構造用鋼材の応力-ひずみ曲線の一般的な特性をあらわしたものである。降伏点を  $3000 \text{ kg/cm}^2$  とし, 実用的見地から下降伏点の山を取り除き, 降伏後の形状を材料に固有な下降伏点の水平部分にならしている。ひずみの値が  $1.5\%$  のときひずみ硬化領域に入り, そのときの弾性係数の値は  $500\,000 \text{ kg/cm}^2$  である<sup>23)</sup>。それ以後はひずみの増加とともに弾性係数の値は徐々に低下する。diagram 2 はひずみ硬化領域の曲線の傾斜を diagram 1 の  $1/2$  程度にとったもの, diagram 3 はこれを  $1/10$  程度にとったものである。また diagram 4 はひずみ硬化領域に入るときのひずみの値を, diagram 1 の  $2$  倍にとったものである。これらの曲線は, 応力-ひずみ曲線の形状がトラスの挙動におよぼす影響を検討する目的で用いるものである。また, diagram 5 は, 有限変位理論と微小変位理論との比較計算のために採用したものである。以上 5 個の応力-ひずみ曲線において, domain (1) は弾性領域, domain (2) は降伏領域である。降伏領域の弾性係数の値は, 他の領域のそれにくらべて非常に小さくとってある。domain (3) 以上はひずみ硬化領域である。diagram 6 は軽金属の特性をあらわしたもので, これは有限変位理論と微小変位理論とによる数値解析の比較のために用いている。ここに示した応力-ひずみ曲線はいずれも引張側のものであるが, 本文では, 圧縮側もこれと同一の特性を示すものと考えて計算を進めている。

### 3. 基本式

応力-ひずみ曲線を 図-1 のようにあらわした場合, ある部材 ( $r$ ) の応力度  $\sigma_r$  が  $\sigma(i) < \sigma_r < \sigma(i+1)$  の状態にあるものとすれば, その部材力はつぎのようにあらわされる:

$$F_r(i) = \left(\frac{A}{L}\right)_r E(i) \Delta L_r + [\sigma(i) - E(i)\varepsilon(i)] A_r \dots\dots\dots(1)$$

ここに,  $F_r(i)$ : 部材 ( $r$ ) の軸力, ( $i$ ) はこの部材が domain ( $i$ ) の応力領域にあることを示す,  $E(i)$ : domain ( $i$ ) の弾性係数,  $\sigma(i)$ : domain ( $i$ ) の応力度の下限,  $\varepsilon(i)$ : domain ( $i$ ) のひずみの下限,  $A_r$ : 部材 ( $r$ ) の断面積,  $L_r$ : 部材 ( $r$ ) の長さ,  $\Delta L_r$ : 部材 ( $r$ ) の伸びである。

図-3 は, 両端が節点 [ $r$ ] と節点 [ $r+1$ ] とにつながるトラス部材 ( $r$ ) を示す。部材の傾き角  $\phi_r$ , 節点変位

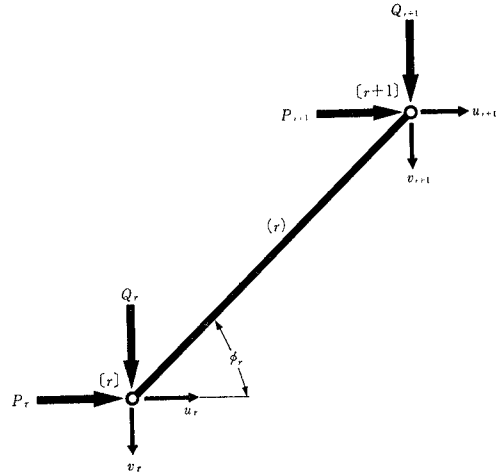


図-3 物理量の規約

$u, v$ , 節点荷重  $P, Q$  の正の方向を図のようにとる。微小変位理論による場合, 部材 ( $r$ ) の応力度が domain ( $i$ ) に入っているものとすれば, そのときの部材力  $F_r(i)$  はつぎのようにあらわされる:

$$F_r(i) = \left(\frac{A}{L}\right)_r E(i) [L \cos \phi_r \sin \phi_{\perp r} \{u, v\}_r + L \sin \phi_r \cos \phi_{\perp r} \{u, v\}_{r+1}] + [\sigma(i) - E(i)\varepsilon(i)] A_r \dots\dots\dots(2)$$

ここで,  $n$  個の部材で形成され, おこり得る節点変位の総数が  $m$  個となるようなトラス系を考えて, つぎのマトリクスを定義する。ただし, 部材 (1), (2), ..., ( $n$ ) の応力状態はそれぞれ, domain ( $\rho 1$ ), domain ( $\rho 2$ ), ..., domain ( $\rho n$ ) にあるものとする。

部材力マトリクス (force matrix) [ $n$  行  $\times$  1 列]<sup>24)</sup>

$$F = \{F_1(\rho 1), F_2(\rho 2), \dots, F_n(\rho n)\} \dots\dots\dots(3)$$

剛性マトリクス (stiffness matrix) [ $n$  行  $\times$   $n$  列]

$$S = \text{diag} \left\{ \left(\frac{A}{L}\right)_1 E(\rho 1), \left(\frac{A}{L}\right)_2 E(\rho 2), \dots, \left(\frac{A}{L}\right)_n E(\rho n) \right\} \dots\dots\dots(4)$$

変位マトリクス (displacement matrix) [ $m$  行  $\times$  1 列]<sup>24)</sup>

$$D = \{u_1, v_1, \dots, u_r, v_r, \dots, v_z\} \dots\dots\dots(5)$$

領域補正マトリクス (domain correction matrix) [ $n$  行  $\times$  1 列]

$$C = \begin{bmatrix} [\sigma(\rho 1) - E(\rho 1)\varepsilon(\rho 1)] A_1 \\ [\sigma(\rho 2) - E(\rho 2)\varepsilon(\rho 2)] A_2 \\ \dots\dots\dots \\ [\sigma(\rho n) - E(\rho n)\varepsilon(\rho n)] A_n \end{bmatrix} \dots\dots\dots(6)$$

荷重マトリクス (load matrix) [ $m$  行  $\times$  1 列]<sup>24)</sup>

$$L = \{P_1, Q_1, \dots, P_r, Q_r, \dots, Q_z\} \dots\dots\dots(7)$$

ここで, 与えられた系における部材の配置形態によって定義される  $n$  行  $m$  列の射影マトリクス (projection

matrix)  $P^{25)}$  を用いることにより, 部材力マトリクス  $F$  は変位マトリクス  $D$  の関数としてつぎのようにあらわされる :

$$F = SPD + C \dots \dots \dots (8)$$

また, トラスの各節点における力のつり合い条件はつぎのようにまとめられる :

$$L - P^T F = 0 \dots \dots \dots (9)$$

$P^T$  は  $P$  の転置を示す。式 (8), 式 (9) により, このトラスの解はつぎのように与えられる :

$$D = [P^T S P]^{-1} [L - P^T C] \dots \dots \dots (10)$$

上式で  $S = \text{const.}$  ( $E(\rho r) = E(1)$ ),  $C = 0$  とおくと, これはすべての部材力が弾性領域内にある場合の微小変位理論による解となる。

トラスの変形の影響を解析に導入する手法として, 本法では, 微小変位理論による解を初期値として反復計算を行ない, これを所定の精度に収束させて有限変位理論による解と考える<sup>10), 26)</sup>。

図-4 は, トラスの節点が載荷前の位置  $[r]$ ,  $[r+1]$  から載荷後には  $[r]'$ ,  $[r+1]'$  の位置に変位する状態を示す。部材 ( $r$ ) は, 載荷後にはその長さが  $L_r$  から  $L_r'$  になる。その伸び量  $\Delta L_r$  を節点変位の関数であらわし, これを二項展開して整理すれば次式が得られる :

$$\Delta L_r = L_r' - L_r = L_r \left[ \frac{R_r}{2} - \frac{R_r^2}{8} + \frac{R_r^3}{16} - \dots \right] \dots \dots \dots (11)$$

ここに,

$$R_r = \frac{2}{L_r} [L \cos \phi, \sin \phi]_r \{u, v\}_r + L \cos \phi, -\sin \phi]_{r+1} \{u, v\}_{r+1} + \frac{1}{L_r^2} [(u_r - u_{r+1})^2 + (v_r - v_{r+1})^2] \dots (12)$$

式 (12) を式 (11) に代入し, 節点変位  $u, v$  の一次の項を反復計算の ( $\eta$ ) 回目における変位 (未知量), 二次以上の項を反復計算の ( $\eta-1$ ) 回目で得られた変位 (既

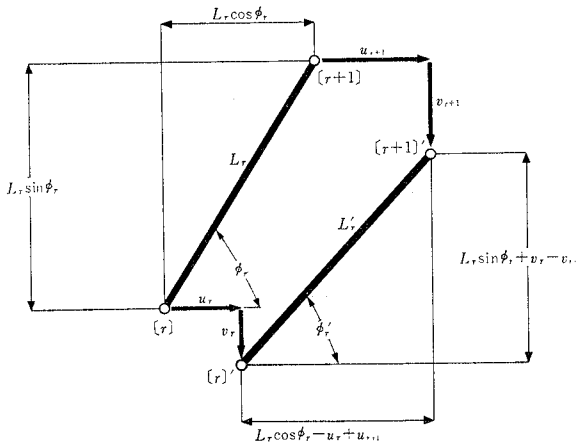


図-4 節点の有限変位

知量) と考え, 後者にはプライム記号をつけて区別することにすれば, 部材 ( $r$ ) の伸びはつぎのようにあらわされる。ただしこれは, 式 (11) において,  $R^2$  の項までをとった場合である。

$$\Delta L_r = L_r [-\cos \phi, \sin \phi]_r \{u, v\}_r + L_r [\cos \phi, -\sin \phi]_{r+1} \{u, v\}_{r+1} + B_r \dots (13)$$

ここに,

$$B_r = \frac{L_r}{2} \left[ B_2 - \frac{(B_1 + B_2)^2}{4} \right]_r \dots \dots \dots (14)$$

$$B_{1r} = \frac{2}{L_r} [L \cos \phi, \sin \phi]_r \{u, v\}_r' + L_r [\cos \phi, -\sin \phi]_{r+1} \{u, v\}_{r+1}' \dots \dots \dots (15)$$

$$B_{2r} = \frac{1}{L_r^2} [(u_r' - u_{r+1}')^2 + (v_r' - v_{r+1}')^2] \dots (16)$$

このときの部材力は, 式 (1) に式 (13) を代入して

$$F_r(i) = \left( \frac{A}{L} \right)_r E(i) [L \cos \phi, \sin \phi]_r \{u, v\}_r + L_r [\cos \phi, -\sin \phi]_{r+1} \{u, v\}_{r+1} + [\sigma(i) - E(i)\epsilon(i)] A_r \dots \dots \dots (17)$$

よって, 部材力マトリクス  $F$  は, 系の有限変位を考慮した場合, つぎのようにあらわされる :

$$F = SPD + SB + C \dots \dots \dots (18)$$

$B$  を形状補正マトリクス (geometry correction matrix) と呼ぶ。これは,  $n$  行 1 列の次数をもち, 系全体の変形の影響をあらわす項である。このマトリクスの各要素の値は, 初期値 0 から出発して, 反復計算の各段階で得られる節点変位の値により順次修正されていく。反復 ( $\eta$ ) 回目には, このマトリクスを記号的につぎのようにあらわす :

$$B(\eta) = \{B_1, B_2, \dots, B_r, \dots, B_n\}_\eta \dots \dots \dots (19)$$

つぎに, 力のつり合い条件を考える場合, 有限変位解析では, 部材の傾斜角の変化の影響を考慮する。したがって射影マトリクス  $P$  の各要素の値は, 反復計算の各段階において得られる節点変位によって修正されなければならない。 $(\eta)$  回目の計算に用いられる部材 ( $r$ ) の傾角  $\phi_r(\eta)$  は次式で与えられる :

$$\phi_r(\eta) = \tan^{-1} \left[ \frac{L_r \sin \phi_r + v_r' - v_{r+1}'}{L_r \cos \phi_r - u_r' + u_{r+1}'} \right] \dots \dots \dots (20)$$

$(\eta)$  回目の計算に用いる射影マトリクスを  $P(\eta)$  とあらわせば, この計算段階における節点変位  $D(\eta)$  はつぎのように与えられる :

$$D(\eta) = [P(\eta)^T S P]^{-1} [L - P(\eta)^T S B(\eta) - P(\eta)^T C] \dots \dots \dots (21)$$

$P(\eta)^T$  は  $P(\eta)$  の転置をあらわす。 $P(\eta)$  と  $B(\eta)$  とは, 変位マトリクス  $D(\eta-1)$  の関数である。計算は,  $D(\eta)$  の値が所定の精度に収束するまでくりかえす。

本文では, 微小変位理論による場合には式 (10)

を、有限変位理論による場合には式(21)を用いて解析を進める。なお、材料の非線型特性を解析に導入する手法<sup>21),22)</sup>としては、(i)系に全荷重を直接載荷して反復計算により解を収束させる方法<sup>9)</sup>、(ii)荷重を漸増させ、各荷重段階におけるひずみを補正する方法<sup>14)</sup>、(iii)荷重漸増の各段階における部材の応力度に対応して弾性係数を補正する方法<sup>3)</sup>等があるが、鋼材のような複雑な応力-ひずみ特性を有する材料の取り扱いには、(iii)の方法が最も確実<sup>3)</sup>なので、本文ではこれを採用している。また、実計算にあたっては、計算能率を考慮して各種の手法を用いたが、とくに、部材の応力度が降伏点に達したときの計算処理に注意を要した。

以下に示す計算例はいずれも、単純なピン結合トラスに関するものであるが、その結果から、トラスの非線型挙動の基本的な特性を知ることができる。なお、未知数が極度に多い長大径間のトラス橋などの解析では、与えられた系をトポロジカルな単位構<sup>24),27)</sup>の集合体と考えて、解析の手順をマトリクス演算子<sup>28)</sup>による漸化式<sup>29),30)</sup>に組み立て、低容量のコンピューターでも能率よく解析を進めることができる。

#### 4. トラスの抵抗形態

ここでは、応力-ひずみ法則が diagram 1 (図-2)で示されるような材料を用いた場合の各種の平面トラスの数値解析を示す。計算はつぎの条件で行なっている：

- (a) トラスは面内挙動をするものとし、微小変位理論を用いて解析する。
- (b) 節点荷重は荷重漸増法により、所定の荷重値に至るまで段階的に増加していく。
- (c) 引張材、圧縮材ともに極限応力は設定しない。
- (d) 荷重漸増にともなう各部材の力学挙動は、与えられた応力-ひずみ曲線の特性にしたがう。
- (e) 引張側と圧縮側の応力-ひずみ特性は同一と考える。

以上の条件で diagram 1 を用いて解析を行なうとき、材料の降伏点における力学特性の影響をうけて、荷重の漸増にともなう各部材の応力度が降伏点に達するたびに、与えられたトラス系において、外力に対する種々の抵抗形態<sup>3),20)</sup>を生ずる。その力学挙動を説明するために、トラス部材の応力状態に関してつぎの用語を定義する：

**弾性抵抗：**部材の応力度が降伏点以下の弾性領域内にあって外力に抵抗する状態。

**降伏状態：**部材の応力度が降伏点に達すると、そこからは一定の応力状態で、ひずみ硬化領域に達するまで変形が進んでいく状態。

**塑性抵抗：**部材の応力度がひずみ硬化領域に入ってから外力に対して抵抗する状態。

**弾性定力：**弾性抵抗の状態にあった部材が、他の部材が降伏状態に入ることにより、その時点からは漸増荷重の増分に関係なく一定の応力度を保つ状態。

**塑性定力：**塑性抵抗の状態にあった部材が、他の部材が降伏状態に入ることにより、その時点から荷重の増分を負担せずに、ひずみ硬化領域内にあって一定の応力度を保っている状態。

一般に荷重漸増解析において、ある部材の弾性定力または塑性定力の状態は、それに起因した降伏状態の部材のひずみが、ひずみ硬化領域に達するまで継続する。

#### (1) 2 格間不静定トラス

図-5 に 11 本の部材で形成される 2 格間のピン結合トラスの形状とその寸法を示す。部材はすべて同一断面積 (10 cm<sup>2</sup>) を有する。節点 [3] に垂直荷重  $Q_s$  をかけ、これを 0 から 200 000 kg まで漸増していったときの部材力と節点変位の値について、各部材の応力領域の変化する代表的な部分を表-1 に示す。部材力の項の( ) 中の数字は応力領域をあらわす。(1) は弾性領域、(2) は降伏領域、(3) 以上はひずみ硬化領域、(0) はひずみ硬化の最終領域である。表-1 の関係をグラフにあらわしたものが図-6 である。荷重の漸増にともなう、この系では 7 種類の抵抗形態を生ずる。これを図-7 に示す。

[漸増荷重と部材力の関係]

抵抗形態 A

すべての部材は弾性抵抗の状態にある。図-7 (a) では全部材を実線で描いてこれを示す。この段階では荷重と部材力との間に図-6 に示すような線形法則が成り立つ。

抵抗形態 B

引張材 (6) が降伏状態に入る。その影響で引張材

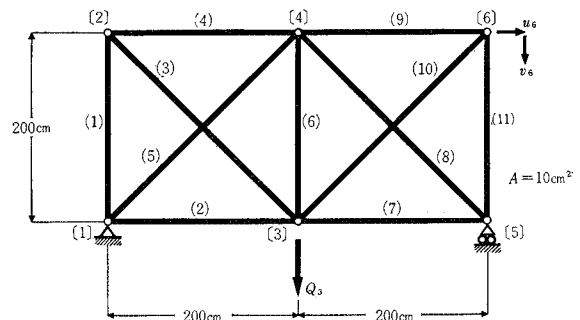


図-5 2 格間不静定トラス

(2), (7) と圧縮材 (5), (8) とが弾性定力の状態となり、これら5本の部材はこの段階においては荷重の増分を負担しなくなる。図-6の区間Bにおいて、これらの部材力のグラフが水平となり、他の部材力の勾配が急に

なってこれを補っている状況が観察できる。このことを構造的にみるならば、部材 (6), (2), (7), (5), (8) によって形成される山型トラスは、部材 (6) が降伏状態に達すると、トラスとしての機能を一次的に失ってし

表-1 2 格間不静定トラス (diagram 1)

$Q_3$ (kg)	$u_2$ (cm)	$v_3$ (cm)	$v_4$ (cm)	$F_1$ (kg)	$F_2$ (kg)	$F_3$ (kg)	$F_5$ (kg)	$F_6$ (kg)
66 000	0.330	0.871	0.572	-18 048 (1)	14 951 (1)	25 524 (1)	-21 145 (1)	29 903 (1)
66 500	0.332	0.881	0.574	-18 250 (1)	15 000 (1)	25 809 (1)	-21 213 (1)	30 000 (2)
72 250	0.361	1.020	0.574	-21 121 (1)	15 003 (1)	29 870 (1)	-21 218 (1)	30 007 (2)
72 500	0.362	1.026	0.574	-21 246 (1)	15 004 (1)	30 047 (2)	-21 219 (1)	30 007 (2)
73 000	0.365	3.597	0.584	-21 259 (1)	15 241 (1)	30 064 (2)	-21 554 (1)	30 482 (3)
74 000	0.370	3.656	0.603	-21 260 (1)	15 740 (1)	30 066 (2)	-22 260 (1)	31 481 (3)
76 000	0.380	3.775	0.641	-21 262 (1)	16 738 (1)	30 069 (2)	-23 671 (1)	33 476 (4)
82 000	0.410	4.147	0.755	-21 268 (1)	19 732 (1)	30 078 (2)	-27 905 (1)	39 463 (6)
85 000	0.425	4.340	0.813	-21 272 (1)	21 228 (1)	30 083 (2)	-30 021 (2)	42 456 (7)
85 500	0.427	6.452	2.921	-21 500 (1)	21 250 (1)	30 405 (3)	-30 053 (2)	42 501 (7)
90 000	0.450	6.752	3.222	-23 744 (1)	21 256 (1)	33 579 (4)	-30 060 (2)	42 512 (7)
100 000	0.500	7.463	3.931	-28 732 (1)	21 268 (1)	40 633 (6)	-30 078 (2)	42 537 (7)
102 750	0.514	7.669	4.137	-30 103 (2)	21 272 (1)	42 572 (7)	-30 083 (2)	42 544 (7)
103 250	1.589	9.806	6.245	-30 054 (2)	21 571 (1)	42 502 (7)	-30 507 (3)	43 143 (7)
105 000	1.692	9.996	6.353	-30 058 (2)	22 442 (1)	42 509 (7)	-31 737 (3)	44 883 (7)
110 000	1.999	10.563	6.666	-30 072 (2)	24 928 (1)	42 529 (7)	-35 253 (4)	49 885 (9)
120 250	2.676	11.819	7.356	-30 104 (2)	30 021 (2)	42 573 (7)	-42 456 (7)	60 042 (0)
121 000	4.618	13.136	8.668	-30 435 (3)	30 065 (2)	43 041 (7)	-42 519 (7)	60 131 (0)
140 000	6.402	14.971	10.331	-38 381 (5)	31 619 (3)	54 279 (0)	-44 716 (7)	63 238 (0)
160 000	6.840	16.328	11.183	-43 833 (7)	36 167 (5)	61 989 (0)	-51 148 (0)	72 334 (0)
180 000	7.315	12.740	12.093	-49 316 (9)	40 683 (6)	69 744 (0)	-57 535 (0)	81 367 (0)
200 000	7.830	19.187	13.030	-54 727 (0)	45 273 (8)	77 396 (0)	-64 025 (0)	90 545 (0)

$F_1=F_4=F_9=F_{11}$ ,  $F_2=F_7$ ,  $F_3=F_{10}$ ,  $F_5=F_8$

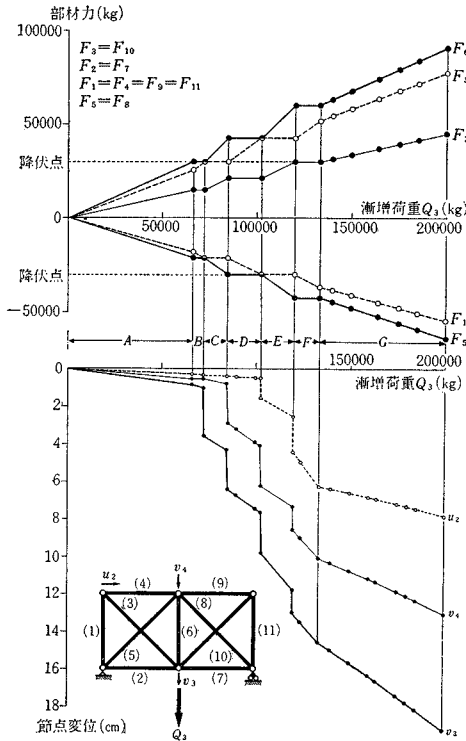


図-6 2 格間不静定トラス (漸増荷重と部材力、節点変位との関係)

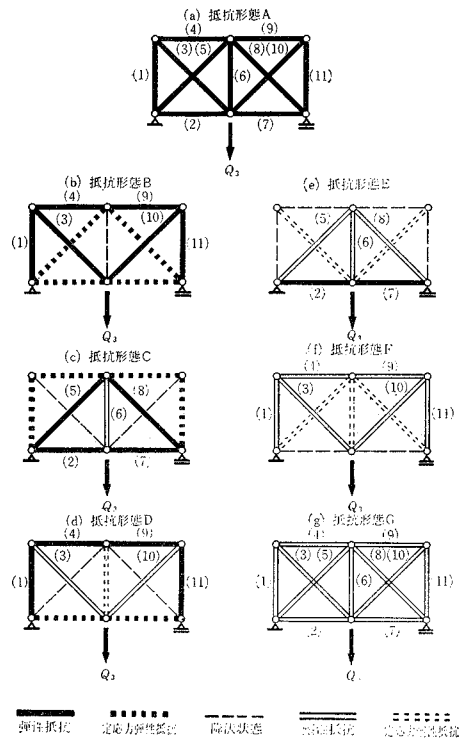


図-7 2 格間不静定トラス (抵抗形態)

まうために、他の4本の部材は、この時点で一定の応力状態を保つことになる。荷重の増分は残りの部材(3), (10), (1), (4), (9), (11)によって形成される門型トラスによって負担される。このトラスは、図-5のような載荷条件に対して安定である。図-7(b)では、降伏状態の部材を細い破線で、弾性定力状態にある部材を太い点線で示している。

#### 抵抗形態 C

抵抗形態Bにおいて、引張材(3), (10)が降伏状態に入ると、この系は一次的に不安定となり、節点[3]が垂直下方に大きく変位する。この変位は部材(6)の応力度をひずみ硬化領域に到達させる結果、以後の荷重の増分は山型トラスを形成する5本の部材によって負担され、門型トラスを形成する6本の部材のグループは、一時休止状態に入る。図-7(c)にこの形態を示す。ここでは部材(6)の塑性抵抗状態を2本の平行線で描く。

材料のひずみ硬化領域での抵抗を期待しない完全弾塑性理論による場合には、部材(3), (10)が降伏状態に入ると、このトラスは崩壊することになる。そのときの荷重の値は表-1から $Q_3=72\,500\text{ kg}$ である。

#### 抵抗形態 D

圧縮材(5), (8)が降伏点に達すると、節点[3], [4]が下方に大きく変位する。その結果、部材(3), (10)がただちにひずみ硬化領域に入って図-7(d)のような抵抗形態を生ずる。部材(6)は塑性定力状態となり、これを2本の平行点線であらわす。

#### 抵抗形態 E

門型を形成する部材(1), (4), (9), (11)が同時に降伏点に達すると、ただちに部材(5), (8)がひずみ硬化領域に入り、図-7(e)の抵抗形態となる。部材(3), (10)は塑性定力状態である。

#### 抵抗形態 F

部材(2), (7)が降伏点に達すると、上記の4本の門型構成部材がひずみ硬化領域に入って図-7(f)に示すような抵抗形態を生ずる。

#### 抵抗形態 G

最後に、部材(2), (7)がひずみ硬化領域に入ると、図-7(g)のように全部材が塑性抵抗の状態となり、外力の増分は抵抗形態Aにおけると同様に、全部材に配分される。したがって、図-6の各部材力のグラフの区間Gにおける勾配は、区間B~Fにおいて荷重の増分を負担しているときの勾配よりもゆるやかになっている。

この計算に用いた diagram 1 のひずみ硬化領域における弾性係数の値は比較的大きな値を示しているの、漸増荷重と部材力との関係は図-6に示すような顕著な階段性を示している。同様の計算を diagram2, diagram

3 を用いて行なうと、この階段の長さは次第に短くなる傾向を示す。

#### 【漸増荷重と節点変位の関係】

図-6の下側のグラフは、漸増荷重と節点[2]の水平変位、節点[3], [4]の垂直変位との関係をあらわす。

$Q_3 \approx 66\,500\text{ kg}$  で部材(6)が降伏点に達し、抵抗形態Bが生ずるので、節点[3]の垂直変位は前よりも増加しやすくなる。一方、節点[4]の垂直変位は区間Bでは荷重の増分に関係なくほぼ一定値を示す。これは上弦材(4), (9)が一直線上にあって1本の圧縮材として作用していることと、部材(6)が自由に伸びる状態にあることによる。

$Q_3 \approx 72\,500\text{ kg}$  で引張材(3), (10)が降伏点に達するため、節点[3]が大きく垂直下方に変位して、部材(6)のひずみをひずみ硬化領域に到達せしめ、抵抗形態Cを生ずる。

$Q_3 \approx 85\,000\text{ kg}$  で圧縮材(5), (8)が降伏点に達し、節点[3], [4]に大きな変位を生ずる。この変位は部材(3), (10)に大きなひずみを与える結果となり、これらの部材がひずみ硬化領域に入って抵抗形態Dを生ずる。

$Q_3 \approx 102\,750\text{ kg}$  で門型構成部材(1), (4), (9), (10)が降伏点に達する。これにより節点[2]も水平方向に大きく変位する。ここで部材(5), (8)がひずみ硬化領域に入って抵抗形態Eとなる。

$Q_3 \approx 120\,250\text{ kg}$  で下弦材(2), (7)が降伏点に達し、各節点はふたたび大きく変位して抵抗形態Fを生ずる。

$Q_3 \approx 136\,000\text{ kg}$  で部材(2), (7)がひずみ硬化領域に入る。これ以後の荷重の増分は全部材に配分されるため、グラフの勾配はいずれも前段階よりも急になり、その形状は計算に用いた応力-ひずみ曲線の形状と同一の特性を示す。

## (2) 3 格間ワーレントラス

図-8に示した3格間ワーレントラスは、各部材とも部材長200 cm、断面積 $10\text{ cm}^2$ である。節点[3]に垂直荷重 $Q_3$ をかけ、これを0から100 000 kgまで漸増していったときの部材力と節点変位の変化の状況を図-9に示す。この系でも、降伏点における部材の大きな変形の影響で、図-10に示すような順序で各種の抵抗形態が出現する。

図-9の部材力のグラフに見るように、一般に静定トラスにおいては、系を構成する各部材の応力度が順次降伏点に達しても、グラフは最後まで線型性を保持する。これは、静定トラス系では、部材が1本でも欠ければ力学系として存在し得ないことによる。したがってこのような系では、図-9の節点変位のグラフに見るように、部材の応力度が降伏点に達するたびに大き節点変位を生

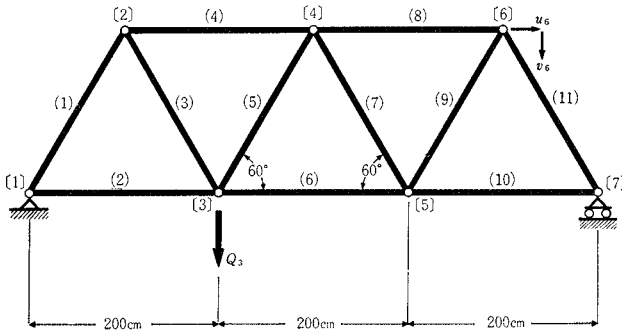


図-8 3 格間ワーレン トラス

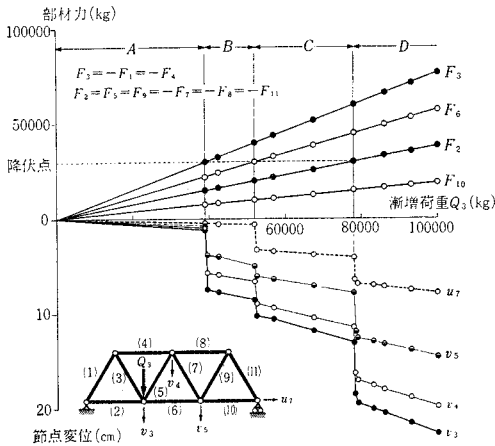


図-9 3 格間ワーレントラス (漸増荷重と部材力, 節点変位の関係)

じ、その部材のひずみをただちにひずみ硬化領域に到達せしめて、系としての抵抗性を確保するという特性を有している。

5. 材料特性とトラスの挙動

一般に、構造材料の力学特性は応力-ひずみ曲線の形状によってあらわされる。本節では、図-2 に示すような各種の応力-ひずみ曲線を用い、4. の場合と同一の条件で解析を進めたときのトラスの力学挙動について報告する。取り扱った系は、図-11 に示すような3本の部材で構成されるトラスで、節点に垂直方向に漸増荷重  $Q$  をかけている。

外力に対する抵抗形態は、この系ではいずれの diagram を用いた場合でも、図-12 に示す順序で変化していく。すなわち、最初は全部材が弾性領域内にある (形態 A)。まず部材 (3) が降伏状態に入ると、部材 (1) は弾性定力の状態となり、荷重の増分は部材 (2) に集中する (形態 B)。つぎに部材 (2) が降伏点に達すると、節点に大きな変位を生じ、ただちに部材 (3) がひずみ硬化領域に入って、弾性抵抗の部材 (1) とともに

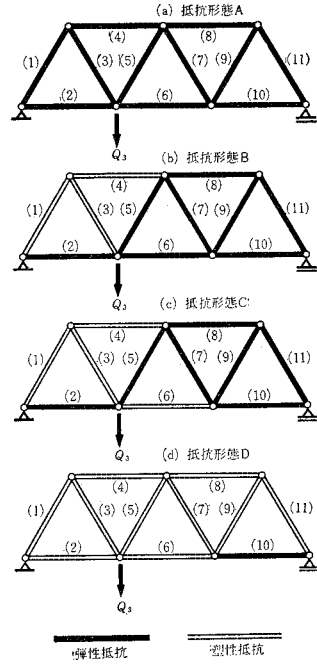


図-10 3 格間ワーレントラス (抵抗形態)

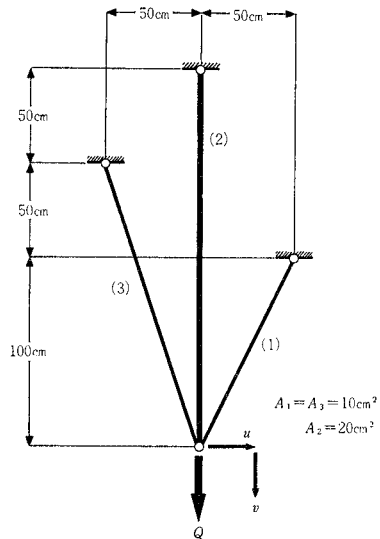


図-11 3 本部材トラス

外力に抵抗する (形態 C)。この状態で部材 (1) が降伏点に達すると、節点はふたたび大きく変位する。とくに水平変位はいままでとは逆の左方向に生じ、部材 (1) がひずみ硬化領域に入るため、部材 (2) は荷重増分を負担しない (形態 D)。最後に部材 (2) がひずみ硬化領域に入り、全部材が塑性抵抗状態となる (形態 E)<sup>20)</sup>。

(1) 材料の降伏点におけるひずみ特性の影響<sup>20)</sup>

ここでは、鋼材の降伏点において生ずるひずみの大小



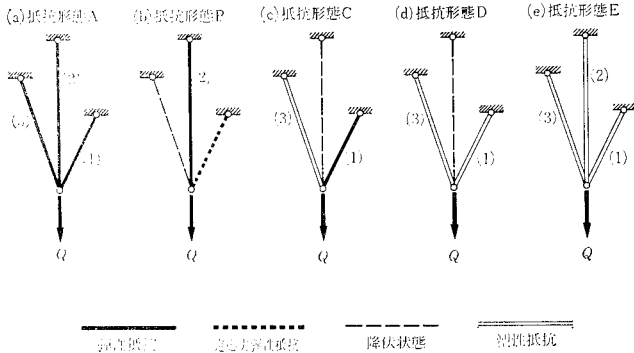


図-12 3 本部材トラスの抵抗形態

がトラスの挙動におよぼす影響について述べる。図-2 の diagram 1 と diagram 4 とは、弾性領域およびひずみ硬化領域における形状は同一であるが、降伏点でのひずみの量は diagram 4 のほうが約 2 倍の大きさを有する。それぞれの diagram を用いて 図-11 の 3 本部材トラスを荷重漸増法で解析した結果を 図-13、図-14 にグラフで示す。

各部材が降伏点に達するときの部材力は、部材 (1)、(3) では 30 000 kg、部材 (2) では 60 000 kg である。部材 (3) が最初に降伏点に達して抵抗形態 B を生じ、つぎに部材 (2) が降伏点に達する手前までのグラフの形状は両者とも同一である。部材 (2) が降伏状態にな

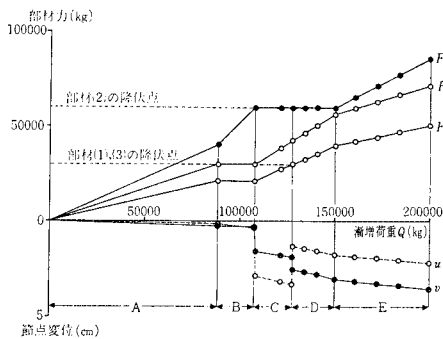


図-13 3 本部材トラス (diagram 1 による場合)

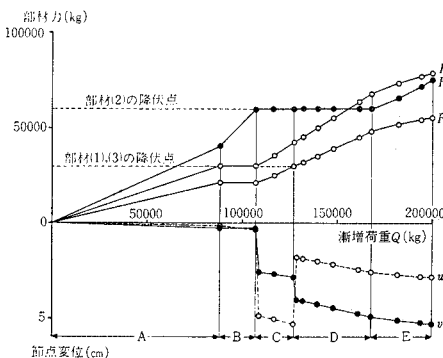


図-14 3 本部材トラス (diagram 4 による場合)

ると、節点に大きな変位を生ずる。この変位は部材 (3) がひずみ硬化領域に到達するまで続くため、diagram 4 による場合のほうが大きくあらわれている。つぎに部材 (1) が降伏点に達した時点で、ふたたび大きな節点変位を生ずる。この場合にも上と同様のことがいえる。

部材力の変化の状態はこの時点までは両者ともほぼ一致している。抵抗形態 D は、部材 (2) のひずみがひずみ硬化領域に到達するまで継続することになるが、ここで両者のグラフの特性が異なってくる。diagram 1 による場合には、部材力はつねに  $F_1 < F_3 < F_2$  の関係にあるが、diagram 4 による場合には、抵抗形態 D において  $F_3 > F_2$  の状態があらわれる。そして部材 (1)、(3) への荷重の配分は diagram 1 の場合よりも大きくなる。これは、diagram 4 のほうが降伏状態が長く継続する特性に起因するものである。

(2) 材料のひずみ硬化領域における特性の影響<sup>20)</sup>

図-2 の diagram 1, 2, 3 は、弾性領域と降伏領域では同一の形状を有するが、ひずみ硬化領域での形状がそれぞれ異なっている。これらを用いて 図-11 のトラスを解析した結果を 図-13、図-15、図-16 に示す。

部材 (3) が降伏点に達し、ひきつづき部材 (2) が降伏点に達して節点が大きく変位することによって、部材 (3) がひずみ硬化領域に入り、抵抗形態 C を生ずるまでのグラフの形状は、どの diagram を用いたものも同一

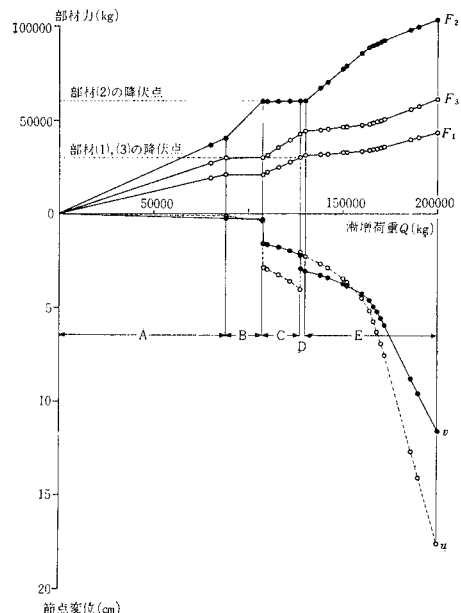


図-15 3 本部材トラス (diagram 2 による場合)

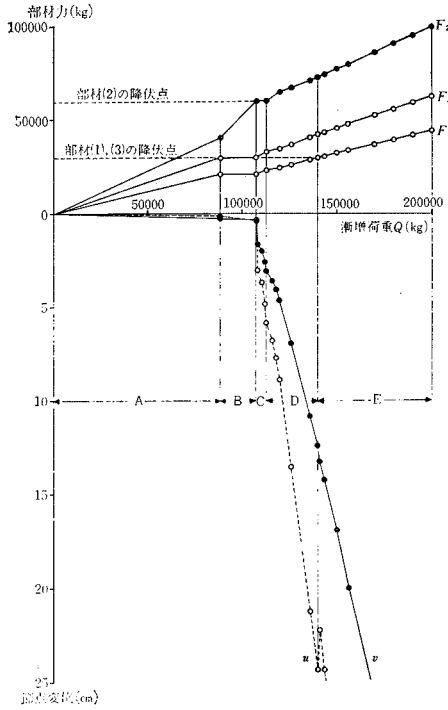


図-16 3 本部材トラス (diagram 3 による場合)

の結果である。

抵抗形態Cにおける力学挙動は diagram の形状に大きく支配される。ここでは、部材(1)の弾性抵抗、部材(3)の塑性抵抗が荷重の増分を負担する。 $F_2$ のグラフの水平部分は部材(2)が荷重増分を負担しない範囲を示し、diagram 1 による場合を1とすれば、diagram 2 では0.44, diagram 3 では0.10である。また、節点変位はひずみ硬化領域での diagram の勾配のゆるいものほど大きく、その形状は diagram の形状に類似している。

また、diagram 3 の場合には、部材(2)が塑性抵抗に入ったのちに、部材(1)が降伏点に達する。これは部材(3)の塑性抵抗が低いことによるものである。この場合には、図-12の抵抗形態Dは、部材(1)が太い実線、部材(2)が2本平行実線となる。

全部材が塑性抵抗に入ってからトラスの挙動は、diagram の形状に大きく支配される。とくに図-15は diagram 2 の特性が顕著にあらわれている。

### 6. トラスの耐荷能力<sup>20)</sup>

トラス部材の応力度が極限值に達すると、その部材は破壊する。この条件を数値計算に導入する手法として、本文では、漸増荷重がある部材に極限応力を与えるような値に至ったならば、その時点で荷重を一定にしてお

き、極限状態にある部材の断面積または剛度を0にするという考え方で計算を進める。

このようにすると、系から除外される部材がその時点まで負担してきた荷重の分担量が他の部材に再配分される。この再配分が行なわれても、他のすべての部材の応力度が配分前の個々の応力領域内にとどまるような場合には、除外する部材の剛度を直接0におとしても正しい結果を得ることができるが、再配分によって他の応力領域に入るような部材が1本でもあるときには、計算の結果が収束しないことがある。このような場合には、部材の剛度または断面積を徐々に減少させ、最終的に0に近づけていけば所期の目的が達せられる。この手法を剛度漸減法<sup>20)</sup>と呼ぶ。トラス部材の剛度を  $k=AE(i)/L$  で定義し、ある部材の剛度  $k$  を削減して  $k'$  としたとき、その削減率 (reduction ratio) を  $R.R.=k'/k$  であらわす。

#### (1) 材料の線型領域内の剛度漸減解析

荷重漸増解析のある荷重状態において、トラスのすべての部材が弾性抵抗の状態とする。この時点で系の中のある部材の応力度が極限応力に達したものと考えて、これを系から削除する。削除後も、他のすべての部材の応力度が弾性領域内にとどまるような場合には、剛度を直接0におとしても、漸減して0に近づけても同一の結果を得る。またこれは、削除部材が当初から存在しない系を単独に解いた場合と一致する<sup>20)</sup>。

#### (2) 材料の非線型領域を考慮した剛度漸減解析

図-17は5本の部材が一点でピン結合されたトラスである。材料の力学特性は diagram 1 にしたがう。節点に水平荷重  $P$  をかけて漸増させる。ここでは簡単のため、 $P$  が80000 kgに達したとき圧縮材(1)が座屈を生ずるものとする。 $P=80000$  kgの状態部材(1)の剛度を漸減していったときの計算結果を表-2に示す。数値的には剛度削減率  $R.R.=0.00000045$  で  $F_1=0$  となるが、実用的には  $R.R.=0.0001$  まで下げれば十分

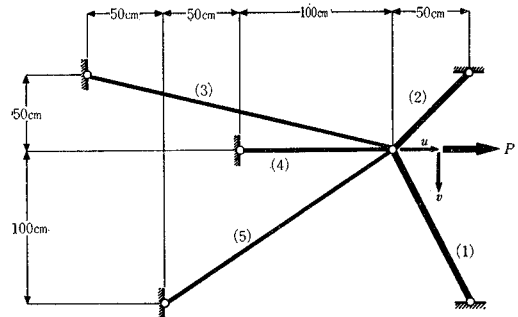


図-17 5 本部材トラス

表-2 剛度漸減解析 (diagram 1, 5 本部材系~4 本部材系)

( $P=80\,000\text{ kg}$ )

R.R.	$u$ (cm)	$v$ (cm)	$F_1$ (kg)	$F_2$ (kg)	$F_3$ (kg)	$F_4$ (kg)	$F_5$ (kg)
1.00	0.118	0.033	-29 386	-34 263 (1)	11 905 (1)	23 665 (1)	8 912 (1)
0.50	0.142	0.073	-23 049	-27 573 (1)	15 083 (1)	28 398 (1)	8 611 (1)
0.41	0.150	0.086	-20 987	-25 397 (1)	16 116 (1)	29 938 (1)	8 513 (1)
0.40	0.150	0.088	-20 782	-25 181 (1)	16 219 (1)	30 090 (2)	8 503 (1)
0.39	0.151	0.089	-20 678	-25 087 (1)	16 401 (1)	30 000 (2)	8 535 (1)
0.38	0.153	0.091	-20 536	-24 946 (1)	16 555 (1)	30 000 (2)	8 551 (1)
0.37	0.156	0.094	-20 248	-24 662 (1)	16 866 (1)	30 000 (2)	8 585 (1)
0.18	0.202	0.153	-14 953	-19 445 (1)	22 580 (1)	30 005 (2)	9 196 (1)
0.092	0.246	0.210	- 9 818	-14 385 (1)	28 122 (1)	30 010 (2)	9 789 (1)
0.085	0.251	0.216	- 9 282	-13 857 (1)	28 701 (1)	30 010 (2)	9 851 (1)
0.071	0.261	0.229	- 8 139	-12 731 (1)	29 934 (1)	30 011 (2)	9 983 (1)
0.069	0.262	0.230	- 8 018	-12 612 (1)	30 065 (2)	30 011 (2)	9 997 (1)
0.065	0.276	0.245	- 7 998	-12 271 (1)	30 000 (2)	30 013 (2)	10 370 (1)
0.060	0.293	0.264	- 7 900	-11 789 (1)	30 002 (2)	30 014 (2)	10 829 (1)
0.050	0.336	0.309	- 7 662	-10 602 (1)	30 004 (2)	30 019 (2)	11 958 (1)
0.040	0.395	0.372	- 7 330	- 8 954 (1)	30 008 (2)	30 024 (2)	13 526 (1)
0.030	0.482	0.465	- 6 843	- 6 539 (1)	30 013 (2)	30 033 (2)	15 823 (1)
0.020	0.626	0.620	- 6 035	- 2 520 (1)	30 021 (2)	30 048 (2)	19 645 (1)
0.016	0.713	0.713	- 5 545	- 83 (1)	30 027 (2)	30 056 (2)	21 964 (1)
0.015	0.746	0.748	- 5 361	832 (1)	30 029 (2)	30 060 (2)	22 834 (1)
0.010	0.906	0.919	- 4 467	5 272 (1)	30 038 (2)	30 076 (2)	27 058 (1)
0.0078	1.014	1.035	- 3 861	8 286 (1)	30 045 (2)	30 086 (2)	29 924 (1)
0.0077	1.018	1.039	- 3 838	8 399 (1)	30 045 (2)	30 087 (2)	30 031 (2)
0.0037	2.081	2.102	- 3 705	8 533 (1)	30 108 (2)	30 193 (3)	30 016 (2)
0.0018	1.564	1.592	- 1 399	11 454 (1)	30 077 (2)	33 326 (4)	30 008 (2)
0.00046	1.593	1.625	- 357	12 772 (1)	30 079 (2)	34 722 (4)	30 009 (2)
0.00023	1.598	1.630	- 179	12 997 (1)	30 079 (2)	34 960 (4)	30 009 (2)
0.00012	1.601	1.633	- 90	13 110 (1)	30 080 (2)	35 080 (4)	30 009 (2)
0.000058	1.602	1.635	- 45	13 167 (1)	30 080 (2)	35 140 (4)	30 009 (2)
0.000028	1.603	1.635	- 22	13 195 (1)	30 080 (2)	35 170 (4)	30 009 (2)
0.000014	1.603	1.636	- 11	13 209 (1)	30 080 (2)	35 185 (4)	30 009 (2)
0.0000072	1.603	1.636	- 6	13 216 (1)	30 080 (2)	35 193 (4)	30 009 (2)
0.0000036	1.603	1.636	- 3	13 220 (1)	30 080 (2)	35 196 (4)	30 009 (2)
0.0000009	1.603	1.636	- 1	13 222 (1)	30 080 (2)	35 199 (4)	30 009 (2)
0.0000005	1.603	1.636	0	13 223 (1)	30 080 (2)	35 200 (4)	30 009 (2)

とみてよい<sup>20)</sup>。部材 (1) が除去される影響で、部材 (3), (4), (5) の応力度は、当初の弾性抵抗から降伏点以上の応力領域に達する。部材 (2) の応力度は弾性領域内にはあるけれども、圧縮状態から引張状態にかわるといふ複雑な挙動を示す。これは剛度削減の途中で、節点変位の関係が  $u > v$  から  $u < v$  となるためである。図-18 は 表-2 の部材力の変化をグラフにあらわしたものである。剛度削減率は対数目盛にとってある。

5 本部材系から 4 本部材系になると、すべての部材が引張材として外力に抵抗する。その応力度はこの時点ではいずれも極限応力 ( $5\,000\text{ kg/cm}^2$ ) に達していない。したがって、系としてはこれ以上の荷重増分にも耐えうるものと判断する。

この系に対して、節点荷重  $P$  を  $80\,000\text{ kg}$  からさらに漸増していったときの計算結果を表-3 に示す。漸増荷重が  $95\,000\text{ kg}$  に達すると部材 (4) の応力度が極限值をこえる。ここでこの部材が削除されることになる。

表-4 は節点荷重  $P=95\,000\text{ kg}$  の状態で部材 (4) の剛度を漸減して、4 本部材系から部材 (2), (3), (5) で形成される 3 本部材系に変換するときの計算結果であ

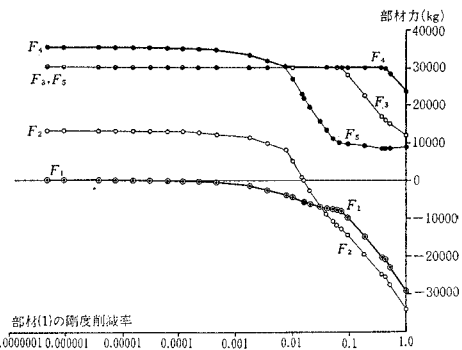


図-18 剛度漸減解析 (diagram 1, 5 本部材系~4 本部材系)

る。そのグラフを図-19 に示す。部材 (4) 削除の影響は、直接部材 (3) にかかり、 $R.R.=0.21$  ではすでにその極限值をこえてしまう。したがって計算はこの時点で打ち切り、つぎは、部材 (2), (3), (5) で形成される 3 本部材系から部材 (3) を削除することになるが、参考のため、表-4 と 図-19 には  $F_4=0$  になるまでの計算の結果を示した。

表-3 荷重漸増解析 (diagram 1, 4 本部材系)

P(kg)	u(cm)	v(cm)	F <sub>2</sub> (kg)	F <sub>3</sub> (kg)	F <sub>4</sub> (kg)	F <sub>5</sub> (kg)
80 000	1.603	1.636	13 223(1)	30 080(2)	35 200(4)	30 009(2)
81 000	1.624	1.657	13 223(1)	30 081(2)	36 199(5)	30 009(2)
84 000	1.689	1.722	13 223(1)	30 085(2)	39 194(6)	30 010(2)
87 000	1.757	1.791	13 222(1)	30 089(2)	42 188(7)	30 011(2)
90 000	1.829	1.862	13 222(1)	30 093(2)	45 183(8)	30 012(2)
93 000	1.904	1.937	13 221(1)	30 097(2)	48 177(9)	30 013(2)
95 000	1.957	1.990	13 221(1)	30 100(2)	50 173(0)	30 014(2)

表-4 剛度漸減解析 (diagram 1, 4 本部材系~3 本部材系) (P=95 000 kg)

R.R.	u(cm)	v(cm)	F <sub>2</sub> (kg)	F <sub>3</sub> (kg)	F <sub>4</sub> (kg)	F <sub>5</sub> (kg)
1.0	1.957	1.990	13 221(1)	30 100(2)	50 173	30 014(2)
0.8	2.286	2.319	13 218(1)	30 120(2)	50 148	30 019(2)
0.64	2.697	2.730	13 215(1)	30 144(3)	50 117	30 025(2)
0.51	2.780	2.808	10 839(1)	37 073(5)	41 714	30 027(2)
0.41	2.958	2.982	9 265(1)	41 668(6)	36 142	30 030(2)
0.33	3.127	3.147	7 817(1)	45 897(8)	31 013	30 033(2)
0.26	3.295	3.112	6 539(1)	49 629(9)	26 486	30 035(2)
0.21	3.450	3.463	5 391(1)	52 983(0)	22 418	30 038(2)
0.11	3.825	3.832	2 734(1)	60 741(0)	13 001	30 044(2)
0.055	4.054	4.057	1 077(1)	65 580(0)	7 139	30 047(2)
0.028	4.185	4.185	133(1)	68 337(0)	3 795	30 049(2)
0.023	4.213	4.213	- 74(1)	68 942(0)	3 061	30 050(2)
0.012	4.271	4.270	- 489(1)	70 153(0)	1 592	30 051(2)
0.0038	4.312	4.310	- 789(1)	71 031(0)	527	30 051(2)
0.0015	4.325	4.322	- 877(1)	71 287(0)	217	30 052(2)
0.00051	4.330	4.328	- 918(1)	71 407(0)	71	30 052(2)
0.00021	4.332	4.330	- 930(1)	71 442(0)	29	30 052(2)
0.000088	4.333	4.330	- 935(1)	71 456(0)	12	30 052(2)
0.000035	4.333	4.330	- 937(1)	71 462(0)	5	30 052(2)
0.000030	4.333	4.330	- 938(1)	71 466(0)	0	30 052(2)

表-5 剛度漸減解析 (diagram 1, 3 本部材系~2 本部材系) (P=95 000 kg)

R.R.	u(cm)	v(cm)	F <sub>2</sub> (kg)	F <sub>3</sub> (kg)	F <sub>4</sub> (kg)	F <sub>5</sub> (kg)
1.0	4.333	4.330	- 938(1)	71 466	0	30 052(2)
0.70	5.790	5.788	- 919(1)	71 461	0	30 074(2)
0.46	8.241	8.239	- 886(1)	71 452	0	30 112(2)
0.38	9.899	9.897	- 864(1)	71 446	0	30 137(3)
0.36	10.254	10.260	2 399(1)	70 581	0	33 920(4)
0.34	10.652	10.665	4 831(1)	69 937	0	36 738(5)
0.32	11.068	11.086	7 265(1)	69 292	0	39 558(6)
0.31	11.500	11.524	9 697(1)	68 647	0	42 376(7)
0.28	12.418	12.455	14 539(1)	67 364	0	47 988(8)
0.26	12.902	12.944	17 041(1)	66 701	0	50 887(0)

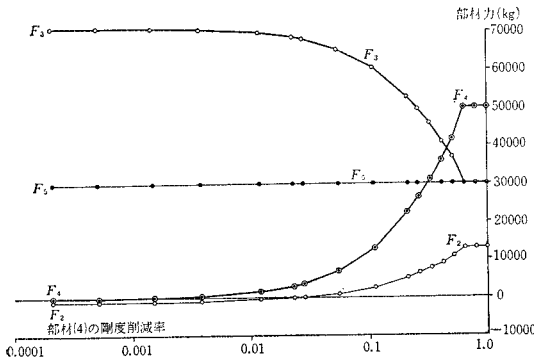


図-19 剛度漸減解析 (diagram 1, 4 本部材系~3 本部材系)

表-5 は、 $P=95\,000\text{ kg}$  の条件で、3 本部材系から部材 (3) を削除して部材 (2), (5) で形成される 2 本部材系に変換する計算の結果である。剛度削減の影響は直接 2 本の部材にかかるが、 $R.R.=0.26$  で  $F_5$  が極限値をこえてしまう。

以上の結果を総括すると、図-17 の 5 本部材トラスにおいて、部材 (1) が  $P=80\,000\text{ kg}$  で座屈を生じて、系としてはそれ以上の荷重を負担する能力を有している。そして  $P=95\,000\text{ kg}$  に至ると部材 (4) が極限強度に達し、ひきつづいて部材 (3), (5) が極限状態となって系としての抵抗力を失なう。よってこの系の破壊荷重は、表-3 の数値に内そうを行なって、 $P=94\,826\text{ kg}$  と考えることができる。

なお、図-17 の部材 (1) を取り除いた 4 本部材系を荷重漸増法で解析してみると、その力学量の変化の状況は、前記の剛度漸減法の場合 (図-18) とは様相が異なるけれども、 $P=80\,000\text{ kg}$  の時点での諸量は完全に一致した<sup>20)</sup>。

### 7. 有限変位理論による解析

一般に、鋼材料の降伏点におけるひずみ量は 1.5% 以上にも達する<sup>21), 23)</sup>。そのために、鋼材料のひずみ硬化領域における抵抗力を期待するような解析では、たとえそれが弾性理論では微小な変形にとどまるような構造であっても、有限変位理論による検討が必要である。このことは、いままでに述べてきた数値計算例の結果をみても明らかである。ここでは、基本的なトラス系を式 (21) を用いて解析した結果を報告する。

計算は荷重漸増法による。各荷重段階において、反復計算により節点変位の値を所定の精度に収束させる。この場合、応力-ひずみ曲線の特性に対応した手法が必要である<sup>20)</sup>。

#### (1) 材料の線型領域内における有限変位解析

図-20 に 2 本の部材で構成される各種のトラスを示す。部材の応力度はすべて弾性領域内にとどまるものと考えて、節点に垂直荷重  $Q=10\,000\text{ kg}$  の全量を直接載荷する。これを微小変位理論および有限変位理論で解いた結果を表-6 に示す。後者の場合には、節点変位の精度が 0.01% 以内に収束するまで反復計算を行なっている。

表から、系の節点変位の値が大きいものほど、多くの反復回数を要することがわかる。変位総量  $w=\sqrt{u^2+v^2}$  についてみると、すべての系において、有限変位理論による値のほうがより小さくあらわれている。部材力もこれと同様の傾向を示す。なお、大きな変位を生ずる系は

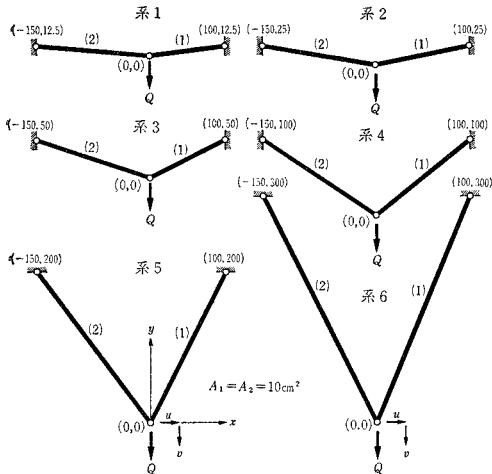


図-20 各種2本部材トラス

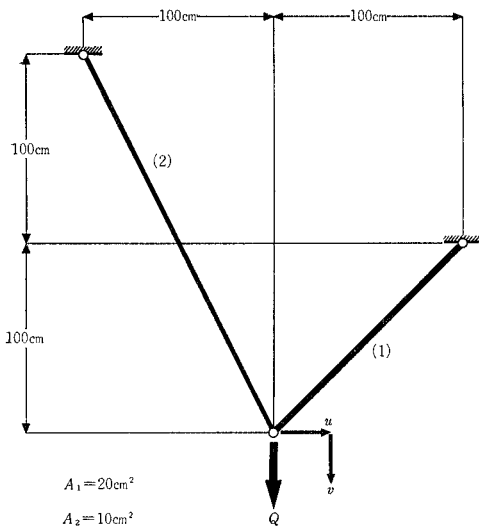


図-21 2本部材トラス

表-6 各種2本部材トラス (弾性領域内での解析)

系	解法	反復	u (cm)	v (cm)	$\sqrt{u^2+v^2}$	F <sub>1</sub> (kg)	F <sub>2</sub> (kg)
1	(微)	0	0.119995	2.925136	2.927596	48 373.546	48 166.378
	(有)	9	0.101589	2.273962	2.276230	41 039.271	40 793.878
2	(微)	0	0.059962	0.765542	0.767887	24 738.634	24 331.050
	(有)	4	0.058269	0.734043	0.736352	24 071.261	23 651.194
3	(微)	0	0.029705	0.227114	0.229048	13 416.408	12 649.111
	(有)	2	0.029572	0.225776	0.227704	13 367.662	12 596.457
4	(微)	0	0.012931	0.097784	0.098635	8 485.281	7 211.103
	(有)	2	0.012913	0.097696	0.098546	8 481.325	7 205.729
5	(微)	0	-0.004581	0.081562	0.081691	6 708.204	5 000.000
	(有)	2	-0.004585	0.081549	0.081678	6 707.514	4 999.441
6	(微)	0	-0.025867	0.096787	0.100184	6 324.555	4 472.136
	(有)	2	-0.025837	0.096778	0.100168	6 323.425	4 472.849

(微)=微小変位理論 (有)=有限変位理論

表-7 2本部材トラス (diagram 5)

Q(kg)	u(cm)		v(cm)		F <sub>1</sub> (kg)		F <sub>2</sub> (kg)	
	(有)	(微)	(有)	(微)	(有)	(微)	(有)	(微)
10 000	0.046	0.046	0.070	0.070	4 715	4 714	7 450	7 454
20 000	0.093	0.093	0.140	0.140	9 433	9 428	14 895	14 907
40 000	0.185	0.186	0.279	0.280	18 877	18 856	29 766	29 814
40 500	0.188	0.188	0.283	0.283	19 113	19 092	30 370	30 187
41 500	1.259	1.739	1.340	1.836	19 726	19 563	30 638	30 932
45 000	2.600	2.612	2.639	2.718	21 584	21 213	32 890	33 541
50 000	2.941	2.978	2.973	3.095	24 037	23 570	36 450	37 268
54 000	3.295	3.365	3.316	3.492	26 022	25 456	39 260	40 249
61 000	4.074	4.224	4.056	4.367	29 552	28 756	44 085	45 467
67 000	4.906	5.180	4.832	5.338	32 643	31 584	48 112	49 939
75 000	6.344	6.839	6.139	7.016	36 903	35 355	53 256	55 902
80 000	7.279	7.866	6.970	8.055	39 618	37 712	56 389	59 628
90 000	9.131	9.921	8.573	10.133	45 146	42 426	62 502	67 082
100 000	10.956	11.976	10.101	12.211	50 806	47 140	68 414	74 536
125 000	12.880	17.113	15.361	17.407	64 175	58 926	83 309	93 170
135 000	15.294	17.200	16.207	20.469	70 580	63 640	88 356	100 623
145 000	16.775	19.262	17.622	22.544	76 608	68 354	93 585	108 375
155 000	18.164	21.140	19.029	24.711	82 703	73 068	98 683	115 531
170 000	20.079	23.886	21.136	27.996	91 948	80 139	106 112	126 711
175 000	20.692	24.785	21.824	29.099	95 068	82 496	108 524	130 438
180 000	21.252	25.663	22.539	30.213	98 173	84 853	110 931	134 164
200 000	23.238	29.107	25.462	34.702	110 631	94 280	120 381	149 071

(有)=有限変位理論 (微)=微小変位理論

ど両理論による変位総量  $w$  の差が大である。

(2) 材料の非線型領域を考慮した有限変位解析

材料のひずみ硬化領域における抵抗を考慮して、図-21の2本部材トラスを、荷重漸増法により、材料の極限強度を設定せずに、微小、有限両理論で解いた結果を表-7に示す。材料の力学特性はdiagram 5にしたがうものとする。

両理論による解を対比してみると、節点変位については、有限変位理論によるもののほうが、微小変位理論によるものよりも、つねに小さい値を示している。荷重の最終値に至ってはとくにその差が顕著である。また、部材力については、有限変位理論によるほうが、荷重の配分がより均等化する傾向を示す。Q=200 000 kgにおける部材(1)と部材(2)の応力度はそれぞれ、微小変位

理論では、4 714, 14 907 kg/cm<sup>2</sup>、有限変位理論では、5 532, 12 038 kg/cm<sup>2</sup>である。ここで、部材の極限強度を5 000 kg/cm<sup>2</sup>とすれば、表-7の数値に一次内そうを行なって、このトラスの破壊荷重は、微小変位理論ではQ=67 045 kg、有限変位理論ではQ=68 214 kgと判定することができる。

実計算の際、部材の応力度が弾性領域からひずみ硬化領域に入る過程において、荷重の漸増量が大きすぎると微小変位理論による場合には計算の調節に乱れを生ずるが、有限変位理論の場合には虚の解が得られることがあるので、とくに注意を要する<sup>14), 20)</sup>。

表-8は、図-11の3本部材トラスの材料特性がdiagram 6にしたがうものとして、節点に垂直方向に漸増荷重をかけたときの計算結果である。この場合にも、有限変位理論の解のほうが、節点変位はより小さな値を

表-8 3 本 部 材 ト ラ ス (diagram 6)

Q (kg)	u(cm)		v(cm)		F <sub>1</sub> (kg)		F <sub>2</sub> (kg)		F <sub>3</sub> (kg)	
	(有)	(微)	(有)	(微)	(有)	(微)	(有)	(微)	(有)	(微)
10 000	0.01599	0.01600	0.02306	0.02306	2 411	2 409	4 612	4 612	3 406	3 408
20 000	0.03193	0.03201	0.04611	0.04612	4 825	4 819	9 223	9 224	6 811	6 815
40 000	0.06372	0.06402	0.09220	0.09224	9 662	9 638	18 441	18 449	13 613	13 630
59 000	0.09378	0.09508	0.13596	0.13627	14 267	14 197	27 196	27 254	20 067	20 078
60 000	0.09789	0.09881	0.13907	0.13926	14 438	14 377	27 819	27 852	20 302	20 332
62 000	0.10526	0.10628	0.14503	0.14524	14 804	14 736	29 012	29 049	20 808	20 840
64 000	0.11520	0.11665	0.15182	0.15215	15 098	15 013	30 370	30 431	21 207	21 231
66 000	0.12671	0.12834	0.15911	0.15949	15 348	15 251	31 829	31 898	21 541	21 568
68 000	0.13821	0.14003	0.16639	0.16683	15 597	15 489	33 288	33 365	21 875	21 905
70 000	0.15175	0.15413	0.17434	0.17493	15 790	15 659	34 879	34 986	22 124	22 145
72 000	0.16651	0.16917	0.18267	0.18333	15 949	15 801	36 547	36 668	22 323	22 346
74 000	0.18126	0.18421	0.19100	0.19175	16 108	15 943	38 216	38 350	22 522	22 547
76 000	0.19600	0.19924	0.19932	0.20016	16 268	16 086	39 884	40 031	22 721	22 749
78 000	0.22059	0.22703	0.21319	0.21542	16 532	16 305	41 331	41 542	23 052	23 058
80 000	0.26562	0.27535	0.23705	0.24096	16 774	16 525	42 861	43 048	23 318	23 371
82 000	0.31813	0.34038	0.26499	0.27533	17 079	16 823	44 262	44 383	23 659	23 791
84 000	0.40432	0.44220	0.31078	0.32814	17 579	17 127	45 280	45 704	24 219	24 221
86 000	0.54840	0.60393	0.38451	0.41128	18 001	17 490	46 566	46 891	24 567	24 735
88 000	0.70620	0.80574	0.46555	0.51418	18 556	17 809	47 585	48 177	25 069	25 186
90 000	0.97631	1.17504	0.60147	0.70140	19 174	18 220	48 649	49 259	25 459	25 767
92 000	1.26701	1.68843	0.74700	0.96039	19 880	18 587	49 569	50 438	25 916	26 286
94 000	1.68547	2.40038	0.95782	1.31882	20 708	18 981	50 452	51 556	26 288	26 844
96 000	2.15947	3.58117	1.20265	1.91160	21 638	19 363	51 230	52 703	26 669	27 383
98 000	2.62519	5.00911	1.45856	2.62804	22 569	19 758	52 023	53 821	27 029	27 942

(有)=有限変位理論 (微)=微小変位理論

示し、各部材への荷重の配分状況はより均等化するという結果を得た。

上記の2つの計算例では、有限変位解析の各荷重段階において、節点変位の精度を0.1%以内に収束させた。

## 8. あ と が き

本文では、構造材料の非線形特性を考慮して、ピン結合トラスの力学挙動を数値的に解析した。また、トラスの極限強度および有限変形に関しても、簡単な系について数値解を示した。計算は当学部のFACOM 231による。ここで取り扱った系は、ごく基本的で単純なものではあるけれども、その結果から、トラスの非線形問題に関する力学特性を若干知ることができた。本文に述べた荷重漸増法、剛度漸減法、および有限変位解析における反復計算法を、さらに複雑なトラス系の解析に応用する場合、電算の能率が問題になるが、与えられた系が、トポジカルな単位構の集合体である場合には、マトリクス形式の漸化式を用いて、計算を能率よく進めることができる<sup>24)</sup>。

本研究を進めるにあたって、筆者は、信州大学谷本教授からは、数多くのご指導とご高配を賜った。また、名古屋大学成岡教授からは、研究に関するご高見と終始変わらぬ激励とを賜った。おわりにあたり、ここに紙上を借りて、両教授に心から感謝の意を表します。

## 参 考 文 献

- 1) T.J. Poskitt: "Numerical Solution of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, ST 4, Aug., 1967, pp. 69-94.
- 2) S. Timoshenko: "Strength of Materials, Part II", D. VAN NOSTRAND Co., Inc., 1956, pp. 346-392.
- 3) 吉沢・谷本: "トラス構造物の非線形解析・第1報", 信州大学工学部紀要第26号, 1969年7月, pp. 247-273.
- 4) J.E. Goldberg, R.M. Richard: "Analysis of Nonlinear Structures", Proc. ASCE, ST 4, Aug., 1967, pp. 333-351.
- 5) R.M. Richard, J.E. Goldberg: "Analysis of Nonlinear Structures: Force Method", Proc. ASCE, ST 6, Dec., 1965, pp. 33-48.
- 6) R.C. Hensley, J.J. Azar: "Computer Analysis of Nonlinear Truss-Structures", Proc. ASCE, ST 6, June, 1968, pp. 1427-1439.
- 7) A. Jennings: "Frame Analysis Including Change of Geometry", Proc. ASCE, ST 3, Mar., 1968, pp. 627-644.
- 8) S.A. Saafan: "Theoretical Analysis of Suspension Bridges", Proc. ASCE, ST 4, Aug., 1966, pp. 1-11.
- 9) 藤野・大坂: "任意形式のツリ橋の動的構造解析法-有限変位理論による骨組構造解析法の応用", 三菱重工技報, 3-6, 1966年12月, pp. 17-23.
- 10) 長谷川・成岡: "変形を考慮した斜張橋の解析", 土木学会論文報告集, No. 169, 1969年9月, pp. 57-61.
- 11) 大地・船木: "大変形理論の一考察", 第23回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1968年10月, pp. 171-172.
- 12) 後藤: "有限変形法によるつり橋の解法", 土木学会論文集, No.156, 1968年8月, pp. 1-10.
- 13) 山崎・太田・後藤: "有限変形を考慮したはりの弾塑性解析", 第23回土木学会年次学術講演会講演概要集, 1968年10月, pp. 45-48.
- 14) 堀井・川原: "有限変形を考慮した平面骨組構造の弾塑性

- 解析法”, 土木学会論文報告集, No. 169, 1969年9月, pp.21-29.
- 15) 益田・室田: “工業塑性力学”, 養賢堂, 1968年11月, pp. 1-20.
- 16) 山田: “塑性力学”, 日刊工業新聞社, 1968年3月, pp. 1-18.
- 17) 田中: “骨組の塑性力学”, コロナ社, 1963年6月, pp. 1-3.
- 18) A.P. Hrennikoff: “Importance of Strain Hardening in Plastic Design”, Proc. ASCE, ST 4, Aug., 1965, pp. 23-34.
- 19) P.G. Hodge: “Plastic Analysis of Structures”, McGRAW-HILL BOOK Co., Inc., 1959, pp. 1-30.
- 20) 吉沢・谷本: “トラス構造物の非線型解析・第2報”, 信州大学工学部紀要第27号, 1969年12月, pp. 113-138.
- 21) O.C. Zienkiewicz: “The Finite Element Method”, McGRAW-HILL BOOK Co., Inc., 1968, pp. 192-211.
- 22) 川本: “応用弾性学”, 共立出版, 1968年6月, pp. 335-372.
- 23) 小西・横尾・成岡: “構造力学 II”, 丸善, 1968年8月, pp. 265-267.
- 24) B. Tanimoto: “Operational Method for Pin-Jointed Trusses”, Proc. ASCE, ST 3, June, 1966, pp. 179-198.
- 25) N. Yoshizawa, B. Tanimoto: “Operational Method for Structural Networks, First Report”, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu Univ., Vol. 21, Dec., 1966, pp. 21-50.
- 26) 安藤・成岡: “変形を考慮した任意の平面骨組構造の解析”, 土木学会誌第54巻第4号, 1969年4月, pp. 38-42.
- 27) 吉沢・谷本: “演算子法による各種の連続ばりの解析”, 土木学会論文報告集, No. 165, 1969年5月, pp. 1-10.
- 28) B. Tanimoto: “Eigen-Matrix Method for Beams and Plates”, Proc., ASCE, ST 5, Oct., 1963, pp. 173-215.
- 29) B. Tanimoto: “Operational Method for Continuous Beams”, Proc., ASCE, ST 6, Dec., 1964, pp. 213-242.
- 30) N. Yoshizawa, B. Tanimoto: “Operational Method for Displacement Analysis, Second Report, Vierendeel Trusses”, Journal of the Faculty of Engineering, Shinshu Univ., Vol. 22, July, 1967, pp. 27-47.

(1970. 2. 9・受付)