

有限要素法による粘弾性体の解析法

A NUMERICAL ANALYSIS ON VISCO-ELASTIC STRUCTURES
BY THE FINITE ELEMENT METHOD

堀井 健一郎*・川原 睦 人**

By Kenichiro Horii and Mutsuto Kawahara

1. 緒 言

粘弾性体の応力解析は、J. Hult, F.K.G. Odqvist, J.F. Besseling などにより多くの解析解が求められており、また近年発達のめざましい電子計算機を用いた有限要素法の適用に関する研究も見受けられるようになってきた。この報告も、有限要素法により、粘弾性体を解析する一つの方法を提案するものである。有限要素法の適用に際して基礎となる変分原理は、粘弾性体の場合について、M.A. Biot¹⁾, M.E. Gurtin²⁾ などにより確立されている。

一般に、粘弾性体の応力ひずみ関係は、緩和関数、遅延関数などを用いて積分表示される場合と、レオロジーモデルなどにより微分表示される場合とがある。有限要素法の適用に関する既存の研究も、大別してこの2つの部類に分けることができる。前者に属するものとして、文献 3)~6), 9), 14), 15), 24), 25) があり、後者に属するものでは、文献 10)~13), 16)~19) をあげることができる。文献 7), 8) などではクリープひずみが流れ理論による場合について、弾塑性解析と同様にしてクリープの解析ができることを指摘している。

J.T. Oden^{3), 4)} は、荷重履歴を含む非線型応力ひずみ関係による、きわめて一般的な連続体について有限要素法の適用を論じている。しかし、具体的な計算の方法については明示していない。R.L. Taylor, T.Y. Chang, K.S. Pister それに G.L. Goodreau^{5), 6), 24)} らは粘弾性体の応力ひずみ関係を緩和関数で与え、連立の積分方程式系を誘導し、これを解析する方法を提案している。J.L. White¹⁴⁾ は同様に応力ひずみ関係を積分表示で与え、解式を stiffness matrix 形式に変形することにより解く方法を示している。D.W. Malone および J.J. Corner⁹⁾

は、同様の方法で、動的問題も解析し得ることを指摘している。F.D.S. Lynch²⁵⁾ は積分表示された応力ひずみ関係を差分により置き変える方法を用いて粘弾性体の接触問題を解析し実験と比較している。

O.C. Zienkiewicz, M. Watson および I.P. King¹⁶⁾ はクリープひずみが、多要素 Voigt モデルにより与えられるとして、深いトンネルの解析を行なっている。同様に、林^{10)~13)} は、岩盤の収束性クリープを Voigt モデルにしたがうとして、これにより換算節点力を求める方式による独自の有限要素法を展開している。藤田・桜井⁹⁾ は応力ひずみ関係を増分により表わし、上記2つの文献と同様に換算節点力による解法を用いている。

粘弾性体の応力ひずみ関係を微分表示しておき、これをラプラス変換すると、良く知られるように弾性体と相似の関係を得るが、このラプラス変換後の関係に有限要素法を適用して、さらに逆変換を数値的に行なうことが、田中^{18), 19)}, J.P.H. Webber¹⁷⁾ により、それぞれ独自に行なわれている。畑野・渡辺²³⁾ は、非線型 Maxwell-Kelvin モデルにより土の動的性質が、良く説明されることを指摘し²²⁾、このモデルによるアース ダムの地震応答解析を階差法を用いて行なっている²³⁾。

この報告では、粘弾性体の応力ひずみ関係がレオロジーモデルにより与えられる場合を対象とし、この関係が補助変数を用いて表示すると、一階の連立微分方程式系により表わされることに着目する。この時点で、時間に関係する微分を差分に置き変えると、補助変数を含んだ形式の応力ひずみ関係を得るので、これを用いて有限要素法を適用すると逐次進行型の解式を得ることができる。この解式にしたがって計算を進めると、具体的な計算が簡単であり、有限要素法を用いる場合とかく問題となる大量のデータ処理に対して、逆行列の計算のみで計算が進むためわりあい簡単に対策を立てることができ

る。
レオロジーモデルは、よく材料の動的性質をあらわす

* 正会員 早稲田大学教授 理工学部土木工学科

** 学生員 工修 早稲田大学大学院理工学研究科建設工学専攻

場合に用いられるが、ここに述べる方法は準静的問題のみならず、動的問題に対しても適用しうるものである。

さらに、実際の材料においては、非線型モデルにより粘弾性的性質が説明される場合が多いが、この解法は、逐次進行型の解式であるから、きわめて簡単に、非線型モデルへの拡張が可能である。

2. 粘弾性体の応力ひずみ関係の行列による表示

(1) レオロジーモデルにより表わされる応力ひずみ関係

レオロジー要素は、簡単のためばね (G), ダッシュポット (C) のみであるととし、まず単軸応力状態について説明する。与えられたレオロジーモデルについて、ば

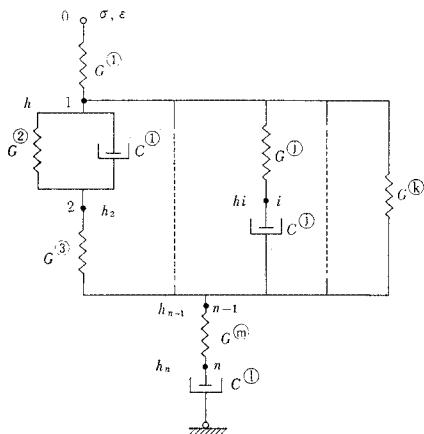


図-1 レオロジー要素の付番

ね要素およびダッシュポット要素にそれぞれ、①, ②, ……⑩ および ①, ②, ……① の番号を任意につける (図-1 参照)。第①ばね要素, 第①ダッシュポット要素について、応力 $\sigma_{①}$ とひずみ $\epsilon_{①}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{①} &= G_{①} \epsilon_{①} \text{ (ばね要素 } i=1, 2, \dots, \text{⑩)} \\ \sigma_{①} &= C_{①} \dot{\epsilon}_{①} \text{ (ダッシュポット要素 } i=1, 2, \dots, \text{①)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

と関係づけられる。* は時間に関する微分をあらわしている。レオロジー要素間の接点にも 0, 1, 2, …, n の番号をつける。0 はレオロジーモデルの端に対応し他端は固定と考えて、これには番号をつけない。あとは任意につけてよい。

行の数が接点の総数に等しく、列の数がばね要素の総数 (ダッシュポット要素の総数) に等しい行列 $[K_G]$ ($[K_C]$) を考え、いま第①ばね要素 (ダッシュポット要素) が第 j 接点および第 k 接点に接続しているときには、 $[K_G]$ ($[K_C]$) の第 ji 要素を 1, 第 ki 要素を -1 とし、他の要素は 0 とする。

つぎに、行と列の数がばね要素の総数 (ダッシュポット要素の総数) に等しい行列 $[A_G]$ ($[A_C]$) を考え、第①ばね要素の弾性係数 $G_{①}$ (第①ダッシュポット要素の粘性係数 $C_{①}$) を、この行列の第 ii 対角要素とし、他の要素は 0 とする。

以上のごとく定義された行列を用いると、有限個のばね要素とダッシュポット要素をもつレオロジーモデルによって与えられる応力ひずみ関係が、補助変数を h_1, h_2, \dots, h_n とし、式 (2)

$$\begin{aligned} [K_G][A_G][K_C]^T \cdot \{e\} \\ + [K_C][A_C][K_C]^T \cdot \{\dot{e}\} = \{\sigma\} \dots\dots\dots (2) \\ \{e\}^T = \{\epsilon, h_1, h_2, \dots, h_n\} \\ \{\sigma\}^T = \{\sigma, 0, 0, \dots, 0\} \end{aligned}$$

と表わすことができる。T は展置記号である。

式 (2) をあらためて式 (3) のごとく表わしておく。

$$[B_G]\{e\} + [B_C]\{\dot{e}\} = \{\sigma\} \dots\dots\dots (3)$$

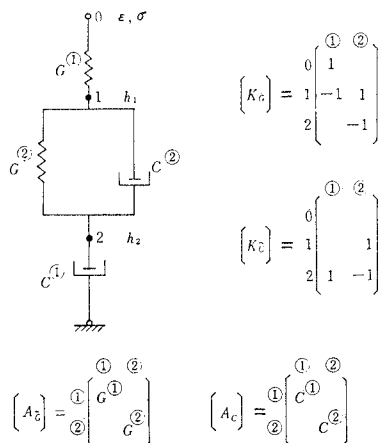


図-2 Burger モデルとその行列表示

図-2 に Burger モデルについての $[K_G]$, $[K_C]$, $[A_G]$, $[A_C]$ を示す。またこの場合には式 (3) はつぎのごとくである。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} G_{①} & -G_{①} \\ -G_{①} & G_{①} + G_{②} & -G_{②} \\ & -G_{②} & G_{②} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon \\ h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} C_{②} & & \\ -C_{②} & C_{①} + C_{②} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

式 (4) より、 h_1, h_2 を消去する。式 (4) 第 1 式より

$$h_1 = -\frac{\sigma}{G_{①}} + \epsilon$$

式 (4) の各式を全部加え合わせると、

$$\dot{h}_2 = \frac{\sigma}{C_{①}}$$

式 (4) の第 1 式と第 2 式を加え合わせて、時間につ

いて1回微分すると

$$\dot{\sigma} = G^{\textcircled{2}} \dot{h}_1 - G^{\textcircled{2}} \dot{h}_2 + C^{\textcircled{2}} \dot{h}_1 - C^{\textcircled{2}} \dot{h}_2$$

以上3式により、通常用いられている Burger モデルの微分方程式をつぎのごとく得ることができる。

$$\ddot{\epsilon} + \frac{G^{\textcircled{2}}}{C^{\textcircled{2}}} \dot{\epsilon} = \frac{1}{G^{\textcircled{1}}} \ddot{\sigma} + \left(\frac{1}{C^{\textcircled{1}}} + \frac{1}{C^{\textcircled{2}}} + \frac{G^{\textcircled{2}}}{C^{\textcircled{2}} G^{\textcircled{1}}} \right) \dot{\sigma} + \frac{G^{\textcircled{2}}}{G^{\textcircled{1}} C^{\textcircled{2}}} \sigma$$

解析解を求める計算の場合には、式(3)より補助変数 h_1, h_2, \dots, h_n を消去した関係式を用いるのが常であり、また未知数の数を減ずることができるため有利である。

一方、電子計算機を用いる数値解析においては、一般に高階の微分方程式よりも低階の微分方程式の方が、未知数の数が増加しても扱いやすいとされている。このような理由により、粘弾性体の応力ひずみ関係を、この報告では式(3)のごとく表わすことにする。

三軸応力状態の場合には、応力とひずみとの間に、偏差成分、体積成分についてそれぞれ独立に関係が成立するものと考えられている。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} P \cdot (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_m) &= Q \cdot (\epsilon_{ij} - \delta_{ij} \cdot \epsilon_m) \\ R \sigma_m &= S \epsilon_m \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

$$P = \sum_{r=0}^k a_r D^r, \quad Q = \sum_{r=0}^l b_r D^r, \quad R = \sum_{r=0}^m c_r D^r,$$

$$S = \sum_{r=0}^n d_r D^r, \quad D_r = \frac{\partial}{\partial t}$$

a_r, b_r, c_r, d_r それぞれ定数

k, l, m, n 微分方程式の階数

ij はそれぞれ xyz をあらわし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。 σ_m, ϵ_m はそれぞれ、応力、ひずみの体積成分をあらわしている。これらの関係は、つぎのようにして行列表示することができる。まず偏差成分に対する関係を考えることにし、各レオロジー要素が分担する偏差応力を順番にならべたベクトルを $\{\sigma'\}^{\textcircled{1}}$ 、同じく偏差ひずみを $\{\epsilon'\}^{\textcircled{1}}$ とあらわすことにして、第①ばね要素に対して、

$$\{\sigma'\}^{\textcircled{1}} = [D_C']^{\textcircled{1}} \cdot \{\epsilon'\}^{\textcircled{1}}$$

第①ダッシュポット要素に対して、

$$\{\sigma'\}^{\textcircled{1}} = [D_C']^{\textcircled{1}} \cdot \{\dot{\epsilon}'\}^{\textcircled{1}}$$

なる関係が対応するものとする。ここに $\{\sigma'\}, \{\epsilon'\}$ はそれぞれ6個の成分を持つものとする。一方、式(2)における $[K_G], [K_C]$ をそれぞれ、 $(6 \times \text{接点総数}) \times (6 \times \text{ばね要素総数})$ 、 $(6 \times \text{接点総数}) \times (6 \times \text{ダッシュポット要素総数})$ の行列であると考え、対応する要素をそれぞれ、 6×6 単位行列とする。 $[A_G], [A_C]$ についても、それぞれ $(6 \times \text{ばね要素総数})$ 、 $(6 \times \text{ダッシュポット要素総数})$ の正行列列と考え、対応する要素を $[D_C']$ 、 $[D_C']$ で置き変える。このようにすれば、 $\{\sigma'\}$ と $\{\epsilon'\}$

との間に式(3)と類似の関係として、

$$\{\sigma'\} = [B_G'] \cdot \{\epsilon'\} + [B_C'] \cdot \{\dot{\epsilon}'\}$$

が得られる。これは式(5)第1式を行列により表示したものである。まったく同様にして、体積成分についても、式(5)第2式に対応する関係を導くことができる。すなわち、第①ばね要素に対して、

$$\sigma_m^{\textcircled{1}} = D_G^{\textcircled{1}} \cdot \epsilon_m^{\textcircled{1}}$$

第①ダッシュポット要素に対して

$$\sigma_m^{\textcircled{1}} = D_C^{\textcircled{1}} \cdot \dot{\epsilon}_m^{\textcircled{1}}$$

なる関係を対応させることにより、式(3)とまったく相似な関係

$$\{\sigma_m\} = [B_G^m] \cdot \{\epsilon_m\} + [B_C^m] \cdot \{\dot{\epsilon}_m\}$$

を得ることができる。以上により、三軸応力状態においては、偏差成分、体積成分それぞれ独立に式(3)の関係が成立すると考えることができる。ただし、偏差成分の場合は $\{\sigma'\}, \{\epsilon'\}$ と同様に、補助変数 h_1, h_2, \dots, h_n もそれぞれ6成分をもつものとする。

(2) 応力ひずみ関係の変形

粘弾性体の応力ひずみ関係の一つの表示方法が式(3)のごとくになることを指摘したが、ここでは、有限要素法の適用に対して便利なように式(3)を変形する。前節でも述べたとおり、三軸応力状態の場合には、体積成分、偏差成分について、それぞれ、独立に式(3)と同様の関係が成立するから、以下の議論も、それぞれ独立に成立するものである。

式(3)をひずみ $\{\epsilon\}$ と補助変数 $\{h\}$ とに分けて表わすと、式(6)を得る。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma \\ \dots \\ O \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gh} \\ \dots & \dots \\ B_{hg} & B_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dots \\ h \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ \dots & \dots \\ C_{hg} & C_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\epsilon} \\ \dots \\ \dot{h} \end{bmatrix} \dots\dots (6) \end{aligned}$$

ひずみ速度が、微小時間 Δt 内で、一定であると仮定することにより、式(6)は式(7)のごとく変形される。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma \\ \dots \\ O \end{bmatrix} &= \left(\begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gh} \\ \dots & \dots \\ B_{hg} & B_{hh} \end{bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ \dots & \dots \\ C_{hg} & C_{hh} \end{bmatrix} \right) \\ &\cdot \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dots \\ h \end{bmatrix} - \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ \dots & \dots \\ C_{hg} & C_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon(0) \\ \dots \\ h(0) \end{bmatrix} \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここに $\epsilon(0), h(0)$ はそれぞれ、 Δt 時間区間における ϵ, h の初期値をあらわしている。式(7)を簡単に、

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \dots \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{gg} & K_{gh} \\ \dots & \dots \\ K_{hg} & K_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon \\ \dots \\ h \end{bmatrix}$$

$$-\begin{bmatrix} H_{gg} & H_{gh} \\ H_{hg} & H_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}(0) \\ \mathbf{h}(0) \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8)$$

と書くことにする。式(8)より $\{\mathbf{h}\}$ を消去するとつぎのごとくなる。

$$\begin{aligned} \{\boldsymbol{\sigma}\} &= [[\mathbf{K}_{gg}] - [\mathbf{K}_{gh}] \cdot [\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{hg}]] \cdot \{\mathbf{e}\} \\ &\quad - [[\mathbf{H}_{gg}] - [\mathbf{H}_{gh}] \cdot [\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}_{hg}]] \cdot \{\mathbf{e}(0)\} \\ &\quad - [[\mathbf{H}_{gh}] - [\mathbf{K}_{gh}] \cdot [\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}_{hh}]] \cdot \{\mathbf{h}(0)\} \\ &\quad \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

一方、 $\{\mathbf{h}\}$ はつぎのごとくである。

$$\begin{aligned} \{\mathbf{h}\} &= -[\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{K}_{hg}] \cdot \{\mathbf{e}\} \\ &\quad + [\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}_{hg}] \cdot \{\mathbf{e}(0)\} \\ &\quad + [\mathbf{K}_{hh}]^{-1} \cdot [\mathbf{H}_{hh}] \cdot \{\mathbf{h}(0)\} \dots\dots\dots (10) \end{aligned}$$

式(9)をあらためて、

$$\{\boldsymbol{\sigma}\} = [\mathbf{D}] \cdot \{\mathbf{e}\} - \{\boldsymbol{\sigma}_0\} \dots\dots\dots (11)$$

と書くことにする。三軸応力状態の場合には、体質成分、偏差成分それぞれについて、式(11)をつくり、それらをかきね合わせることによって、また式(11)と同様の関係を得ることができる。

3. 有限要素法の適用

(1) 準静的問題に対する有限要素法の適用

粘弾性体の解析には、荷重が与えられて、それに対する変位を計算する荷重境界値型問題(たとえばクリープなど)と変位が与えられてこれにつり合うべき力を求める変位境界値型問題(たとえばリラクセーションなど)があるが、これら両者の問題は、通常用いられている有限要素法を拡張応用することにより解析することができる。まず、荷重境界値問題について説明する。

構造を有限の大きさを持つ要素に分割し、各分割要素の節点の変位を $\{\mathbf{v}\}$ とあらわすことにする。構造の形式により、分割要素内の変位 $\{\mathbf{u}\}$ と節点変位 $\{\mathbf{v}\}$ との関係は、形状関数 $[\mathbf{A}]$ を用いて、つぎのごとく仮定する。

$$\{\mathbf{u}\} = [\mathbf{A}] \cdot \{\mathbf{v}\} \dots\dots\dots (12)$$

これより、分割要素内のひずみ $\{\mathbf{e}\}$ は、

$$\{\mathbf{e}\} = [\mathbf{B}] \cdot \{\mathbf{v}\} \dots\dots\dots (13)$$

と、導くことができる。応力とひずみとの関係は、すでに式(11)で与えられているから、式(11)、式(13)の関係を用いることにより、良く知られているごとく²⁶⁾、有限要素法の手法にしたがって解式をつぎのごとく導くことができる。外力荷重をあらわすベクトルを $\{\mathbf{P}\}$ として、

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{v}\} = \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{P}_0\} \dots\dots\dots (14)$$

$$[\mathbf{K}] = \left[\int [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{D}] \cdot [\mathbf{B}] dV \right]$$

$$\{\mathbf{P}_0\} = \left[\int [\mathbf{B}]^T \cdot \{\boldsymbol{\sigma}_0\} dV \right]$$

ここに、積分は各要素全体積について行なうものとする。式(14)は、いわゆる逐次進行型の解式である。

すなわち、外力荷重 $\{\mathbf{P}\}$ 、初期値 $\{\mathbf{P}_0\}$ を与えて、 Δt 時間後の $\{\mathbf{v}\}$ を式(14)により求める。つづいて式(13)により、ひずみ $\{\mathbf{e}\}$ を、式(11)により応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ を、式(10)により $\{\mathbf{h}\}$ を計算する。ここで、あらためて $\{\mathbf{e}\}$ 、 $\{\mathbf{h}\}$ より、つぎの時間区分の初期値 $\{\boldsymbol{\sigma}_0\}$ を設定して、順次、同様の操作をくり返すことにより計算を進めてゆくものである。

変位境界値問題に対しては、式(14)の両辺を、まず既知なるものと、未知なるものに分離する。すなわち、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \mathbf{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_0 \\ \mathbf{Q}_1 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (15)$$

\mathbf{v}_0 : 既知変位, \mathbf{Q}_0 : \mathbf{v}_0 に対応する式(14)右辺(未知)
 \mathbf{v}_1 : 未知変位, \mathbf{Q}_1 : \mathbf{v}_1 に対応する式(14)右辺(既知)
 式(15)第2式より、

$$[\mathbf{K}_{11}] \cdot \{\mathbf{v}_1\} = \{\mathbf{Q}_1\} - [\mathbf{K}_{10}] \cdot \{\mathbf{v}_0\} \dots\dots\dots (16)$$

式(16)を式(14)のかわりに用いて、荷重境界値問題と同様に計算を進めれば、順次変位 $\{\mathbf{v}_1\}$ 、ひずみ $\{\mathbf{e}\}$ 、応力 $\{\boldsymbol{\sigma}\}$ を定めることができる。なお、 $\{\mathbf{v}_1\}$ が求めれば、式(15)第1式より $\{\mathbf{Q}_0\}$ を計算でき、これより未知反力が決定される。

(2) 動的問題に対する有限要素法の適用

一軸応力状態について考察する。有限の大きさに分割した要素内の変位 $\{\mathbf{u}\}$ は、式(12)のごとく仮定されているから、これを用いることにする。また、応力とひずみとの関係は、式(11)であるが、これはひずみ速度一定として導かれたものであり、動的問題へそのまま拡張するには疑問が残る。そこで、応力ひずみ関係として式(6)を用いることにする。また、要素内のひずみ $\{\mathbf{e}\}$ は、節点変位 $\{\mathbf{v}\}$ と、式(13)の関係にある。そこで、式(12)、(13)、(6)により、良く知られるごとく²⁶⁾、有限要素法の手法を用いることにより、動的問題の解式をつぎのごとく誘導することができる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{v}} \\ \dot{\mathbf{h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{gg} & \mathbf{N}_{gh} \\ \mathbf{N}_{hg} & \mathbf{N}_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{gg} & \mathbf{S}_{gh} \\ \mathbf{S}_{hg} & \mathbf{S}_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P} \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

$$[\mathbf{M}] = \left[\int [\mathbf{A}]^T \cdot [\boldsymbol{\rho}] \cdot [\mathbf{A}] dV \right]$$

$$[\mathbf{N}_{gg}] = \left[\int [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{C}_{gg}] \cdot [\mathbf{B}] dV \right]$$

$$[\mathbf{N}_{gh}] = [\mathbf{N}_{hg}]^T = \left[\int [\mathbf{B}]^T \cdot [\mathbf{C}_{gh}] \cdot [\mathbf{B}] dV \right]$$

$$\begin{aligned} [N_{hh}] &= \int [C_{hh}] dV \\ [S_{gg}] &= \int [B]^T \cdot [B_{gg}] \cdot [B]^T dV \\ [S_{hh}] &= \int [B_{hh}] dV \\ [S_{gh}] &= [S_{hg}]^T = \int [B]^T \cdot [B_{hg}] \cdot [B] dV \end{aligned}$$

ρ : 密度

式(17)を具体的に解く方法としては、線型加速度法(linear acceleration method)が適している。しかし、ここに述べた方法は三軸応力状態の場合には、多少考察の余地を残している。

(3) ラプラス変換による解析法との対応

粘弾性体の解析では、いわゆる弾性相似則により、ラプラス変換を用いて行なわれる場合が多い^{17),18),19)}。この報告で扱った方法と、ラプラス変換による方法との対応を考察する。

応力ひずみ関係式(6)は、時間 t についてラプラス変換することにより、変換後の変数を S として、

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{gg} & B_{gh} \\ B_{hg} & B_{hh} \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} C_{gg} & C_{gh} \\ C_{hg} & C_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{\epsilon} \\ \bar{h} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (18)$$

式(18)のごとくなる。ここに $\{\bar{\sigma}\}$, $\{\bar{\epsilon}\}$, $\{\bar{h}\}$ はそれぞれ、ラプラス変換後の応力、ひずみ、補助変数をあらわしている。式(18)より補助変数 $\{\bar{h}\}$ を消去すると、レオロジーモデルについて成立する微分形式の応力ひずみ関係をラプラス変換した関係式と同一の関係式を得ることができる。すなわち、

$$\begin{aligned} \{\bar{\sigma}\} &= [\bar{D}_S] \cdot \{\bar{\epsilon}\} \dots\dots\dots (19) \\ [\bar{D}_S] &= [B_{gg} + S \cdot C_{gg}] - [B_{gh} + S \cdot C_{gh}] \\ &\quad \times [B_{hh} + S \cdot C_{hh}]^{-1} [B_{hg} + S \cdot C_{hg}] \end{aligned}$$

$$\tilde{E} = E^{\textcircled{1}} - [E^{\textcircled{1}} \ O] \cdot \begin{bmatrix} E^{\textcircled{1}} + E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t & -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) \\ -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) & E^{\textcircled{2}} + (C^{\textcircled{1}} + C^{\textcircled{2}})/\Delta t \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} E^{\textcircled{1}} \\ O \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} N_a^{\textcircled{O}} \\ N_b^{\textcircled{O}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \cdot [E^{\textcircled{1}} \ O] \cdot \begin{bmatrix} E^{\textcircled{1}} + E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t & -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) \\ -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) & E^{\textcircled{2}} + (C^{\textcircled{1}} + C^{\textcircled{2}})/\Delta t \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} C^{\textcircled{2}}/\Delta t & -C^{\textcircled{2}}/\Delta t \\ -C^{\textcircled{2}}/\Delta t & (C^{\textcircled{1}} + C^{\textcircled{2}})/\Delta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E^{\textcircled{1}} + E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t & -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) \\ -(E^{\textcircled{2}} + C^{\textcircled{2}}/\Delta t) & E^{\textcircled{2}} + (C^{\textcircled{1}} + C^{\textcircled{2}})/\Delta t \end{bmatrix}^{-1} \times \left(\begin{bmatrix} E^{\textcircled{1}} \\ O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{\textcircled{2}}/\Delta t & (C^{\textcircled{1}} + C^{\textcircled{2}})/\Delta t \\ -C^{\textcircled{2}}/\Delta t & -C^{\textcircled{2}}/\Delta t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1(0) \\ h_2(0) \end{bmatrix} \right)$$

ここに、 $h_1(0)$, $h_2(0)$ は微小時間区間 Δt 内における h_1 , h_2 の初期値を表わしている。また、軸方向変形を対象としているから、図-2に示す $G^{\textcircled{1}}$, $G^{\textcircled{2}}$ をそれぞれ $E^{\textcircled{1}}$, $E^{\textcircled{2}}$ に置き変えてある。

図-3~5に計算例を示す。図-3, 4は一定荷重下の Burger 体トラスのクリープ曲線を $C^{\textcircled{2}}/C^{\textcircled{1}}$, $E^{\textcircled{2}}/E^{\textcircled{1}}$ をそ

式(19)により、有限要素法の手法を用いることにより、粘弾性体の解式として、

$$\int [B]^T \cdot [\bar{D}_S] \cdot [B] dV \cdot \{\bar{v}\} = \{\bar{P}\} \dots\dots\dots (20)$$

式(20)を得る。ここに、 $\{\bar{v}\}$, $\{\bar{P}\}$ はそれぞれ節点変位、外力荷重をラプラス変換したものである。

式(20)を解き、これを逆変換すれば節点変位 $\{v\}$ を求めることができる。しかし、連立方程式系の逆ラプラス変換を数値解析的に行なうことは、現段階では、相当むずかしく、J.P.H. Webber¹⁷⁾, 田中^{18),19)} はそれぞれ独自に逆変換の方法を考案している。

これに対して、この報告では、応力ひずみ関係式(11)で与え、最終的な解式を式(14)のごとく誘導している。このため、連立方程式を逐次解く操作のくり返しにより解が求められる。この点、数値計算上有利であるといえよう。

4. Burger 体よりなるトラスのクリープに対する適用

トラス構造のクリープ解析を、応力ひずみ関係が 図-2に示す Burger モデルにより与えられる場合について、検証の意味を含めて行なった。

トラスを構成する任意の部材について、部材長を l , 断面積を A , 両端を任意に a, b とし、軸方向の部材端の変形を u_a, u_b とする。このとき式(13)に対応して

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} 1/l & -1/l \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} \dots\dots\dots (21)$$

式(21)が成立する。これより、部材端力 N_a, N_b と部材端変位 u_a, u_b との関係が、つぎのごとく求まる。

$$\begin{bmatrix} N_a \\ N_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\tilde{E}A}{l} & -\frac{\tilde{E}A}{l} \\ -\frac{\tilde{E}A}{l} & \frac{\tilde{E}A}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_a^{\textcircled{O}} \\ N_b^{\textcircled{O}} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (22)$$

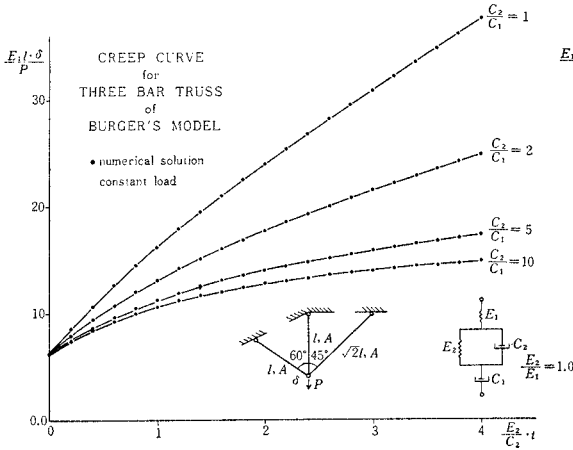


図-3

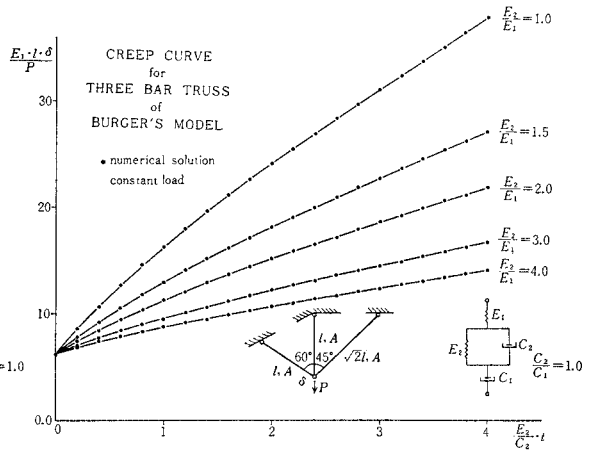


図-4

それぞれパラメータとして示したものであり、図-5には、漸増荷重に対するクリープ曲線の相違を計算したものが示されている。一方、式(19)は、この計算例の場合には、つぎのようになる。

$$\bar{\sigma} = \frac{S^2 + \frac{E\textcircled{2}}{C\textcircled{2}} S}{\frac{S^2}{E\textcircled{1}} + \left(\frac{E\textcircled{2}}{E\textcircled{1}C\textcircled{2}} + \frac{1}{C\textcircled{1}} + \frac{1}{C\textcircled{2}} \right) S + \frac{E\textcircled{2}}{C\textcircled{1}C\textcircled{2}}} \cdot \bar{\epsilon}$$

ここで、トラスを構成する全部材の粘弾性係数が等しい場合を考えると、解式(20)をつぎのごとく変形することができる。

$$\frac{S^2 + a \cdot S}{b + c \cdot S + d \cdot S^2} \begin{bmatrix} \Sigma \frac{AC_X^2}{l} & \Sigma \frac{AC_X C_Y}{l} \\ \Sigma \frac{AC_X C_Y}{l} & \Sigma \frac{AC_Y^2}{l} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_X \\ \bar{P}_Y \end{bmatrix} \dots \dots \dots (23)$$

$$a = \frac{E\textcircled{2}}{C\textcircled{2}}, \quad b = \frac{E\textcircled{2}}{C\textcircled{1}C\textcircled{2}},$$

$$c = \frac{E\textcircled{2}}{E\textcircled{1}C\textcircled{2}} + \frac{1}{C\textcircled{1}} + \frac{1}{C\textcircled{2}}, \quad d = \frac{1}{E\textcircled{1}}$$

C_X, C_Y : 各部材のそれぞれ xy 軸に対する方向余弦

Σ : 各部材についての総和を表わす

x, y : 変位, P_X, P_Y : 荷重

— はラプラス変換後の変数を表わす。式(23)は解析的に解くことができる。一定荷重の場合の解は、つぎのごとくである。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \left\{ \left(\frac{1}{E\textcircled{1}} + \frac{1}{E\textcircled{2}} \right) - \frac{1}{E\textcircled{2}} e^{-\frac{E\textcircled{2}}{C\textcircled{2}} t} - \frac{t}{C\textcircled{1}} \right\} \times \begin{bmatrix} \Sigma \frac{AC_X^2}{l} & \Sigma \frac{AC_X C_Y}{l} \\ \Sigma \frac{AC_X C_Y}{l} & \Sigma \frac{AC_Y^2}{l} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} P_X \\ P_Y \end{bmatrix}$$

これによる計算結果と、図-3, 4の結果は良く一致

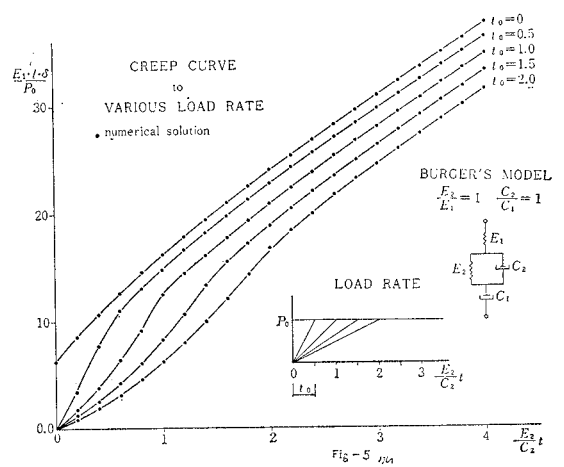


図-5

している。

5. 平面問題に対する適用

村山・松岡²⁰⁾は、トンネルに作用する土圧の一部は地山の応力緩和によるものであると、これを三要素モデルによる応力ひずみ関係を用いて説明している。また、桜井・世良田²¹⁾により、岩盤のクリープ試験の結果は、やはり、三要素モデルにより、ひずみが小さいうちは、良く説明されることが示されている。畑野・渡辺²²⁾は、非線型四要素モデルが土の動的性質を良く説明することを指適している。このように、材料の性質が、三要素モデル、四要素モデルにより、現象論的に良く表わされることが多いので、ここでは、図-6に示す三要素モデルについて平面ひずみ状態における応力解析を行なった。

この場合には、偏差成分については式(24)

$$\begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_m \\ \sigma_y - \sigma_m \\ \tau_{xy} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2G^{\textcircled{1}} & & & & & \\ & 2G^{\textcircled{1}} & & & & \\ & & G^{\textcircled{1}} & & & \\ -2G^{\textcircled{1}} & & & 2G^{\textcircled{1}} & & \\ & 2G^{\textcircled{1}} & & & 2G^{\textcircled{2}} & \\ & & G^{\textcircled{1}} & & & 2G^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x - \epsilon_m \\ \epsilon_y - \epsilon_m \\ \gamma_{xy} \\ h_x - h_m \\ h_y - h_m \\ h_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 2C^{\textcircled{2}} & & \\ & & & & 2C^{\textcircled{2}} & \\ & & & & & C^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_x - \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\epsilon}_y - \dot{\epsilon}_m \\ \dot{\gamma}_{xy} \\ \dot{h}_x - \dot{h}_m \\ \dot{h}_y - \dot{h}_m \\ \dot{h}_{xy} \end{bmatrix} \quad (24)$$

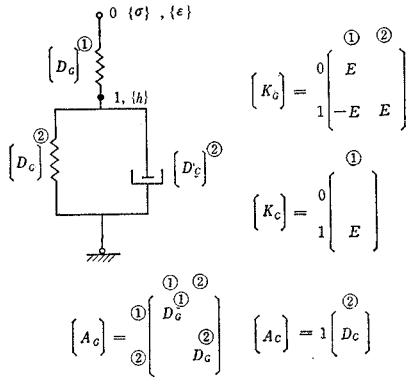


図-6 三要素モデルとその行列表示

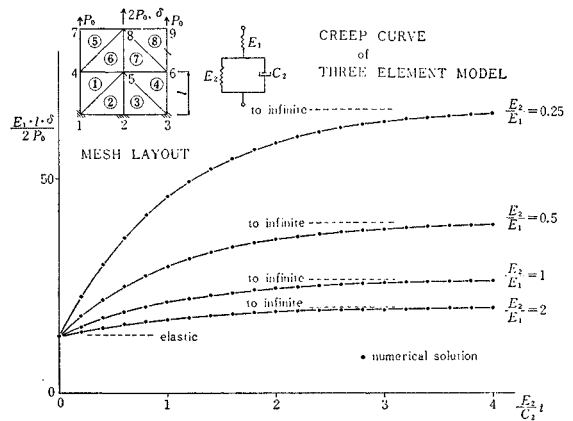


図-7

体積成分については式 (25)

$$\begin{bmatrix} \sigma_m \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3K^{\textcircled{1}} & -3K^{\textcircled{1}} \\ -3K^{\textcircled{1}} & 3K^{\textcircled{1}} + 3K^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_m \\ h_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3H^{\textcircled{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_m \\ \dot{h}_m \end{bmatrix} \quad (25)$$

ここに,

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \epsilon_m = \frac{1}{3}(\epsilon_x + \epsilon_y), \\
 h_m = \frac{1}{3}(h_x + h_y)$$

が成立つものと考えられる。ただし、ここでは、せん断弾性係数、体積弾性係数、せん断粘性係数、体積粘性係数をそれぞれ G, K, C, H で表わすことにし、式 (24)、式 (25) のごとく偏差成分、体積成分ともに 図-6 の三要素モデルにしたがうものとする。すなわち、図-6 の $[D_c], [D_c]$ はそれぞれ、

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 2G & & \\ & 2G & \\ & & G \end{bmatrix}$$

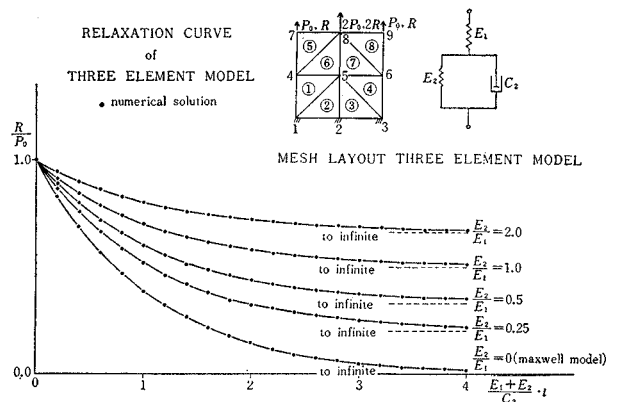


図-8

$$[D_c] = \begin{bmatrix} 2C & & \\ & 2C & \\ & & C \end{bmatrix}$$

となる。また 図-6 中の E は 3×3 単位行列である。これより、応力ひずみ関係は式 (26) のごとくになる。

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{K^{\textcircled{1}}K^{\textcircled{2}}+K^{\textcircled{1}}H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} + \frac{4}{3} \cdot \frac{G^{\textcircled{1}}G^{\textcircled{2}}+G^{\textcircled{1}}C^{\textcircled{2}}/\Delta t}{G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}/\Delta t} & \frac{K^{\textcircled{1}}K^{\textcircled{2}}+K^{\textcircled{1}}H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} - \frac{2}{3} \cdot \frac{G^{\textcircled{1}}G^{\textcircled{2}}+G^{\textcircled{1}}C^{\textcircled{2}}/\Delta t}{G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}/\Delta t} \\ \frac{K^{\textcircled{1}}K^{\textcircled{2}}+K^{\textcircled{1}}H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} - \frac{2}{3} \cdot \frac{G^{\textcircled{1}}G^{\textcircled{2}}+G^{\textcircled{1}}C^{\textcircled{2}}/\Delta t}{G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}/\Delta t} & \frac{K^{\textcircled{1}}K^{\textcircled{2}}+K^{\textcircled{1}}H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} + \frac{4}{3} \cdot \frac{G^{\textcircled{1}}G^{\textcircled{2}}+G^{\textcircled{1}}C^{\textcircled{2}}/\Delta t}{G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}/\Delta t} \\ \tau_{xy} & \tau_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x^0 \\ \sigma_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2 & S_1 \\ & S_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x(0) \\ h_y(0) \\ h_{xy}(0) \end{bmatrix}$$

$$S_1 = \frac{H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} + \frac{4}{3} S_3$$

$$S_2 = \frac{H^{\textcircled{2}}/\Delta t}{K^{\textcircled{1}}+K^{\textcircled{2}}+H^{\textcircled{2}}/\Delta t} - \frac{2}{3} S_3 \dots\dots\dots$$

$$S_3 = \frac{C^{\textcircled{2}}/\Delta t}{G^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}/\Delta t}$$

式 (26) で与えられる応力ひずみ関係は，粘弾性係数として， $K^{\textcircled{1}}, K^{\textcircled{2}}, H^{\textcircled{2}}, G^{\textcircled{1}}, G^{\textcircled{2}}, C^{\textcircled{2}}$ の合計 6 個のパラメータを含んでいるから，これを，

$$\frac{9 K^{\textcircled{1}}G^{\textcircled{1}}}{3 K^{\textcircled{1}}+G^{\textcircled{1}}} \equiv E^{\textcircled{1}}, \quad \frac{9 K^{\textcircled{2}}G^{\textcircled{2}}}{3 K^{\textcircled{2}}+G^{\textcircled{2}}} \equiv E^{\textcircled{2}},$$

$$\frac{9 H^{\textcircled{2}}C^{\textcircled{2}}}{3 H^{\textcircled{2}}+C^{\textcircled{2}}} \equiv C^{\textcircled{2}}, \quad \frac{3 K^{\textcircled{1}}-2 G^{\textcircled{1}}}{6 K^{\textcircled{1}}+2 G^{\textcircled{1}}} \equiv \nu^{\textcircled{1}},$$

$$\frac{3 K^{\textcircled{2}}-2 G^{\textcircled{2}}}{6 K^{\textcircled{2}}+2 G^{\textcircled{2}}} \equiv \nu^{\textcircled{2}}, \quad \frac{3 H^{\textcircled{2}}-2 C^{\textcircled{2}}}{6 K^{\textcircled{2}}+2 G^{\textcircled{2}}} \equiv \nu_C^{\textcircled{2}},$$

と置き換え，さらに，

$$\nu^{\textcircled{1}}=\nu^{\textcircled{2}}=\nu_C^{\textcircled{2}}=0.4$$

とすると，パラメータを $E^{\textcircled{1}}, E^{\textcircled{2}}, C^{\textcircled{2}}$ の 3 個に選ぶことができる。図-7~18 の計算例では，この係数により表示されている。また，分割は，三角形分割とし，要素内の変位の仮定は，要素内でのひずみが一定となる，

$$u = \frac{A_a}{A} \cdot u_a + \frac{A_b}{A} \cdot u_b + \frac{A_c}{A} \cdot u_c$$

$$v = \frac{A_a}{A} \cdot v_a + \frac{A_b}{A} \cdot v_b + \frac{A_c}{A} \cdot v_c$$

u_a, u_b, u_c : 三角形頂点 a, b, c の x 方向変位

v_a, v_b, v_c : 三角形頂点 a, b, c の y 方向変位

$\frac{A_a}{A}, \frac{A_b}{A}, \frac{A_c}{A}$: 三角形頂点 a, b, c の面積座標

標

なる仮定を用いている。

図-7, 8 は，式 (26) により与えられる応力ひずみ関係の下に，定荷重によるクリープ曲線，定変位によるリラクゼーション曲線を求めたものである。

つぎに図-9 に示すごとく，円弧状の切りかき部を持つ板に適用した結果を図-10~13 に図示する。図-9 のごとく，いったん荷重を載荷し，弾性的に変位を生ぜしめた後，円弧状切りかき部の節点 1~7 を固定する。この固定点に反力が生ずるが，この反力の推移を図示したものが図-10 である。図-11 には，図に示すハッチした部分 (A 領域) の粘弾性係数を変化させて，図-10 と同様の計算を行ない，このと

きの反力の推移が示されている。つぎの図-12 は，A 領域，B 領域での主応力の変化の様相を示したものである。図-13 は，円弧状切りかき部付近の主応力分布の変化の一例である。なお，図-13 は主応力を $\sigma_0=4 P_0/l$ により除したもので表わされている。

つぎの計算例は，弾性体と粘弾性体が，図-14 に示すごとく，結合されている構造に対するものである。図-15, 16 はそれぞれ，定荷重を受けた場合の，鉛直変位，および応力の推移が図示されている。弾性体の弾性

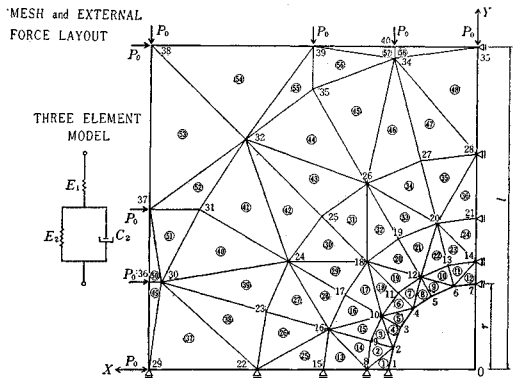


図-9

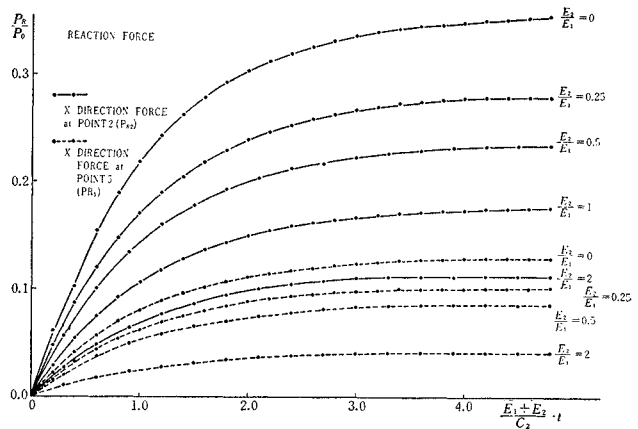


図-10

$$\frac{G①G②+G①C②/\Delta t}{G①+G②+C②/\Delta t} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 \\ \sigma_y^0 \\ \tau_{xy}^0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

係数は、この例では、 $E①$ に等しいものとされている。

図-16 を見ると、弾性体内 (ZONE A) においては、応力が暫時増加し、弾性体に近接する粘弾性体内では、応力の低下が起こるが、弾性体より離れた部分では、ほとんど変化がみられないなどの様相がわか

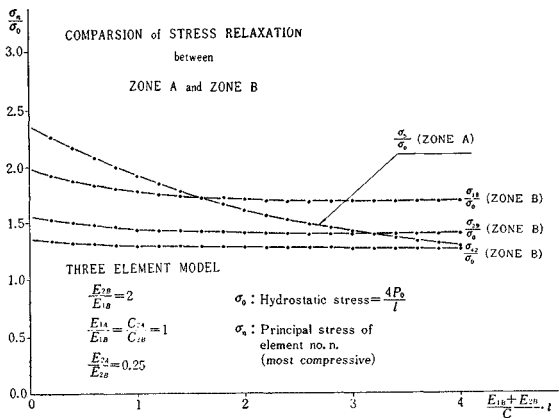


図-12

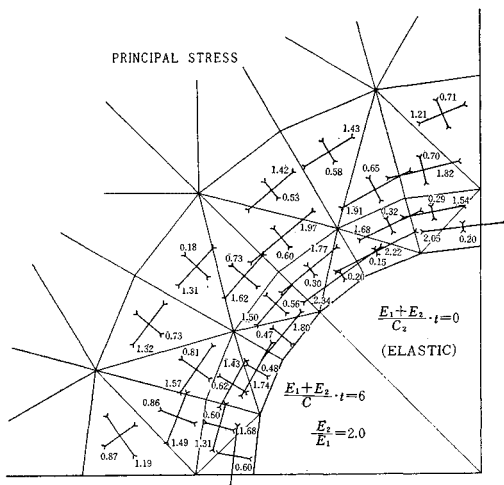


図-13

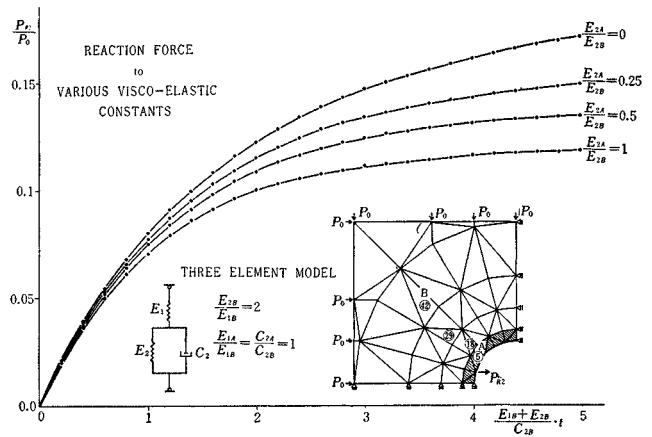


図-11

る。これが、直接、実在構造物の応力状態と結びつくには、いまだ問題点が残されているが、ここに示す方法により、定性的にこのような現象を再現し得ることが理解される。図-17 に主応力の分布が、図-18 に変位の分布が示されている。

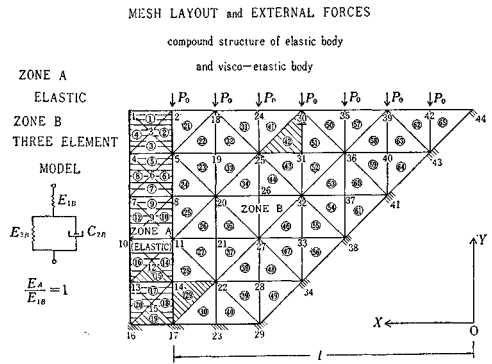


図-14

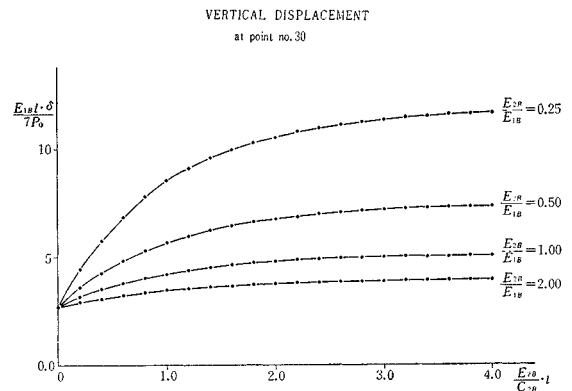


図-15

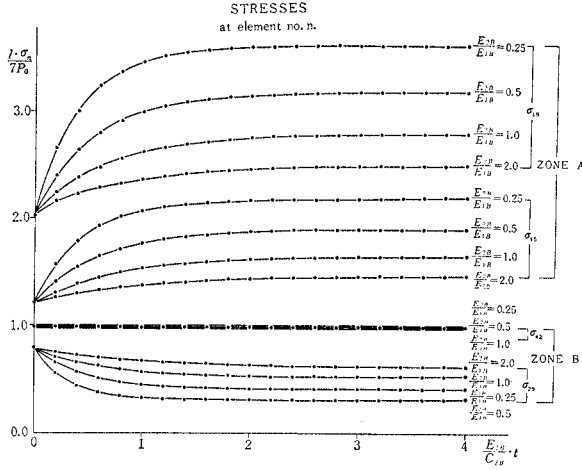


図-16

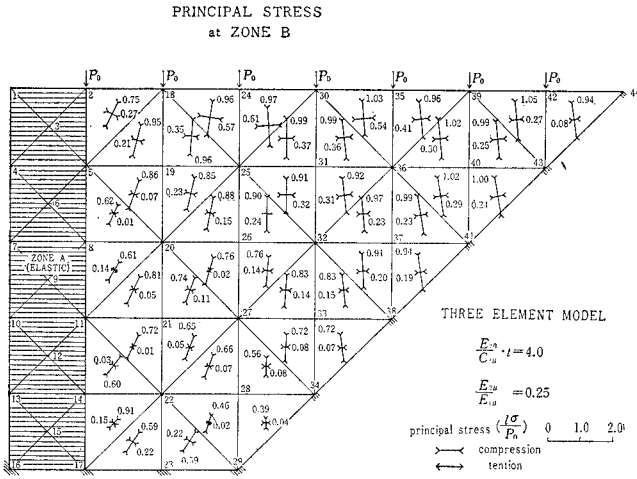


図-17

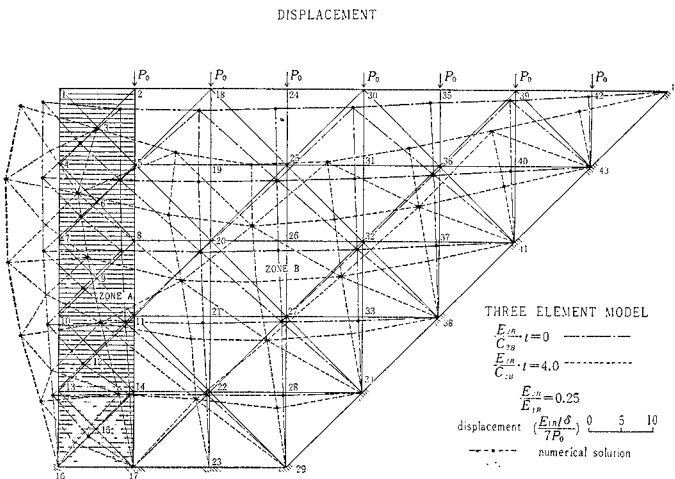


図-18

6. 骨組構造の動的問題に対する適用

図-19 に示す四要素モデルによる応力ひずみ関係を持つ平面骨組構造の外力荷重による動的応答計算を扱った。

応力とひずみとの関係は単軸応力状態であることを考慮に入れて、

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ \dots \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E\textcircled{1} & -E\textcircled{1} \\ -E\textcircled{1} & E\textcircled{1} + E\textcircled{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C\textcircled{1} & -C\textcircled{1} \\ -C\textcircled{1} & C\textcircled{1} + C\textcircled{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{h} \end{bmatrix}$$

ここで、断面内のひずみ ε, h が、曲率 χ_e, χ_h 、軸ひずみ ε_n, h_n を用いてつぎのごとく表わされるとする。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \chi_e \cdot z + \varepsilon_n \\ h &= \chi_h \cdot z + h_n \end{aligned}$$

ここに z は、断面の重心軸からの距離である。

一方、骨組構造を構成する部材の部材端における変位をそれぞれ、 $\theta_a, \theta_b, v_a, v_b, u_a, u_b$ ($\theta_{ha}, \theta_{hb}, v_{ha}, v_{hb}, u_{ha}, u_{hb}$) で表わせば、つぎの関係を仮定することができる。 x は部材軸方向の座標である。

$$\begin{aligned} \chi_e &= \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_a + \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_b \\ &\quad + \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) (v_a - v_b) \end{aligned}$$

$$\varepsilon_n = \frac{1}{l} (u_a - u_b)$$

$$\begin{aligned} \chi_h &= \left(\frac{4}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_{ha} + \left(\frac{2}{l} - \frac{6x}{l^2} \right) \theta_{hb} \\ &\quad + \left(\frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3} \right) (v_{ha} - v_{hb}) \end{aligned}$$

$$h_n = \frac{1}{l} (u_{ha} - u_{hb})$$

これより、動的問題の解式が、つぎのごとく得られる。

$$\begin{bmatrix} M & O \\ O & O \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 + E_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix}$$

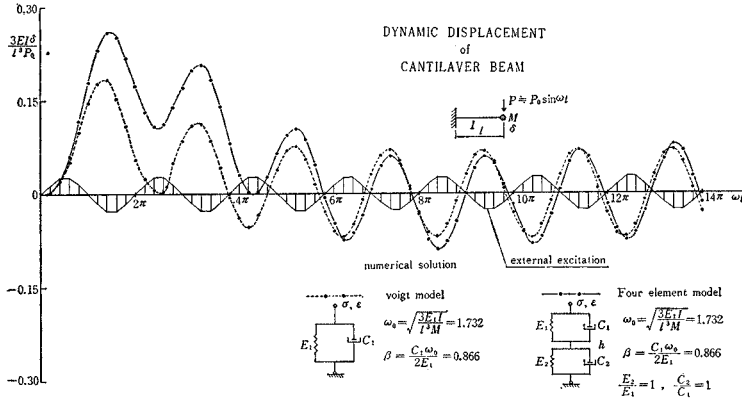


図-19

ここに、 u, S は節点の変位を表わし、

$$\{u\} = \{u \ v \ \theta\}^T$$

$$\{S\} = \{u_h \ v_h \ \theta_h\}^T$$

であり、 $[M]$ は通常用いられている質量行列である。さらに、 $[E_1], [E_2], [C_1], [C_2]$ はそれぞれ、通常の剛性行列の弾性係数を E_1, E_2, C_1, C_2 に置き変えたものである。

これを、線型加速度法にしたがって変形すると、

$$\left(\begin{bmatrix} M & O \\ O & O \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} + \frac{\Delta t^2}{6} \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 + E_2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_u \\ P_S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_u \\ P_S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P \\ O \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} C_1 & -C_1 \\ -C_1 & C_1 + C_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \ddot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} \right) - \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 \\ -E_1 & E_1 + E_2 \end{bmatrix} \cdot \left(\begin{bmatrix} u(0) \\ S(0) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t^2}{3} \begin{bmatrix} \ddot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ S \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(0) \\ S(0) \end{bmatrix} + \Delta t \begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t^2}{3} \begin{bmatrix} \ddot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t^2}{6} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \ddot{u}(0) \\ \dot{S}(0) \end{bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \dot{S} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (27)$$

式(27)が得られる。ここに $u(0), \dot{u}(0), \ddot{u}(0), S(0), \dot{S}(0), \dot{S}(0)$ はそれぞれ Δt 時間区間の初期値で、既知であるとする。図-19 に片持ばりの自由端に動的荷重

が載荷された場合の計算例を示す。

7. 非線型モデルに対する拡張

これまでの展開では、応力とひずみ、応力とひずみ速度の関係は、式(1)のごとく線型であるとして解式が構成されてきた。しかし、実在の材料では、レオロジーモデルでその性質を表現するときには、むしろ線型の場合の方がめづらしく、非線型になる場合が多い。したがって、解析法も、非線型問題が扱える

ことが望まれる。

この報告で扱った方法は、微小時間ごとに、順次、解を追跡してゆく方法であるから、その微小時間間隔内では、性状が一定であるとし、時間区間ごとに解式を作成しなおして解を得る計算法をとることによって、わりあい簡単に非線型問題を解析することができる。いま、一つの例題として、ひずみ速度が応力のべき乗により与えられる場合を扱うことにする。すなわち、

$$\sigma = E(\varepsilon - \varepsilon_C)$$

$$\dot{\varepsilon}_C = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^n$$

と与えられる場合について考える。ただし、 λ, σ_*, n はそれぞれ材料の性質により定まる定数である。

この関係は、

$$\begin{bmatrix} \sigma \\ O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & -E \\ -E & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} O & O \\ O & \lambda \cdot \sigma_* \left(\frac{\sigma}{\sigma_*} \right)^{n-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\varepsilon}_C \end{bmatrix}$$

と、表わすことができる。この関係を用いて、図-20

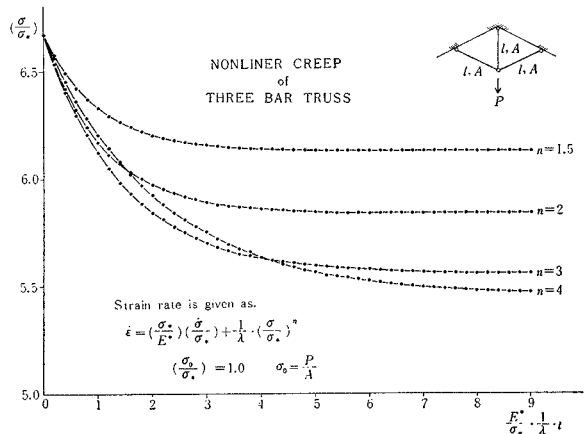


図-20

には、3本トラスに定荷重が載荷された場合の応力変化を計算したものが図示されている。この計算例では、時間区間 Δt 内で応力が一定であると仮定されている。

同様の考えを平面問題、骨組構造問題へ拡張することは、簡単にできる。

8. 結 言

この報告で扱った粘弾性体の解析法のマクロフローチャートはつぎのようになる。

(1) 有限個のレオロジーモデルにより与えられる応力ひずみ関係が、補助変数表示を用いると、多元連立一次階微分方程式により表わされることに着目する。

(2) 応力ひずみ関係を有限要素法の適用に便利なるように変形する。

(3) 有限要素法にしたがって解式を誘導する。

(4) 微小時間間隔ごとに、解式をくり返し使うことにより、解を追跡する。

この解析方法の利点として、つぎの点をあげることができる。すなわち、

(1) 有限個の任意のレオロジーモデルによる応力ひずみ関係に適用できること。現象論的に、材料の特性をレオロジーモデルにより表現する場合、複雑なレオロジーモデルを扱う必要があることがあるが、この方法では、任意のモデルを対象とすることが可能である。

(2) プログラムが簡単であること。電子計算機のプログラムの立場から考えると、この方法は、多元連立一次方程式の計算をくり返さずことにより解を得る方法であり、それ以外の数値計算上の手法を必要としないため、通常弾性解析に用いられているプログラムを有効に利用することができる。

(3) 誤差が少ないこと。低階の微分を差分で置き変えていることから、高階の微分方程式を差分化すること、あるいは、逆ラプラス変換の演算を行なうことなどにくらべて、誤差が少なくすむことがあげられる。

(4) 荷重境界値問題・変位境界値問題が同一プログラムで計算できること。変位境界値問題に対するプログラムを作成しておけば、荷重境界値問題は、そのプログラムで処理することができる。

(5) 動的問題が同様にして計算されること。振動の減衰特性の解析など、動的問題の解析へ拡張応用することが可能である。

(6) 非線型問題への拡張が可能であること。微小時間間隔ごとに解式をくり返し適用する逐次進行型の解式であるから、非線型問題の解析が、わりあい簡単に行なうことができる。

などである。一方、逐次進行型解法のもつ欠点をそのま

ま有している。すなわち、微小時間間隔ごとに解を追跡するため、計算時間が増加すること、時間間隔のとり方により異なった解を得ることがあることなどに注意せねばならない。

この報告では、変位は微小であり、変形前後の形状は同一であるとする微小変形の仮定を用いている。このため、速度境界値問題にはふれていない。また、材料の特性は温度には関係しないとしている。このように、材料の特性に帰因する非線型問題および、形状の変化に帰因する非線型問題に対しては、今後の課題を多く残しているものでもある。

数値計算は、日本電子計算(株)所有 Burroughs B-5500 を用いて行なった。記して感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) Biot, M.A.: Variational and Lagrangian method in viscoelasticity, Deformation and flow of solids, IUTAM colloquium MADRID, 1955
- 2) Gurtin, M.E.: Variational principles in the linear theory of viscoelasticity, Arch. Rat. Mech. Anal. Vol. 13, No. 3, 1967
- 3) Oden, J.T.: Finite element applications in linear and nonlinear thermo-viscoelasticity, The discrete and continuum concepts in macro and micro mechanics, EMD specialty conference Nov. 1967
- 4) Oden, J.T.: A general theory of finite elements, Num. Meth. in Engr. Vol. 1, No. 2, 1969
- 5) Tayler, R.L. and Chang, T.Y.: Thermoviscoelastic stress analysis, The discrete and continuum concepts in macro and micro mechanics, EMD specialty conference Nov. 1967
- 6) Tayler, R.L. and Chang, T.Y.: An approximate method for thermovisco elastic stress analysis, Nucl. Engr. and Des. Vol. 4, 1966 pp. 21~28.
- 7) Greenbaum, G.A. and Rubinstein, M.F.: Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements, Nucl. Engr. and Des. Vol. 7, 1967 pp. 379~397
- 8) Besseling, J.F.: Matrix analysis of creep and plasticity problems, first conference on matrix methods in structural mechanics, Wright Patterson A.F.B. Ohio, 1966
- 9) 藤田健二・桜井春輔: 有限要素法の粘弾性体への適用, 昭和 44 年度, 土木学会関西支部年次学術講演会 1969
- 10) 林 正夫・北原義浩・日比野敏: 粘塑性地山内でのトンネル覆工への経時的応力の解析法, 第 5 回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要, 1967
- 11) Hayashi, M., Kitahara, Y. and Hibino, S.: Time Dependent stress analysis in underground structure in viscoplastic rock masses, International symposium on determination of stresses in rock masses L.N.E.C. Lisbon 1969
- 12) 林 正夫・日比野敏: 岩盤内の断層の置き換へ補強の力学的効果の解析法とその応用, 第 22 回土木学会年次学術講演会, 昭 42 年 5 月
- 13) 林 正夫: 逐次破壊現象としての地盤の耐力の有限要素法と模型実験の比較, 日本鋼構造協会第 3 回大会研究会集マトリックス構造解析講演論文集, 1969
- 14) White, T.L.: Finite elements in linear viscoelasticity, Second Conference on Matrix Methods in Structural

- Mechanics, Wright Patterson A.F.B. Ohio, Oct. 1968
- 15) Malone, D.W. and Conner, J.J. : Transient dynamic response of linearly viscoelastic structures and continua, AIAA structural dynamics and aeroelasticity specialist conference, New Orleans, April 1969
 - 16) Zienkiewicz, O.C., Watson, M. and King, I.P. : A numerical method of visco-elastic stress analysis, Int. Jou. Mech. Sci. Vol. 10 1968 pp. 807~827
 - 17) Webber, J.P.H. : Stress analysis in viscoelastic bodies using finite elements and a correspondance rule with elasticity, Jou. Stra. Anal. Vol. 4, No. 3, 1969
 - 18) 田中豊喜 : 有限要素法による線型粘弾性体の応力解析, 日本鋼構造協会第3回大会研究集会, マトリックス構造解析講演論文集 1969
 - 19) 田中豊喜・大井光四郎 : 有限要素法とラプラス逆変換による線型粘弾性体の応力解析, 第19回応用力学連合講演会論文抄録集, 1969
 - 20) 村山朔郎・松岡 元 : 粘性土の応力緩和によるトンネル土圧, 土木学会論文報告集, No. 168, 1969-8
 - 21) 世良田章生・桜井春輔 : 岩盤内の初期応力分布の推定について, 第4回岩盤力学に関するシンポジウム講演概要 1966
 - 22) 畑野 正・渡辺啓行 : 粘土, 砂, 砕石の動的静的粘弾性定数ならびにポアソン比について, 土木学会論文報告集 No. 164, 1969-4
 - 23) 畑野 正・渡辺啓行 : アースダムの震動解析, 土木学会論文報告集, No. 164, 1969-4
 - 24) Taylor, R.K., Pister, K.S. and Goodreau : Thermo-mechanical Analysis of Visco-elastic Solids, Int. J. num. Meth. Engng. Vol. 2, No. 1, 1970
 - 25) Lynch, F. de S. : A Finite Element Method of Viscoelastic Stress Analysis with Application to Rolling Contact Problems Int. J. Num. Engng. Vol. No. 4, 1969
 - 26) たとえば, O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung : The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw Hill, 1967 など
(1969. 12. 2・受付)
-