

ラバーダム形状に関する研究*

THE SHAPE OF THE RUBBER DAM

荻原国宏**・立石 勲***・古屋久和***
By Kunihiro Ogiwara, Takashi Tateishi and Hisakazu Furuya

1. 要 旨

ここ 2, 3 年の間に, 日本国内にも鋼製フラップ自動ゲートに代って, 各所でラバーダムが作られるようになって来た。本研究はその基礎資料を得るために行なったものである。ダム形状については上流に貯水された状態および越流がある状態について理論的解析, および実験を行なってみた。ダムに発生する振動およびその防止対策, 堆砂の問題は引きつづいて研究検討中である。ダムの形状は越流のないときで内部が水のときには上流面は, 円, 下流面は楕円曲線となる。また内部が空気の場合は上流面が楕円, 下流面が円曲線となることがわかった。なお越流のある場合には上記の各曲線が修正された形状となることがわかった。上記のいずれの場合も下流側にせき上げがない状態である。実験は薄いビニールシートの袋を使用して行ない理論解析の結果とかなり良い一致をみた。

この関係の問題については H.O. Anwar¹⁾ によってすでに取り扱われているが, われわれの意図した資料をえるのに若干の不足をする点があったので, つぎの点に重点をおいてまとめた。

① 越流, 非越流の各場合とも基礎方程式 (1) より解を導くように統一した。

② Anwar の解には, 下流面の形状および内部が水の場合の越流時の形状の解が示されていないので, その解を若干の仮定を入れて求めてみた。

③ 越流時の解を Anwar の解では越流時の水圧を開数 $\phi(x)$, $g(x)$ の級数解として求める形式をとっているが, 本論文の解は非越流時のダム形状を越流したために補正を加える形にして, 順次近似度を上げてゆく形をと

っている。

④ このような取扱いをしたために (すなわち越流, 非越流とも式 (1) より出発し関連づけた解をえることができたために), 越流時のダムに働く張力の補正およびダムが維持できる限界の越流水深の大きさと内圧との関係式を導くことができた。

⑤ したがって, 越流時の解の結果は Anwar の解とは異なった式となっている。

2. 理論解析

ダム本体の基礎方程式

ダム周辺部の各ディメンションを図-1のごとく定め, 各長さをダム高 H で除して無次元化表示しておく。すなわち,

$$\frac{x_1}{H} = \xi_1, \quad \frac{x_2}{H} = \xi_2, \quad \frac{y_1}{H} = \eta_1, \quad \frac{y_2}{H} = \eta_2$$

$$\frac{y_3}{H} = \eta_3, \quad \frac{E}{H} = H_s, \quad \frac{H_0}{H} = H_{s0}$$

任意点 (x_1, y_1) , (x_2, y_2) での内圧を P_i , 外圧を P_o とする。また, ダム周辺に働く張力 T (単位幅当たり) とし, その点での曲率半径 R とすれば, ダム本体に関する基礎方程式は次式となる。

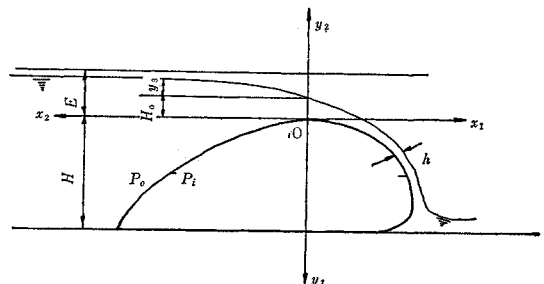


図-1

* 一部年次学術講演会 (昭.44.9) に発表。

** 正会員 東洋大学助教授 工学部土木工学科

*** 日本自動ダム

$$\frac{H(P_i - P_0)}{T} = \frac{1}{R} = \frac{d^2 \eta_1 / d \xi^2}{\left[1 + \left(\frac{d \eta_1}{d \xi}\right)^2\right]^{3/2}} \dots\dots\dots (1)$$

ただしダム本体の自重は無視しても良い場合である。また式(1)で上流面については $\xi \rightarrow \xi_2$ 、下流面については $\xi \rightarrow \xi_1$ とする必要がある。

3. 越流のない場合の方程式の解

越流のない場合には $E=0$ 、ゆえ $H_0=y_3=y_2=0$ である。したがって圧力の関係式はつぎのごとくなる。

(1) 内 圧 P_i

空気の場合は、その単位重量が水に比して小さいので、 y_1 によって変わる量は無視しても良いのでダム内で一定圧と考え

$$P_i = \alpha w H, \alpha \text{ は定数} \dots\dots\dots (2.1)$$

とする。水の場合には η_1 によって変化するので

$$P_i = w H(\beta + \eta_1), \beta \text{ は定数} \dots\dots\dots (2.2)$$

とする。外圧は、上流面について静水圧がかかっているので次式で表わす。

$$P_0 = w H \eta_1 \dots\dots\dots (3)$$

下流面については空気中でているので当然 $P_0=0$ である。この関係式を式(1)に代入して境界条件のもとに解けば良いことになる。

(2) 内部が空気の場合の解

この場合には式(2.1)と式(3)を式(1)に代入して解くことになる。

a) 下流面について

基礎方程式は

$$\frac{d^2 \eta_1 / d \xi_1^2}{\left[1 + \left(\frac{d \eta_1}{d \xi_1}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\alpha \omega H^2}{T} \dots\dots\dots (4)$$

この解は $p = \frac{d \eta_1}{d \xi_1}$ とおくことにより

$$\frac{p}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{\alpha \omega H^2}{T} \xi_1 + C \dots\dots\dots (5)$$

境界条件 $\xi_1=0, \eta_1=0, p=0$ を入れると $C=0$ となり式(5)の解としてつぎの解をえる。

$$\left[\frac{\eta_1}{T} - 1\right]^2 + \left[\frac{\xi}{\alpha \omega H^2}\right]^2 = 1 \dots\dots\dots (6)$$

$\xi_1=0, \eta_1=1$ で $p=0$ (底面で接する条件) となるためには、 $\frac{T}{\alpha \omega H^2} = \frac{1}{2}$ が必要となる。したがって、

$$\frac{T}{\omega H^2} = \frac{\alpha}{2} \text{ または } \frac{\omega H^2}{T} = \frac{2}{\alpha} \dots\dots\dots (7)$$

となる。

b) 上流面について

基礎方程式は式(2.1)および(3)を式(1)に代入して次式をえる。

$$\frac{d^2 \eta_1 / d \xi_2^2}{\left[1 + \left(\frac{d \eta_1}{d \xi_2}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{\omega H^2}{T} (\alpha - \eta_1)$$

式(7)の関係を使うと上式の $\frac{\omega H^2}{T}$ は $\frac{2}{\alpha}$ と書けるので、 $\frac{d \eta_1}{d \xi_2} = p$ とおくことにより次式をえる。

$$\frac{dp}{(1+p^2)^{3/2}} = \frac{2}{\alpha} (\alpha - \eta_1) \dots\dots\dots (8)$$

この解は、境界条件 $\xi_2=0, \eta_1=0, p=0$ のもとに求めることができる。その結果は式(9)である。

$$\begin{aligned} \xi_2 = \sqrt{2\alpha} \left\{ E \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \cos^{-1} \left(1 - \frac{\eta_1}{\alpha} \right) \right] \right. \\ \left. - E \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, 0 \right] - \frac{1}{2} F \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \cos^{-1} \left(1 - \frac{\eta_1}{\alpha} \right) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} F \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, 0 \right] \right\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$E[]$ は第2種楕円積分、 $F[]$ は第1種楕円積分であり、上式の $E \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, 0 \right] = 0, F \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, 0 \right] = 0$ である。

(3) 内部が水の場合の解

a) 下流面について

この場合 $P_i - P_0 = w H(\beta + \eta_1)$ ゆえ、基礎方程式は次式となる。

$$\frac{d^2 \eta_1 / d \xi_1^2}{\left[1 + \left(\frac{d \eta_1}{d \xi_1}\right)^2\right]^{3/2}} = \frac{w H^2}{T} (\beta + \eta_1) \dots\dots (10)$$

$d \eta_1 / d \xi_1 = p$ とおき解くと

$$-\frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \frac{w H^2}{2 T} (\beta + \eta_1) + C$$

$\eta_1=0$ で $p=0$ とすれば $C = -1 - \frac{w H^2}{2 T} \beta^2$ 、これを上式に代入して p について解くと、

$$p = \pm \frac{\sqrt{1 - \left[1 + \frac{w H^2}{2 T} \{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2\}\right]^2}}{1 + \frac{w H^2}{2 T} \{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2\}} \dots\dots (11)$$

底面でも接していることが条件となるゆえ、 $\eta_1=1$ でも $p=0$ となる必要がある。この関係より T の関係式が求まる。すなわち、

$$1 - \left[1 + \frac{w H^2}{2 T} \{\beta^2 - (\beta + 1)^2\}\right]^2 = 0$$

これを解くと

$$\frac{w H^2}{T} = \frac{4}{1 + 2\beta}, \text{ または } \frac{T}{w H^2} = \frac{1 + 2\beta}{4} \dots\dots (12)$$

をえる。したがって式(11)は

$$p = \pm \frac{\sqrt{1 - \left[1 + \frac{2}{1 + 2\beta} \{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2\}\right]^2}}{1 + \frac{2}{1 + 2\beta} \{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2\}} = \pm \frac{\sqrt{[(\beta + \eta_1)^2 - \beta^2][(\beta + 1)^2 - (\beta + \eta_1)^2]}}{\beta^2 + \beta + \frac{1}{2} - (\beta + \eta_1)^2} \dots\dots\dots(13)$$

$\eta_1=0$ 付近で $p>0$ なることを考えると \pm の符号の内 $+$ をとる必要がある。そして式 (13) の解を $\eta_1=0, \xi_1=0$ のもとに解くと

$$\xi_1 = (\beta + 1) \left\{ E \left[\frac{\sqrt{2\beta + 1}}{\beta + 1}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\beta + 1)^2 - (\beta + \eta_1)^2}{(\beta + 1)^2 - \beta^2}} \right] - E \left[\frac{\sqrt{2\beta + 1}}{\beta + 1}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} - \frac{2\beta^2 + 2\beta + 1}{2(\beta + 1)} \left\{ F \left[\frac{\sqrt{2\beta + 1}}{\beta + 1}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\beta + 1)^2 - (\beta + \eta_1)^2}{(\beta + 1)^2 - \beta^2}} \right] - F \left[\frac{\sqrt{2\beta + 1}}{\beta + 1}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \dots\dots\dots(14)$$

$E[\quad], F[\quad]$ については先にのべたとおりである。

b) 上流面について

上流面の場合には $P_i - P_0 = wH(\beta + \eta_1) - wH\eta_1 = wH\beta$ となる。したがって基礎方程式は

$$\frac{d^2\eta_1}{d\xi_2^2} \left[1 + \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_2} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{\beta w H^2}{T} \dots\dots\dots(15)$$

式 (12) の関係式を使うと右辺は $\frac{4\beta}{1 + 2\beta}$ となる。

式 (15) の解を $\xi_2=0, \eta_1=0, d\eta_1/d\xi_2=0$ のもとに解くと次式をえる。

$$\left[\eta_1 - \frac{1 + 2\beta}{4\beta} \right]^2 + \xi_2^2 = \left[\frac{1 + 2\beta}{4\beta} \right]^2 \dots\dots\dots(16)$$

以上で越流のない場合のダム形状は求まったことになる。

4. 越流のある場合の方程式の解

越流のある場合の曲面形状は、基礎方程式 (1) と P_i, P_0 を結びつけて解くことになるが、 P_i は 3. の場合と同じである。しかし P_0 は流れの状態によって変わるので、流れの条件式を考える必要がでてくる。ここで流れの条件は上流面と下流面で別の考えをする。

(1) 上流面について

上流面側は比エネルギー一定であると考えたと次式をえる。また各断面での流速は一樣であると仮定して、単位幅流量を q とすれば、

$$E_0 = H(1 + \eta_2) + \frac{v^2}{2g} = H + E \dots\dots\dots(17)$$

$$q = v(y_2 + y_1) = Hv(\eta_2 + \eta_1) \dots\dots\dots(18)$$

式 (17) は (18) を使うことによってつぎのごとく書きなおせる。

$$H_s - \eta_2 = \frac{q^2}{2g} \cdot \frac{1}{H^3} \cdot \frac{1}{(\eta_2 + \eta_1)^2} \dots\dots\dots(19)$$

また外圧は、流れの壁に沿う摩擦力を考えずに、静水

$$\frac{d^2\eta_1}{d\xi_2^2} \left[1 + \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_2} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{\omega H^2}{T} \left\{ \alpha - \eta_1 - H_s + \frac{1}{3} H_s^3 \left(\frac{2}{3} \right)^2 \frac{1}{\left(\frac{2}{3} H_s + \eta_1 \right)^2} \right\} \text{ 空気} \\ = \frac{\omega H^2}{T} \left\{ \beta - H_s + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 H_s^3 \frac{1}{\left(\frac{2}{3} H_s + \eta_1 \right)^2} \right\} \text{ 水} \dots\dots\dots(24)$$

圧だけが働くと考えると、つぎのごとく考えることができる。

$$P_0 = wH(\eta_1 + \eta_2) \dots\dots\dots(20)$$

内圧は 3. (1) と同じに考えれば良いので、基礎方程式はつぎのごとく表わせる。

$$\frac{d^2\eta_1}{d\xi_2^2} \left[1 + \left(\frac{d\eta_1}{d\xi_2} \right)^2 \right]^{3/2} = \frac{\omega H^2}{T} \left. \begin{aligned} &(\alpha - \eta_1 - \eta_2) \text{ 空気} \\ &= \frac{\omega H^2}{T} (\beta - \eta_2) \text{ 水} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

式 (19) と (21) を連立にして解けば問題は解けるわけであるが、式 (19) より η_2 を求め式 (21) に代入して η_1 と ξ_2 の関係を解くか、または η_1 を求め η_2 と ξ_2 との関係について解くかのどちらかであるが、いずれにしてもかなりめんどうなことになる。そこで、ここでは思い切って大きな仮定をする。すなわち 図-1 で η_2 を η_3 に変数変換することを考えると、

$$\eta_2 = H_{s0} + \eta_3$$

となる。これを式 (19) に代入すれば、

$$H_s - H_{s0} - \eta_3 = \frac{q^2}{2g H^3} \cdot \frac{1}{(H_{s0} + \eta_3 + \eta_1)^2} \dots\dots\dots(22)$$

となる。ここで $H_{s0} + \eta_1$ に比して η_3 はかなり小さい量と考えられるので、その項を第 1 次近似として無視することにすれば式 (22) はもっと簡単になって、

$$\eta_3 = H_s - H_{s0} - \frac{q^2}{2g H^3} \cdot \frac{1}{(H_{s0} + \eta_1)^2} \dots\dots\dots(23)$$

式 (23) を $\eta_2 = H_{s0} + \eta_3$ に代入し式 (21) に入れることによって η_1 と ξ_2 の関係式が求まることになる。さらにダム頂点において限界水深になると仮定すれば、

$$H_{s0} = \frac{2}{3} H_s, \quad \frac{q^2}{2g H^3} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^2 H_s^3 \dots\dots\dots(23')$$

である。このことを考え式 (21) を書きなおすと次式となる。

ここで $\frac{\omega H^2}{T} = A$ とおき、境界条件 $\eta_1 = 0$ で $d\eta_1/d\xi_2 = 0$, $\xi_2 = 0$ を考慮して解くとつぎのような式をえる。ただし $p = d\eta_1/d\xi_2$ である。

$$p = \frac{\sqrt{1 - \left\{ A \left[(H_s - \beta)\eta_1 - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right] + 1 \right\}^2}}{1 + A \left[(H_s - \beta)\eta_1 - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right]} \quad \text{水} \quad \dots\dots\dots(25)$$

なお空気の場合は上式の [] の中に $\eta_1^2/2$ が加わり β を α と書きなおした式となる。この解は、

$$\left. \begin{aligned} \xi_2 &= \int_0^{\eta_1} \frac{1 + A \left[(H_s - \alpha)\eta_1 + \frac{\eta_1^2}{2} - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left\{ A \left[(H_s - \alpha)\eta_1 + \frac{\eta_1^2}{2} - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right] + 1 \right\}^2}} d\eta_1 && \text{空気} \\ \xi_2 &= \int_0^{\eta_1} \frac{1 + A \left[(H_s - \beta)\eta_1 - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left\{ A \left[(H_s - \beta)\eta_1 - \frac{2}{9} H_s^2 \left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right) \right] + 1 \right\}^2}} d\eta_1 && \text{水} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

なお A については下流面の曲線形の境界条件より決まる値であるので、ここでは求まらない。

(2) 下流面について

下流面の流れは、ダム表面を伝わって流れる流れで、実験してみると途中ではなかなか離れを起こさず、ダム下面までも伝わって流れる状況である。当然流れは曲面上を流れるためそれによる遠心力と、水の重量ともに受ける状態におかれているので、外圧 P_0 はその両方をも考慮した形で求める必要がある。

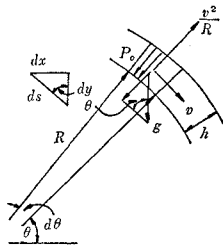


図-2

そこで下流面の流れを図-2のごとく考え、ダム長、単位長さ当りの外力のつり合いの方程式を作ると、

$$-P_0 R d\theta = \rho \frac{v^2}{R} R d\theta h - \rho R d\theta h g \sin \theta$$

$$\sin \theta = \frac{dx}{ds}, \quad ds = \sqrt{1 + p^2} dx, \quad p = \frac{dy_1}{dx}$$

を考えると、

$$P_0 = -\rho \frac{v^2}{R} h + \omega h \frac{dx}{ds} \quad \dots\dots\dots(27)$$

またダム上での支配点での流量 q は既知であるので、流速 v は $v = q/h$ として求めることができる。ただし、上式はダム面上の流れは一樣流速をもつものと考えている。方程式 (1), (2), (27) を組み合わせると、

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{R} &= \frac{H}{T} (P_i - P_0) \\ &= \frac{H}{T} \left\{ \omega y_1 + \beta \omega H + \rho \frac{v^2}{R} h - \omega h \frac{dx}{ds} \right\} \text{水} \\ &= \frac{H}{T} \left\{ \alpha \omega H + \rho \frac{v^2}{R} h - \omega h \frac{dx}{ds} \right\} \text{空気} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

$$\frac{d\eta_1}{d\xi_1} = p, \quad \frac{1}{R} = \frac{dp}{d\xi_1} \left[\sqrt{1 + p^2} \right]^3, \quad A = \frac{\omega H^2}{T}, \quad h/H = \eta_h$$

を使い無次元化して表わすと、

$$\left(1 - \frac{\rho v^2}{T} h \right) (1 + p^2)^{-3/2} \frac{dp}{d\xi_1} = A \left[\alpha - \eta_h (1 + p^2)^{-1/2} \right] \text{空気} \\ = A \left[\beta + \eta_1 - \eta_h (1 + p^2)^{-1/2} \right] \text{水} \quad \dots\dots\dots(29)$$

この式の中で、 v, h, η_h はそれぞれ q との関係で結びつくものであって、それはダム上を流れる水の運動方程式を解くことによって決まってくるものである。しかし、その運動方程式の水路底面自体が式 (29) によって v, h と関係しているため、それらを連立にして解くことはかなりむずかしいことである。そこでわれわれはここでかなり思い切った仮定を入れることにする。

すなわち第1次近似としては

- ① ダム表面上の流速は平均流速とあまり変わらない。
 - ② ダム面上の水深はほぼ一定である。
 - ③ 遠心力に比してダム上の水の重量は無視できる程度である。
- の3点を考えると式 (29) はつぎのように簡単になる。

$$\left. \begin{aligned} \left(1 - \frac{\rho q^2}{T} \cdot \frac{1}{h}\right) (1+p^2)^{-3/2} \frac{dp}{d\xi_1} &= A(\beta + \eta_1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{水} \\ \text{空気} \end{array} \right\} \\ &= A\alpha \quad \text{空気} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

$D = \left(1 - \frac{\rho q^2}{T} \cdot \frac{1}{h}\right)$ は②の仮定により一定値と考えて良いので、 $A/D = A_0$ とおくことにより、この解は簡単に求まる。境界条件 $\eta_1 = 0, p = 0$ を考えて解くと、

$$\left. \begin{aligned} (1+p^2)^{-1/2} &= A_0 \left[\frac{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2}{2} \right] + 1 \quad \left. \begin{array}{l} \text{水} \\ \text{空気} \end{array} \right\} \\ &= 1 - A_0 \alpha \eta_1 \quad \text{空気} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

式(31)は水の場合が楕円、空気の場合が円である。これではあまりにもラフなので、第2次近似として、式(31)の結果を、先に無視した重量の項、すなわち式(29)の右辺中の $(1+p^2)^{-1/2}$ に入れてやって式(29)を解くことを考える。

第2次近似

$$\begin{aligned} (1+p^2)^{-1/2} &= 1 + A_0 \left\{ \frac{\beta^2 - (\beta + \eta_1)^2}{2} + \eta_h \left(1 + \frac{A_0 \beta^2}{2}\right) \eta_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\eta_h A_0}{6} [\beta^3 - (\beta + \eta_1)^3] \right\} \quad \text{水} \end{aligned}$$

水の場合は、

$$\xi_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{1 - (\beta - \eta_h) A_0 \eta_1 \left(1 + \frac{A_0 \eta_1}{2} \eta_h\right) - \frac{A_0}{2} \eta_1^2}{\sqrt{1 - \left\{ 1 - (\beta - \eta_h) A_0 \eta_1 \left(1 + \frac{A_0 \eta_1}{2} \eta_h\right) - \frac{A_0 \eta_1^2}{2} \right\}^2}} d\eta_1 \quad \dots\dots\dots(34)$$

空気の場合は、

$$\xi_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1\right) \eta_h A_0 \eta_1}{\sqrt{1 - \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1\right) \eta_h A_0 \eta_1 \right\}^2}} d\eta_1$$

で、水の場合は楕円、空気の場合は円となる。空気の場合も級数をもう1項増加させれば楕円曲線となる。式(34)の積分は、

$$A_1 = A_0 + (\beta - \eta_h) A_0^2 \eta_h, \quad M_1 = 1 + \frac{A_0}{2} \left[\frac{A_0}{A_1} (\beta - \eta_h) \right]^2, \quad M_2 = (\beta - \eta_h) \frac{A_0}{A_1}$$

とおくことにより

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \sqrt{\frac{2(1+M_1)}{A_1}} \left\{ E \left[\frac{2}{1+M_1}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+M_1}{2} - \frac{A_1}{4} (\eta_1 + M_2)^2} \right] - E \left[\frac{2}{1+M_1}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \\ &\quad - \sqrt{\frac{2M_1^2}{A_1(1+M_1)}} \left\{ F \left[\frac{2}{1+M_1}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{1+M_1}{2} - \frac{A_1}{4} (\eta_1 + M_2)^2} \right] - F \left[\frac{2}{1+M_1}, \frac{\pi}{2} \right] \right\} \quad \text{水} \\ \xi_1^2 + \left[\eta_1 - \frac{1}{(\alpha - \eta_h) A_0} \right]^2 &= \frac{1}{(\alpha - \eta_h)^2 A_0^2} \quad \text{空気} \quad \dots\dots\dots(35) \end{aligned}$$

これらの場合も下流面の曲線形は $\eta_1 = 0, \eta_1 = 1$ で $d\eta_1/d\xi_1 = 0$ となるわけである。したがって、そのための条件を求めると式(33)より A_0 の満たすべき条件がでてくる。

$$\left. \begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{\eta_h}\right) - (e^{\eta_h A_0} - 1) \left(\frac{\beta}{\eta_h} + \frac{1}{\eta_h^2 A_0} - 1\right) &= \pm 1 \quad \text{水} \\ 1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1\right) (e^{\eta_h A_0} - 1) &= \pm 1 \quad \text{空気} \end{aligned} \right\}$$

$$= 1 - A_0 \left[(\alpha - \eta_h) \eta_1 + A_0 \alpha \frac{\eta_1^2}{2} \eta_h \right] \quad \text{空気} \quad \dots\dots(32)$$

さらにこの結果を式(29)の右辺 $(1+p^2)^{-1/2}$ に入れて解を出すことをくり返すとさらに近似度が高まっていく。その結果は

高次近似

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt{1 - \left\{ \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_h}\right) - (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1) \left(\frac{\beta}{\eta_h} + \frac{1}{\eta_h^2 A_0} - 1\right) \right\}^2}}{\left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_h}\right) - (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1) \left(\frac{\beta}{\eta_h} - 1 + \frac{1}{\eta_h^2 A_0}\right)} \quad \text{水} \\ p &= \frac{\sqrt{1 - \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1\right) (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1) \right\}^2}}{1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1\right) (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1)} \quad \text{空気} \quad \dots\dots\dots(33) \end{aligned}$$

これより $\xi_1 = \int_0^{\eta_1} \frac{1}{p} d\eta_1$ として曲線形が求まることになる。しかしこの積分も簡単にはできないので数値積分することになる。しかしながら $\eta_h A_0 \eta_1$ が1よりかなり小さい値になる可能性があるので、

$$e^{\eta_h A_0 \eta_1} = 1 + \eta_h A_0 \eta_1 + \frac{1}{2} (\eta_h A_0 \eta_1)^2 + \dots\dots$$

の3項目または2項目までとって式(33)の解を求めることは可能である。

$e^{\eta_h A_0}$ を展開して、上式を A_0 に関する方程式になおし、 A_0^2 以下の項を省略して A_0 を求めると、

$$A_0 = \frac{4}{2(\beta - \eta_h) + 1} \quad \text{水}, \quad A_0 = \frac{2}{\alpha - \eta_h} \quad \text{空気} \quad \dots\dots(36)$$

をえる。もっと高次まで必要なときには A_0^2, A_0^3 までとり2次方程式、3次方程式の根を解けば良いことになる。式(36)の結果と式(7)、(12)の結果と比較すれば式(36)で $\eta_h = 0$ (越流のないとき) とすれば式(7)、

(12) に一致することがわかる。なお $A_0=A/D$ であるので式 (7), (12) と比較するためには $A=\frac{\omega H^2}{T}$ の形にしておいた方が便利である。

$$D=1-\frac{\rho q^2}{T} \cdot \frac{1}{h}=1-\frac{\omega H^2}{T} \frac{q^2}{g H^3 \eta_h}$$

$$=1-A \frac{1}{\eta_h} \cdot \frac{q^2}{g H^3}$$

$\frac{q^2}{g H^3}$ は式 (23) より $\left(\frac{2}{3} H_s\right)^3$ となることわかるので、上式は結局

$$D=1-\frac{A}{\eta_h} \left(\frac{2}{3} H_s\right)^3$$

となる。これと式 (36) より A を求めると次式をえる。

$$A = \frac{4}{2(\beta - \eta_h) + 1} \left\{ 1 + \frac{4}{2(\beta - \eta_h) + 1} \times \frac{1}{\eta_h} \times \left(\frac{2}{3} H_s\right)^3 \right\}^{-1} \text{水}$$

$$A = \frac{2}{\alpha - \eta_h} \times \left[1 + \frac{2}{(\alpha - \eta_h)} \cdot \frac{1}{\eta_h} \left(\frac{2}{3} H_s\right)^3 \right]^{-1} \text{空気} \quad \dots\dots\dots(37)$$

となり越流のある場合の張力補正ができることになる。

b) 水の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{上流側 } L_1 &= \frac{1+2\beta}{4\beta} \sin^{-1} \left(\frac{4\beta}{1+2\beta} \xi_2 \right) \\ \text{下流側 } L_2 &= \frac{2\beta+1}{2(\beta+1)} \left\{ F \left[\frac{\sqrt{2\beta+1}}{\beta+1}, \frac{\pi}{2} \right] - F \left[\frac{\sqrt{2\beta+1}}{\beta+1}, \sin^{-1} \sqrt{\frac{(\beta+1)^2 - (\beta+\eta_1)^2}{(\beta+1)^2 - \beta^2}} \right] \right\} \\ \text{底面 } L_3 &= \xi_2(\eta_1=1) + \xi_1(\eta_1=1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

となる。

(2) 越流のある場合の曲線長

a) 内部が空気の場合

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{ 1 + A \left[(E_s - \alpha) \eta_1 + \frac{\eta_1^2}{2} - \frac{2}{9} H_s^2 \frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right] \right\}^2}} d\eta_1 \\ L_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{ 1 - \left(\frac{\alpha}{\eta_h} - 1 \right) (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1) \right\}^2}} d\eta_1 \\ L_3 &= (\xi_1 + \xi_2)_{\eta_1=1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

b) 内部が水の場合

$$\left. \begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{ 1 + A \left[(E_s - \beta) \eta_1 - \frac{2}{9} H_s^2 \frac{\eta_1}{\eta_1 + \frac{2}{3} H_s} \right] \right\}^2}} d\eta_1 \\ L_2 &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - \left\{ \left(1 + \frac{\eta_1}{\eta_h} \right) - (e^{\eta_h A_0 \eta_1} - 1) \left(\frac{\beta}{\eta_h} + \frac{1}{\eta_h^2 A_0} - 1 \right) \right\}^2}} d\eta_1 \\ L_3 &= (\xi_1 + \xi_2)_{\eta_1=1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

ただし、ここに示した L_1, L_2, L_3 はともに実長を S_1, S_2, S_3 とするとき $S_1/H=L_1, S_2/H=L_2, S_3/H=L_3$ なる量を示しており、無次元化された長さになっていることに注意を要する。

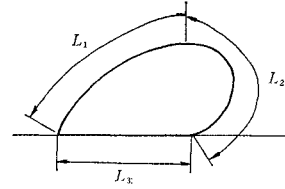


図-3

5. ダムの曲線長について

ダムの周長は図-3のごとく上流面曲線長 L_1 , 下流面曲線長 L_2 , Base の長さ L_3 によって構成される。したがってダム周長 S は $S=L_1+L_2+L_3$ である。

L_1 と L_2 については $ds=\sqrt{d\eta_1^2+d\xi^2}$ より $ds=\sqrt{1+p^2} d\xi$ によって求めることができる。この p に前記各場合の p の式を代入して、積分して求めれば良い。

(1) 越流のない場合

a) 内部が空気の場合

$$\left. \begin{aligned} \text{上流側 } L_1 &= \sqrt{\frac{\alpha}{2}} F \left[\sqrt{\frac{\alpha}{2}}, \cos^{-1} \left(1 - \frac{\eta_1}{\alpha} \right) \right] \\ \text{下流側 半円ゆえ } L_2 &= \pi/2 \\ \text{底部 } L_3 &= \xi_2(\eta_1=1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)$$

6. ダムのつぶれる限界の H_s について

越流水の量が増加すると外圧 P_0 がまし、内圧より大きくなっていく可能性がある。したがってある限界点を境にしてダムは形状を保てなくなってつぶれることになる。もっともダムがある程度つぶれると、外圧と内圧とがつり合って、ダム高が小さくなった所で形状を保つことは考えられる。

そこで、ダムがつぶれる限界について検討しておこう。ダムがつぶれることは理論式では実の解が求まらぬところ、すなわち虚の解がでてくる点として求まる。すなわち、上流面については式 (25)、下流については式 (33) または式 (39) の根号内が (-) の値になることで示される。計算してみると、下流面の限界より上流面の限界点の方が低いところにあり、ダムの下の方からつぶれていくことがわかる。したがってここでは上流面の限界点より求めた結果を示す。ダムの下の方よりつぶれることを考慮すれば $\eta_1=1$ を式 (25) に代入して限界条件を求めれば良いこととなる。すなわち解の存在する条件として次式をえる。

$$(H_s - \beta) + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) H_s^2 \left(\frac{\frac{2}{3} H_s}{1 + \frac{2}{3} H_s} - 1 \right) \leq 0 \quad \text{水}$$

$$(H_s - \alpha) + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right) H_s^2 \left(\frac{\frac{2}{3} H_s}{1 + \frac{2}{3} H_s} - 1 \right) \leq 0 \quad \text{空気}$$

これを H_s に関する 2 次不等式におし、 H_s について解くとつぎの解をえる。

$$\left. \begin{aligned} -\left(\frac{3}{4} - \frac{\beta}{2}\right) - \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{4} + \frac{9}{16}} &\leq \frac{2}{3} H_s \\ \leq -\left(\frac{3}{4} - \frac{\beta}{2}\right) + \sqrt{\frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta}{4} + \frac{9}{16}} \\ -\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{4}} &\leq \frac{2}{3} H_s \\ \leq -\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) + \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{4}} \end{aligned} \right\}$$

通常 α は 1.0~2.0, β は 0~1.0 までの値であるので上式の左辺は負の値である。したがって $H_s \geq 0$ であることを考慮すれば、最終的に解の存在領域はつぎのごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq H_s \leq \frac{3}{4} \beta - \frac{9}{8} + \frac{3}{4} \sqrt{\beta^2 + \beta + \frac{9}{4}} \\ 0 \leq H_s \leq \frac{3}{4} \alpha - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \sqrt{\alpha^2 + 2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

7. 理論解の結果の表示

(1) 曲線形状

前記のごとくして理論曲線が求まったので、各場合の曲線形状を計算してみた。ここに示したのは水のときで $\beta=0.2, \beta=1.0$, 空気の場合で $\alpha=1.0, 2.0$ である。 H_s については $H_s=0.1 \sim 0.4$ まで任意にとって求めてみた。越流のない場合には式 (6), (9), (14), (16) により求めたものであり、越流のある場合の曲線は式 (26), (34) については数値積分により式 (35) については楕円関数表により求めたものである。これらの図からもわかるごとく、空気の場合は $\alpha=1.0, 2.0$ でも形状に大きな変化はないが、水の場合 $\beta=0.2$ と 1.0 ではかなり形状が変わっていることがわかる。また越流している場合にも空気ではその変化が小さいのに比して、水では $H_s \neq \beta$ になるとずいぶんつぶれた形状になることがわかる。これらのことからダム高を細かく調節したいときには内部を水にした方が良く、ダム高を設計位置にだけ保つことを目的とする場合には空気の方が変化しなくて良いことになる。

(2) 内圧と張力の関係

内圧と張力の関係は越流のない場合は式 (7) および式 (12) で与えられる。越流のある場合は式 (37) によって与えられる。この結果を図示すれば図-5.1, 図-5.2のごとく示される。なおダム内圧とダム高との関係は、ダム周長を 1 としたときのダム高の関係式を式 (38) ~ (41) より求める必要がある。

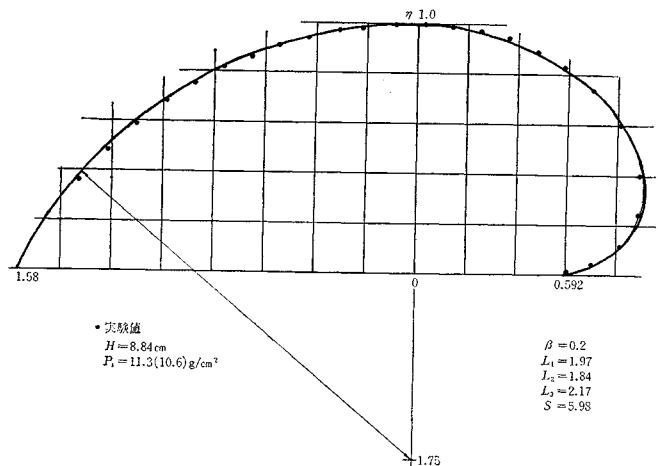


図-4.1 非越流時のダム形状

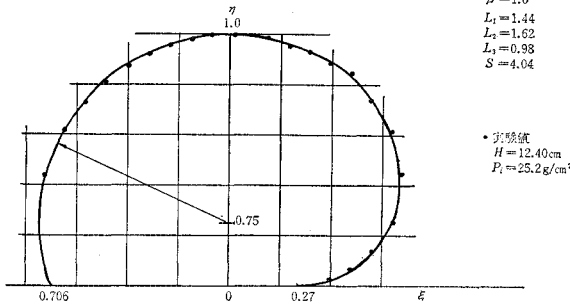


図-4.2 非越流時のダム形状

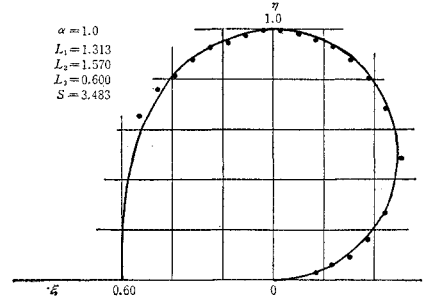


図-4.6 非越流時のダム形状

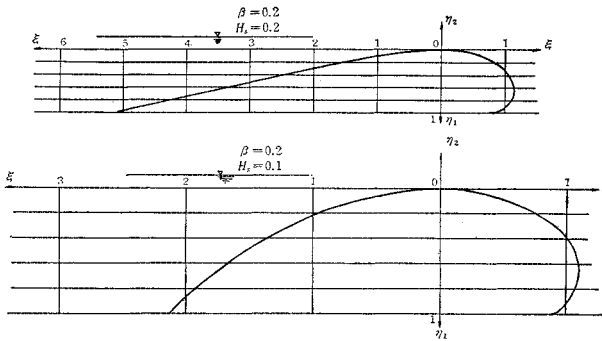


図-4.3 越流時のダム形状

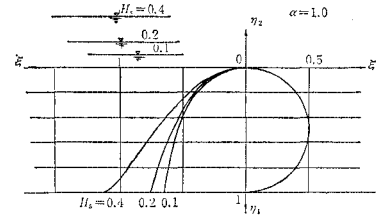


図-4.7 越流時のダム形状

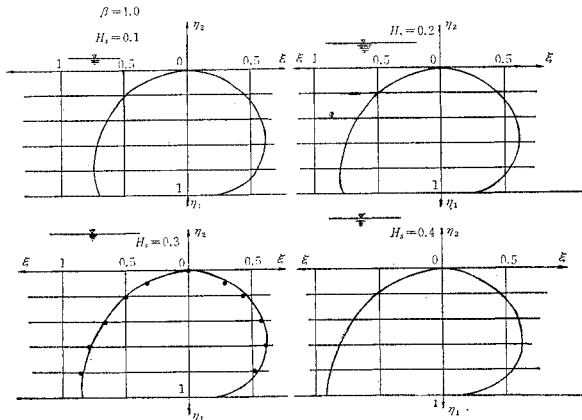


図-4.4 越流時のダム形状

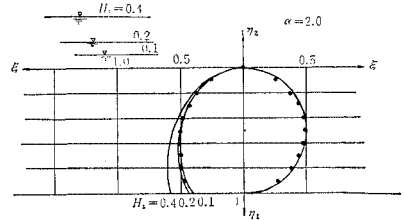


図-4.8 越流時のダム形状

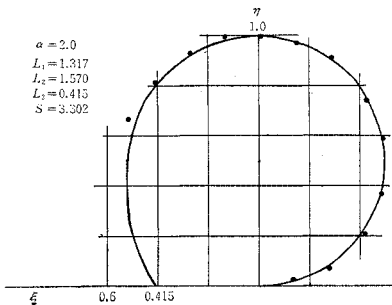


図-4.5 非越流時のダム形状

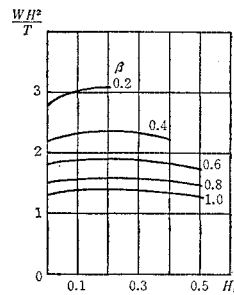


図-5.1 張力と越流水深の関係

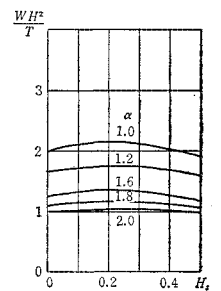


図-5.2 張力と越流水深の関係

(3) ダムのつぶれる限界について
 ダムのつぶれる限界については式(42)によって求まっているので、これを計算し図示するとよい。その結果は図-6.1, 6.2である。

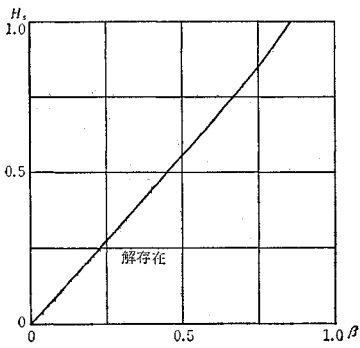


図-6.1 ダムのつぶれる限界

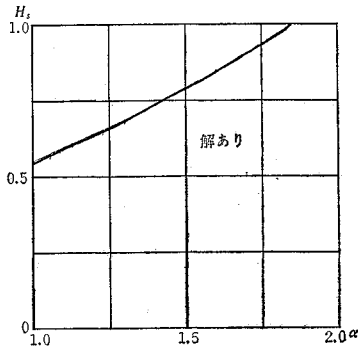


図-6.2 ダムのつぶれる限界

8. 実験

実験はこれらの理論解析との関係を確認するためと、ダム上を流れる水によるダムへの影響（主として振動問題）を検討するために行なった。ここにはその内の形状関係のものだけをまとめたものである。実験装置は図-7のごとくになっており、ダム本体は周長 50 cm で、ダム長 40 cm である。構造は2重構造で内部は 0.01 mm のビニールシートで袋を作り、その外側を 0.05 mm のビニールシートでおおった形となっている。ダム内への水、空気の供給は袋に作られた2本のビニール管で行ない、測定中はそのうち1本が内圧測定用のマンメーターに接続されるようになっていいる。水の循環はベビーポンプによって行ない、水量の多いときは2台使用した。今回のものは下流側よりのせき上げのない状態で行なっている。越流のない場合の実験結果は先の理論曲線の 図-4.1~4.8 までに黒点として記入してある。かなり良い一致をみている。

越流のある場合の実験はまず越流のない状態でダム高および内圧を規定の α および β にセットしておき、それに水を 1 cm~4 cm までの越流水深になるように流してやった。したがって越流水深がますますしたがってダム内圧も増加する傾向にある。その傾向が 図-8 に示してある。とくに $\beta=0.2$ の場合はかなりの増加がみられる。そのときのダム形状は 図-9 に示してある。空気の場合の $\alpha=2.0$ のものは 図-10 である。

図-8 に示したようにダム内圧が越流水深の増加によってかなり変化しているのて、実験中の β も増加している可能性がある。そこで H_1 および β を改めて計算し、

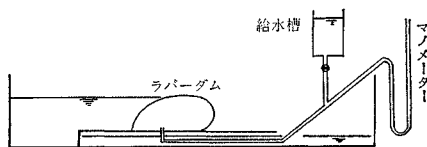


図-7 実験装置

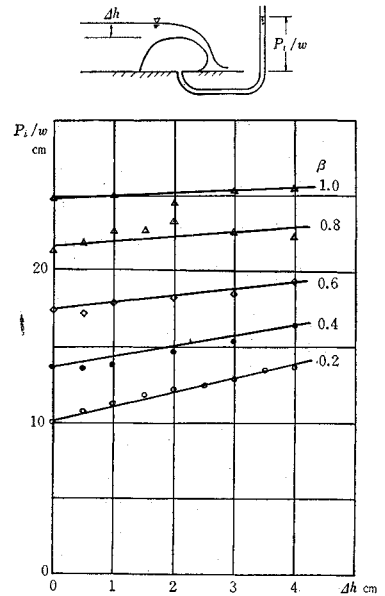


図-8 越流水深と内圧の関係

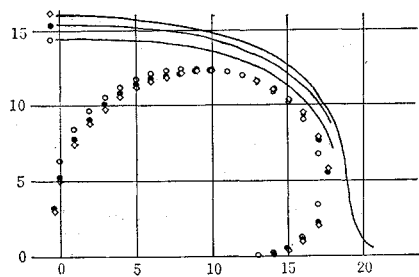


図-9.1 越流時のダム形状 ($\beta=1.0$)

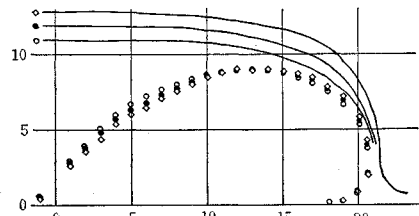


図-9.2 越流時のダム形状 ($\beta=0.2$)

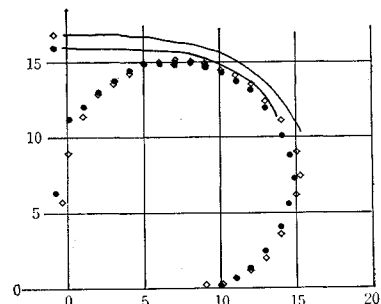


図-10 越流時のダム形状 ($\alpha=2.0$)

先に行なった理論計算の条件に近いものの $H_s=0.3$, $\beta=1.0$, $H_s=0.1$, $\alpha=2.0$ の2case について実験結果

の比較を行なってみた。先の図4.8中に示した黒点が実験値である。かなり良い。一致をみていると考えられ

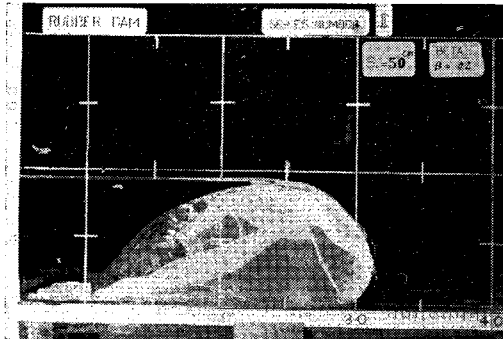


写真-1 非越流, 内部水 $\beta=0.2$

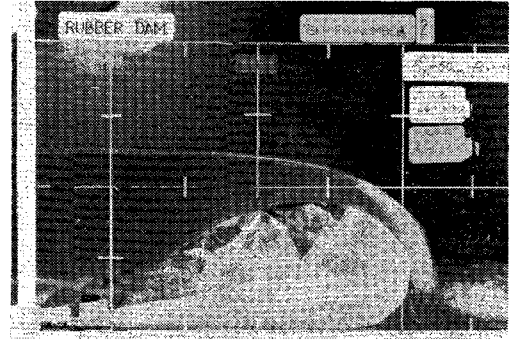


写真-5 越流, 内部水 ($\beta=0.2$), 越流水深 4.0 cm

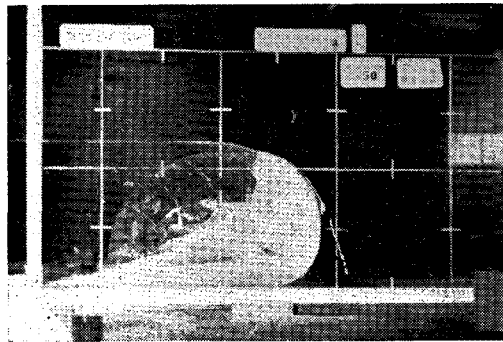


写真-2 非越流, 内部水 $\beta=1.0$

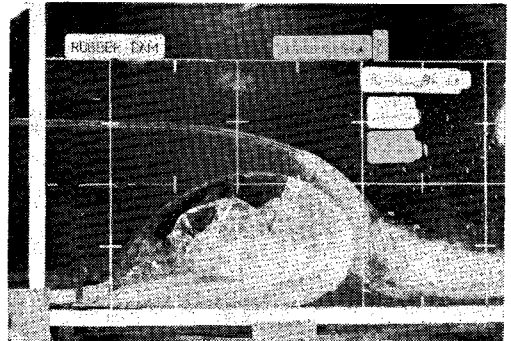


写真-6 越流, 内部水 ($\beta=0.6$), 越流水深 4.0 cm

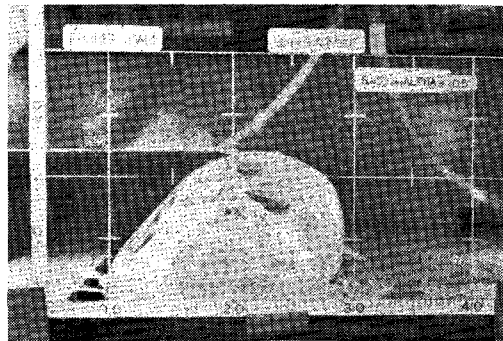


写真-3 非越流, 内部空気 ($\alpha=20.5$)

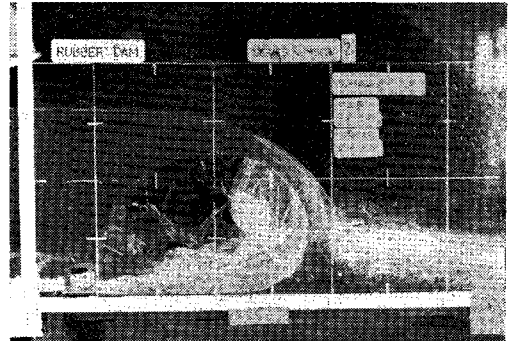


写真-7 越流, 内部水 ($\beta=1.0$), 越流水深 4.0 cm

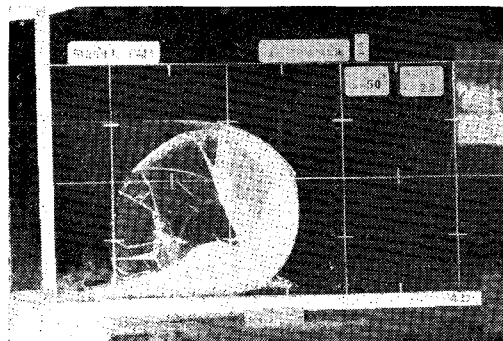


写真-4 非越流, 内部空気 ($\alpha=2.0$)

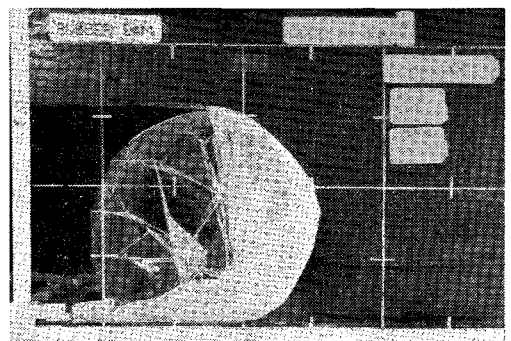


写真-8 越流, 内部空気 ($\alpha=2.0$), 越流水深 0.5 cm

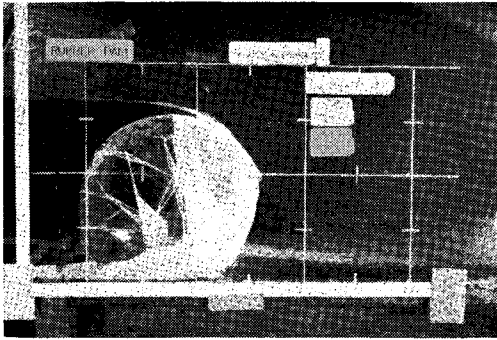


写真-9 越流, 内部空気, 越流水深 1.5 cm

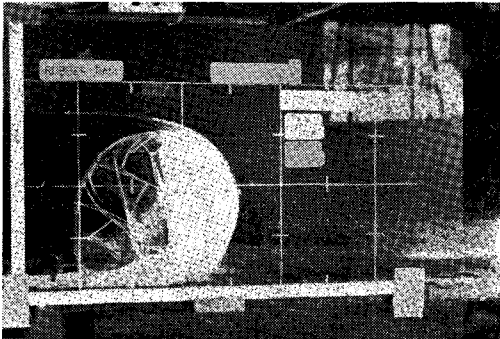


写真-10 越流, 内部空気, 越流水深 2.0 cm

る。なおこれらの実験モデルの写真は写真-1~4 (越流のない場合) 写真-5~10 (越流のある場合) に示してある。

9. 結 論

ダム内が水の場合と空気の場合について、ダムの形状についての理論曲線を求めた。とくに越流のある場合については、かなり大きな仮定を入れて曲線形を求めたが、実験の結果かなり良い一致をみた。それに付随してダム張力の修正の式、ダムのつぶれる限界の条件を求めることができた。これらによってダム設計の各種の要素を決定することができる。

今後に残されたダムに生ずる振動の解明とその対策、堆砂問題などがあるがこれらは引続いて研究中である。

参 考 文 献

- 1) Anwar, H.O. : Inflatable dams, Pr. A.S.C.E. (HY 3) May 1967.
- 2) 理工学のための数学ハンドブック, 丸善.
- 3) 林桂一・森口繁一: 高等関数表, 第2版, 岩波書店.
- 4) 春日屋伸昌: 新編 数値表, 学献社.
- 5) 東洋大学工学部水理研究室 : ラバーダムに関する実験研究報告書

(1969.10.13・受付)