

折板構造解析による単一箱桁の曲げねじりについて

ON TORSION BENDING OF SINGLE CELL BOX GIRDER
BY MEANS OF FOLDED PLATE ANALYSIS

尾 崎 詔*
By Sinobu Ozaki

1. はじめに

コンクリート箱桁橋における曲げねじりの問題は、優れたねじり剛性を発揮する箱桁の断面が厚く、偏心荷重としての活荷重の影響が小さいため、特別な場合を除いてはあまり問題にならないことが多い。しかし、一般に用いられている曲げねじり理論は、箱の断面変形を考慮に入れていないものである。

本研究は、鋼箱桁の場合と異なり、隔壁をほとんど入れずに、自からのラーメン剛性によって断面の変形に抵抗するコンクリート箱桁を折板構造として取り扱い、断面変形を考慮して剛接合折板理論によって単一箱桁の曲げねじりを、単純支持を仮定して解析し、隔壁、ハンチ等の影響も調べた。

これらの計算は変位法によるが、箱桁を構成する折板要素について、変位とせん断力との二次元応力的関係式（変位せん断公式）を、さきに能町¹⁾が発表したように設定し、矩形断面節点における力のつりあいと適合条件、さらに断面の変形抵抗の条件式により微分方程式を求め、フーリエ級数に展開して計算を行なったが、片持部のない場合、あるいは片持部があっても片持部を節点断面積におきかえることができる場合には、級数和を解析的に求めて簡便な計算式をえた。

実験は主としてプラスチック材料を用いた小型模型によって行ない、ストレインゲージによるひずみの測定値により、理論値を検証した。

ところで、折板理論は長支間の屋根構造など、建築構造物を対象として発展してきたことから、応力法による三せん断公式を用いたはり理論によるものが多いが、近年、Goldberg²⁾ や Scordelis³⁾ らによって、変位法による一般的なマトリックス解法が設定され、スパン方向の平板の曲げや、あるいは部材の深さ方向のひずみをも考慮している。応力法に属する研究としては、国内でも奥

村・鈴木⁴⁾のせん断変形を無視した剛接合折板理論があり、開断面台形桁への応用研究がなされている。さらに、箱桁に関するこの種の研究としては、ヒンジ接合折板理論による Resinger⁵⁾の方法がある。これら三せん断公式に基づく方法は、はり理論における三連モーメント法に類するもので、これに対し、変位せん断公式による本法は、はり理論におけるたわみ角法に相当するものである。ところで、本折板理論の解は、スパン方向の平板の曲げを考慮しない Scordelis の結果と同じものになるが、本論文では単一箱桁のみを取り扱い、曲げねじりの計算式を算出する都合上、部材の深さ方向の変位を一定とした。なお、コンクリート箱桁を対象としたこの種の研究として、岡田・吉竹⁶⁾の発表がある。

なお、本論文はさきに学会の年次講演会等で発表したものに^{7)~11)}、その後の研究を加えてまとめたものである。

2. 折板要素に関する基本式

箱桁を構成している折板要素をとり出し、図-1 のように桁の長さ方向を x 、深さ方向を s とし、それぞれの方向の変位を u, w とする。 x, s 方向の法線断面力を p_x, p_s 、せん断流を q とすれば、つりあい方程式は、

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial p_s}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \dots\dots\dots(2)$$

x 方向について、変位は平面保持を仮定し、弾性限度内を考え、

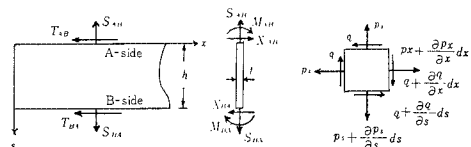


図-1 折板要素とその微少要素

* 正会員 工修 室蘭工業大学助教授 工学部土木工学教室

$$u = u_A \left(1 - \frac{s}{h}\right) + u_B \frac{s}{h} \dots\dots\dots (3)$$

$$p_x = Et\dot{u} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、 \dot{u} は $\frac{\partial u}{\partial x}$ を表わすものとする。

これに境界条件

$$\left. \begin{aligned} s=0 \text{ で } q &= T_{AB}, p_s = S_{AB} \\ s=h \text{ で } q &= -T_{BA}, p_s = S_{BA} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を適用して、変位せん断公式と名づけた⁷⁾ 次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{AB} &= \frac{1}{6} Eht(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{1}{h} (S_{AB} - S_{BA}) \\ \dot{T}_{BA} &= \frac{1}{6} Eht(2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) + \frac{1}{h} (S_{BA} - S_{AB}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 \ddot{u} は $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を表わす。

一方、せん断流に関しても弾性理論により

$$q = Gt \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \dot{w} \right) \dots\dots\dots (7)$$

これに式(6)を導いたと同様の関係を用いて計算すると、

$$\begin{aligned} Gt\dot{w} &= \frac{Gt}{h} (u_A - u_B) + \frac{1}{h} (\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA}) \\ &+ Et \left\{ \left(\frac{h}{3} - s + \frac{s^2}{2h} \right) \ddot{u}_A + \left(\frac{h}{6} - \frac{s^2}{2h} \right) \ddot{u}_B \right\} \end{aligned} \dots\dots\dots (8)$$

となるが、単一箱桁の場合 s 方向の変位の変化は微小であるとし、 w の値は折板要素内で一定とみなして w_{AB} とおくと、

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_{AB} &= \frac{1}{h} (u_A - u_B) + \frac{1}{Gth} (\bar{S}_{AB} - \bar{S}_{BA}) \\ \dot{w}_{BA} &= \frac{1}{h} (u_B - u_A) + \frac{1}{Gth} (\bar{S}_{BA} - \bar{S}_{AB}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

上式は曲げとせん断による x 方向のたわみ角を表わす。なお、 \bar{S} は $\int Sdx$ を表わすものとする。

3. 軸対称矩形断面の変形抵抗

一般の箱桁断面に対しては、節点における力のつりあい条件を適用して節点変位を未知量とした多元連立微分方程式を解けばよいが、直線箱桁橋などでは軸対称矩形断面の場合が多いから、ここに、断面変形を簡単な形で表現し、以下この手法を用いる。

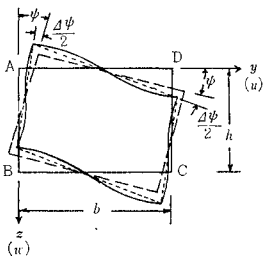


図-2 のように y 方向の 図-2 断面の回転と変形

変位を v, z 方向の変位を w とすれば、 AB, AD 部材の回転角 ϕ_{AD}, ϕ_{AB} はそれぞれつぎのように表わされる。

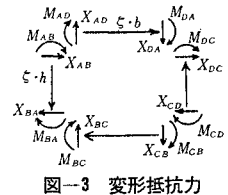
$$\phi_{AB} = \frac{v_A - v_B}{h}, \phi_{AD} = \frac{w_D - w_A}{b} \dots\dots\dots (10)$$

いま、ねじりによって箱断面が全体として ϕ だけ回転し、直角隅角が $\Delta\phi$ だけひずむと考えれば、

$$\phi_{AB} = \phi - \frac{\Delta\phi}{2}, \phi_{AD} = \phi + \frac{\Delta\phi}{2}, \Delta\phi = \phi_{AD} - \phi_{AB} \dots\dots\dots (11)$$

一方、節点におけるせん断力は St. Venant のねじりを無視してつぎのように表わされる (図-3 参照)。

$$\begin{aligned} X_{AB} &= X_{BA} \\ &= -\frac{M_{AB} + M_{BA}}{h} \\ X_{AD} &= X_{DA} = -\frac{M_{AD} + M_{DA}}{b} \end{aligned} \dots\dots\dots (12)$$



ただし、

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= Ek_1(2\varphi_A + \varphi_B - 3\phi_{AB}) \\ M_{BA} &= Ek_1(2\varphi_B + \varphi_A - 3\phi_{AB}) \\ M_{AD} &= Ek_2(2\varphi_A + \varphi_D - 3\phi_{AD}) \\ M_{DA} &= Ek_2(2\varphi_D + \varphi_A - 3\phi_{AD}) \\ M_{BC} &= Ek_3(2\varphi_B + \varphi_C - 3\phi_{BC}) \\ M_{CB} &= Ek_3(2\varphi_C + \varphi_B - 3\phi_{BC}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

式中、

$$k_1 = \frac{t^3}{6h}, k_2 = \frac{t^2}{6b}, k_3 = \frac{t^3}{6b}$$

いま、変形抵抗係数 G_0 を定義し、
 $\zeta = G_0 \cdot \Delta\phi \dots\dots\dots (14)$

とおいて変形抵抗力 ζ を仮定すれば、つぎの関係がある。

$$\zeta = -\frac{X_{AB} + X_{DC}}{b} = \frac{X_{AD} + X_{BC}}{h} \dots\dots\dots (15)$$

そこで、節点における曲げモーメントのつりあいから φ_A, φ_B を求め、式(11)の関係を用いて式(13)の節点曲げモーメントは、

$$\left. \begin{aligned} M_{AB} &= K_A \cdot E \cdot \Delta\phi, \\ K_A &= \frac{9k_1k_2(k_1 + 3k_3)}{(2k_1 + 3k_2)(2k_1 + 3k_3) - k_1^2} \\ M_{BA} &= K_B \cdot E \cdot \Delta\phi, \\ K_B &= \frac{9k_1k_3(k_1 + 3k_2)}{(2k_1 + 3k_2)(2k_1 + 3k_3) - k_1^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

となり、式(12)、(15)から変形抵抗係数はつぎのように求まる。

$$G_0 = n \cdot G, \quad n = \frac{4(1+\nu)}{bh} \cdot (K_A + K_B) \dots\dots\dots (17)$$

4. 曲げねじりの微分方程式

図-4 のような一軸対称断面の曲げねじりの微分方程式を求める。変位の逆対称性を考慮し、さきに式(6)で示した変位せん断公式中の S を節点における力のつりあい条件から P, X で表わし、かつ式(14), (15) から X を $G_0 \cdot \Delta\phi$ で表わせば、

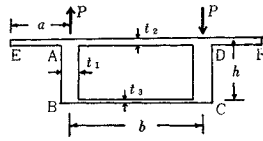


図-4 箱桁断面の記号

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{AB} &= \frac{Eht_1}{6}(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{P}{h} - G_0 \cdot \Delta\phi \\ \dot{T}_{AD} &= \frac{Ebt_2}{6}\ddot{u}_A + \frac{2}{b}S_{AE} - G_0 \cdot \Delta\phi \\ \dot{T}_{AE} &= \frac{Eat_4}{6}(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_E) + \frac{S_{AE}}{a} \\ \dot{T}_{BA} &= \frac{Eht_1}{6}(2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) - \frac{P}{h} + G_0 \cdot \Delta\phi \\ \dot{T}_{BC} &= \frac{Ebt_3}{6}\ddot{u}_B + G_0 \cdot \Delta\phi \\ \dot{T}_{EA} &= \frac{Eat_4}{6}(2\ddot{u}_E + \ddot{u}_A) - \frac{S_{AE}}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(19)$$

一方、さきに式(9)で示したたわみ角関係式中の S に対し、上と同様の条件を適用して $G_0 \cdot \Delta\phi$ で表わせば、

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_A = \dot{w}_{AB} &= \frac{1}{h}(\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{P}{Gt_1h} - \frac{G_0}{Gt_1}\Delta\phi \\ \ddot{v}_B = \dot{w}_{BC} &= \frac{2}{b}\dot{u}_B + \frac{G_0}{Gt_3}\Delta\phi \\ -\ddot{v}_A = \dot{w}_{DA} &= -\frac{2}{b}\dot{u}_A - \frac{2}{Gt_2b}S_{AE} + \frac{G_0}{Gt_2}\Delta\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(20)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_{AD} &= \frac{2}{b}\dot{u}_A + \frac{2}{Gt_2b}S_{AE} - \frac{G_0}{Gt_2}\Delta\phi \\ \dot{w}_{AE} &= \frac{1}{a}(\dot{u}_A - \dot{u}_E) + \frac{1}{Gt_4a}S_{AE} \end{aligned} \right\} \dots\dots(21)$$

式(19)に対し、節点におけるせん断流のつりあい $T_{AB} + T_{AD} + T_{AE} = 0, T_{BA} + T_{BC} = 0, T_{EA} = 0 \dots\dots\dots(22)$

を適用すれば、つぎの微分方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} (2ht_1 + bt_2 + 2at_4)E\ddot{u}_A + ht_1E\ddot{u}_B + at_4E\ddot{u}_E \\ - 12G_0\Delta\phi + 6\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b}\right)S_{AE} + \frac{6}{h}P = 0 \\ ht_1E\ddot{u}_A + (2ht_1 + bt_3)E\ddot{u}_B + 12G_0\Delta\phi - \frac{6}{h}P = 0 \\ at_4E\ddot{u}_A + 2at_4\ddot{u}_E - \frac{6}{a}S_{AE} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

一方、式(10), (11) から求まる

$$\Delta\phi = \frac{v_B - v_A}{h} - \frac{2w_A}{b} \dots\dots\dots(24)$$

なる変形度と変位との関係式に式(20)を代入して、

$$\begin{aligned} 4G\dot{u}_A - 4G\dot{u}_B + bhG\Delta\dot{\phi} - \left(\frac{2h}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{b}{t_3}\right)G_0 \cdot \Delta\phi \\ + \frac{2}{t_2}S_{AE} + \frac{2}{t_1}P = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(25)$$

また、A点における変位の適合

$$\dot{w}_{AD} + \dot{w}_{AE} = 0 \dots\dots\dots(26)$$

なる条件を適用し、式(21)から、

$$\begin{aligned} \left(\frac{t_2}{a} + \frac{2t_2}{b}\right)G\dot{u}_A - \frac{t_2}{a}G\dot{u}_E - G_0 \cdot \Delta\phi \\ + \left(\frac{t_2}{at_4} + \frac{2}{b}\right)S_{AE} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots(27)$$

以上の式(23), (25), (27)の5本の微分方程式から $\dot{u}_A, \dot{u}_B, \dot{u}_E, \Delta\phi, S_{AE}$ の5個の未知量を求めればよい。

したがって、単純支持を仮定すると、 $x = x_0$ の位置に単一偶力 $P \cdot b$ が作用する場合には、 x 点における節点のそり応力、曲げモーメント、せん断流は、つぎのようなフーリエ級数を用いて計算できる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_A = \sum_m A_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad \dot{u}_B = \sum_m B_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ \dot{u}_E = \sum_m E_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \quad \Delta\phi = \sum_m \psi_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ S_{AE} = Ea \sum_m S_m \sin \frac{m\pi x}{l}, \\ P = \frac{2P}{l} \sum_m \sin \frac{m\pi x_0}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

このように断面の変形抵抗を G_0 で考えることによって、未知量を少なくできるほか、 G_0 を ∞ とおくことによって断面変形を考慮しない場合の曲げねじりを求めたり、ラーメン剛性を高めた場合あるいは逆にラーメン剛性が低下した場合など、任意の G_0 の値についての曲げねじりを検討できる利点もある。

5. 単一箱桁の計算式

さきの片持部を有する箱桁から片持部をとり去れば、節点におけるそり応力、曲げモーメントおよびせん断流の計算式を解析的に求めることができる。

また、片持部の断面積が付根の節点に集中的に作用すると仮定できれば同様の計算式を求めうる。

いま、図-5のような断面と荷重状態を考えると、変形の逆対称性を考慮して、変位せん断公式はつぎのように書ける。

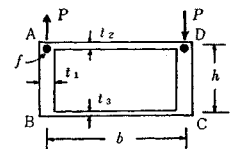


図-5 片持部を節点に仮定した断面記号

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{AB} &= \frac{Eht_1}{6}(2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{P}{h} - G_0\Delta\phi \\ \dot{T}_{AD} &= \frac{Ebt_2}{b}\ddot{u}_A - G_0\Delta\phi \\ \dot{T}_{BA} &= \frac{Eht_1}{6}(2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) - \frac{P}{h} + G_0\Delta\phi \\ \dot{T}_{BC} &= \frac{Ebt_3}{6}\ddot{u}_B + G_0\Delta\phi \end{aligned} \right\} \dots(29)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{w}_A &= \frac{1}{h}(\dot{u}_A - \dot{u}_B) + \frac{1}{Ght_1}P - \frac{G_0}{Gt_1}\Delta\phi \\ \ddot{u}_A &= \frac{2}{b}\dot{u}_A - \frac{G_0}{Gt_2}\Delta\phi \\ \ddot{u}_B &= \frac{2}{b}\dot{u}_B + \frac{G_0}{Gt_3}\Delta\phi \end{aligned} \right\} \dots(30)$$

$$\left. \begin{aligned} (2ht_1 + bt_2 + 6f)E\ddot{u}_A + ht_1\ddot{u}_B \\ - 12G_0\Delta\phi + \frac{6}{h}P = 0 \\ ht_1E\ddot{u}_A + (2ht_1 + bt_3)E\ddot{u}_B \\ + 12G_0\Delta\phi - \frac{6}{h}P = 0 \\ 4G\dot{u}_A - 4G\dot{u}_B - bhG\Delta\dot{\phi} \\ - \left(\frac{2h}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{b}{t_3}\right)G_0\Delta\phi + \frac{2}{t_1}P = 0 \end{aligned} \right\} \dots(32)$$

式中，上の二式から， $\dot{u}_B = -r\dot{u}_A$ において

$$r = \frac{3ht_1 + bt_2 + 6f}{3ht_1 + bt_3} \dots\dots\dots(33)$$

となるから，式(32)はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \{(ht_1 + bt_2 + 6f) + r(ht_1 + bt_3)\}E\ddot{u}_A \\ - 24G_0\Delta\phi + \frac{12}{h}P = 0 \\ 4(1+r)G\dot{u}_A + bhG\Delta\dot{\phi} \\ - \left(\frac{2h}{t_1} + \frac{b}{t_1} + \frac{b}{t_3}\right)G_0\Delta\phi + \frac{2}{t_1}P = 0 \end{aligned} \right\} \dots(34)$$

これに対し，節点に仮定した片持部断面積を f とすれば， A 節点におけるせん断流のつりあい条件にこれを加味し，

$$T_{AB} + T_{AD} + f \cdot E \cdot \dot{u}_A = 0, \quad T_{BC} + T_{BA} = 0 \dots\dots\dots(31)$$

変形度と変位の関係は式(24)と同じであるから，これら条件に式(29)，(30)を適用すれば，つぎの微分方程式をうる。

そこで，単純支持を仮定すると， x_0 の位置に単一偶力 $P \cdot b$ が作用する場合，式(17)に示した K_A, K_B を用いて，

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{24Pl}{\pi^3 h \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\}} \sum \frac{m^2 + nF_I}{m^4 + 2nK_I m^2 + nH_I} \sin \frac{m\pi x_0}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ M_{AB} &= K_A \frac{8(1+\nu)Pl}{bh t_1 \pi^2} \sum \frac{m^2 + J_I}{m^4 + 2nK_I m^2 + nH_I} \sin \frac{m\pi x_0}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

ただし，

$$\begin{aligned} n &= \frac{4(1+\nu)}{bh} (K_A + K_B), \quad F_I = F \left(\frac{l}{\pi}\right)^2, \quad K_I = K \left(\frac{l}{\pi}\right)^2, \quad H_I = H \left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \\ 2K &= \left(\frac{1}{ht_2} + \frac{1}{ht_3} + \frac{2}{bt_1}\right), \quad F = \left(\frac{1}{ht_2} + \frac{1}{ht_3} - \frac{2}{bt_1}\right), \quad J_I = J \left(\frac{l}{\pi}\right)^2, \\ H &= \frac{48(1+\nu)}{(1+\nu)\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\}bh}, \quad J = \frac{H}{2K - F} \end{aligned}$$

上式を計算すると，つぎのような計算式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{6P}{h\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\}} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + nF}{2\alpha\sqrt{nH}} \phi(x, x_0) - \frac{\sqrt{nH} - nF}{2\beta\sqrt{nH}} \psi(x, x_0) \right\} \\ M_A &= K_A \cdot \frac{2(1+\nu)P}{bht_1} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + J}{2\alpha\sqrt{nH}} \phi(x, x_0) - \frac{\sqrt{nH} - J}{2\beta\sqrt{nH}} \psi(x, x_0) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

式中，

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{nH} + nK}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{nH} - nK}{2}}$$

また， $\phi(x, x_0), \psi(x, x_0)$ は $x < x_0$ に対し，つぎのように表わされる ($x > x_0$ の場合は x, x_0 をおきかえればよい)。

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, x_0) &= \frac{1}{\cosh 2\alpha l - \cos 2\beta l} \left\{ \sinh \alpha l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l}\right) \cdot \cos \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l}\right) \right. \\ &\quad + \sinh \alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l}\right) \cdot \cos \beta l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l}\right) - \sinh \alpha l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l}\right) \cdot \cos \beta l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l}\right) \\ &\quad \left. - \sinh \alpha l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l}\right) \cdot \cos \beta l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l}\right) \right\} \\ \psi(x, x_0) &= \frac{1}{\cosh 2\alpha l - \cos 2\beta l} \left\{ \cosh \alpha l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l}\right) \cdot \sin \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l}\right) \right. \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(37)$$

$$\left. \begin{aligned} & + \cosh \alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) - \cosh \alpha l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \\ & - \cosh \alpha l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \end{aligned} \right\}$$

一方、節点せん断流 T は式 (29) で計算すればよいから

$$\left. \begin{aligned} T_{AD} = & \frac{4bt_2P}{\pi h \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)\}} \sum_m \frac{m(m^2 + nF_I)}{m^4 + 2nK_I m^2 + nH_I} \sin \frac{m\pi x_0}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \\ & + \frac{4nl^2P}{bht_1\pi^3} \sum_m \frac{m^2 + J_I}{m(m^4 + 2nK_I m^2 + nH_I)} \sin \frac{m\pi x_0}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

となり、これを計算すると、 $x < x_0$ の場合、次式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} T_{AD} = & \frac{bt_2P}{h \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)\}} \left\{ \frac{n(F-K)}{2\alpha\beta} S(x, x_0) + C(x, x_0) \right\} \\ & + \frac{nP}{bht_1} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} \left(1 - \frac{KJ}{H} \right) S(x, x_0) - \frac{J}{nH} \left(C(x, x_0) - 2 \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) \right) \right\} \\ T_{AB} = & \frac{(2-r)t_1P}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)\}} \left\{ \frac{n(F-K)}{2\alpha\beta} S(x, x_0) + C(x, x_0) \right\} - \frac{P}{h} \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) \\ & + \frac{nP}{bht_1} \left\{ \frac{1}{2\alpha\beta} \left(1 - \frac{K \cdot J}{H} \right) S(x, x_0) - \frac{J}{nH} \left(C(x, x_0) - 2 \left(1 - \frac{x_0}{l} \right) \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

式中、

$$\left. \begin{aligned} S(x, x_0) = & \frac{1}{\cosh 2\alpha l - \cos 2\beta l} \left\{ \sinh \alpha l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \right. \\ & - \sinh \alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) + \sinh \alpha l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \\ & \left. - \sinh \alpha l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \cdot \sin \beta l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \right\} \\ C(x, x_0) = & \frac{1}{\cosh 2\alpha l - \cos 2\beta l} \left\{ \cosh \alpha l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \cdot \cos \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \right. \\ & - \cosh \alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \cdot \cos \beta l \left(2 + \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) + \cosh \alpha l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \cdot \cos \beta l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \\ & \left. - \cosh \alpha l \left(\frac{x}{l} + \frac{x_0}{l} \right) \cdot \cos \beta l \left(2 - \frac{x}{l} - \frac{x_0}{l} \right) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

なお、 $x < x_0$ の場合には式 (39) 中の $-2(1-x_0/l)$ を $2(x_0/l)$ とし、式 (40) の x, x_0 を入れかえて、() 内の x と x_0 が異付号の第 1 項と第 2 項の正負を変えればよい。

これら式 (36)、式 (39) で明らかなように、スパン上の分布は $\Phi(x, x_0)$ 、 $\Psi(x, x_0)$ 、 $S(x, x_0)$ 、 $C(x, x_0)$ なる関数のみによって表わされるため、つぎのことが認められる場合には、これら曲げねじりの直接計算はより簡単になる。

すなわち、 $\Phi(x, x_0)$ 、 $\Psi(x, x_0)$ の値は一般の箱桁断面では、 $x < x_0$ に対し、

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x, x_0) \doteq & e^{-\alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right)} \cos \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \\ & - e^{-\alpha l \left(\frac{x_0}{l} + \frac{x}{l} \right)} \cos \beta l \left(\frac{x_0}{l} + \frac{x}{l} \right) \\ \Psi(x, x_0) \doteq & e^{-\alpha l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right)} \sin \beta l \left(\frac{x_0}{l} - \frac{x}{l} \right) \\ & - e^{-\alpha l \left(\frac{x_0}{l} + \frac{x}{l} \right)} \sin \beta l \left(\frac{x_0}{l} + \frac{x}{l} \right) \\ C(x, x_0) \doteq & \Phi(x, x_0) \\ S(x, x_0) \doteq & \Psi(x, x_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (41)$$

のように近似的に計算することもでき、さらに、荷重点下に生ずる最大値のみを求めるとすれば、スパン上のどの点でも (支点付近では成り立たない) あまり差がないので、

$$\left. \begin{aligned} \Phi(x_0, x_0) \doteq 1 \quad \Psi(x_0, x_0) \doteq 0 \\ C(x_0, x_0) \doteq 1 \quad S(x_0, x_0) \doteq 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (42)$$

とみなしうるから、スパン中央付近では次式のようにきわめて簡単な計算式にて最大値を知ることができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{A \max} \doteq & \frac{6P}{h \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)\}} \cdot \frac{\sqrt{nH} + nF}{\sqrt{2nH} \sqrt{nH} + nK}, \\ \sigma_{B \max} = & -r \cdot \sigma_{A \max} \\ M_{A \max} \doteq & K_A \cdot \frac{2(1+\nu)P}{bht_1} \cdot \frac{\sqrt{nH} + J}{\sqrt{2nH}(\sqrt{nH} + nK)}, \\ M_{B \max} = & K_B \cdot \frac{M_{A \max}}{K_A} \\ T_{AB \max} \doteq & \frac{(2-r)t_1P}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)\}} \\ & - \frac{P}{2h} \left(\frac{3}{2} - \frac{x_0}{l} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 T_{AD \max} &\doteq \frac{bt_3 P}{h\{ht_1+bt_2+6f+r(ht_1+bt_3)\}} \\
 &\quad + \frac{P}{2h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{l} \right) \\
 T_{B \max} &\doteq \frac{r bt_3 P}{h\{ht_1+bt_2+6f+r(ht_1+bt_3)\}} \\
 &\quad + \frac{P}{2h} \left(\frac{1}{2} - \frac{x_0}{l} \right)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(43)$$

6. 模型実験と数値計算

模型実験は、二軸対称断面および片持部を有する一軸対称断面の箱桁について行なった。二軸対称断面の模型では、7. に述べる隔壁の影響も調べるため、スパンの中央に隔壁の有るものと無いものとの二種類について行ない、一軸対称断面の模型では、8. に述べるハンチの影響も調べた。

これらの模型材料は厚さ 5 mm のアクリル樹脂板で、引張強さ 320 kg/cm²、弾性係数 37 700 kg/cm²、ポアソン比 0.35 のものを使用応力 $\sigma=30$ kg/cm² 前後で用いた。

模型の断面寸法は、図-6 のような値で、スパンは 1 m とした。これらの寸法は、コンクリートのポアソン比が 0.2 であるとして相似性を考慮する時、幅員 7 m の箱桁の 1/30 模型であると考えれば、スパン約 28 m、板の厚さ約 17 cm の

非常に薄肉のコンクリート箱桁に相当する。このことは、式 (35) からわかるように両者が相似性を保つためには、模型材料のポアソン比を ν_p 、コンクリートのポアソン比を ν_c とすれば、箱桁断面形の大きさの縮尺を M とする時、スパンの長さの縮尺が $\sqrt{\frac{1+\nu_c}{1+\nu_p}} M$ 、肉厚の縮尺が $\frac{1+\nu_p}{1+\nu_c} M$ となるからである。

載荷方法は桁の両端で上下単純支持とし、支間中央などの載荷点で、図-6 に示した矢印位置に小型のロードセルを設置し、スクリュージャッキで偶力を与え、ねじり荷重とした。

測定方法は図-6 に示した位置に接着したストレーンゲージによって、供試体の表面および裏面のひずみを測定した。

一方、数値計算は二軸対称断面の模型に対しては式

(36) で $f=0, t_2=t_3, r=1$ において計算し、片持部を有する模型桁に対しては、式(23), (25), (27) の微分方程式を式 (28) にて 100 項までの級数計算を行なった。この級数計算は収れんが悪く、そり応力の場合の誤差を 2% 以下にとどめるには、この程度の項数を必要とした。なお、この程度の項数をとった場合の値は、片持部断面積を節点に仮定した式 (36) による結果とほとんど一致する。なお、これらの数値計算は室蘭工大の電子計算機 FACOM 231 によって行なった。

実験結果および模型に関する数値計算結果を要約して図-7 に示す。これらの値は、いずれもひずみ計の位置における値で、荷重 $P=1$ kg に換算したものである。これによれば、本理論による計算結果（二軸対称断面の場合を実線で、片持部を有する場合を破線で示した）は実験結果と良く合っており、断面変形を無視した計算結果（点線）とは定性的にも量的にも大きな相違がある。また、片持部の影響は最大値を知る上で最も重要な下側節点におけるそり応力や、変形曲げモーメントにはあまり影響を与えず、片持部を省略して曲げねじりの概略値を求めることの簡便さも認められる。

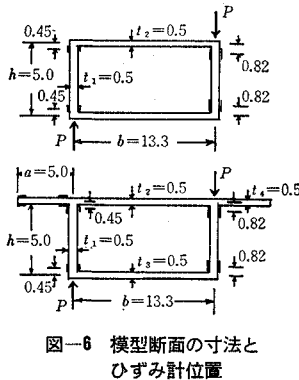


図-6 模型断面の寸法とひずみ計位置

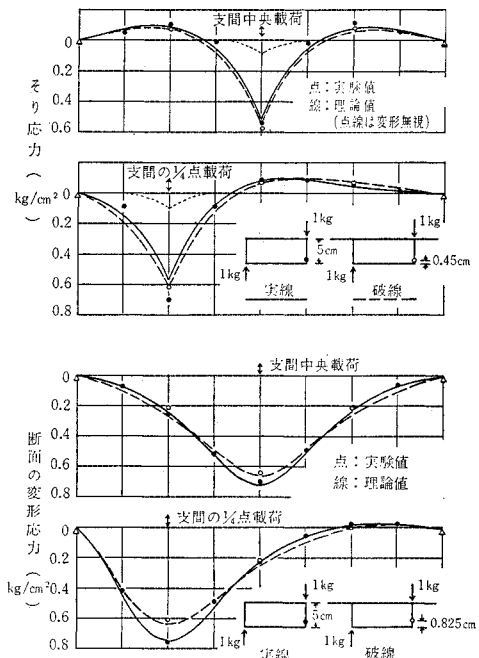


図-7 二種の模型における応力の比較

つぎに、実際のコンクリート橋に見られるような断面について数値計算を行ない、断面寸法の影響を調べた。この一例を図-8 に示す。これは床版厚さ 20 cm、下フランジ厚さ 15 cm、ウェブ間隔 4 m の箱桁のスパン中央に $P \cdot b=1$ t \times 4 m の集中偶力荷重が作用した場合の最大そり応力を示した図である。これによれば、ウェブ

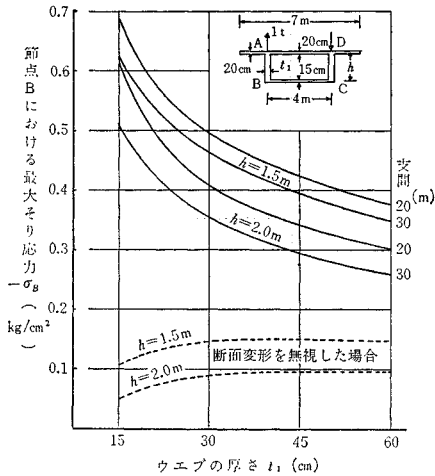


図-8 支間中央集中偶力による最大そり応力の比較

厚さ、桁高、スパンの影響がほぼ明らかになり、薄肉になるにしたがって増加するそり応力の大きさを知るとともに、肉厚にほとんど左右されない点線で示した変形を無視した場合の値と比較して、断面変形の影響も理解できよう。また、そり応力が局所応力の性格をもつことについては、変形を考えた場合、この性格は大いに異なるが、スパンの影響があまりないことではやや似ている。なお、ここに示したスパン中央点に載荷した場合の最大そり応力は他の点に載荷した時の最大値よりも小さいが、ほぼスパン全体における最大値に近い値を示していると見てよい。

7. 隔壁の影響

隔壁を有する箱桁の場合には、スパンの隔壁位置に対し、隔壁のせん断抵抗力 Q を仮定し、節点における力のつりあい条件を式(6)の変位せん断公式や式(9)のたわみ角の関係式に適用する際、

$$\left. \begin{aligned} S_{AB} - S_{BA} &= P - hG_0 \Delta\psi - hQ \\ S_{AD} - S_{DA} &= 2S_{AE} - bG_0 \Delta\psi - bQ \\ S_{BC} - S_{CB} &= bG_0 \Delta\psi + bQ \end{aligned} \right\} \dots\dots(44)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_A - Q \frac{24l}{(ht_1 + bt_2)\pi^2} \sum_m \frac{m^2}{m^4 + 2nK_1 m^2 + nH_1} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ M &= M_{AB} - Q \frac{nl(t_1 b + t_2 h)}{t_1 t_2 \pi^2} \sum_m \frac{m^2 + L_1}{m^4 + 2nK_1 m^2 + nH_1} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} Q &= \frac{4LP}{bht_1 \pi^2} \sum_m \frac{m^2 + J_1}{m^4 + 2nK_1 m^2 + nH_1} \sin \frac{m\pi x_0}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ &\quad + \frac{4l(t_1 b + t_2 h)}{bht_1 t_2 \pi^2} \sum_m \frac{m^2 + L_1}{m^4 + 2nK_1 m^2 + nH_1} \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \\ L_1 &= \frac{2ht_2}{bt_1 + ht_2} J_1, \text{ 他の係数は、式(35)で } f=0, t_2=t_3, r=1 \text{ としたもの。} \end{aligned} \right\} \dots\dots(48)$$

これを計算すると、

とおいて、 Q を考慮した場合の微分方程式が式(23)、(25)、(27)の代りにえられる。隔壁が $x=c$ の位置のみにある場合、これを集中荷重のように考えて、

$$Q = \frac{2Q}{l} \sum_m \sin \frac{m\pi c}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} \dots\dots(45)$$

と級数に展開して、隔壁がない場合と同様の計算ができる。すなわち、厚さ t なる隔壁のせん断ひずみは箱桁の隔壁位置におけるせん断ひずみに等しいという条件

$$\frac{Q}{G_c \cdot t} = \Delta\psi_P(c, x_0) + Q \cdot \Delta\psi_Q(c, c) \dots\dots(46)$$

から Q を求める。ただし、 $\Delta\psi_P(c, x_0)$ は x_0 点に作用する荷重 P によって隔壁がない場合に計算される c 点の変形度、 $\Delta\psi_Q(c, c)$ は $Q=1$ とおいてえられる c 点の変形度であり、 G_c は隔壁材料のせん断弾性係数である。したがって、こうして求めた Q の値を $Q=1$ において計算したそり応力等の値に乗じて、隔壁の影響値がえられるから、隔壁を考えずに P によって計算したそり応力等の値にこれを加えて、隔壁がある場合のそり応力等が計算される。また、隔壁が $x=c_1, c_2, \dots, c_n$ の位置にある時は、前記の要領で、 $\Delta\psi_Q(c_i, c_j)$ および $\Delta\psi_P(c_i, x_0)$ を計算し、

$$\left. \begin{aligned} \frac{Q_i}{G_c \cdot t_i} &= \Delta\psi_P(c_i, x_0) + \sum_{j=1}^n Q_j \cdot \Delta\psi_Q(c_i, c_j) \end{aligned} \right\} \text{ただし、 } i=1, 2, \dots, n, \dots\dots(47)$$

を連立に解いて Q_i を求め、さきの方法に準じた計算をすればよい。

すでに 6. で認められたように片持部を省略しても隔壁の影響を論ずることができるので、最も簡単な二軸対称断面の場合についてここに示す。

二軸断面の場合、節点 A におけるそり応力、変形曲げモーメントは、隔壁が $x=c$ の位置にある場合、式(35)あるいは式(36)で $f=0, t_2=t_3, r=1$ として計算した隔壁がない場合のそり応力 σ_A 、変形曲げモーメント M_{AB} に、隔壁のせん断抵抗力の影響が加わって、次式のように求まる。

$$\sigma = \sigma_A - Q \cdot \frac{6}{(t_1 h + t_2 b)} \left\{ \frac{1}{2\alpha} \phi(x, c) - \frac{1}{2\beta} \psi(x, c) \right\}$$

$$M = M_{AB} - Q \cdot \frac{t_1 b + t_2 h}{4 t_1 t_2} \frac{n}{\sqrt{nH}} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + L}{2\alpha} \phi(x, c) - \frac{\sqrt{nH} - L}{2\beta} \psi(x, c) \right\}$$

ただし、

$$Q = \frac{P \left\{ \frac{\sqrt{nH} + J}{2\alpha} \phi(x_0, c) - \frac{\sqrt{nH} - J}{2\beta} \psi(x_0, c) \right\}}{\frac{b h t_1 \sqrt{nH}}{t} + \frac{t_1 b + t_2 h}{t_2} \left\{ \frac{\sqrt{nH} + L}{2\alpha} \phi(c, c) - \frac{\sqrt{nH} - L}{2\beta} \psi(c, c) \right\}} \dots\dots\dots (49)$$

$$F = \frac{2(bt_1 - ht_2)}{b h t_1 t_2}, \quad K = \frac{b t_1 + h t_2}{b h t_1 t_2}, \quad H = \frac{48}{(1+\nu)(h t_1 + b t_2) b h}$$

$$J = \frac{12 t_1}{(1+\nu)(t_1 h + t_2 b) h}, \quad L = \frac{2 h t_2}{t_1 b + t_2 h} J, \quad n = \frac{4(1+\nu)t_1^3 t_2^3}{b h (t_1^3 b + t_2^3 h)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{nH} + nK}{2}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{\sqrt{nH} - nK}{2}}$$

上式中、 $\phi(c, c)$ $\psi(c, c)$ は、さきの式 (37) の (x, x_0) を (c, c) とおきかえたものである。

8. ハンチの影響

コンクリート構造物ではハンチを有するのが普通で、箱桁でも断面の隅角部にハンチをつけたり、フランジ厚さを変化させる場合が多い。箱桁の計算ではハンチを考えないのが普通であり、設計計算ではそれでよいと思うが、ハンチによって隅角部の断面積が増えるとともに、断面のラーメン剛性も増加するので曲げねじりに対し、そり応力の減少や変形応力の変化が予想される。

ハンチを有する場合の計算は、 f なるハンチの有効断面面積が節点にあると仮定し、式 (22) に示した節点におけるせん断流のつりあい条件式に $f \cdot E\dot{u}$ なるハンチせん断力を考慮して、つぎのつりあい条件式をたてる。

$$\left. \begin{aligned} T_{AB} + T_{AD} + T_{AE} + f_A \cdot E\dot{u}_A &= 0 \\ T_{BA} + T_{BC} + f_B \cdot E\dot{u}_B &= 0 \\ T_{EA} + f_E \cdot E\dot{u}_E &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (50)$$

ただし、 f_A, f_B, f_E はそれぞれ A, B 節点におけるハンチ有効断面面積、 f_E は E 点における地覆等の有効断面面積である (図-10 参照)。

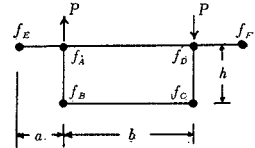


図-10 節点に仮定した有効ハンチ断面積

式 (20) の変位せん断公式を式 (50) のつりあい条件式に代入して、さきに求めた式 (23) に相当する微分方程式が、 $E\dot{u}_A, E\dot{u}_B, E\dot{u}_E$ の係数を $(2 h t_1 + b t_2 + 2 a t_4 + 6 f_A), (2 h t_1 + b t_2 + 6 f_B), (2 a t_4 + 6 f_E)$ と f の項を加えた形に変えてえられる。

一方、断面の変形抵抗係数 G_0 の算出にあたっては、式 (13) のたわみ角式の代りに、変断面桁の計算要領で、

$$M_{AB} = E k_1 (a_1 \phi_A + b_1 \phi_B - c_1 \phi_{AB}) \dots\dots\dots (51)$$

等において、同様の計算をすれば、式 (16) に相当する

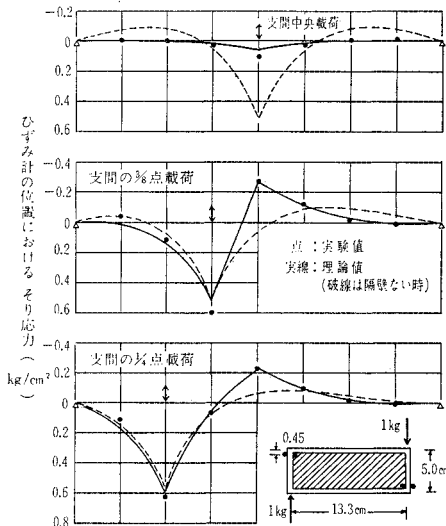


図-9 支間中央に隔壁がある模型のそり応力分布

実験では、さきに 6. で述べた模型により、スパン中央に 1 ヶ所だけ隔壁を入れた場合の箱桁のひずみの測定を行ない、上記解析結果と比較した。これを図-9 に示す。これによれば、点でプロットした測定値の平均応力と実線で示した理論値とはよく合っている。隔壁がない場合の理論を比較のために点線で示した。両者を比較すると、隔壁位置に荷重が作用した場合は確かに応力は減少し、変形を無視した場合の値とほぼ同じくらいになるが、隔壁から少し離れた点 (この図では $l/8$) では隔壁がない場合の最大値と変わりがなく、集中的に入れた隔壁は効果がないことを示している。図は省略したが、節点における変形曲げモーメントについても、そり応力ほどではないが、 $l/4$ も離れると同様のことがいえる。

式(省略)が計算され、式(17)に相当する変形抵抗係数 G_0 はつぎようになる。

$$G_0 = \frac{2c_1k_1[(a_2+b_2)k_2\{(a_1-b_1)k_1+(a_3+b_3)k_3\}+(a_3+b_3)k_3\{(a_1-b_1)k_1+(a_2+b_2)k_2\}]}{bh[\{a_1k_1+(a_2+b_2)k_2\}\{a_1k_1+(a_3+b_3)k_3\}-b_1^2k_1^2]} \cdot E \dots\dots\dots(52)$$

式中、変断面係数 a, b, c のサフィックス 1, 2, 3 は、それぞれウェブ、上フランジ、下フランジを示す。

ハンチに関する実験は、さきに述べたように、片持部を有する模型桁を用い、この箱桁の内部隅角部に常温硬化性の注型用樹脂(弾性係数 35000 kg/cm²)を流し込み、ハンチを形成し、供試体とした。ハンチの大きさは、 $v=w=10.3$ mm でハンチの有効断面積 $f=45$ mm² とした。

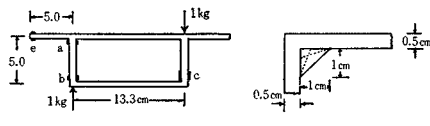
実験結果は上記仮定に基づく理論値をほぼ検証した。さきに示した図-6のゲージ位置における値を比較したのが表-1である。これによれば、ハンチをつけることによってそり応力が減少することは確認されたが、20~30%の減少にとどまり、変断面係数 a, b, c をハンチ全部を有効として計算した場合の理論値ほどは小さくならず、1:3よりゆるやかな傾きの部分だけを有効として変形抵抗係数を算出した場合の理論値とよく合うようである。変形曲げモーメントは30%ほど増加するが、ハンチ部の変形応力としては小さくなり、ハンチをはずれた点における最大応力もハンチがない場合に節点に生じる最大値より小さくなる。

ところで、片持部を節点に仮定した場合、あるいは片持部のない場合にも、上記と同じように節点におけるせん断力のつりあいと変形抵抗係数の二点に対し、ハンチ断面を考慮すればよい。すなわち、式(35),(36),(38),(39)中の (ht_1+bt_2+6f) および (ht_1+bt_3) に対し、ハンチ断面積 f_A, f_B を加え、 $(ht_1+bt_2+6(f+f_A))$ および $(ht_1+bt_3+6f_B)$ とする。この時、式(33)もつぎようになる。

$$r = \frac{3ht_1+bt_2+6(f+f_A)}{3ht_1+bt_3+6f_B} \dots\dots\dots(53)$$

表-1 模型箱桁の理論値と実験値(ハンチの有無)

	スパンの荷重位置	理論計算値			実験値		変形を無視した値
		ハンチなし	ハンチ1:3	ハンチ1:1	ハンチなし	ハンチあり	
a点のそり応力 σ_a (kg/cm ²)	1/2	0.218	0.193	0.165	0.232	0.170	0.106
	1/4	0.236	0.209	0.170	0.270	0.285	0.106
b点のそり応力 σ_b (kg/cm ²)	1/2	0.527	0.417	0.319	0.580	0.426	0.093
	1/4	0.602	0.474	0.334	0.611	0.486	0.093
e点のそり応力 σ_e (kg/cm ²)	1/2	0.145	0.124	0.054	0.132	0.094	0.113
	1/4	0.193	0.165	0.065	0.202	0.185	0.113
c点の曲げモーメント M_c (kg)	1/2	0.0275	0.0281	0.0380	0.0267	(0.0340)	0.
	1/4	0.0267	0.0275	0.0392	0.0253	—	0.



さらに、二軸対称断面では式(52)の G_0 がつぎのように簡単になる。

$$G_0 = \frac{2(c_1c_2t_1^3t_2^3)}{3bh(c_1bt_1^3+c_2ht_2^3)} \dots\dots\dots(54)$$

上式中、サフィックス 1はウェブ、2はフランジを示し、 c_1, c_2 は次式のように計算される(図-11参照)。

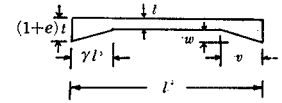


図-11 ハンチをもつ要素の記号

$$\left. \begin{aligned} c &= \frac{3}{2\alpha - \beta} \\ \alpha &= \frac{3\nu^3}{e^3} \{2 \log(1+e) - e(2-e)\} \\ &\quad + (1-\nu)^3 - \nu^3 + \frac{3\nu(2+e)}{2(1+e)^2} - \frac{3\nu^2}{1+e} \\ \beta &= 3 \left\{ 1 - 2\nu + \frac{\nu(2+e)}{(1+e)^2} \right\} - 2\alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots(55)$$

そこで一例として、一般的断面寸法の箱桁をとりあげ、ハンチの寸法 v, w を変化させて、スパン中央に単一偶力荷重 $1t \times 4m$ が作用した場合の数値計算を行ない、ハンチの影響を調べた。この結果を図-12および図-13に示す。図中ではハンチの縦寸法 w と横寸法 v が等しい場合について、ハンチの全断面積を有効と仮定した値を実線で示し、ハンチ換算断面積を用い、変形抵抗は1:3よりゆるやかな傾斜部分のみを有効と仮定した値を一点鎖線で示した。また、ハンチ横寸法 v が縦寸法 w の2倍の場合についても前者と同様に二通りの仮定値をそれぞれ破線、点線で示した。

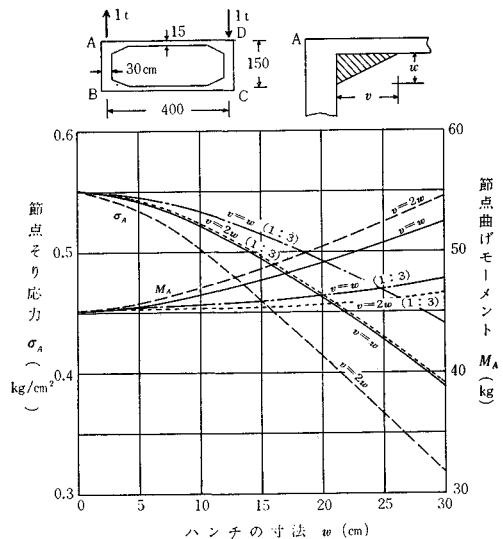


図-12 そり応力と変形曲げモーメントに対するハンチの影響

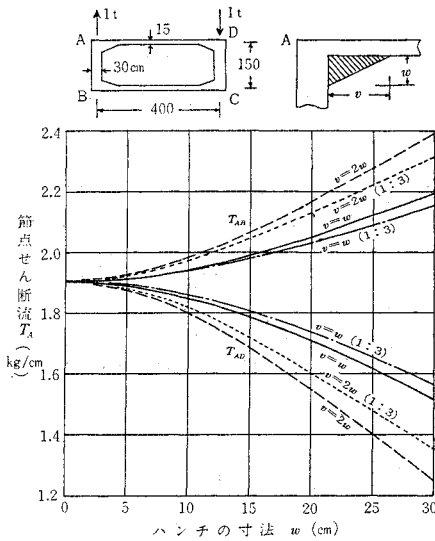


図-13 セン断流に対するハンチの影響

これによれば、そり応力は普通のハンチで 10~20% ほど減少するようであるが、変形曲げモーメント、および、ウェブの節点せん断流は逆に増加している。しかし、これも、変形応力、せん断応力としてはそれぞれ 20% 以上減少しており、この程度の効果はある。

9. 特殊な場合の吟味

(1) セン断変形を無視した場合

基本式にたち返れば、式 (9) でせん断によるたわみ角の項を除き $w_{AB} = (u_A - u_B)/h$ とおいて計算を進めればよいが、その結果として、たとえば片持部を節点位置に仮定した場合の微分方程式は、式 (34) で $G \rightarrow \infty$ とおいて次式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} \sigma_A \\ + \frac{48(1+r)}{(1+\nu)bh} \sigma_A = -\frac{12}{h} \ddot{P} \\ \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} \bar{M}_A \\ + \frac{48(1+r)n}{(1+\nu)bh} \bar{M}_A = \frac{48(1+r)K_A P}{h^2 b} \end{aligned} \right\} \dots(56)$$

これは、弾性基礎上のはりの微分方程式と同じ形であり、上式で $f=0, t_2=t_3, r=1$ とおいて二軸対称の場合を計算すると、Vlasov¹²⁾ の式と一致する。

(2) ヒンジ接合の場合

これは変形抵抗係数が無限に小さい場合であり、前述の式中で $G_0 \rightarrow 0$ (あるいは $n \rightarrow 0$) とおいて結果はえられるが、変位せん断公式にもどれば、たとえば式 (29) は、

$$\left. \begin{aligned} \dot{T}_{AB} &= \frac{Eht_1}{6} (2\ddot{u}_A + \ddot{u}_B) + \frac{P}{h}, & \dot{T}_{AD} &= \frac{Ebt_2}{6} \ddot{u}_A \\ \dot{T}_{BA} &= \frac{Eht_1}{6} (2\ddot{u}_B + \ddot{u}_A) - \frac{P}{h}, & \dot{T}_{BC} &= \frac{Ebt_3}{6} \ddot{u}_B \end{aligned} \right\}$$

となり、せん断力のつりあいのみからつぎの微分方程式をうる。

$$\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} \ddot{u}_A = -\frac{12}{h} P \dots(57)$$

これを計算すれば、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_A &= \frac{6M_1^0}{h} \cdot \frac{2}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\}} \\ T_{AD} &= \frac{bt_2 Q_1^0}{h} \cdot \frac{2}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\}} \end{aligned} \right\} \dots(58)$$

となって、 $f=0$ とおけば、三せん断方程式による Re-singer⁵⁾ の結果と一致する。ただし、 M_1^0, Q_1^0 は折接要素 AB 部材が単独に荷重 P を受けた場合の曲げモーメントとせん断力である。

(3) 断面変形を無視した場合

これは変形抵抗係数が無限に大きい場合であり、 $G_0 \rightarrow \infty$ とおいて計算すればよいが、片持部を節点に仮定すると、つぎの微分方程式がえられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{4b^2 h^2}{c} G \ddot{\psi} - \frac{bh c'}{12c} \{ht_1 + bt_2 + 6f \\ + r(ht_1 + bt_3)\} E \ddot{u}_A = -b \cdot P \\ \frac{bh c}{12c'} \{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} \ddot{u}_A \\ - \frac{8(1+r)bhG}{c'} \dot{u}_A = b \cdot P \end{aligned} \right\}$$

ただし、

$$c = \frac{2h}{t_1} + \frac{b}{t_2} + \frac{b}{t_3}, \quad c' = \frac{2h}{t_1} - \frac{b}{t_2} - \frac{b}{t_3} \dots(59)$$

これを解くと、 $\lambda_l = \sqrt{H_l/2K_l}$ とおいて

$$\sigma_A = \frac{12Pl}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} h \pi^2} \cdot \frac{F_l}{K_l} \sum_m \frac{1}{m^2 + \lambda_l^2} \sin \frac{m \pi x_0}{l} \sin \frac{m \pi x}{l} \dots(60)$$

となり、これを計算すると次式をうる。

$$\sigma_A = \frac{6P}{\{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_3)\} h} \cdot \frac{F}{K \cdot \lambda} \cdot \frac{\sinh \lambda l \left(1 - \frac{x_0}{l}\right) \cdot \sinh \lambda l \left(\frac{x}{l}\right)}{\sinh \lambda l} \dots(61)$$

なお、式 (59) の微分方程式を Benscoter¹³⁾ の曲げねじりの微分方程式の形に整理すると、

$$\begin{aligned} EC_w \ddot{f} - GJ \ddot{\psi} &= -M_T \\ \frac{EC_w}{\eta^2} \ddot{f} - GJ f &= -M_T \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \dot{u}_A &= f \cdot W_A, & W_A &= \frac{bh}{2} \cdot \frac{1}{1+r} \left(\frac{c'}{c} \right), \\ C_w &= \frac{b^2 h^2}{24} \frac{ht_1 + bt_2 + 6f + r(ht_1 + bt_2)}{1+r} \left(\frac{c'}{c} \right)^2, \\ \eta^2 &= \left(\frac{c'}{c} \right)^2, & J &= \frac{4b^2 h^2}{c} \end{aligned}$$

となり、係数値 $\eta^2=1$ とはならず慣用の曲げねじり理論とは異なるが、Benscoter の $\eta^2=1 - \frac{J}{I_P}$ とは差は小さいが一致しない。

10. 計算例による検討

計算例として、スパン 25 m, 幅員 7 m で図-14 のような断面のコンクリート箱桁を考える。ただし、ポアソン比を $\nu=0.2$ とする。

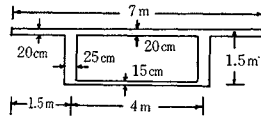


図-14 計算例の断面寸法

この箱桁のスパン中央に集中偶力荷重 $P \times b = 10 \text{ t} \times 4 \text{ m}$ が作用した場合、剛接合折板理論により最大値を求めると、表-2 に示すように、節点におけるそり応力、変形曲げモーメント、せん断力がスパン中央に生じる。表には、一般的な場合として 100 項までの級数計算による値を示し、これと比較すべく、片持部の断面積が節点に作用すると仮定して式 (36) の計算式による値を記したが、さらに $f=0$ として片持部を無視した計算値をも記した。

表-2 節点におけるそり応力、変形曲げモーメント、せん断流

	σ_A	$-\sigma_B$	M_{AB}	M_{BA}	T_{AB}
片持部を考えた級数計算	2.37	5.02	0.594	0.318	—
片持部を節点に考えた式	2.31	4.99	0.607	0.325	34.1
片持部を無視した場合	4.62	5.16	0.660	0.353	23.6
集中偶力 $10 \text{ t} \times 4 \text{ m}$, スパン中央	(kg/cm ²)		(t-m/m)		(kg/cm)

これによれば、さきの実験でも認められたように、下側節点におけるそり応力 σ_B は片持部を無視した計算で十分な結果をえられるが、上側節点では片持部の影響を受け、 σ_A は約 2 倍の大きさを示す。これに対し、片持部断面積を節点に仮定した計算式では、下側節点はもちろん上側節点の値も片持部を考慮した級数計算値とほとんど同じになり、変形の曲げモーメントも良い結果を示す。しかも、級数計算ではスパン上の荷重点では節点せん断力を正しく求めることがむずかしいが、この計算式では表に示した値が直接えられるので、計算の簡便さと相まって真価を發揮する。

なお、剛接合折板理論に対し、せん断変形を無視した場合、断面変形を無視した場合、ヒンジ接合を仮定した

表-3 節点におけるそり応力、変形曲げモーメント、せん断流

	σ_A	$-\sigma_B$	σ_E	M_{AB}	M_{BA}	T_{AB}
剛接合折板理論	2.37	5.02	1.07	0.594	0.318	19.6
せん断変形無視	1.47	4.60	2.57	0.578	0.309	19.5
断面変形を無視	1.08	1.34	0.72	—	—	16.8
ヒンジ接合仮定	7.31	20.46	9.63	—	—	37.4
集中偶力 $10 \text{ t} \times 4 \text{ m}$	(kg/cm ²)			(t-m/m)		(kg/cm)

場合の値を比較してみると、表-3 のようになる。ただし、せん断力はスパンの 1/4 点の値を記した。これによれば、せん断変形を無視した場合のそり応力は約 10%、変形曲げモーメントは約 3% 小さな値を示すにとどまるが、断面変形を無視した場合のそり応力は 1/4 近くまで減少し、ヒンジ接合の場合には逆に 4 倍もの大きな値を示す。節点せん断流は、ヒンジ接合の場合には支点から中央載荷点まで表に示したような一定値となり、断面変形を無視した場合も載荷点の近傍以外は表に示す一定値となるが、剛接合の場合には支点から中央載荷点まで変化し、載荷点に近づくにつれて、ヒンジ接合の値に近くなる。

最後に、道路橋の設計に本理論を適用した場合の概略値を知るべく、この同じ断面について示方書に規定されている荷重を載荷した場合のスパン中央における最大値を求めてみた。表-4、表-5 に線荷重 P に対する値を示す。これによれば、幅員の片側に載荷した場合のそり応力は 30% 程度、荷重分担性を考えて満載した場合は 5% 程度を占めている。これに等分布荷重が加わり、衝撃を考えるとこれら応力は 2 倍近くになるが、死荷重応力を加えると、そり応力の占める割合は片側偏心載荷の場合で約 10%、満載偏心載荷の場合で約 2% となる。設計上問題となる最大応力は後者の場合に生じるから、結局、この程度の単一箱桁では、折板理論で計算しても曲げねじりの影響は全体応力の 2% 程度にしかならない。

表-4 幅員の片側半分に偏心載荷した場合

荷重	対称	逆対称	偏心
σ_A (kg/cm ²)	-5.13	-2.07	-7.20
σ_B "	9.33	4.39	13.72
σ_C "	9.33	-4.39	4.94
σ_D "	-5.13	2.07	-3.06
M_A (t)	0.	0.520	0.520
M_B "	0.	0.278	0.278

表-5 荷重分担性を考慮して載荷した場合

荷重	対称	逆対称	偏心
応力 σ_A (kg/cm ²)	-9.15	-0.44	-9.59
σ_B "	16.66	0.94	17.60
σ_C "	16.66	-0.94	15.72
σ_D "	-9.15	0.44	-8.71

また、表-4 で示した節点曲げモーメントは剛接合折板理論によってはじめて求まる値であるが、等分布荷重によってさらに $0.442 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ の曲げモーメントが加わるので、衝撃を考えなくても約 $1 \text{ t}\cdot\text{m}/\text{m}$ の曲げモーメントがA節点に生じることがわかる。

11. おわりに

剛接合折板構造解析によって、単一箱桁の曲げねじりに関する微分方程式を、変位せん断公式および変形抵抗の関係式から導き、二、三の計算式も算出して、結果を実験によって検証した。

その結果、コンクリート箱桁の曲げねじりは剛接合折板構造として計算するのが適当であることを確認した。

この場合、級数計算では電算機による計算時間等からみても、一般の単一箱桁では片持部の面積を節点に仮定した計算式が有効であると思われる。概略値を知る程度であれば、片持部を無視したり、時には二軸対称を仮定した計算式などで、最大値等を手軽に求めるのも一方法であろう。これでも変形を無視した曲げねじり理論に比べれば、はるかに的確な値をうるものと思われる。

しかし、コンクリート箱桁橋の設計に際し、これら折板理論に基づく計算を行なっても、一般の単一箱桁では曲げねじりの占める割合が小さいため、あまり問題にならないことが多い。

なお、隔壁、ハンチ等を考慮した計算法も示し、実験でも確かめたが、コンクリート箱桁では、支点部以外の隔壁は曲げねじりの点だけから見た場合不要であり、ハンチをつけたり、床版厚さを変化させることは望ましいと思われる。

本研究は、室蘭工大において能町純雄教授のご指導のもとに実施したものを、本年度、北大において横道英雄

教授のご指導のもとに内地留学研究の一端としてまとめたものである。ここに記して深く感謝の意を表する次第である。また、本研究の主要部は 42 年度の吉田研究奨励金によるものであることを付記する。

参考文献

- 1) 能町純雄：剛なダイヤフラムで等区画に分けられる薄肉長方形箱げたの曲げねじりについて、土木学会論文集，146号，1967.
- 2) Goldberg, J.E., Glauz, W.D., Setlur, A.V.: Computer Analysis of Folded Plate Structures, Preliminary Publication, I.A.B.S.E., 7th., 1964.
- 3) DeFries-Skene, A., Scordelis, A.C.: Direct Stiffness Solution for Folded Plates, Proc. A.S.C.E., ST. Div., Aug. 1964.
- 4) 奥村敏恵・鈴木康弘：剛結合折板構造理論と台形桁への応用，土木学会論文集，154号，1968.
- 5) 外崎 忍：薄肉箱げたの折板構造理論による解析（Fritz Resinger の方法），北海道開発局土木試験所月報，186，187号，1968.
- 6) 岡田 清・吉竹孝之：PC 箱げたの設計に関する基礎的研究，土木学会年次講演会，概要 IV-34，1967.
- 7) 能町・尾崎：断面の変形を考慮した矩形箱桁のねじりについて，土木学会北海道支部研究発表会，技術資料 22号，1966.
- 8) 能町・尾崎：一室箱桁における中央隔壁の曲げねじりに対する影響，土木学会年次講演会，概要 IV-36，1966.
- 9) 尾崎・能町：張出部を有する箱桁の断面変形を考えた曲げねじりについて，土木学会年次講演会，概要 I-112，1967.
- 10) 尾崎：コンクリート箱桁の曲げねじりにおけるハンチ等の影響について，土木学会北海道支部研究発表会論文集 24号，1968.
- 11) 尾崎：コンクリート箱桁の曲げねじりに関する研究，土木学会年次講演会，概要 IV-5，1968.
- 12) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, Israel Program for Scientific Translations, Jerusalem, 1961. p. 246.
- 13) Bencotter, S.U.: A Theory of Torsion Bending for Multicell Beams, Jour. of Applied Mechanics, March 1954.

(1969.6.20・受付)