

鉄道線路の軌道に生ずる振動の解析

ANALYSIS OF THE VIBRATIONS IN THE RAILWAY TRACK

小野 一良*・伊藤 義男**

By Kazuyoshi Ono and Yoshio Ito

1. 緒 言

列車通過時に鉄道線路に生ずる振動を測定した結果が従来多数発表されている^{1),2)}。これらの測定においては主として加速度測定用の換振器が軌道の各箇所に取付けられて加速度の測定がなされている。その結果レール継目部においてレールに50~150gの加速度を生ずることが報告されている²⁾。またまくらぎ下の道床、路盤には30~60 c/secの低周波と200~500 c/secの高周波の振動とが存在し、さらに高い周波数の振動も存在することが予想されている¹⁾。道床崩れの激しい継目ではまくらぎ上の振動加速度が低周波で10g、高周波で200g以上になるといふことである¹⁾。このように軌道の振動を加速度用の換振器を用いて測定するときには高周波が卓越してあらわれるので軌道の劣化に対する振動の影響を検討する尺度としては軌道に生ずる振動加速度よりも振動速度が適当ではないかと想像される。

理論的考察によれば多数の固有振動を持つ体系に衝撃を加えた場合に衝撃の作用点においてそれぞれの振動の持つ衝撃方向の初速度はそれぞれの振動のエネルギーを代表するといふことができる³⁾。よって著者らは振動速度測定用の換振器を軌道各部に取付けて列車通過時における振動を測定して軌道または車両の状態による差を明らかにした。

現場における振動測定と併行し

* 正会員 工博 金沢大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 金沢大学 工学部土木工学科

て実験室内に試験軌道を敷設して振動発生機によって種類の周波数の振動力を加えた。これより軌道の振動に対する性質を調査した。また理論的計算によって振動力に対する軌道の応答を求めて実験結果に比較した。

2. 列車通過時に軌道に生ずる振動の測定

列車通過時に砂利道床軌道に生ずる振動の概要を知るため北陸線森本・津幡間上り線においてレールおよび道床に生ずる振動の測定を行なった。測定線路は直線、平坦線であって砕石道床上にPCまくらぎが25m当り39挺配置され、50kg P Sレールが敷設されていた。レールとまくらぎとの間には厚さ5mmの第2種軌道パッドが挿入されていた。

換振器の配置を図-1に示し、これらの換振器ならびに記録に用いたガルバノメータの性能を表-1に示す。

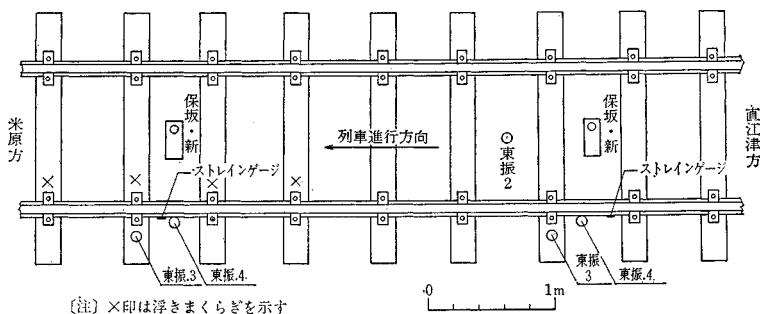


図-1 測定線路ならびに各種計器の配置

表-1 各種の換振器ならびにガルバノメータの性能

計器取付箇所	製作所	形式	換振器の固有振動数	ガルバノメータの固有振動数	感度一様な周波数限界
レール	東京振動研究所製	TMV 1	3 c/sec	f 1 000 c/sec l 2 000	700 c/sec 1 600
まくらぎ	"	"	"	1 000	700
道床	保坂振動計器製作所	MTDV-1 C	1	1 000	700

測定可能な振動の最低周波数は換振器の固有振動数によって定まり、最高周波数は記録に用いたガルバノメータの固有振動数によって定まる。したがって表-1に示す換振器およびガルバノメータを使用すれば軌道に生ずる高周波と低周波とを同一の計器で記録することができるので加速度測定用の換振器を使用するより有利である。

レールにはアンチクリープを用いて換振器を取付け、まくらぎには接着剤を用いて換振器を貼り付けたが、道床の振動はまくらぎ間の道床をまくらぎ底面近くまで掘り下げ、この上に鋼板を置き、この上に換振器を据え付けた。

図-3~6に浮まくらぎ区間における測定記録の数例を示した。これらの記録において×印は計器の直上を車輪が通過した時刻を示し、○印は隣接まくらぎ上を車輪が通過した時刻を示している。図-3は2004 M 列車第1両目のクハ481形式電車の後台車と第2両目のモハ480形式前台車通過時におけるレール、まくらぎ、道床の振動測定記録であるが、レール、まくらぎともに各車輪の通過時に7 cm/sec 程度のたわみ振動をしていることが認められる。レールにおいてはその上に約 800 c/sec の高周波振動が重なっているが、高周波の振動速度も 5 cm/sec を超えるものは少ない。まくらぎにおいてはたわみ振動の上に 100 c/sec より 600 c/sec に至る種々の周波数の振動が含まれているが、その振動速度は比較的が少ない。道床においては各車輪の通過によるたわみ振動が不明であるが、この理由としてはまくらぎと道床との間にいくらかの隙があり、車輪荷重がまくらぎ下の道床に十分伝達されなかったためであると考えられる。しかし道床には車輪通過時に約 40 c/sec の振動が誘発されていることが認められる。

図-4 は 2006 M 列車第1両目のクハ481形式電車の後台車と第2両目のモハ480形式電車の前台車通過時における記録であり、図-5 は第11両目のクハ481形式電車の通過時の記録であるが、とくにクハ481形式電車

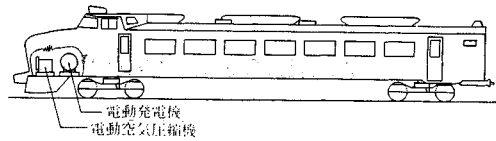


図-2 クハ481形式電車

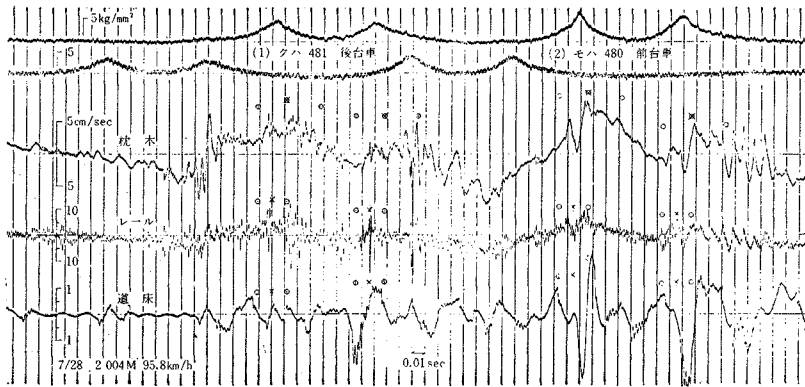


図-3 2004 M 列車通過時における振動速度測定記録（浮きまくらぎ区間）

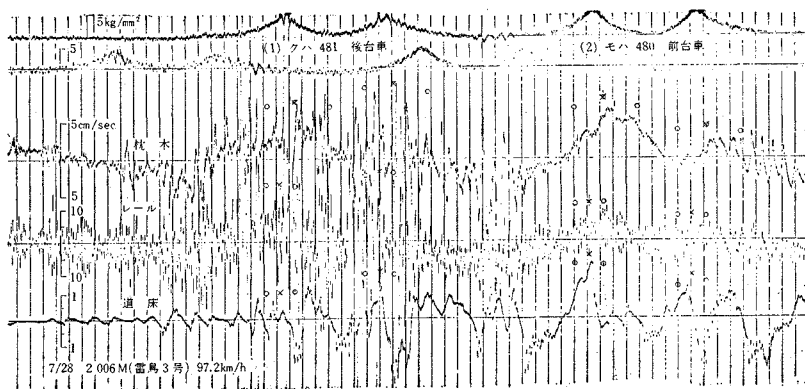


図-4 2006 M 列車通過時における振動速度測定記録（浮きまくらぎ区間）

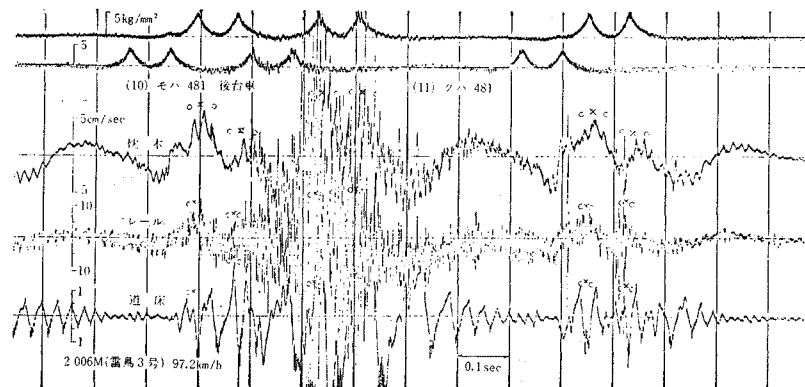


図-5 2006 M 列車通過時における振動速度測定記録（浮きまくらぎ区間）

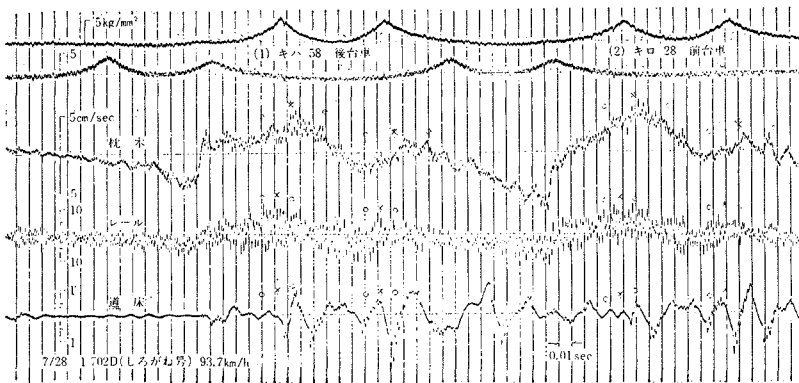


図-6 1702 列車通過時における振動速度測定記録（浮きまくらぎ区間）

の運転台より遠い台車の通過時におけるレールの振動の大きいことに注目される。レールには 50 cm/sec 以上の振動速度を生じ、これに伴ってまくらぎおよび道床に生ずる振動も大きくなっている。しかし図-5 に示すごとくクハ 481 形式電車の運転台下の台車の通過時における振動は他の車両通過時とほぼ同様の小さな振動速度を示している。このようにクハ 481 形式電車において運転台より遠い台車の通過時に限って軌道に大きな振動を生ずる場合がしばしばあることの原因としてはこの台車の車輪踏面に多数の傷があるためと想像され、向日町運転所において検査の結果によって確かめられた。

クハ 481 形式電車は特急電車 1 編成の最前部および最後部に連結され、図-2 に示すごとく運転台の前方には電動発電機および空気圧縮機が据え付けられているため運転台より遠い台車に作用する車体重量は運転台下の台車に作用する車体重量の 76~80% になっている。これはワイヤ ストレイン ゲージによってレールに生ずる曲げ応力を測定した結果によっても推定される。車体重量が軽い場合には制動時においてブレーキシューの締め過ぎによってレール面上で車輪のすべりを生ずる可能性が多く、とくに車体の上下動によって車輪とレールとの間の接触圧力が変動するときには車輪はレール面上ですべりと転動とを交互に繰り返す。すべりによる摩擦熱によって車輪踏面に熱硬化を生じ、これがきれつ、碎片状脱離、鱗状はく離へ発展す

可能性の大きいことが知られている。

図-6 は浮きまくらぎ区間においてディーゼル動車通過時の振動記録を示したが、図-3 と同様にレールおよびまくらぎには各車輪の通過に伴うたわみ振動の上に高周波の振動が重なっている。レールには主として約 700 c/sec の高周波が認められ、まくらぎには 400~500 c/sec の高周波が認められる。道床にお

いては約 40 c/sec の基本振動の上に約 400 c/sec の高周波が重なっている。この場合にはレールはまくらぎ、道床とは別の振動をしているものようである。

図-7~10 は締ったまくらぎの区間における測定記録である。図-7 はディーゼル動車通過時の記録であり、レール、まくらぎの振動に関しては図-6 とほぼ同様の傾向を示している。しかるに図-7 においては道床においても各車輪通過時のたわみ運動が明瞭にあらわれており、これはまくらぎが道床に密着しているためレール、まくらぎが受けた車輪荷重に比例して道床にたわみを生じたものと考えられる。レール、まくらぎ、道床いずれ

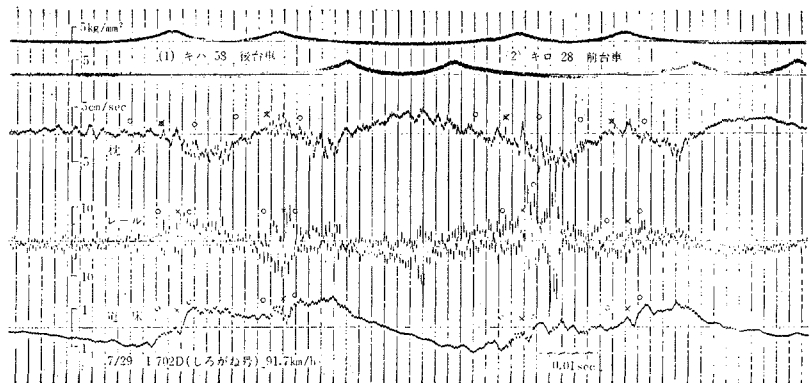


図-7 1702 D 列車通過時における振動速度測定記録（締ったまくらぎ区間）

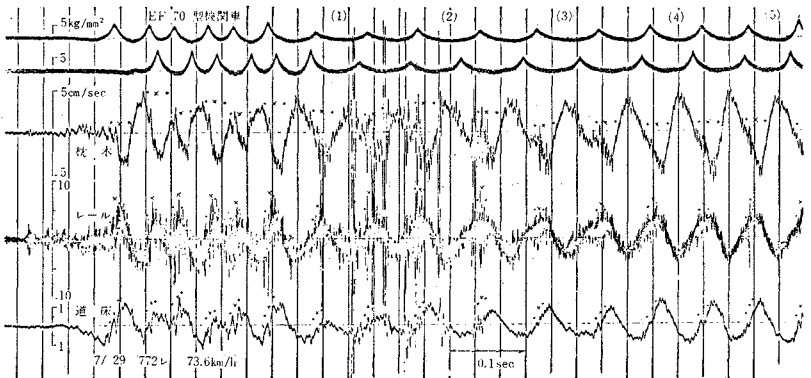


図-8 772 列車通過時における振動速度測定記録（締ったまくらぎ区間）

るも 400 c/sec の高周波があらわれており、レールはまくらぎ、道床と一体となって振動をしている。さらにまくらぎと道床には 80 c/sec の振動も認められるが、レールについては明らかではない。

図-8, 9 は貨物列車通過時の記録であってレール、まくらぎ、道床ともに各車輪の通過時にたわみ運動を生じ、この上に高い周波数の振動の重なっていることが認められる。一般に 2 軸貨車の通過時にはレールに生ずる高周波の振幅が小さいが、2 軸貨車は重ね板ばねによって支持されているため板ばね間の摩擦抵抗によって振動が減衰されるためと考えられる。これと同様な現象は列車通過時に波状摩耗レールに生ずるたわみ運動においても観察された⁵⁾。第 1 両目の貨車の後輪および第 2 両目の貨車の前輪の通過時にレール、まくらぎおよび道床とくに大きな振動が生じているのはこれらの車輪踏面に平坦部があることを示している。第 24, 25 両目は 2 軸ボギー貨車であってこれらの貨車は軸重の小さいためレール、まくらぎ、道床ともにたわみ振動は明らかではないが、他の車両にくらべてとくに大きな振幅を持つ高周波がレールにあらわれている。このように軸重の小さな貨車において大きな振動を生ずることは重ね板ばねの摩擦抵抗が小さいため振動を減衰する作用がないことおよびさきにくハ 481 型電車について述べたことと同様な理由によると考えられる。

図-10 は 2006 M 列車のクハ 481 型電車通過時の記録であって車輪踏面に多数の傷があることはレールに生ずる曲げ応力測定記録によっても明らかである。レールには 800 c/sec の高周波を生じ、まくらぎには 500 c/sec の高周波を生じ、道床には 75 c/sec と 400 c/sec の振動とを生じている。この測定においてはとくにレールに生ずる振動を記録するのに固有振動数 2000 c/sec のガルバノメータを用いたが、800 c/sec 以上の振動数を持つ振動はあらわれず、この振動数を持つ振動が最も大きなエネルギーを持つ振動であると想像される。

以上の測定結果を見ればレールには約 800 c/sec の振動があらわれる場合が多く、これは軌道上部構造の弾性振動と考えられる。道床には 40 c/sec または 80 c/sec

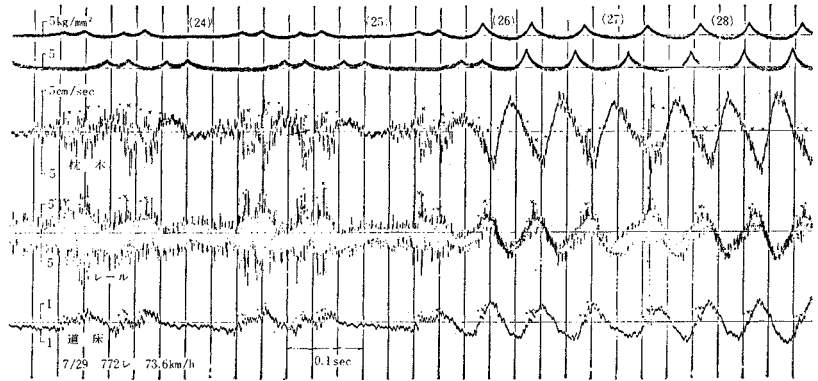


図-9 772 列車通過時における振動速度測定記録（縮ったまくらぎ区間）

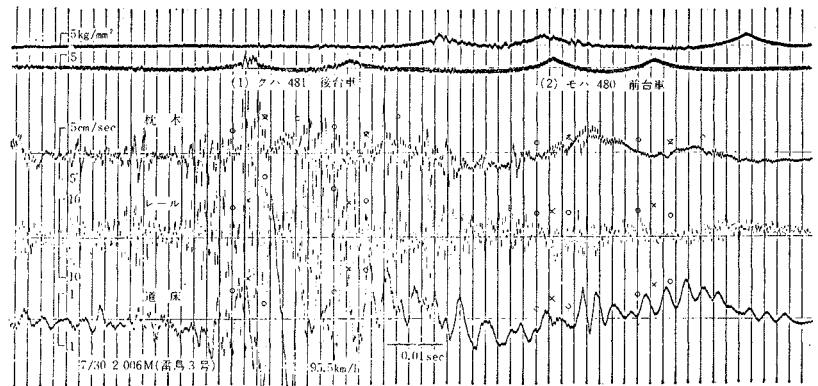


図-10 2006 M 列車通過時における振動速度測定記録（縮ったまくらぎ区間）

の振動を生じているが、この振動は主として道床および路盤の圧縮に対する弾性によって生ずると考えられる。しかしこの振動を車両の走行速度を考慮してレール上の長さに変換すれば 660 mm または 330 mm となり、これはまくらぎ間隔またはその 1/2 にほぼ一致している。まくらぎ間隔が振動数を決定する条件となるかについては種々の列車速度における測定が必要であるが、今回は測定をしなかった。

3. 試験軌道の構造ならびに測定装置

図-11, 12 または 写真-1 に示すごとく実験室内に延長 8 m の試験軌道を敷設した。50 kgN レール、PC 3 号 5 型まくらぎを厚さ 250 mm の砕石道床上に敷設した。まくらぎ間隔を 66 cm とし、道床肩幅を 310 cm とし、土留板を用いて道床の崩壊を押えた。路盤としては厚さ 1.7 m の砂層を入れた。これらの図または写真に示すごとく試験軌道をまたいで門形わくがあるが、実はこれは箱形わくであってジャッキによって任意の大きさの荷重を試験軌道に加えることができる。ジャッキと試験軌道との間にはコイルばねまたは重ね板ばねを挿入して実際の車両が軌道に垂直荷重を加える状態と同一の条件になるようにした。片側レール当りコイルばね 2 個ま

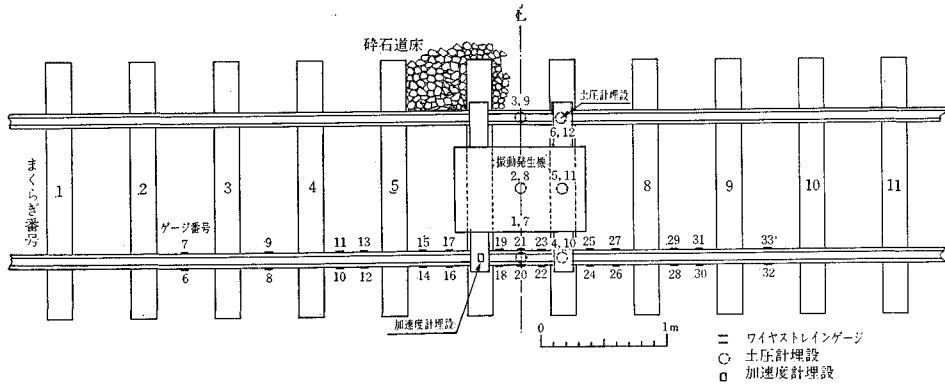


図-11 試験軌道平面図

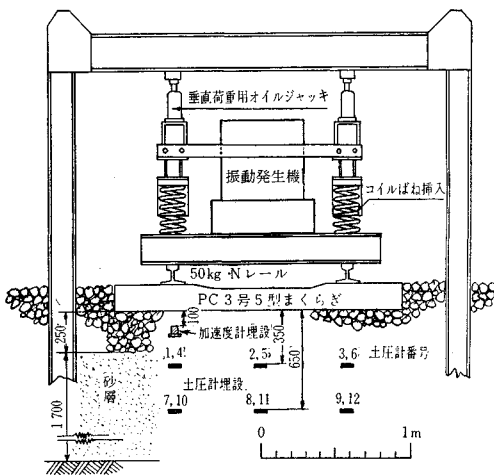


図-12 試験軌道ならびに垂直荷重重載装置
(コイルばねを使用した場合)

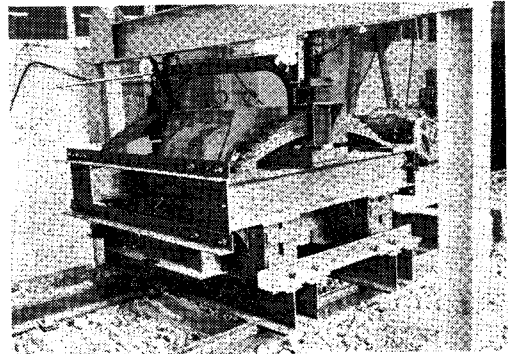


写真-1 試験軌道および振動発生機
(重ね板ばねを使用した場合)

たは重ね板ばね1個を用いたが、これらのばねに加えた荷重とたわみとの関係を 図-13 に示した。コイルばねは伸縮に際してほとんど内部摩擦を伴わないが、重ね板ばねにおいては大きな内部摩擦を伴うことが認められる。

試験軌道の中央に2本の木はりを渡し、その上に振動発生機を据え付けた。振動発生機の内部では偏心荷重を2個ずつとり付けた2枚の円板が反対方向に回転している。もし2個の偏心荷重が相対する位置にあれば振動力を生じないが、相対する位置より角 α だけずれていれば次式で示される大きさの上下方向の振動力を生ずる。

$$F = \frac{4Q}{g} \left(\frac{2\pi n}{60} \right)^2 \sin \frac{\alpha}{2} \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 Q は1個の偏心荷重の重量と偏心距離との積であって今回使用した振動発生機においては $Q=73 \text{ kg}\cdot\text{cm}$ となっていた。 n は振動発生機の毎分の回転数である。これより計算すれば $\alpha=10^\circ$, $n=1800$ のとき $F=924 \text{ kg}$ となり、 $\alpha=20^\circ$, $n=1800$ のとき $F=1841 \text{ kg}$ となる。振動発生機は铸铁の台に取付けられており、台を含めた重量が 1850 kg となっている。よって $\alpha=10^\circ$ のときには $n=2500$, $\alpha=20^\circ$ のときには $n=1800$

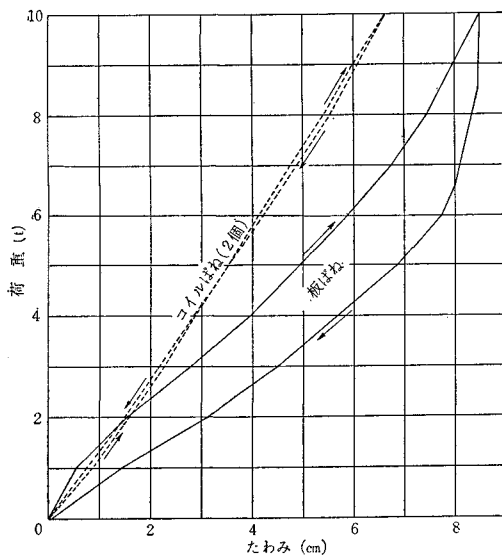


図-13 コイルばねおよび重ね板ばねの荷重によるたわみ

が限界の回転数となる。

振動発生機の偏心角を $\alpha=10^\circ$ または 20° とし、垂直荷重または回転数を順次変えて軌道の各部に生ずる振動を測定した。まくらぎに生ずる振動速度は主として保坂製作所製換振器を用い、その他の軌道各部に生ずる振動加速度を表-2に示す換振器を用いて測定した。

表-2に示す最下段の換振器の増幅器には積分回路が付属しており、加速度を2回積分して変位を記録できる装置となっている。

なお 図-11に示すごとくレール底部にワイヤストレーンゲージを貼り付けて振動によってレールに生ずる曲げ応力を測定した場合もある。また 図-12に示すごとく振動発生機下の路盤中に土圧計を埋設し、振動による土圧変化の測定もした。土圧計としては共和電業製土圧変換器を用い、直径10cm、厚さ2cmで定格容量 1 kg/cm^2 となっている。土圧計6個はまくらぎ下面より35cmの深さとし、他の6個はまくらぎ下面より65cmの深さに埋め込んだ。

表-2 加速度測定用換振器の性能

製作所	形式	測定原理	容量	固有振動数
東洋測器	A-II-2-120	非接着抵抗線形	$\pm 2\text{ g}$	130 c/sec
共和電業	120 A-5 C	〃	$\pm 5\text{ g}$	200 c/sec
国際振動	VM-4200	チタン酸バリウム	$\pm 10\text{ g}$	

4. 試験軌道に生ずる振動、曲げ応力および土圧の測定

図-12に示すごとく試験軌道とジャッキとの間にコイルばねを挟んで片側レール当り6, 4または2tの荷重を加えたあと振動発生機の回転数を順次増加して軌道の各部に生ずる振動を測定した。 $\alpha=10^\circ$ のときには2500 r.p.m. まで、 $\alpha=20^\circ$ のときには2000 r.p.m. に達したときに電動機のスイッチを切って回転数が順次低下し、振動発生機の回転が停止するまで測定を続けた。振動発生機の近くにあるまくらぎ(図-11における5番まくらぎ)上に保坂振動計を据え付けてまくらぎに生ずる上下方向の振動速度を測定した結果を図-14, 15に示した。回転数を増加した場合と減少した場合の測定結果をあわせて示したが、これらの結果はほぼ一致して測定精度の高さを示している。

図-14は $\alpha=10^\circ$ の場合であり、図-15は $\alpha=20^\circ$ の場合であるが、 $\alpha=20^\circ$ の場合は $\alpha=10^\circ$ の場合の約2倍の振動速度を示し、したがってまくらぎに生ずる振動振幅は起振力にはほぼ比例すると見ることができる。垂直荷重6t, 4tの場合とはともに1100~1200 r.p.m. に共振

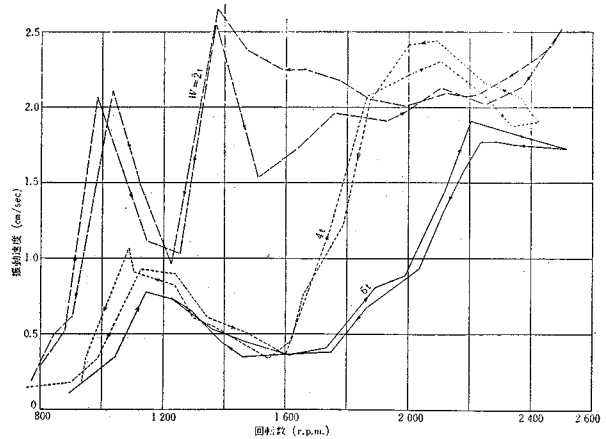


図-14 5 番まくらぎに生ずる振動速度
 $\alpha=10^\circ$, コイルばね使用

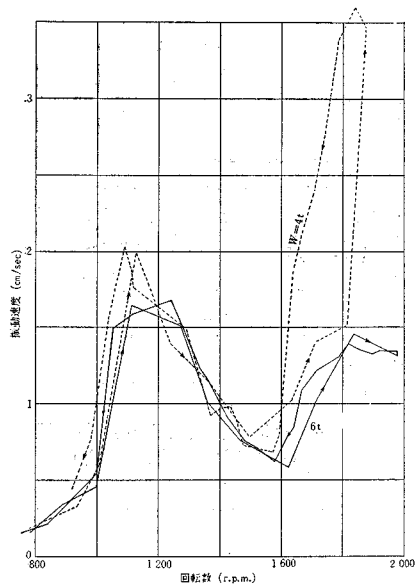


図-15 5 番まくらぎに生ずる振動速度
 $\alpha=20^\circ$, コイルばね使用

点のあることが認められる。しかし垂直荷重を2tとし、 $\alpha=10^\circ$ としたときには1000 r.p.m.の付近に共振点があり、そのときの振動速度は垂直荷重6, 4tの場合にくらべてはるかに大きい。このような差を生じた原因としては垂直荷重の小さいときにはまくらぎ下の道床支持力係数は比較的小さく、垂直荷重が大きくなれば順次増加して一定値に近づくためと考えられる。

垂直荷重6tの場合を見れば第1の共振点を過ぎたあとは回転数の増加に伴い振動速度は減少するが、回転数が1600 r.p.m.を超えると振動速度は再び増加し、2000 r.p.m.において第2の共振点に達している。垂直荷重の小さいときにはさらに少ない回転数で第2の共振点に達する。このような第2の共振点の存在理由に関しては理

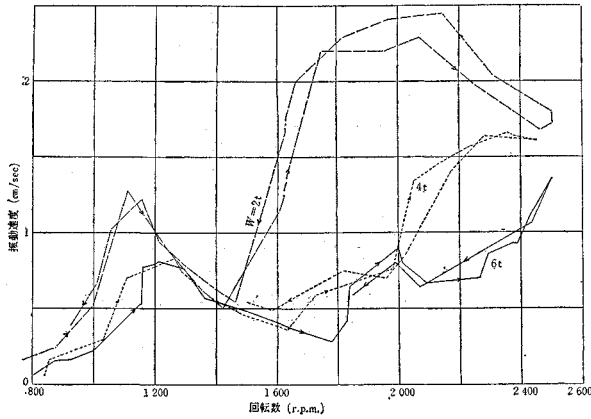


図-16 5 番まくらぎに生ずる振動速度
 $\alpha=10^\circ$, 板ばね使用

論的考察において検討を加えることとする。

図-16, 17 にはコイルばねのかわりに重ね板ばねを使用した場合について振動発生機の回転数と5番まくらぎに生ずる振動速度との関係を測定した結果を示した。回転数が2000 r.p.m. より大きい場合または垂直荷重が2tの場合について比較すれば板ばねを使用した場合の振動速度はコイルばねを使用した場合の振動速度にくら

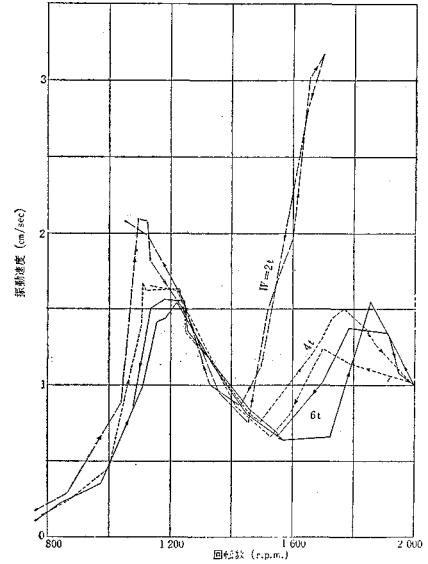


図-17 5 番まくらぎに生ずる振動速度
 $\alpha=20^\circ$, 板ばね使用

べてはるかに少ないことが認められる。この原因はさきにも述べたごとく重ね板ばねはばねの伸縮に際してそれぞれの葉片の間の摩擦抵抗が制振作用をなすためと考えられる。

垂直荷重を4tまたは6tとすれば重ね板ばねの場合にも1100~1200 r.p.m. に第1の共振点が認められ、第1の共振点を過ぎたあとは1400~1600 r.p.m. において極小値に達し、このあと再び振動速度は増加して第2の共振点に達するものようである。この第2の共振点は垂直荷重が小さいほど回転数の少ない方に移行している。図-15および図-17において1800 r.p.m. 付近に第2の極大値があらわれているが、 $\alpha=20^\circ$ としたときにはこの付近で起振力が振動発生機の自重に近くなり、振動波形が崩れてくるため真の共振点であるかどうか疑わしい。

図-18 にはコイルばねを通して試験軌道に荷重をかけ、 $\alpha=10^\circ$ として振動発生機の回転数を順次増加した場合に5番まくらぎに生ずる振動振幅を国際振動の換振器を用いて測定した結果を示した。軌道に生ずる振動を単弦振動と仮定して図-14に示す振動速度より求めた振動振幅にほぼ一致している。図-19 には加速度変換器を用いて5番まくらぎに生ずる振動加速度を測定した結果を示した。この場合にも図-16に示す振動速度より求めた振動加速度にほぼ一致している。

図-20 に国際振動の換振器を用いてレールに生ずる振動振幅とまくらぎに生ずる振動振幅との比較をなした結果を示した。共振点の近くにおいてはレ

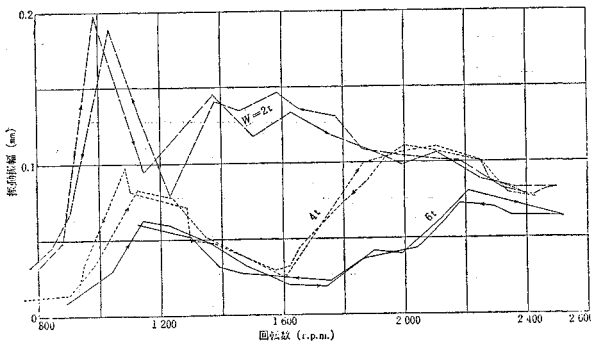


図-18 5 番まくらぎに生ずる振動振幅
 $\alpha=10^\circ$, コイルばね使用

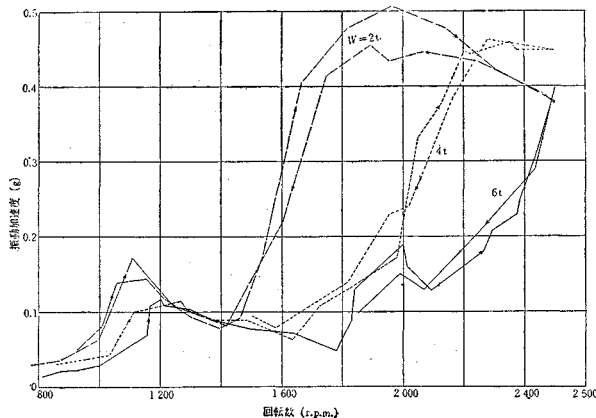


図-19 5 番まくらぎに生ずる振動加速度
 $\alpha=10^\circ$, 板ばね使用

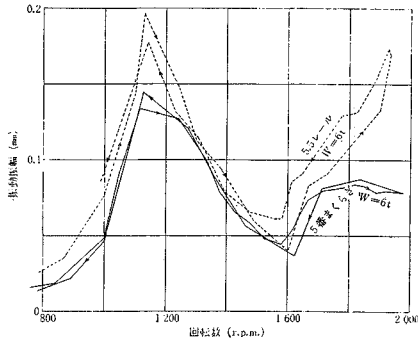


図-20 レールおよびまくらぎの振動振幅
 $\alpha=20^\circ$, コイルばね使用

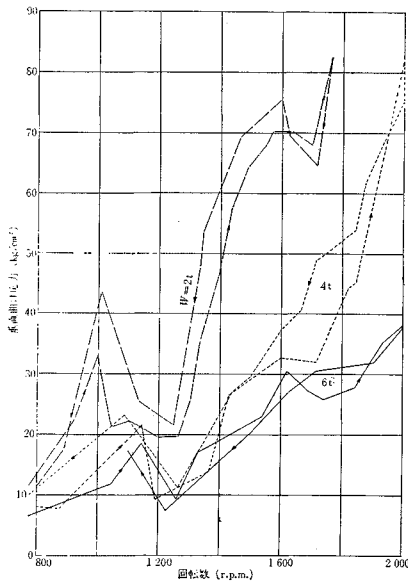


図-21 レールに生ずる垂直曲げ応力 (ゲージ No. 16)
 $\alpha=20^\circ$, コイルばね使用

ールの振幅がまくらぎの振幅よりいくらか大きくなっている。

図-21 には振動発生機の回転数と試験軌道中央のレール底部に生ずる曲げ応力との関係を測定した結果を示した。振動によってレールに生ずる曲げ応力はレールの振動振幅に比例すると予想したのであるが、測定結果によればレールに生ずる曲げ応力は回転数が 1250 r.p.m. を超えたのちに急に増加し、図-20 に示す振動振幅の増加をはるかに超えている。図-20 によれば 1100 r.p.m. 付近に第 1 の共振点があり、1600~1700 r.p.m. に第 2 の共振点があるものようである。しかし $\alpha=20^\circ$ において高い回転数になれば振動波形が乱れて高周波が含まれるため共振点であるかどうか疑わしい。

振動発生機の回転数を 900 r.p.m. に保ち、試験軌道に加わる垂直荷重を 1~10 t の各段階に変えて振動によりレール底部に生ずる曲げ応力を各箇所測定した結果

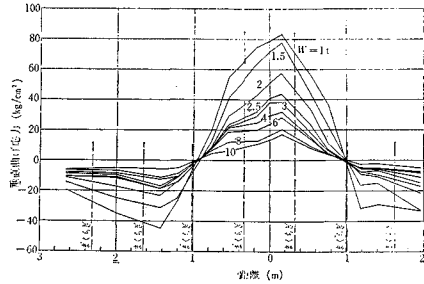


図-22 垂直荷重の大きさによってレールに生ずる振動曲げ応力の変化
 $\alpha=20^\circ$, コイルばね使用, 900 r.p.m.

を 図-22 に示した。この曲げ応力は垂直荷重の大小によって大きな差を生ずるが、この理由として道床および路盤の圧縮に対する弾性係数は荷重の増加によって増大することおよび垂直荷重の小さいときには 900 r.p.m. 付近に共振点があるためとくに振動振幅が増加してレールに生ずる曲げ応力が大きくなったものと考えられる。

試験軌道に起振力を加えたときには道床および路盤の内部摩擦のため軌道の各部に最大の変位または曲げ応力が生ずる時期は最大の振動力が下方に作用する瞬間よりいくらか遅れている。この遅れの時間は振動発生機より遠ざかるにしたがって順次大きくなっている。この関係をレール底部に生ずる曲げ応力の記録より読みとり、図-23 に示した。この図によれば 1800~2400 r.p.m. のと

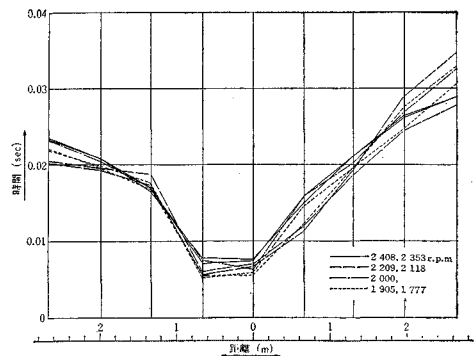


図-23 レールの曲げモーメントに関する位相のずれ (実験値)

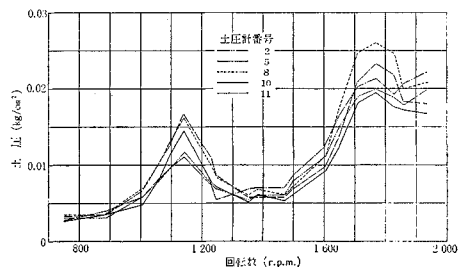


図-24 起振力によって路盤中に生ずる土圧の大きさ
 $\alpha=10^\circ$, $W=3t$, 板ばね使用

き振動発生機の直下において 0.006~0.008 秒の位相のおくれがあり、これより 2 m 離れた点において 0.021~0.028 秒の位相のおくれが認められる。

試験軌道の路盤中に埋め込んだ土圧計によって振動発生機の回転数と路盤中に生ずる振動土圧との関係を測定した結果を 図-24 に示した。この図によれば土圧計の埋設位置による差はほとんど認められず、ほぼ等しい振動土圧を示している。1150 r.p.m. と 1750 r.p.m. の 2 カ所に共振点のあることが認められる。つぎに振動発生機の回転数を 900 r.p.m. に保ち、試験軌道に加える垂直荷重を 2~10 t の間に変化して起振力が路盤内に発生する振動土圧の大きさを測定した結果を 図-25 に示した。この場合にも垂直荷重が大きいほど振動土圧の小さくなることが認められる。

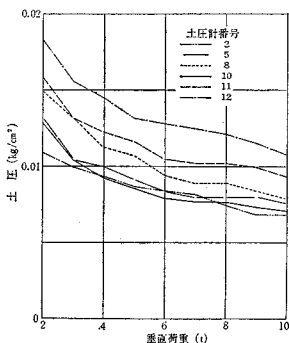


図-25 垂直荷重の大きさによる路盤中の振動土圧の変化 $\alpha=20^\circ$, 900 r.p.m.

5. 軌道の振動に関する理論的考察

以上の測定結果を理論的に解明するために 図-26 に示すごとき軌道模型について振動発生機の回転数と軌道各部に生ずる振動振幅との関係および振動の位相のずれその他を計算し、測定結果と比較した。これに似た軌道模型はこれまでに多くの論文⁶⁾で軌道の振動を解明するために用いられたのであるが、ここに示した解法はまくらぎおよびこれを支持する道床の重量は一平面内に集中するが、路盤の重量は深さ方向に広く分布して存在し、この中を振動の波が下方に伝播することを考慮したことに特徴がある。

図において m_1 は単位長さ当りのレールの重量をあらわし、 m_2 はまくらぎおよびこれを支持する道床の重量を軌道の単位長さ当りに換算した重量をあらわしている。 s はレールとまくらぎとの間に挿入された軌道パッドの弾性を軌道の単位長さ当りに換算したばね定数をあらわし、 c はパッドの変形に対抗する内部摩擦が変形の

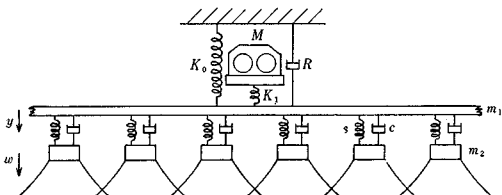


図-26 理論的計算において仮定した軌道の模型

速度に比例すると仮定したときの軌道の単位長さ当りの比例の定数である。レール鋼のヤング係数を E とし、レールの断面 2 次モーメントを I とし、レールのたわみを y とし、まくらぎのたわみを w とするときつぎの微分方程式が導かれる。

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + \frac{m_1}{g} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + c \left(\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial w}{\partial t} \right) + s(y-w) = 0 \dots\dots\dots(2)$$

また軌道が路盤より受ける圧力を軌道の単位長さ当り u とするときまくらぎおよび道床の上下動に関してつぎの微分方程式が導かれる。

$$\frac{m_2}{g} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + c \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial t} \right) + s(w-y) + u = 0 \dots\dots\dots(3)$$

まくらぎより道床に伝えられた圧力は道床中において B_0 なる面積に拡大分布し、さらにこの圧力は深さ z なる路盤中において B なる面積に拡大分布し、この分布の形状が次式で示されると仮定する。

$$B = B_0 \exp(2\varphi z) \dots\dots\dots(4)$$

ここに、 φ は路盤の材料によって定まる係数とする。深さ z における路盤のたわみを w とし、この深さにおける路盤内の垂直方向の圧力を p とし、路盤の圧縮に対する弾性係数を k とし、路盤の変形に対する内部摩擦を変形の数値に比例すると仮定してその比例の定数を r とするとき次式が成立する。

$$p = -k \frac{\partial w}{\partial z} - r \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial t} \dots\dots\dots(5)$$

まくらぎ間隔を a とし、

$$b = \frac{B_0}{a} \dots\dots\dots(6)$$

と置けば u は次式によって与えられる。

$$u = bp \dots\dots\dots(7)$$

ただし上式における p は $z=0$ における値とする。路盤の単位体積重量を ρ とし、式 (4) に示す面積 B 内に圧力が一様に分布すると仮定すれば次式が成立する。

$$B\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -g \frac{\partial}{\partial z} (Bp) \dots\dots\dots(8)$$

式 (4), (5) を式 (8) に代入し、かつ

$$w = w_0 \exp(\lambda x + \mu z + \nu t) \dots\dots\dots(9)$$

と置けば次式が導かれる。

$$\mu = -\varphi - \left\{ \varphi^2 + \frac{\rho \nu^2}{g(k+r\nu)} \right\}^{1/2} \dots\dots\dots(10)$$

路盤内の変形および運動のエネルギーの和が有限であるという条件より上式の根号の中の実数部は正であることが要求される。いまここに

$$y = y_0 \exp(\lambda x + \nu t) \dots\dots\dots(11)$$

と置いて式 (9), (11) を式 (1), (2) に代入すれば

$$EI\lambda^4 y_0 + \frac{m_1}{g} \nu^2 y_0 + c\nu(y_0 - w_0) + s(y_0 - w_0) = 0 \quad \dots\dots\dots(12)$$

$$\frac{m_2}{g} \nu^2 w_0 + c\nu(w_0 - y_0) + s(w_0 - y_0) - b\mu(k+r\nu)w_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

ν の値が与えられたときには μ は式 (10) によって計算され、したがって式 (13) より y_0 と w_0 との関係が求められる。これを

$$w_0 = \beta y_0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

と置く。ただし

$$\beta = \frac{c\nu + s}{\frac{m_2}{g} \nu^2 + c\nu + s - b\mu(k+r\nu)} \quad \dots\dots\dots(15)$$

式 (14) を式 (12) に代入すれば 4 個の λ の値が求められ、これを $\lambda, i\lambda, -\lambda, -i\lambda$ とする。ただし λ は第 1 象限にある値とする。 x が正の無限大となるときに y が 0 に収束するという条件より $x \geq 0$ に対して次式が導かれる。

$$y = \{y_2 \exp(i\lambda x) + y_3 \exp(-\lambda x)\} \exp(\nu t) \quad \dots\dots\dots(16)$$

$$w = \beta \{y_2 \exp(i\lambda x) + y_3 \exp(-\lambda x)\} \exp(\mu x + \nu t) \quad \dots\dots\dots(17)$$

上式における y_2, y_3 は積分定数であってつぎの境界条件を満足するように決定しなければならない。いまここに K_0 をジャッキと試験軌道との間に挿入されたばねのばね定数とし、 R をこのばねの伸縮に伴う内部摩擦が伸縮の速度に比例すると仮定したときの比例の定数とし、 K_1 を振動発生機を軌道に載せるために軌道に渡したはりのたわみに関するばね定数とする。振動発生機の下方向の移動量を Y とし、振動発生機の据付け位置を原点に選べば $x=0$ において次式の成立することが要求される。

$$\frac{\partial y}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$2EI \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = K_1(Y - y) - K_0 y - R \frac{\partial y}{\partial t} \quad \dots\dots(19)$$

いまここに

$$Y = Y_0 \exp(\nu t) \quad \dots\dots\dots(20)$$

と置けば振動発生機の起心力が式 (1) であらわされることを考慮して次式が導かれる。

$$\frac{M}{g} \frac{d^2 Y}{dt^2} = K_1(Y - Y) + F \exp\left(\frac{2\pi n}{60} it\right) \quad \dots\dots(21)$$

ただしここに M は振動発生機の重量とする。また上式における y は $x=0$ における値とする。式 (16) を式 (18) に代入すれば

$$y_3 = i y_2 \quad \dots\dots\dots(22)$$

なる関係が得られ、さらに式 (19) および (21) よりつぎの諸式が導かれる。

$$\nu = i \frac{2\pi n}{60} \quad \dots\dots\dots(23)$$

$$4EIi\lambda^3 y_2 + K_1\{Y_0 - (1+i)y_2\} - (1+i)K_0 y_2 - (1+i)\nu R y_2 = 0 \quad \dots\dots(24)$$

$$\frac{M}{g} Y_0 \nu^2 + K_1\{Y_0 - (1+i)y_2\} = F \quad \dots\dots\dots(25)$$

上の 2 式より Y_0 および y_2 を求めることができる。

さきに述べた測定結果に比較するためにつぎの諸数値を使って計算を行なった。これらの数値の中には E, I のごとくその数値がはっきりわかっているものもあるが、路盤の圧縮に対する弾性係数または軌道パッドおよび路盤の内部摩擦の係数のごとくその大きさの不明のものも多い。これらの係数に対しては種々の値を仮定して計算を行ない、計算値が測定値に最も近くなるように選んだ。

$E=2.1 \times 10^6$ kg/cm², $I=3488$ cm⁴, $m_1=1.0$ kg/cm, $m_2=24.0$ kg/cm, $c=0.2$ kg·sec/cm², $s=1500$ kg/cm², $B_0=240 \times 55=13200$ cm², $\varphi=0.009$ cm⁻¹, $a=66$ cm, $k=350$ kg/cm², $r=0.25$ kg·sec/cm², $\rho=0.0018$ kg/cm³, $K_1=160000$ kg/cm, $K_0=3320$ kg/cm, $M=1850$ kg, $R=0, 200, 400$ kg·sec/cm², $\alpha=10^\circ$

振動発生機の回転数とレールおよび道床の振動との関係を計算した結果を図-27 に示した。 $R=0$ は試験軌道にコイルばねを通して荷重をかけた場合であり、 $R=$

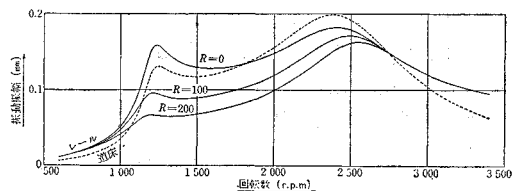


図-27 レールおよび道床に生ずる振動振幅 (計算値)

200 および 400 は重ね板ばねを使用した場合である。 $R=0$ とした計算結果は 図-18 に示した実験結果の中で垂直荷重 6t の場合にほぼ一致することが認められる。計算結果、実験ともに 1230 r.p.m. において振幅が極大となるが、これは路盤のばね定数をこのように選んだ結果である。ただし測定より得られた振幅は計算値の約 1/2 となっている。このような差を生じた理由としては振動発生機は 72 cm の間隔に置かれた 2 本のはりを介して軌道に振動を伝えるので起振力が 2 分されたためと考えられる。

$R=200$ または 400 として計算すれば低い回転数における振動振幅は減少するが、2700 r.p.m. 以上の回転数においては $R=0$ の場合に一致する。しかるに測定結果によれば重ね板ばねを使用した場合の振動振幅ならびに振動速度はコイルばねを使用した場合に比較して低い回転数においてはほとんど差はないが、1600 r.p.m. 以上

の回転数において低下することが認められた。このような差を生じた原因については不明であるが、低い回転数において振動振幅の小さいときには重ね板ばねの各板ばねの間の摩擦抵抗はほとんど作用しないためと考えられる。

計算結果によれば 2 410 r.p.m. に第 2 の極大値があらわれており、これは実験において 2 000~2 200 r.p.m. に第 2 の極大値があらわれたことにほぼ一致している。このように第 1 の極大値を生ずる回転数の 2 倍近くの回転数において第 2 の極大値が存在することが実験によっても理論的計算によっても証明されたことははなはだ興味深いことである。

さらに高い回転数に至るまでレールおよび道床に生ずる振動振幅を計算した結果を図-28 に示したが、レールの振幅には 14 500 r.p.m. において第 3 の極大値が存在することが認められる。しかしこの回転数において道床の振幅には極大値を生じない。

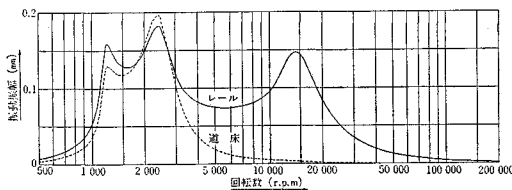


図-28 レールおよび道床に生ずる振動振幅(計算値)

以上述べたごとく回転数が増加するときにレールの振動振幅には 3 個の極大値が存在するが、これらが共振点であるかどうかということにははなはだ疑問がある。共振点であるためには内部摩擦の項を 0 としたときに振幅が無限大となるべきである。c および r の値を次第に 0 に近づけるとときには第 1, 第 3 の極大値は次第に大きくなるが、c および r を 0 とおいたときには無限大とはならず表-3 に示す値となった。また第 2 の極大値は c および r を 0 に近づけるとときに減少することが判明した。したがってこれらの極大値を生ずる回転数は厳密な意義で共振点ということとはできない。

表-3 内部摩擦の大きさが振幅の極大値におよぼす影響

c	r	第 1 極大値	第 2 極大値	第 3 極大値
0.1 kg·sec/cm ²	0.25 kg·sec/cm ²	0.158mm	0.182mm	0.147mm
0	0	0.404	0.175	0.190

路盤のばね定数 k を変化するときには第 1, 第 2 の極大値を生ずる回転数はばね定数のほぼ 1/2 乗に比例して変化する。しかし路盤のばね定数を増加するときには第 2 の極大値の存在は次第に不明となる。また第 3 の極大値を生ずる回転数は路盤のばね定数にはほとんど関係しないことを知った。

軌道パッドのばね定数 s を変化するときには第 3 の極

大値を生ずる回転数はばね定数の 1/3~1/4 乗に比例して変化するが、第 1, 第 2 の極大値を生ずる回転数はほとんど影響を受けない。

振動発生機と試験軌道との間に挿入されたはりのばね定数 K₁ を小さくすれば第 3 の極大値を生ずる回転数はいくらか減少すると同時に第 2 の極大値の存在は不明となる。またこのばね定数を増加すれば第 3 の極大値を生ずる回転数は次第に増加する。

以上をあわせて考察すれば第 3 の極大値はレールが 2 層のばねすなわち K₁ と s とに挟まれて共振に近い振動をする場合であると考えられる。また第 2 の極大値の存在は非常に不安定であることが判明する。一般に無限に長く続く構造物においては進行波は存在するが、自由振動は生じないのが原則である。しかしこのような構造物の 1 カ所に集中荷重が存在するときには自由振動が存在し、したがって共振周波数を求め得る場合がある。つぎに共振周波数が存在するために必要となる条件を考察しよう。

式 (24), (25) より求めた y₂ が無限大となるためには y₂ を計算する式においてその分母を 0 とする回転数が存在する必要がある、このためにはつぎの不等式の成立することが要求される。

$$64 EI \left(\frac{sV}{s+V} - U \right)^3 < \left(\frac{K_1}{K_1 - W} - K_0 \right)^4 \dots (26)$$

または

$$K_1 < W \dots (27)$$

ただし

$$U = \frac{km_1}{\rho} \varphi^2 \dots (28)$$

$$V = b \varphi k - \frac{km_2}{\rho} \varphi^2 \dots (29)$$

$$W = \frac{kM}{\rho} \varphi^2 \dots (30)$$

上式によれば m₁, m₂ または M が大きいときあるいは ρ が小さいときには共振周波数が存在する。c および r を 0 とし、かつ M > 2 320 kg とし、その他はさきの数値を採用すれば式 (26) が満足される。このときには 1 186 r.p.m. が共振点となって振幅は無限大となる。

つぎに振動発生機の偏心荷重が最下位に達してよりレールの各点に生ずるたわみまたは曲げ応力が最大となるまでの時間の経過を計算した結果を図-29, 30 に示した。これはレールのたわみおよび曲げモーメントに関する位相のずれをあらわすものであり、振動発生機の回転数の少ないときにはこれらの位相のずれの間に大きな差があるが、回転数の増加とともに次第に近くなる。回転数が 2 000 r.p.m. 以上になれば図-29 は図-23 に示された測定結果にほぼ一致することが認められる。

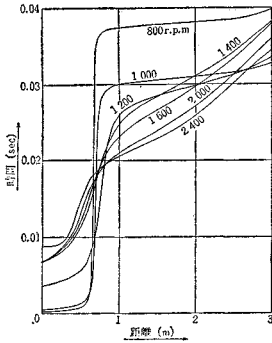


図-29 レールの曲げモーメントに関する位相のずれ(計算値)

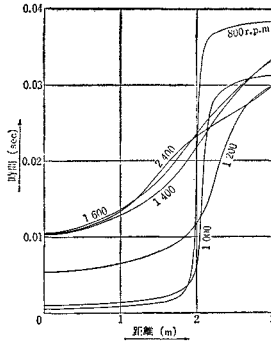


図-30 レールのはねに関する位相のずれ(計算値)

6. 結 論

砂利道床軌道に生ずる振動に関して現場測定、試験軌道による実験および理論的考察の3方面より研究を進めた。現場測定によって列車通過時に軌道には40~80 c/secの低周波と400~800 c/secの高周波とを生ずることが認められた。試験軌道における実験および理論的考察によれば低周波は主として路盤の弾性変形によって生ずる軌道の固有振動であると推定される。普通の軌道における測定ではとくに大きな振動速度を持つ低周波振動は生じないが、レール継目部に落込みのある場合またはレールに波状摩耗を生じたときには大きな振動を生ずると考えられる。砂利道床においてレールに波状摩耗を生じた場合にその波長が30~50 cmとなることより考えて軌道の低周波振動と波状摩耗の発生とはなんらかの関係があるものようである。

試験軌道による実験ならびに理論的考察によれば基本振動の2倍近くの振動数のときに第2の共振点があられたが、実際の軌道における振動測定ではこの点は明ら

かではなかった。しかし列車通過時に40~80 c/secの各種の振動があらわれたことはこの中に基本振動と第2の共振とが混在しているとも考えられる。またばね下重量の大きさによって基本振動数は影響を受けることを考慮しなくてはならない。

現場測定で列車通過時にあらわれるような高周波を振動発生機によって試験軌道に引き起こすことは不可能であるため高周波振動の発生原因ならびに軌道の応答について解析することは困難である。このような高周波はレール面または車輪踏面の微細なでこぼこによって発生すると考えられ、とくに車輪踏面に平坦部または傷があるときに著しい。レール面または車輪踏面に不整があるときには平滑なレールおよび車輪踏面の場合の10倍以上の振動速度を持つ高周波を生じ、これが道床砂利の崩れ、軌道材料の弛緩および摩損を生ずる大きな原因になると考えられる。

終りに現場測定、試験軌道の敷設ならびに振動発生機の使用に関して金沢鉄道管理局保線課、金沢保線区ならびに鉄道技術研究所の方々より多大のご協力を受けたことを述べ、ここに厚く感謝の意を表する。

参 考 文 献

- 1) 佐藤 裕・豊田昌義・小林 悟・平田五十：列車によって軌道に生ずる振動，鉄道技術研究報告，第85号，昭34.8.
- 2) 佐藤 裕・豊田昌義：高速列車による軌道の変形，鉄道技術研究報告，第492号，昭40.8.
- 3) 小野一良：運動エネルギーの分配に関する法則，土木学会論文集，第33号，昭31.4.
- 4) Walter Rudolph：Die Lauflächenschäden der Eisenbahnräder und ihre Entstehung，Glas. Ann. 88 (1964) Nr. 3 März
- 5) 小野一良：波状摩耗レールが走行車両より受ける衝撃，土木学会論文集，第24号，昭30.4.
- 6) 佐藤 裕：軌道構造と振動との関係についての理論的考察，鉄道業務研究資料，第13巻，第4号，昭31.4.

(1969. 11. 19・受付)