

波の進行に直角水平方向の球の振動

STUDY ON SUBMERGED SPHERES VIBRATED
TRANSVERSLY TO THE WAVE DIRECTION河野 二 夫*
By Tsugio Kono

1. 緒 言

造波水路底に球状物体があって、これに表面波を与えるとその物体は波の進行方向および波の進行に直角方向に流体力を受ける。このような問題について著者らは研究を行ってきた^{1), 2)}。研究の結果ある程度明らかになった点もあるが、十分な解決に至るには今後の研究が必要である。とくに波の進行に直角方向の運動についてはきわめてむずかしい問題点が残されていると思う。

このような流体中の球の運動については古くから研究がなされている。とくに慣性項を無視した Stokes (1845) の抵抗式や慣性項を若干考慮することを試みた Oseen (1910) の近似解など十分知られている。

また Navier-Stokes の式に対する線形近似によって加速度をもつ球の問題を取扱った Basset (1888) の研究³⁾なども注目している。

最近是不規則な物体を水中で落下させてその抗力係数を求めるのに、その物体を球状に仮定した場合の比例定数 (Sphape factor) によって、実験値をうまく整理した George. R. Alger (1968) の論文⁴⁾もある。

以上の諸論文は主として1個の球についてであるが、多くの物体についての相互干渉に関する論文も最近発表されている。たとえば、Christopher の論文⁵⁾であるが、彼は2個の球を流れ方向に並べた場合の球に作用する流体力と2球の中心間の距離 (d) との関係 Stokes の解に準じて求めた。彼は上流側の球に作用する流体力を求めるのに、下流側の球を Point Force (その球によって流れが影響されないこと) と仮定して解を求めた。上下流の球径 (a) が全く等しい場合の球に作用する流体力 (D) を示すと次式になる。

$$D = 6\pi\mu a U_0 \left\{ 1 + 3/2 \left(\frac{a}{d} \right) \right\}$$

上式は d が十分大きいと Stokes の抵抗式になる。

さて、以上は主として流体力学的な観点に基づいた論文であると思うが、海洋工学的な面から海底構造物の模型を考えて球状物体に作用する波の問題を取扱ったものは著者の知る範囲では少ない。

R.F. Harleman ら⁶⁾ は球径 0.418 ft, 0.518 ft の2種類の球につき mooring line (原語で理解しやすいものはそのまま用いる) で造波水路底に固定した場合の moored sphere の振動と 1/4 in の steel rod で水路上部からつり下げた場合の fixed sphere の振動の問題を比較検討している (1958~1960)。

また Allen T. Hjelmfelt ら⁷⁾ は板ばねに球を取りつけた倒立振子を水路底面に固定し、板ばねの移動 (板ばねは水路面上を移動できる) による球の振動の history (動粘性係数、球径、固有振動数で定義される stokes-number により振幅がどのように影響するかを示す) を研究した (1967) などの報告がなされている。

本論文は1個の球および2個の球を波の進行と直角水平方向に固定し、表面波を与えた場合の振動 (波の進行と直角水平方向の振動で以下 Y 振動と仮称する) に関する論文である。

球は燐青銅の板ばね (幅: 9 mm, 厚さ 0.2~0.5 mm) に取りつけてあるので一定の方向しかたわまない。

1個の球の Y 振動についてはいろいろと複雑な問題点があるので本文では単に次元解析によって実験値を整理したにすぎない。また2個の球の Y 振動による干渉の問題については、流体を非圧縮完全流体としてポテンシャル理論を応用して理論的に考察した。後者の取扱いについては H. Lamb や M. Thomson の流体力学の著書^{8), 9)}にも示されている。しかし彼らのポテンシャルの式は結果的には近似的にしかその解がなされていないので著者はこの点について厳密な取扱いをできるだけ試みようとしたものである。したがって2個の球の Y 振動については M. Thomson らの理論をまず簡単に説明することに

* 正会員 東京工業大学助手 工学部土木工学科

する。

$2r_0$: 静止している球の中心間隔

$2q$: $c/M+m$

2. 記号の説明

本文で使用した主な記号の説明をつぎに示す (C.G.S 単位)。

- V : 速度ベクトル
- Ω : 質量力
- ∇ : ナブラ
- E : 運動エネルギー
- U : ポテンシャルエネルギー
- F : dissipation function
- P_k : 一般力
- q_k : 一般座標
- P : 球に作用する流体力
- ϕ : 速度ポテンシャル
- g : 重力の加速度
- t : 時間
- M : 球の質量
- m : 球の仮想質量
- u : 球の移動速度
- v : 水粒子水平速度成分
- ρ : 水の密度
- ω_0 : 振子の固有(角)振動数
- ω : $2\pi/T$
- ω_s : 振子の振動数
- T : 周期(波)
- H : 波高
- L : 波長
- h : 水深
- ν : 動粘性係数
- c : 減衰係数
- k : ばね定数
- d : 球の直径
- a : 球の半径
- x, y, z : 座標軸または球の変位
- $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$: $x(t), y(t), z(t)$ の導関数
- $2r$: 運動している球の中心間隔

3. 実験装置および実験内容

(1) 実験装置

実験に使用した水路は二次元造波水路で水路幅 60cm 水路延長約 11 m, 高さ 1 m のもので水路の半分は両面ガラス張りになっている。造波板は flap-type のもので約 24 c.p.m. ~ 90 c.p.m. の回転が可能である。実験に使用した球はプラスチック製品(セルロイドおよび塩化ビニル)であり, 板ばねは燐青銅を用いた。また波高計は抵抗線式波高計を使用した。

(2) 測定方法

図-1 に示したように燐青銅の板ばねに球を取りつけ, これを水路底に固定し表面波を与えた場合の球の振動を測定した。測定の内容は図-1 で A 球だけの 1 個の球による振動と, B 球を A 球に接近させた場合の 2 個の球による振動に大別される。振動の測定には板ばねの両面に strain gage (PL-stype) をはりつけ防水のため gage 面はアラルダイトでコーティングした。これをトランスデューサーとして板ばねの変位を直流増幅器でビジグラフに記録させた。

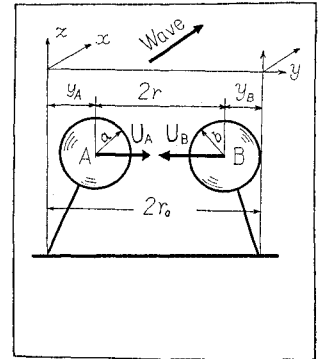


図-1 波動中の球の Y 振動

また同時に波高も記録できるようになっている。実験に使用した板ばねや球および波の諸元を表-1, 表-2 に示す。

(注) : 表-2 は 2 個の球の Y 振動についての実験内容

表-1 板ばねや波 諸元 (1 個の球の振動)

No.	振子									波				摘要
	球径 d (cm)	球の質量 M (g)	仮想質量 m (g)	板ばねの長さ (cm)	板ばねの幅 (cm)	板ばねの厚さ (mm)	板ばねの定数 (dyn/cm)	固有振動数 ω_0 (rad/s)	減衰係数 (g/s)	周期 T (sec)	波高 H (cm)	波長 L (cm)	水深 h (cm)	
7	3.75	24.4	13.8	10	1	0.4	0.51×10^4	13.25	47.3	0.75~1.9	4.5~14	135~380	50	30
9	3.75	2.47	13.8	10	1	0.4	1.08×10^4	22.8	37.9	0.67~1.9	3.5~12.7	63~380	50	30
10	3.75	2.47	13.8	10	1	0.4	1.08×10^4	22.4	41.8	0.67~1.9	3.7~13	63~380	50	30
11	3.75	24.4	13.8	10	1	0.4	0.65×10^4	13.35	27.5	0.65~0.68	6.8~8.8	66~72	50	30
12	3.75	24.4	13.8	10	1	0.4	0.51×10^4	13.35	43	0.67~1.5	3~7.6	63~260	40	30
15	3.75	2.47	13.8	7	1	0.4	3.12×10^4	34.9		0.66~1.6	3.5~10.8	88~261	40	30

表-2 板ばねや波の諸元 (2個の球の干渉実験)

No.	振 子									波				摘 要
	球径 d (cm)	球の質量 M (g)	仮想質量 m (g)	板ばねの長さ (cm)	板ばねの幅 (cm)	板ばねの厚さ (mm)	板ばねの定数 (dyn/cm)	固有振動数 ω_0 (rad/s)	減衰係数 (g/s)	周期 T (sec)	波高 H (cm)	波長 L (cm)	水深 h (cm)	
37	5.4	17	41	7.5	0.95	0.4	4.74×10^4	29	162	0.8 ~ 1.32	3.8~7	97~222	40	4
37	5.4	17	41	7.5	0.95	0.4	4.74×10^4	29	162	0.66~1.42	3.2~7	68~243	40	6.5
43	3.75	2.47	13.8	10	1	0.4	1.26×10^3	13.7	27	0.65~1.9	2.2~11	66~348	40	3
43	3.75	2.47	13.8	10	1	0.4	1.26×10^3	13.7	27	0.67~2.4	1.8~10.5	70~330	40	7
44	5.4	17	41	7.5	1	0.4	2.47×10^4	21.4	90.7	0.65~2.5	2.5~11.7	66~473	40	3
44	5.4	17	41	7.5	1	0.4	2.47×10^4	21.4	90.7	0.66~2.5	2.5~11.2	68~473	40	4.3
44	5.4	17	41	7.5	1	0.4	2.47×10^4	21.4	90.7	0.66~2.2	3.6~11.7	68~411	40	12

であるが、これは1個の球を用いて水路壁の近傍で実験したことになる。この点について納得できないことがあるかと思うが理由については後述する。

4. 1個の球による Y 振動

(1) 序 説

造波水路底におかれた1個の球が波によって波の進行に直角水平方向(Y振動)にどのような作用を受けるかについて検討した。このような問題に関連して一般によく知られているものは、一様流の中におかれた円柱や平板などに作用する揚力についてであろう。

物体に回転力を与えて投げると進行方向に垂直方向の力が作用する(この現象は野球ボールを投げる時など見られる)ことは1852年 Magnus が考えたものとされている。同様なことについて、たとえば循環を有する円柱を一様流の中におくと、揚力が作用することなどについて研究した Kutta (1902年) や Joukowski (1906年) の定理は十分知られている。

しかし上述のごとき回転の作用を物体に与えなくとも揚力は作用する。すなわち翼である。翼の問題に関連したものを考えると、平板を流れ方向に対しわずかに傾けると抗力に比較して十分大きな揚力が作用することである¹⁰⁾。このように流れに垂直方向の振動現象を特徴づけるものとして、Strouhal 数が定義されている。Strouhal 以後の研究について、G.H. Koopmann¹¹⁾ が記述した論文があるので彼の説明について簡単にのべて Y 振動の原因について少しでも把握しておきたい。

Strouhal (1878年) は Aeolian tones (風の作用で生ずる音: 著者の訳) に関する研究を発表した。これは一様速度の回転軸のまわりに鉛直の Wire を取りつけたものを使用し Wire の運動と空気(風)との作用で発生する音の振動数は Wire の径や速度に関係することを調べた。

また Lord Rayleigh (1879年) は Violin の系が風により振動するのを観察して、系の振動は風向きに鉛直

にした場合がより起こりやすいことを見出した。このことは Violin の系の風下側の Karman 渦の発生する可能な状態についてのべたものと考えられるであろう。

1908年 Benard は円柱の背後の渦列につき実験したが、後に Karman (1911年) によって理論的に解明されたことはよく知られている。風速などの時間的変動も物体に変動風圧として作用するが¹²⁾、このことに関する論文を最近 B.J. Vickery (1966)¹³⁾ が発表している。彼は 6 in × 6 in の4角柱の変動圧を風洞で実験し変動揚力係数(r.m.s)は迎え角の小さいところで大きな値になることを示している。

さて、以上のような文献から考えた場合1個の球の Y 振動の原因について簡単に結論づけることはできないが、やはり球の背後の後流、とくに渦の問題が主要な要素になるように著者は考える。そこで定常流の中に球を固定し、球の背後の状況を力マンガン酸加里を使用して撮影してみた。その結果球の下流側に比較的明白な渦輪が発生しているのを確認した¹⁴⁾。

(2) 次元解析

前項において球の背後の渦輪が Y 振動に関係する主要な要素の1つとして考えるのとべたが、このことはつぎのような推論に基づくものである。まず渦輪で囲まれる面のうち最小の面をなすものと渦輪面(Vortex Ring面)と仮称するならば、この面が流れ方向に垂直な場合は Y 振動は起こりにくい、この時の渦輪面は不安定である。渦輪面が安定な状態は、この面が流れ方向とある角度を有する場合である。したがって、この時は Y 振動が誘起される。

以上は著者の単なる推論に過ぎない。

つぎに Y 振動の要素と考えられるものは、造波水路で発生した波は波頂線が必ずしも波の進行方向に一様でないということである。このことについて著者は2回の実験を行なった。1回目は4本の波高計(お互いの波高計の感度も違い、かつお互い干渉をしているかもしれない)を用いて水路の横断方向の波形についての比較を行

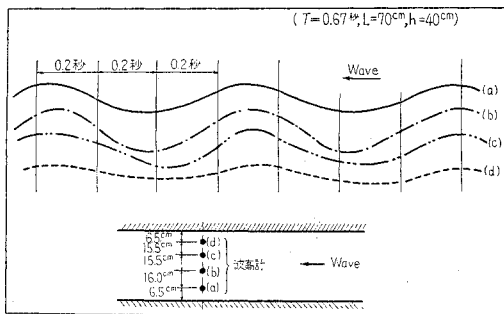


図-2 断面上の波形の変動

なった。その結果を 図-2 に示す。

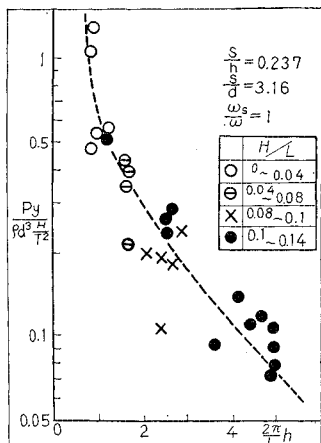
図によると確かに波頂線は曲っている。つぎに第2回目は干渉を防ぐための2個の特殊な波高計を水路横断方向に 11.2 cm の間隔に設置して同様の測定を行なった。波の周期は 0.65 秒と 1.13 秒、波高がおおの 7.5 cm, 8.6 cm の場合で水路水深 40 cm の場合について行なった。この場合は波頂線の曲りは第1回の実験ほどは認められなかった。以上のほか Y 振動の原因として球が正しい球でないとか、その他いろいろの原因が考えられる。ゆえに主要な要素が何であるかが明確にされない以上 Y 振動について理論的に考察することはできない。

したがって本文では次元解析によって実験値を整理した。

波動の中におかれた球に作用する外力に関する物理量としてつぎのものを仮定する。 $d, \omega, \omega_s, H, L, h, s, \rho$ 。ただし s は水底から球の中心までの高さを示す。球に作用する外力を P_y とおくと P_y は式(1)の関数形になる。

$$P_y = f(d, s, H, L, h, \rho, \omega, \omega_s) \dots \dots \dots (1)$$

式(1)の ω_s は振子の振動数を示す。独立変数に ρ, ω, d を選び次元解析をすると式(2)になる。



(水路中央)

図-3 1個の球の Y 振動

$$\frac{P_y}{\rho d^3 \omega^2} = \phi_2 \left(\frac{s}{h}, \frac{\omega_s}{\omega}, \frac{H}{L}, \frac{h}{L}, \frac{s}{d} \right) \dots \dots (2)$$

式(2)を多少変形すると式(2)'になる。

$$\frac{P_y}{\rho d^3 H/T^2} = \phi_3 \left(\frac{s}{h}, \frac{\omega_s}{\omega}, \frac{H}{L}, \frac{h}{L}, \frac{s}{d} \right) \dots \dots (2)'$$

式(2)'により、表-1 に示した実験値を整理したものが 図-3 である。

図-3 は 1 個の振子を水路の中央においた場合の Y 振動の外力を示したものである。図によると比較的統一された整理ができたと思う。

5. 2 個の球による Y 振動

(1) 序 説

図-4 に示すように 2 個の球の中心を結ぶ線が波の進行方向に対し直角水平方向にした場合に波動によって球が Y 振動する場合の干渉の問題を検討した。図で斜線の部分は 2 球の中心間隔が小さくなるほど流速は早くなり、したがってお互いの球には矢印し向きの流体力が作用することを L. Prandtl と O. Tietjens はのべている¹⁵⁾。しかしこの流体力を定量的に示した論文は著者の調べた範囲では見当らなかった。

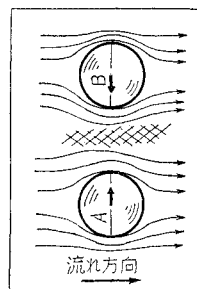
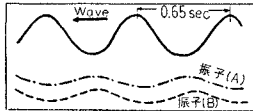


図-4 Y 方向

したがって著者はその流体力を H. Lamb や M. Thomson のポテンシャルの近似式を用いて計算した¹⁶⁾。その結果 Y 方向には何らの流体力も作用しないことを示したが、このことはきわめて重要なことと思うので、その理由を説明するためにもまづ彼らのポテンシャルの近似式について簡単な説明を行ない、それによって著者はどのように考えたかを述べたいと思う。

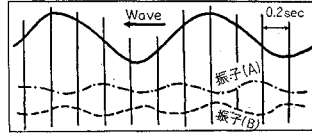
(2) 2 個の球の振動の状況

2 個の球の中心を結ぶ線が波の進行方向と直角水平方向になるように並べた場合の波動による Y 振動についての一列を 図-5 から 図-12 に示した。図-5 から 図-8 までは 2 球の中心間隔 ($2r_0$) を 4.1 cm に固定し、これに波動の周期を変化させた場合である。また 図-9 から 図-12 は周期をほぼ一定にして 2 球の中心間隔を変化させた場合である。図で (A), (B) の記号は波の進行方向に向って右側が A 球であることを示す。使用した球径はいずれも 1.88 cm、水深 40 cm、水底から球の中心までの位置は 9.38 cm である。また 図-5 から 図-8 では中空の球を使用したもので固有振動数は $\omega_A = 36$



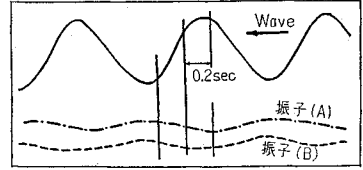
($2r_0=4.1$ cm, $T=0.85$ sec)

図-5 Y 振動



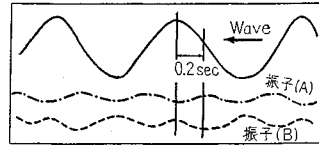
($2r_0=4.1$ cm, $T=1.15$ sec)

図-7 Y 振動



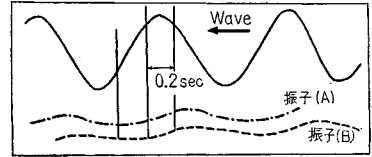
($2r_0=5$ cm, $T=0.92$ sec)

図-10 Y 振動



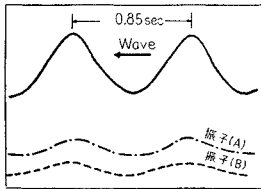
($2r_0=4.1$ cm, $T=1.44$ sec)

図-8 Y 振動



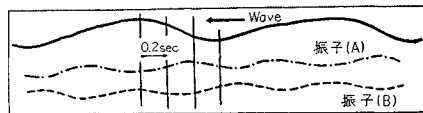
($2r_0=8.7$ cm, $T=0.93$ sec)

図-11 Y 振動



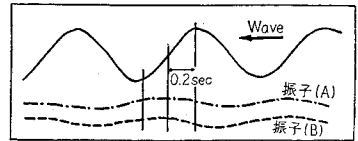
($2r_0=4.1$ cm, $T=0.65$ sec)

図-6 Y 振動



($2r_0=4.1$ cm, $T=0.94$ sec)

図-9 Y 振動



($2r_0=11.5$ cm, $T=0.9$ sec)

図-12 Y 振動

(rad/s), $\omega_B=38.5$ (rad/s) であるが、図-9 から 図-12 までは同じ球に水を入れた場合で固有振動数は $\omega_A=20$ (rad/s), $\omega_B=22.4$ (rad/s) である。

図によると波長が大になるほど、または2球の中心間隔が狭くなるほど干渉の効果が現われる。(球径/中心間隔) $\div 0.9$ で干渉の効果が表われている。

(3) 速度ポテンシャル (H. Lamb や M. Thomson の解)

図-4 でA球、B球が静止してこれに波を与える場合のy方向の流体力を問題にする場合は、図-13 で静水中をA球、B球が同一速度でx方向に運動する場合を考えればよい。このような問題を解く場合に2通りの考え方があると思う。

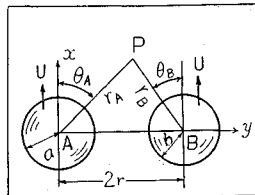


図-13

その一つは鏡像の方法であり、他の考え方は直接境界条件を満足するように Laplace の方程式を解くことである。これらの方法はいずれも Lamb や M. Thomson の Hydrodynamics に記されている。

たとえば A, B 球があって静止しているB球の方向にA球が運動する場合を考える。A球の中心をA点とするとA点の逆点A₁点をB球の中に考える。A₁点にA点と同じ強さの複源を仮定すると、それが鏡像の方法であ

る。さらにA₁点の逆点をA球の中を考え、このようにして無限の逆点における複源を仮定するとこれらの任意の体系は、この球面に対し鏡像になっているから、この球面を横切って流れはない。幾何学的には逆点の位置は式(3)で与えられる。

$$\overline{AB} - \overline{AA_1} = \frac{b^2}{\overline{AB}} \dots \dots \dots (3)$$

式(3)で \overline{AB} はA球、B球の中心距離、 $\overline{AA_1}$ はA球の中心と逆点A₁の距離、 b はB球の半径である。ただし式(3)は逆点A₁についての関係式であるからA₁の逆点A₂をA球内に考えると式(4)になる。

$$\overline{AA_1} - \overline{A_1A_2} = \frac{a^2}{\overline{AA_1}} \dots \dots \dots (4)$$

以下同様にして無限の逆点が得られる。なお逆点の複源の強さは Butler の定理により得られる。たとえばA₁点の強さは $\mu_1 = \left(\frac{b}{\overline{AB}}\right)^3 \mu_0$, A₂点なら $\mu_2 = \left(\frac{a}{\overline{AA_1}}\right)^3 \mu_1$ のようにしてA点の強さ μ_0 がわかれば無限に逆点の強さは得られる。

彼らはこのようにして2球が同一直線上を運動する場合のポテンシャルの厳密な値を求めたが結果的には球の半径が2球の中心間隔に比較して十分小さい場合についての近似解により球の運動エネルギーを計算している。このことが本論文でのY振動の外力を零にしている原因であることは、このつぎに示してある。

さて一般には鏡像の方法よりも、直接境界条件を満足

するような解を求める方法が簡単である。図-13でA, B球による速度ポテンシャル ϕ を式(5), 境界条件を式(6)とする。

$$\phi = \phi_A + \phi_B \dots \dots \dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{A球上で } \frac{\partial \phi_A}{\partial r_A} \Big|_{r_A=a} &= U \cos \theta_A, \quad \frac{\partial \phi_B}{\partial r_A} \Big|_{r_A=a} = 0 \\ \text{B球上で } \frac{\partial \phi_B}{\partial r_B} \Big|_{r_B=b} &= U \cos \theta_B, \quad \frac{\partial \phi_A}{\partial r_B} \Big|_{r_B=b} = 0 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

B球を考えないときのA球のまわりの速度ポテンシャル $\phi_{A'}$ は

$$\phi_{A'} = -\frac{Ua^3}{2r_A^2} \cos \theta_A \dots \dots \dots (7)$$

B球の近傍で $r_A = 2r$ と仮定すると(これが著者の問題とするところである)式(8)が成立する。

$$\frac{\cos \theta_A}{r_A^2} = \frac{r_A \cos \theta_A}{r_A^3} = \frac{r_B \cos \theta_B}{r_A^3} = \frac{r_B \cos \theta_B}{(2r)^3} \dots \dots \dots (8)$$

式(8)を式(7)に代入すると式(9)になる。

$$\phi_{A'} = -\frac{Ua^3}{2} \frac{r_B \cos \theta_B}{(2r)^3} \dots \dots \dots (9)$$

ゆえにB球上で式(6)の境界条件を満足するためのポテンシャルは式(9)と式(10)の和で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi_{A''} &= -\frac{Ua^3 b^3}{4(2r)^3 r_B^2} \cos \theta_B \\ &= -\frac{Ua^3 b^3}{4(2r)^3} \left\{ \frac{r_A \cos \theta_A}{(2r)^3} \right\} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

したがって, $\phi_A = \phi_{A'} + \phi_{A''}$ までの近似で考えると

$$\phi_A = -\frac{U}{2} a^3 \left\{ \frac{1}{r_A^2} + \frac{b^3 r_A}{2(2r)^3} \right\} \cos \theta_A \dots \dots (11)$$

以上のようにして求めると ϕ''' までの近似では式(12)になる。

$$\begin{aligned} \phi = \phi' + \phi'' + \phi''' = \\ -\frac{U}{2} a^3 \left\{ \frac{1}{r_A^2} + \frac{b^3 r_A}{2(2r)^3} + \frac{a^3 b^3}{4r_A^2 (2r)^6} \right\} \cos \theta_A \\ -\frac{U}{2} b^3 \left\{ \frac{1}{r_B^2} + \frac{a^3 r_B}{2(2r)^3} + \frac{a^3 b^3}{4r_B^2 (2r)^6} \right\} \cos \theta_B \end{aligned} \dots \dots \dots (12)$$

式(12)を用いてy方向の流体力を計算すると零になる。この理由は式(8)の仮定にある。つまり式(9)で変数は $r_B \cos \theta_B$ であり, この変数を図-13で調べるとその値はyの値には無関係である。結局B球上の位置が $y = 2r - b$ であっても, $y = 2r + b$ の点であってもポテンシャルはつねにB球の中心の位置で考えていることになる。

この仮定はA, B球が中心間隔に比較して十分に小さいとしたことによるものである。緒言において説明したChristophenの論文の中でPoint Forceという言葉は上述のような意味を有するのではないかと著者は思う。

(4) 速度ポテンシャル (著者の考え方)

H. Lamb や M. Thomson は2球の中心間隔に比較してお互いの球径が十分小さいと仮定したので, Y振動

の外力は得られなかった。そこで著者は, お互いの球面上の速度ポテンシャルは球面上の位置により異なると考えた。そのためには図-14に示すように三次元的に計算するとよい。

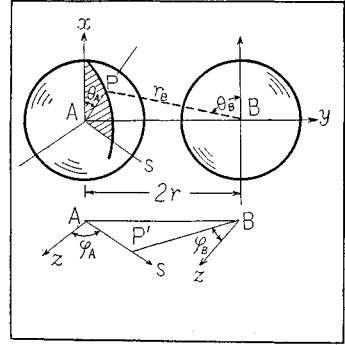


図-14

図-13でA, B

球による速度ポテンシャル ϕ を式(13)とする。

$$\left. \begin{aligned} \phi &= \phi' + \phi'' + \phi''' + \dots \\ \phi' &= \phi_{A'} + \phi_{B'} \\ \phi'' &= \phi_{A''} + \phi_{B''} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

ただし ϕ', ϕ'' などは ϕ の1次, 2次などの近似値である。また Suffix A, B はおのおの A, B 球に対応する。境界条件は式(6)で与えられる。図-14は図-13を三次元的に示したものである。図によると $r_A, r_B, 2r, \theta_A, \theta_B, \phi_B$ などの間には式(14)が成立する。ただし図で P' 点は P 点を z, y 平面に投影したときの z, y 平面との交点を示す。

$$\left. \begin{aligned} (r_A \sin \theta_A)^2 &= (r_B \sin \theta_B)^2 + (2r)^2 \\ -4rr_B \sin \theta_B \sin \phi_B \\ r_A \cos \theta_A &= r_B \cos \theta_B \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

式(14)を用いると式(15)が成立する。

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta_A}{r_A^2} &= \frac{r_B \cos \theta_B}{\{r_B^2 + 4r^2\}^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{6rr_B \sin \theta_B \sin \phi_B}{r_B^2 + 4r^2} \right. \\ &\quad \left. + (\text{微小項}) \right\} \\ \text{同様に} \\ \frac{\cos \theta_B}{r_B^2} &= \frac{r_A \cos \theta_A}{\{r_A^2 + 4r^2\}^{3/2}} \left\{ 1 + \frac{6rr_A \sin \theta_A \sin \phi_A}{r_A^2 + 4r^2} \right. \\ &\quad \left. + (\text{微小項}) \right\} \end{aligned} \dots \dots \dots (15)$$

式(15)を用いて式(6)を満足するように解けばよい。その方法は5.(3)にのべたと同様であるから, ここでは結論だけを示す。

$$\begin{aligned} \phi = & -\frac{Ua^3}{2r_A^2} \cos \theta_A - \frac{Ua^3 b^3}{4(b^2 + 4r^2)^{3/2}} \frac{\cos \theta_B}{r_B^2} \\ & \times \left[1 - \frac{3(b^2 - 4rb \sin \theta_B \sin \phi_B)}{b^2 + 4r^2} \right. \\ & \left. - \frac{30rb^3}{(b^2 + 4r^2)^2} \sin \theta_B \sin \phi_B \right] - \frac{Ub^3}{2r_B^2} \cos \theta_B \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} & -\frac{Ua^3b^3}{4(a^2+4r^2)^{3/2}} \frac{\cos\theta_A}{rA^2} \\ & \times \left[1 - \frac{3(a^2-4ra\sin\theta_A\sin\varphi_A)}{a^2+4r^2} \right. \\ & \left. - \frac{30ra^3}{(a^2+4r^2)^2} \sin\theta_A\sin\varphi_A \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

式(16)は式(13)で ϕ'' の近似値まで計算したものである。

(5) 球に作用する流体力

a) 流れによる流体力

流体の運動方程式は式(17)で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} = \mathbf{Q} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p \dots\dots\dots(17)$$

ただし p は閉曲面上の単位面積に作用する圧力である。質量力を考えないで、運動を非回転、非圧縮性流体とすれば、 $\mathbf{V} = \text{grad } \phi$ とすると、式(17)は式(18)になる。

$$p = \rho \left[F(t) - \frac{1}{2} (\text{grad } \phi)^2 - \frac{\partial \phi}{\partial t} \right] \dots\dots\dots(18)$$

$F(t)$ は積分定数である。 p の x, y, z 方向の成分を p_x, p_y, p_z とするとA球に作用する流体力は式(19)になる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= - \int_0^{\theta=\pi} \int_0^{\varphi=2\pi} (p)_{r_A=a} a^2 \cos\theta_A \sin\theta_A d\theta_A d\varphi_A \\ P_y &= - \iint (p)_{r_A=a} a^2 \sin^2\theta_A \sin\varphi_A d\theta_A d\varphi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

図-14でもし球が振動していれば、 $r_A, r_B, \theta_A, \theta_B, \varphi_A, \varphi_B$ の間には式(20)の関係が成立する。

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \{(x-x_0)^2 + (y-y_{0A})^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2} \\ r_B &= \{(x-x_0)^2 + (y-2r-y_{0B})^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2} \\ \text{および} \\ x-x_0 &= r_A \cos\theta_A = r_B \cos\theta_B \\ y-y_{0A} &= r_A \sin\theta_A \sin\varphi_A \\ z-z_0 &= r_A \sin\theta_A \cos\varphi_A = r_B \sin\theta_B \cos\varphi_B \\ y-y_{0B} &= 2r - r_B \sin\theta_B \sin\varphi_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

式(20)で x_0, z_0, y_{0A}, y_{0B} は球が運動しているときの静止位置からの x, z, y 軸上の距離を示す。本文では x_0, z_0, y_0 などは無視して流体力を計算する。式(16)を式(18)に代入しその結果を式(20)の関係をを用いて式(19)に代入すると式(21)になる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{2} \frac{b^3}{(a^2+4r^2)^{3/2}} \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{a^2b^3}{(a^2+4r^2)^{5/2}} + \dots\dots\dots \right\} \\ P_y &= \frac{54}{35} \frac{\rho \pi r a^3 b^3}{(a^2+4r^2)^{5/2}} \cdot U^2 \left\{ 1 - \frac{5}{2} \frac{a^2}{(a^2+4r^2)} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{b^3}{2(a^2+4r^2)^{3/2}} - \frac{11}{4} \frac{a^2b^3}{(a^2+4r^2)^{5/2}} \\ & + \frac{15}{4} \frac{a^4b^3}{(a^2+4r^2)^{7/2}} + \dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

同様の計算を H. Lamb や M. Thomson の近似式式(12)で計算すると式(22)になる。

$$\left. \begin{aligned} P_x &= -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{b}{r} \right)^3 + \dots\dots\dots \right\} \\ P_y &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

b) 波動による流体力

式(21)の P_y は2球が静止していて、これに速度 U の流れがある場合のA球に作用する y 方向の流体力である。波動の場合は波の速度ポテンシャルを ϕ とすると

$$\begin{aligned} v = \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \\ & \cdot \sin \left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t \right) \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

ゆえに式(21)の U^2 は球径に比較して波長が十分大きいと式(24)になる。

$$\begin{aligned} U^2 = (-v)^2 &= \frac{(H\omega)^2}{4} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 \\ & \cdot \sin^2 \omega t \dots\dots\dots(24) \end{aligned}$$

式(24)を式(21)に代入するとA球に対する流体力として

$$\left. \begin{aligned} P_y &= 2P_0 \sin^2 \omega t = P_0 (1 - \cos 2\omega t) \\ P_0 &\doteq \frac{1}{5} \cdot \frac{\rho \pi H^2 \omega^2 a^3 b^3 r}{(a^2+4r^2)^{5/2}} \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

ただし P_0 は P_y の振幅を示す。なおB球についても類似の流体力が得られるが本文では省略する。

式(25)を無次元の形に書き直すと、

$$\begin{aligned} \bar{P}_0 &= \frac{P_0}{\frac{4}{5} \cdot \rho \cdot \pi^3 \left(\frac{Hb}{T} \right)^2 \cdot \frac{b}{a}} \\ &= \frac{\left(\frac{a}{r} \right)^4 \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2}{\left\{ 4 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right\}^{5/2}} \dots\dots\dots(26) \end{aligned}$$

または、

$$\bar{P}_0 = \frac{P_0 \left\{ 4 + \left(\frac{a}{r} \right)^2 \right\}^{5/2}}{\frac{4}{5} \cdot \rho \cdot \pi^3 \left(\frac{Hb}{T} \right)^2 \cdot \frac{ba^3}{r^4}}$$

$$= \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 \dots\dots\dots (27)$$

式 (26), (27) で $(h+z)$ は水底から球の中心までの高さを示す。

(6) 振動方程式とその解

a) 運動エネルギー

図-1 に示すように球 A, B がおのおの U_A, U_B の速度で向い合って運動する場合の流体の運動エネルギーと球自身の運動エネルギーの和は式 (28) で示される¹⁷⁾。

$$E = \frac{1}{2} \cdot (M_A + m_A) U_A^2 + \frac{1}{2} (M_B + m_B) U_B^2 + \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^3} \cdot U_A U_B \dots\dots\dots (28)$$

b) 振動方程式

減衰力, および保存力以外の一般力 P_k も考えた時の Lagrange の運動方程式は式 (29) で与えられる¹⁸⁾。

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = P_k \dots\dots (29)$$

ただし $k=1, 2, \dots, n$ (自由度: n)

式 (29) の dissipation function (F) とポテンシャルエネルギー (U) は式 (30) になる¹⁹⁾。

$$\left. \begin{aligned} F &= \frac{1}{2} C_A \dot{y}_A^2 + \frac{1}{2} C_B \dot{y}_B^2 \\ U &= \frac{1}{2} k_A y_A^2 + \frac{1}{2} k_B y_B^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

また 図-1 より

$$2r = 2r_0 - y_A - y_B \dots\dots\dots (31)$$

ゆえに以上の式 (28), (30), (31) を式 (29) に代入すると式 (32) の振動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} (M_A + m_A) \ddot{y}_A + \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^3} \ddot{y}_B + \frac{3 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^4} \dot{y}_B^2 + k_A y_A + C_A \dot{y}_A &= P_{yA} \\ (M_B + m_B) \ddot{y}_B + \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^3} \dot{y}_A^2 + k_B y_B + C_B \dot{y}_B &= P_{yB} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ただし, 式 (28) の u_A, u_B はおのおの \dot{y}_A, \dot{y}_B に書きかえた。

もし A 球, B 球が全く同じものとすれば, $b=a$ とおくと,

$$\left\{ M+m + \frac{3ma^3}{8r^3} \right\} \ddot{y} + c\dot{y} + ky + \frac{9ma^3}{16r^4} \dot{y}^2 = P_y \dots\dots\dots (33)$$

式 (33) は 図-15 に示すように 1 個の倒立振子が直立壁に向かって振動する場合の方程式でもある。

c) 振動方程式の解

式 (31) の関係から,

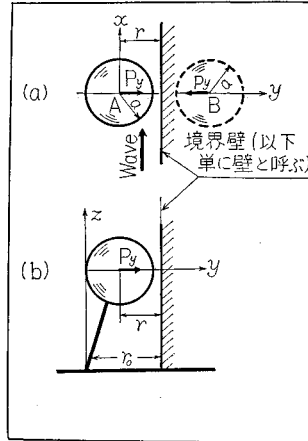


図-15

$$\frac{1}{8 r^3} = \frac{1}{(2r_0 - y_A - y_B)^3} = \frac{1}{8 r_0^3} \left\{ 1 + 3 \left(\frac{y_A + y_B}{2 r_0} \right) + 6 \left(\frac{y_A + y_B}{2 r_0} \right)^2 + \dots \right\} \dots\dots\dots (34)$$

式 (32) の解を式 (35) と仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y_A &= y_{A0} + \epsilon_A y_{A1} + \epsilon_A^2 y_{A2} + \dots \\ y_B &= y_{B0} + \epsilon_B y_{B1} + \epsilon_B^2 y_{B2} + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

式 (34) の関係を用いて式 (35) を式 (32) に代入すると式 (36) になる。ただし式 (32) で左辺第 3 項は十分小さいと仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon = \epsilon^0 \text{ の場合} \\ \left. \begin{aligned} \ddot{y}_{A0} + 2q_A \dot{y}_{A0} + \omega_0 A^2 y_{A0} + K_A \dot{y}_{B0} &= P_{yA} / (M_A + m_A) \\ \ddot{y}_{B0} + 2q_B \dot{y}_{B0} + \omega_0 B^2 y_{B0} + K_B \dot{y}_{A0} &= P_{yB} / (M_B + m_B) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36) \\ \epsilon = \epsilon^1 \text{ の場合} \\ \left. \begin{aligned} \ddot{y}_{A1} + 2q_A \dot{y}_{A1} + \omega_0 A^2 y_{A1} + K_A \dot{y}_{B1} &= -\dot{y}_{B0} (y_{A0} + y_{B0}) \\ \ddot{y}_{B1} + 2q_B \dot{y}_{B1} + \omega_0 B^2 y_{B1} + K_B \dot{y}_{A1} &= -\dot{y}_{A0} (y_{A0} + y_{B0}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37) \end{aligned} \right\}$$

ただし $2q = \frac{c}{M+m}, \omega_0^2 = \frac{k}{M+m}, K = \frac{2 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^3 (M+m)}, \epsilon = \frac{3 \rho \pi a^3 b^3}{8 r^4 (M+m)}$ であり, かつ suffix A, B はおのおの A 球, B 球に対応する。

式 (36) の解として式 (38) を仮定する。

$$\left. \begin{aligned} y_A &= a_0 + a_1 \sin 2\omega t + a_2 \cos 2\omega t \\ y_B &= b_0 + b_1 \sin 2\omega t + b_2 \cos 2\omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

なお P_{yA}, P_{yB} は式 (25) で与えられるが本文では $P_{yA} = P_{yB} = P_y$ とする。式 (38) を式 (36) に代入すると 0 次近似解がつぎのように得られる。ただし解がきわめて複雑であるため, 減衰項は十分小さいとして無視した。

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{|P_y|}{2\omega_0 A^2 (M_A + m_A)}, \\ b_0 &= \frac{|P_y|}{2\omega_0 B^2 (M_B + m_B)}, \quad a_1 = \frac{A a_1}{A}, \quad a_2 = \frac{A a_2}{A} \\ b_1 &= \frac{A b_1}{A}, \quad b_2 = \frac{A b_2}{A} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ただし $|P_y|$ は式 (25) の $2P_0$ に相当する。

$$\left. \begin{aligned} A &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & \beta_2 & \beta_1 \end{vmatrix}, & A_{a.1} &= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ -\alpha_A \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 \\ 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ -\alpha_B - \beta_3 & 0 & \beta_1 \end{vmatrix} \\ A_{a.2} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & -\alpha_A & 0 & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\alpha_B & 0 & \beta_1 \end{vmatrix}, & A_{b.1} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & -\alpha_A & -\alpha_3 \\ -\beta_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & -\alpha_B & \beta_1 \end{vmatrix} \\ A_{b.2} &= \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & -\alpha_3 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & -\alpha_A \\ -\beta_3 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & -\beta_3 & 0 & -\alpha_B \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(40)$$

式 (39), (40) を用いて式 (38) を書き直すと,

$$\left. \begin{aligned} y_A &= a_0 + \frac{|\alpha_A \beta_1 + \alpha_3 \alpha_B|}{|\alpha_1 \beta_1 - \alpha_3 \beta_3|} \cdot \cos 2\omega t \\ y_B &= b_0 + \frac{|\alpha_B \alpha_1 + \beta_3 \alpha_A|}{|\alpha_1 \beta_1 - \alpha_3 \beta_3|} \cdot \cos 2\omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(41)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_0 A^2 - 4\omega^2, \quad \beta_1 = \omega_0 B^2 - 4\omega^2, \\ \alpha_A &= \frac{|P_y|}{2(M_A + m_A)}, \quad \alpha_3 = \frac{\rho \pi a^3 b^3}{r_0^3 (M_A + m_A)}, \\ \beta_3 &= \frac{\rho \pi a^3 b^3}{r_0^3 (M_B + m_B)}, \quad \alpha_B = \frac{|P_y|}{2(M_B + m_B)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(42)$$

とくに簡単な場合として $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_3 = \beta_3, \alpha_A = \alpha_B$ とおくと, (A, B 球が全く同一)

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{|P_y|}{2(M+m)\omega_0^2} \\ &\times \left[1 + \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2 \right]}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

式 (43) は 図-15 に示すように 1 個の球が直立壁に向って振動する場合の変位を与える式である。式 (43)

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} &= \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{|P_y|}{2(M+m)\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2 \right]}} \\ &= \frac{P_0}{(M+m)\omega_0^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2 \right]}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

式 (46) に式 (25) を代入して多少変形し無次元の形にすると,

に相当する式は式 (33) から直接誘導することもできる。式 (33) を摂動法により直接求めた解の 0 次近似の結果だけをつぎに示しておく。

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{|P_y|}{2(M+m)\omega_0^2} \\ &\times \left[-1 \frac{\sin(2\omega t - \delta)}{\sqrt{\left[-1 \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2 + \left(\frac{4q\omega}{\omega_0^2}\right)^2 \right]}} \right] \\ \tan \delta &= \frac{\left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\} - 1}{4q\omega/\omega_0^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

式 (44) で減衰項は十分小さいとして無視し $\delta = \pm \frac{\pi}{2}$ とすると,

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{|P_y|}{2(M+m)\omega_0^2} \\ &\times \left[1 \mp \frac{\cos 2\omega t}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2 \right]}} \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

式 (45) の関係をグラフに示すと 図-16 のようになる。

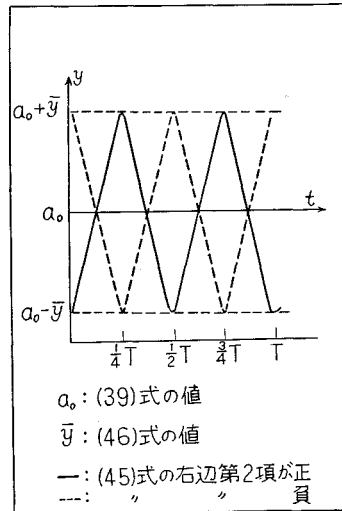


図-16 式 (45) の波形 (略図)

ゆえに平均値な振幅を \bar{y} とすると,

$$\bar{y} = \frac{\bar{y}}{\frac{3}{320} \left(\frac{H}{r_0}\right)^2 \cdot \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2} \dots (47)$$

$$= \frac{m}{M+m} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \left\{ 1 + \left(\frac{a}{2r_0}\right)^2 \right\}^{-5/2} \cdot \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2 \right] \left\{ 1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3 \right\}^2}}$$

(7) 実験結果と考察

図-15 に示すように同じ2個の球が波動の中で接近しておかれた場合 (a) 図に示すように y 軸上をお互い合せて振動するときは、2球の間隔の垂直に2等分される平面 (図で境界壁と名称した) に関してはお互いの球は鏡像の関係にある。したがってこの面に固体壁を置いても流体や球の運動は変わらない。ゆえに同一球の干渉の問題は 図-15 の (b) に示すように壁の近傍におかれた1個の球が波によって y 方向に振動する問題に等しい。著者は異なる2個の球を水路中央においたときの干渉の状況を 図-5~図-12 に示した。しかしこれを理論式 (41) で整理するのは大変なことである。

したがって本文の主な実験は、最も簡単な場合として2個の球が全く同一と考えて 図-15 の (b) に示すように水路壁面を境界壁と仮定し、水路壁面の近傍で1個の球による振動実験を行なった。

a) 壁の近くの固有振動 (静水中)

倒立振子を壁に近づけて自由振動させると固有振動数が小さくなることは以前発表したが¹⁷⁾振動状況の一例を 図-17 に示した。図で r_0 は直立壁と静止しているときの球の中心との距離、 a は球の半径、 ω_0 は r_0 が無限大

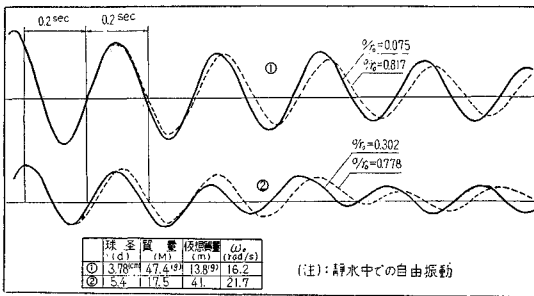


図-17 壁の近くの球の振動 (Y 方向の振動)

の時の固有振動数である。図で振動数の減少の割合は理論的に計算される。すなわち式 (33) で $P_y=0$ の時の解を求めると、

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3}} \dots (48)$$

ただし ω は 図-17 から読み取れる値で壁に接近させた時の振動数である。

(注)：壁の近傍という表現は2個の球を接近させた時というように解釈されたい。

b) 壁の近くの振動 (波動による)

波動の中で壁の近傍に倒立振子をおいて振動させたときの状況を 図-18 から 図-20 に示した。これらの図は先に示した 図-5 から 図-12 と同じ内容のものである。図から判断すると波長が大きいと壁に近づくほど (2球が接近するの意味) 大きく振動している (図-20)。波長が短いと壁から離れた所ほど大きな振動をするが、壁に近づくにしたがって振幅は小さくなり、しかも壁に十分近づく (2球を十分接近させるの意味)、また振幅は大きくなる (図-18)。

波長が上記の中間程度の場合は壁から離れた所では振幅はそれほど大きくないが、壁に近づくとき急激に大きな振幅になり、しかも最大波高付近で壁方向に引き寄せられた形の振動になる (図-19)。

以上の事実を要約すると、球が壁に十分接近する (2

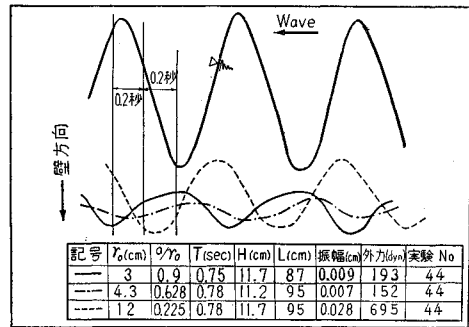


図-18

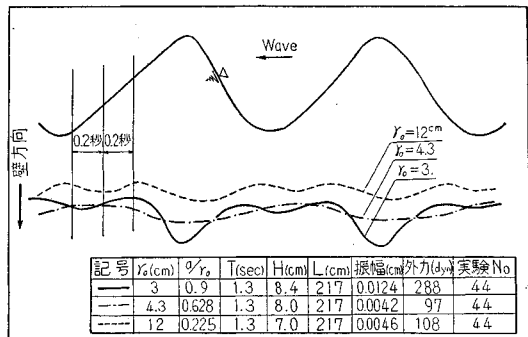


図-19

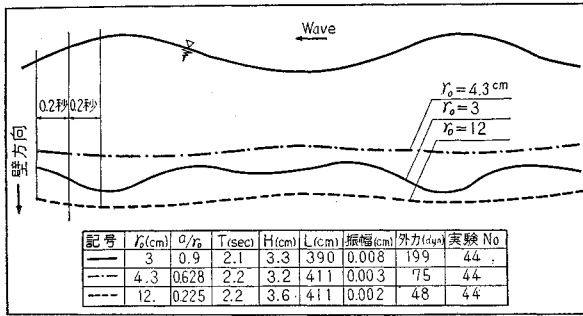


図-20

個の球を接近させることと同じ)と干渉の効果が現われるということになるが、このことは2個の球を接近させたことによる球のまわりの流れの状況が、球の中心を通る流れ方向の軸(図-4参照)の右左で非対称になっていることが予想される。

この予想が既述したような理論計算を行なった物理的理由にもなっている。

c) 球に作用する波動による外力

式(25)をグラフで示すとよくわかるが、球に作用する外力は常に正の値(境界壁の方向)である。しかし本文ではその平均的な振幅P₀によって実験値を整理した。

式(26), (27)と実験値の比較を図-21~図-23に示した。

ただし動的な外力を求めるための増幅率(M)は減衰

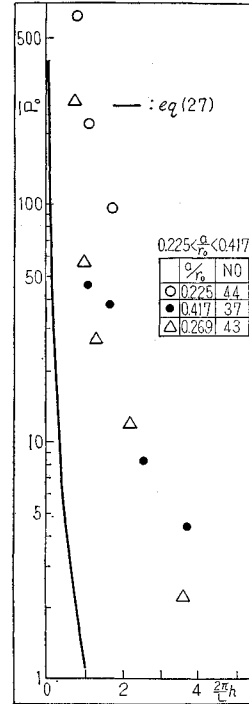


図-23 境界壁から十分融れる場合

項を考えないと、式(25), (46)により、

$$M = \frac{\bar{y}}{y_{st}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{2\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 \left\{1 + \frac{3m}{8(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}^2}} \quad \dots\dots\dots(49)$$

式(49)で $y_{st} = \frac{P_0}{k}$ である。

ただし式(26), (27)で $\cosh \frac{2\pi}{L}(h+x) = 1$ と仮定した。また図-5~図-12, 図-18~図-20を見ると境界壁の近くでは(2球を十分接近させる)実際の振動波形は確かに波の振動数の2倍になっているかあるいはその傾向がみられる。しかし境界壁から離れると波と同じ振動数になっているものが多い。ゆえに式(49)の値は後者に対しては $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2}$ として計算した。

たとえば図-18のすべての r_0 , 図-19の $r_0 = 4.3$ cm, 図-20の $r_0 = 4.3$ cm, 12 cm の場合は波と同一振動数と見なして $\omega \rightarrow \frac{\omega}{2}$ とした。

以上の結果によると振子が境界壁に接近するほど(2個が接近すること)実験値と理論は一致する傾向にある。

d) 変位

式(47)と実験値の比較を図-24に示した。図から判断すると2球が十分接近した場合は理論と実験値の傾

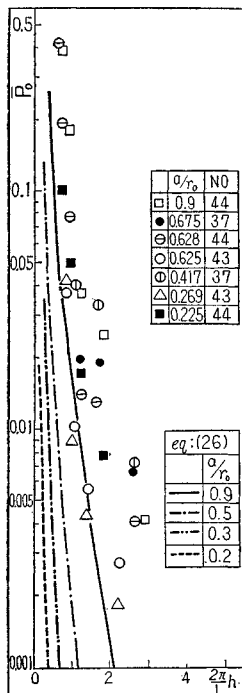


図-21 P₀とr₀の関係

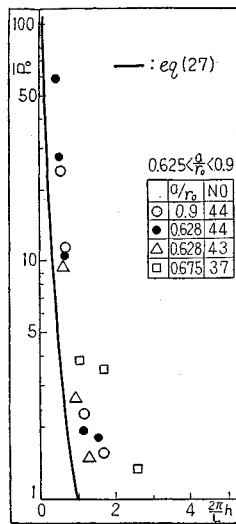


図-22 境界壁近傍

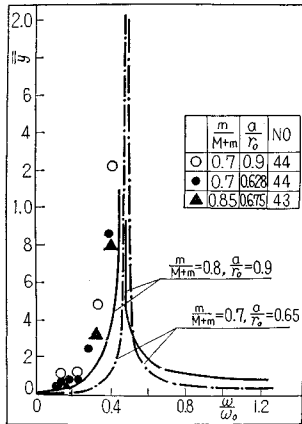


図-24 振幅の理論と実験値
理論式 (47)

向は一致する。

6. 結 論

波動の中におかれたY振動について論じたわけであるが、非常に複雑な振動をしているため簡単に結論するのは問題がある。ただつぎのようなことはいえると思う。

(1) 波動の中におかれた1個の球の振動は図-3に示すように次元解析によって実験値の整理が比較的できる。ただしこの原因が図-2に示すように造波水路の波形が複雑なためY振動を生じたものとするれば、この結論は一般性を失するかもしれない。

(2) 2球を十分接近させると(または球を境界壁に近づけると)干渉の効果が現われる(図-5~図-12, 図-18~図-20)。

(3) 干渉の度合いは波長の大きなるほど強く(図-5~図-8)また2球の中心間隔の小さいほど大きい(図-9~図-12)。さらに図-9~図-12だけで判断すると $\frac{d}{r_0} \approx 0.9$ 以上になると干渉し合う(d : 球径, r_0 : 中心間隔)。

(4) 振子を境界壁に接近させるほど(2球を接近させるほど)振子の振動数は小さくなる(図-17)。

(5) H. Lamb や M. Thomson の著書に書かれたポテンシャルの式を用いて計算するとY振動に対する外力は零になる(式22)。この理由は図-13で説明すると、2球の区間距離($2r$)に対し球径が十分小さいと仮定したためである。そうするとA球のポテンシャルはB球上では、B球の中心を通るx軸の右左で対称になる。このことはY振動の外力が球の中心を通るx軸の右左($-a, +a$ の範囲)で等しい結果になる。A球についても同様のことがいえる。したがって($2r$)に対し球径を無視できない場合を考えるとよい。そこで三次元的な取

扱いをすると式(21), 式(47)が得られる。これらの理論と実験値は振子が接近するほど一致する傾向がある。

本研究にあたり終始ご指導頂いた東京工業大学吉川秀夫教授ならびに椎貝博美助教授に対し深甚の謝意を表します。

最後に式(21)の計算にあたり東京工業大学4年生(当時)坪井修君と討議を行なった。ここに謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 椎貝博美・河野二夫: 波動による球の振動, 第15回土木学会海岸工学講演会講演集, 1968年12月, pp. 97~102.
- 2) Shi-igai, H. and Kono, T.: Study on Vibration of Submerged Spheres Caused by Surface Waves, Coastal Engineering in Japan, 1969.
- 3) Basset, A.B.: On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Vol. 43, p. 179, 1888.
- 4) George R. Alger, et al: Fall Velocity of Irregular Shaped Particles, A.S.C.E. Jour. of H.D. May 1968.
- 5) Christopher K.W. TAM: The Drag on a Cloud of Spherical Particles in Low Reynolds Number Flow, Jour. Fluid, Mechanics, Vol. 38, Part 3, pp. 537~546, 1969.
- 6) D.R.F. Harleman and W.C. Shapiro: The Dynamics of a Submerged Moored Sphere in Oscillatory Waves, Coastal Engg. Vol. 12, Chapt 41, 1961.
- 7) Allen T. Hjelmfelt, et al: Dynamic Response of a Restrained Sphere in a Fluid; Proc. A.S.C.E., EM1, February, 1967.
- 8) L. M. Milne-Thomson: Theoretical Hydrodynamics, 5th Edition, pp. 483~493, pp. 517~530.
- 9) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th Edn, Cambridge, (pp. 130~134).
- 10) L. Prandtl, O. Tietjens., 揚力論: 航空流体力学(下巻), p. 131. (訳書)
- 11) Koopmann., G.H.: The Vortex Wakes of Vibrating Cylinders at Low Reynolds Numbers, Jour. Fluid Mech. Vol. 28, Part 3, 1967, pp. 501~512.
- 12) 土木技術者のための振動便覧: 土木学会, p. 197.
- 13) B.J. Vickery., Fluctuating Lift and Drag on a Long Cylinder of Square Cross-section in a Smooth in a Turbulent Stream, Jour. Fluid, Mech, Vol. 25, Part 3, pp. 481~494, 1966.
- 14) 椎貝・河野・山崎: 水中におかれた球状物体の波による振動とその防止法, 土木学会第24回年次講演会, pp. 23~26, 昭44.
- 15) L. Prandtl and O. Tietjens.: 航空流体力学(下巻), pp. 104~105, (新羅, 宮崎, 古賀の共訳) コロナ社出版.
- 16) 河野・椎貝: 波による2個の球の干渉: 土木学会論文報告集, No. 178, 1970年6月
- 17) 河野・椎貝: 重複波の中におかれた球の振動, 土木学会第14回水理講演会, 1970年2月.
- 18) Cyril M. Harris and Charles E. Crede: Shock and Vibration Hand book Vol. 1, pp. 2 of the 25, 26.
- 19) 高橋利衛: 振動工学演習(11), アーム社, pp. 4~6

(1969. 12. 18・受付)
(1970. 4. 2・再受付)