

施工計画システムへの確率 PERT の導入に関する研究

STUDY ON THE PERT STATISTICAL APPROACH TO THE CONSTRUCTION PLANNING

吉川和広*・春名 攻**

By Kazuhiro Yoshikawa and Mamoru Haruna

1. 緒 言

社会構造の高度化、近代化にともなう、一般に分業が発達し、土木技術者も設計と施工にわかれてその役割を果たすようになってきた。工事の計画・設計は、その目的とする建設物の機能・形状・寸法やできばえを規定する機能であり、施工は設計図面および仕様書に基づいて建設物をつくりだすために、どんな方法で工事を施工するかを計画し、実施し、管理する機能である。このように機能的に分業していても、互いに総合目的との一貫性をたえず心掛けていなければならない。

つまり、設計技術者も施工技術者も、建設の目的と要求に最も適合したものを、合理的な工期でかつ経済的に創造することが共通の目的である。必要なことはプロジェクトを成功させるため、設計技術者は施工に対して、施工技術者は設計に対して相互に十分な理解をもって協力しあうことによって、設計と施工を結ぶ新しいシステムを開発することであるが、近年においてはその重要性がとみに増大しつつある。

近年技術革新が進んで、調査・計画・設計等における技術の進歩が顕著であると同様に、施工法・施工機械・施工管理等における技術の発達もまた日進月歩である。とくに近年における建設機械化の発達と施工技術の革新にともなう、工事の大規模化、複雑化、多量生産化が急速に進展しつつある。その結果、施工管理はますます複雑かつ困難となってきた。したがって、設計技術・施工技術が進歩しても、施工計画・管理の近代化・合理化がこれにともなわないうが、せつかくの技術革新の効果も十分に発揮できなくなってしまう。

施工計画・管理の面においても、合理化・近代化を目指して、従来のバーチャート方式を中心とする施工計画・管理システムが変わって、よりすぐれた手法として PERT, CPM 等のネットワーク手法が導入され、システムの改善が試みられている。しかし、これらの手法は大規模装置産業における生産管理のために開発されたものであるから、装置産業と多くの面で異なった生産形態をもつ土木工事にそのまま適用できないことが多い。土木工事の特殊性を無視して強引にネットワーク手法を適用することは、この手法がもつ機能を十分に発揮できないのみならず、かえって大きな混乱を招く危険すらある。事実、ネットワーク手法の導入例の中には、土木工事特有の特殊性に起因した失敗例が数多くみられる。また、これらのほとんどの場合において、失敗の原因は作業の不確定性に基づいている。

作業の不確定は主としてつぎの2つのことを意味している。すなわち、その1つは、作業の所要時間の不確定性である。他の1つは、ネットワークにおける順序関係の不確定性である。施工実施のためのスケジュールにおいては、作業所要時間が確定値として与えられるのに対して、所要時間がある程度の変動を伴って分布するというに起因して作業所要時間の不確定性の問題が生ずる。実際に工事を遂行する場合、計画と実施の間に「ずれ」を生じるが、この「ずれ」の評価を行なう適切な手段が存在しないため、管理者に混乱を生じさせることになる。また、実施計画として作成されたネットワークではすべての作業の間に順序関係が一意的に定められている。しかし、これらの順序関係のうちで施工技術的な順序関係のみが確定的であるのに対して、その他の順序関係が可変であるということに起因して、ネットワークにおける順序関係の不確定性の問題が生じる。すなわち、上述の「計画と実施のずれ」が生じたとき、多くの

* 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

** 学生員 工修 京都大学大学院土木工学専攻

場合には日々の管理という観点から、また、与えられた工期との関係から、主として原価管理的な配慮に基づいて、可変な順序関係に対して、作業順序の変更および作業所要時間の変更を行なう場合が多い。そして、結果的にはネットワークの形が変えられ、スケジュールも書換えなければならない。ネットワークの書換えをたびたび行なう必要がある場合には、その作業のはん雑さとネットワーク手法のもつ機能、有効性への不信感が生じて、以後の管理に悪影響をおよぼすことになる。

以上に述べたような作業の不確定は、土木工事特有のものであり、現在のところ不可避的な事柄であるといえる。したがって、ネットワーク手法のもつ機能を十分発揮させ、かつ管理が円滑に行なわれるようにするためには、このような特殊性を十分考慮した管理システムを作成することが必要となってくる。本研究においては、これらの作業の所要時間の不確定性の問題を目的に解決するための管理システムについての考察を行なおうとするものである。さらに、作業の不確定性に起因する問題を解決するために、われわれは2つの管理レベルを設定し、つぎにそれぞれの管理レベルに対して相互に異なった機能を与えることにした。2.においてこれらの管理レベルの有する機能と、本研究で提案する管理システムの概要を示すこととする。

2. 管理システムの概要

上述の問題を解決し、より合目的な施工管理システムを作成するために、まず工事管理者をつぎのようなレベルに大別し、それぞれに対して異なった機能を与える。すなわち、第1の管理レベルとして日々の施工を直接監督し、実績データを作成する現場管理レベルを設定する。第2の管理レベルとしては、現場管理レベルとは異なり、日々の管理は行なわず、現場レベルにおいて作成された各種の実施計画の試案や各種の情報の評価・検討を行ない、その結果に基づいて現場管理者に対する適切な指示を発することにより、間接的に工事管理を行なうことを目的とするような事務所管理レベルを設定する。

以上のように、第1の管理レベルには管理面での実行という機能を与え、第2の管理レベルには判断・命令という機能を与えることによって、工事管理組織全体がすべての機能を持ち、合目的に機能するように設定する。したがって、2つの管理レベルの間には、管理機能からみた上下関係が成立することになる。

本研究においては、われわれが従来の研究において提案してきた、ネットワーク手法を中心的な管理技法とする工程管理システムに対して、上述の2つの管理レベルを設定する。さらにそれぞれ異なった適切な機能を与え

て総合化を行なうことによって、より合目的な管理システムを作成していこうとするものである。すなわち、現場管理レベルにおいては、

- ① 各種実施計画の作成
- ② 工事の実施と監督
- ③ 工事実績報告書の作成

事務所管理レベルにおいては、

- ① 提出された工程計画や他の関連計画の安全性に関する評価
- ② 関連計画間の経済的、時間的なバランスに対しての検討
- ③ フォローアップ時点の設定と変更基準の設定
- ④ 提出された工事実績報告書に基づいて、計画と実績とを対比することにより、計画の修正、変更が必要かどうかを指示あるいは勧告

等々が主たる機能である。これらの管理レベルの関係を図示すると 図-1 のように示される。

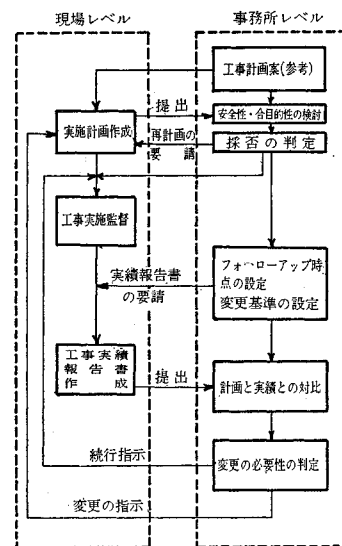


図-1 管理システムの総合化

以上で本研究においてとりあげる管理システムの概要について略述した。以下においては、従来の現場レベルの管理で用いられてきた、PERT/TIMEにおける作業の不確定性に基づく問題を略述するとともに、上述の管理システムを用いる解決方法について考察することとする。

3. 現場レベルにおける工程管理システムの問題点

ネットワーク手法を用いた現場レベルの工程管理システムは、主としてつぎの3つのプロセスから構成される。すなわち、

- (1) ネットワーク作成のプロセス
 - ① 工事内容の把握
 - ② 工種の抽出
 - ③ 施工順序の決定
 - ④ 作業（アクティビティ）の決定
 - ⑤ 作業順序の決定とラフダイアグラムの作成
- (2) スケジュール計算のプロセス
 - ① 作業所要時間（アクティビティタイム）の見積り
 - ② スケジュール計算（PERT/TIME）
 - ③ 暦日表示と作業休止日数の組込み
 - ④ 工期に対する検討
- (3) フォローアップのプロセス
 - ① 計画と実施のずれの発見
 - ② ずれに対する解析
 - ③ 各種変更項目の抽出

以上のプロセスのうちで作業順序の不確定性に最も関係のあるものは、ネットワーク作成のプロセスである。前述したように、作業間の順序関係は一意的に定まらず、作成される工程ネットワークも、2, 3 の試行錯誤によって求められることになる。したがって、最適なネットワークが求められていることはまれで、より望ましい実行可能なものが得られるにすぎない。しかし、この問題に関する有効な解決手段は、現在のところ特殊な場合を除いては求められておらず、経験や数多くの試行錯誤による方法が唯一のものであるといえる。

さて、本研究でとりあげる工程管理システムにおける目的を、作成された計画に対して所定の機能が十分に発揮できるようにし、さらに作業順序の変更すなわち工程ネットワークの組みかえが、できるかぎり少なくなるようにすることであると設定する。ここで、計画の所定の機能とは、計画に基づき工事を遂行し、与えられた工期内に工事を完了させることである。このような管理目的を設定した場合には、現場レベルの工程管理における問題は、主として作業の所要時間の不確定性に基づいて生じてくるといえる。すなわち、現場レベルにおいて策定するスケジュールには、実施計画としての機能が要求されるため、PERT 計算によるスケジュールは確定値として与える方が便利である。したがって、インプットデータもそのように与えることが多い。他方、土木工事の作業所要時間は、天候、土質、地質などの不確定に基づいてかなりの程度にばらついている。したがって、必然的に作業の完了時刻、とくに工事完了時刻とスケジュールとの間にずれが生じることになる。これまで、現場レベルで用いてきた手法、すなわち PERT/TIME 手法では、このずれの評価がクリティカルパスおよび各フロートを通してのみ行なわれてきたようであるが、これは必ずしも妥当であるとはいえない。すなわち、PERT/

TIME のようにインプットデータとしての所要時間を確定値で与える場合には、これらのずれが当初の「見積り」の誤りに起因するものか、あるいは確率的に生じるべくして生じたものかの判定を行なうことが不可能である。したがって、もし、確率的に生じたものならば、絶えず修正・変更を行なうことが必要となる。しかも、最悪の場合には、より悪い状態へと修正・変更する可能性すら存在する。PERT/TIME を用いた場合の失敗例のほとんどが、このような原因に基づいていると考えられる。

土木工事の場合のように、与件として工期という重要な制約が課せられる場合には、計画と実施との時間的なずれの評価の問題は非常に重要であり、当初スケジュールの安全性の評価とともに、ぜひとも解決しなければならない問題である。したがって、これらの問題を解決するためには、より上位の事務所管理レベルにおいて、現場管理者によって策定された工程計画に対して、その中に含まれる時間的な不確定性の評価ならびに、計画と実施間の時間的なずれの評価をも目的に行なう必要がある。このためには、このような評価を行なうことのできるような手法を導入することが必要である。本研究においては、上述の評価のための中心的な技法として確率 PERT 手法を提案することとし、以下において、確率 PERT の導入に関する考察を行なうこととする。

4. 確率 PERT の導入

(1) 3 点見積りによる確率 PERT

この手法は、PERT/TIME と同じくアメリカのポラリスミサイル開発計画に使用され有名になったものである。PERT/TIME において、作業所要時間が 1 点見積りであるのに対し

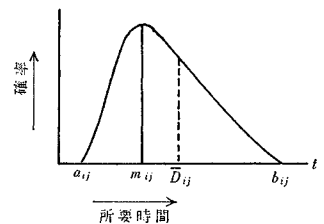


図-2 ベータ分布

て、この手法では、各作業 (i, j) に対して、楽観値 a_{ij} 、最可能値 m_{ij} 、悲観値 b_{ij} の 3 点を用いて見積る。ポラリスミサイル計画の場合

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}_{ij} &= (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6 \\ \sigma_{ij}^2 &= \{(b_{ij} - a_{ij})/6\}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

には、1つの作業が多数回実行された時の所要時間の確率分布の形を 1 種のベータ分布として図-2 のように近似させ、その期待値と分散を近似的に、

で与えることとし、 \bar{D}_{ij} の値によって PERT 計算を行なう。

つぎに、ベータ分布を重ねあわせていくと、ベータ分布の分散の和を分散とし、期待値を加えていった値を期待値とする正規分布によって近似できるという中心極限定理を使って、分散を

$$\left. \begin{aligned} V_0 &= 0 \\ V_i &= V_k + \sigma_{ki}^2 \quad (i=1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

で求めることとし、 k は $i, (k, i) \in P$ について

$$t_i^E = \max_{(k, i) \in P} [t_k + \bar{D}_{ki}] \dots\dots\dots (3)$$

を実現させる k をとる。ただし最大値をとる k が2つ以上あるときは V_i の大きいものをとる。これによって最終結合点 n における分布形を近似的に正規分布として求め、計画工程が与えられた工期までに完了する確率を求めようとするものである。いま、図-3 に工期、確率分布の形および期日内に完了する確率の関係を例示する。

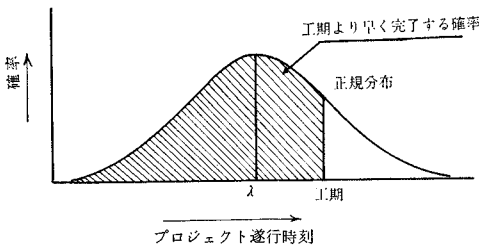


図-3 プロジェクト完了時刻の確率分布

(2) 3点見積りによる確率 PERT の検討

a) ベータ分布による近似に関する問題点

一般に作業所要時間をベータ分布で近似させる場合、 a_{ij}, m_{ij}, b_{ij} 自体が推定値であることに基づく問題が生じてくる。近年ベータ分布近似に関する誤差問題についての研究がなされているが、この結果を参照しながら以下に作業所要時間のベータ分布近似に関する問題点を指摘していくこととする。

一般にベータ分布は次式で表わされる。

$$f(t) = \frac{1}{(b-a)^{\alpha+r+1} B(\alpha+1, r+1)} (t-a)^\alpha (b-t)^r \quad \left. \begin{aligned} a < t < b \\ \dots\dots\dots (4) \end{aligned} \right\}$$

ただし、 $B(\alpha+1, r+1)$ はベータ関数を表わし、

$$B(\alpha+1, r+1) = \frac{\alpha! r!}{(\alpha+r+1)!} \dots\dots\dots (5)$$

で求められる。この分布形はつぎのような条件の成立するときのみ式(1)で述べたような期待値と分散を与える関係が成立する。すなわち、その条件は、

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= 2 \pm \sqrt{2} \quad \text{かつ} \quad r = 2 \mp \sqrt{2} \quad (\text{符号同順}) \\ \text{あるいは} \\ \alpha &= r = 3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

で示される。したがって、式(1)を用いて推定を行なうような場合には、その分布形がベータ分布に近いからという理由よりも、その分布形に上限、下限が存在し、分布の範囲が $6\sigma_{ij}$ ぐらいで、かつその重みづけの方法がもっともらしい場合に分布形をベータ分布で近似するという考え方がこの手法においてとられるべきであると考える。

さて、 a_{ij}, b_{ij}, m_{ij} の統計量の間どのような関係が成立する場合に、式(1)を用いて推定を行なうのが妥当であるかという点に関しての研究が行なわれているが、これによれば、つぎのような条件があげられている。

- ① a_{ij}, b_{ij}, m_{ij} が統計的に独立であること。
- ② $\sigma_{a_{ij}}^2 = \sigma_{b_{ij}}^2 = 10 \sigma_{m_{ij}}^2 = 10 \sigma_{D_{ij}}^2$ がほぼ成立すること。

この仮定が成立しない場合には、推定値 $\bar{D}_{ij}, \sigma_{ij}$ は非常に信頼性が乏しくなる。

以上により、ベータ分布の推定値に関してかなりきびしい制限が存在していることがわかる。すなわち、これらの条件が満足されない場合には、計算値の信頼性に大きな問題が生じてくるということが明らかとなった。

b) クリティカルパスの期待値、分散に関する問題点

(1) で示した計算式(2)、(3)から明らかなように、従来の確率 PERT においては、結合点0から結合点 n までのただ1つのパス(クリティカルパス)について期待値および分散の重ねあわせを行なっている。

しかし、この方法はクリティカルパスの真の長さ(期待値)および分散を表わしうるものでないといえる。すなわち式(2)、(3)によって求められるパスに含まれる作業以外の作業のもつ分散を考慮に入れるならば、上で求めるクリティカルパスの長さは真の期待値に比べて過小に評価されていることになる。このことは以下に示す場合を考えれば容易に理解されるだろう。

ここで簡単のために図-4に示すような n 個の並列パスについて考える。いま、これらのパスの長さの累加

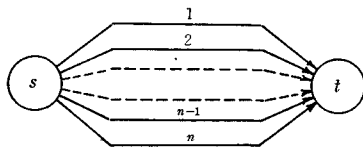


図-4 並列パス

確率分布関数を $\phi_i(t)$ とすれば

$$\phi_i(t_{ei}) = \frac{1}{2} \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots (7)$$

によって、各パスの長さの期待値 t_{ei} が与えられるが、ここで、

$$t_{ei}^* = \max_i \{t_{ei}\} \dots\dots\dots (8)$$

で t_{ei}^* が与えられるものとする。従来の方法においては、 t_{ei}^* がクリティカルパスの長さ、すなわち期待値として求められるが、

$$\prod_{i=1}^n \phi_i(t_e) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots (9)$$

を与える t_e が真の期待値を表わす。さて、このように t_{ei}^* , t_e を定めると、一般に次式が成立する。

$$\prod_{i=1}^n \phi_i(t_{ei}^*) \leq \prod_{i=1}^n \phi_i(t_e) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\phi_i(t)$ が単調増加関数であること、および上式において等号が成立するのは、高々1つのパスだけが分散をもち、他のパスの分散は0の場合だけであるということを検討すれば、分散が0でないパスが2つ以上存在するような場合には、一般に次式が成立する。

$$t_{ei}^* < t_e \dots\dots\dots (11)$$

一般のネットワークにおいては、このような平行なパスが必ず2つ以上含まれていることを考慮すれば、従来の手法が必ずしも真の期待値を与えないで、過小評価していることが明らかとなる。

(3) Clark の期待値, 分散に関する研究

Clark は作業所要時間が正規分布をなす場合に対して、 $\max(x, y)$ の期待値, 分散の計算式を以下のように求めている。ここで、 x および y は標準正規分布に変換した場合の確率変数とする。

以下、 $\varphi(x)$, $\Phi(x)$ をつぎのように与える。

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt \dots\dots (12)$$

いま、

$$\left. \begin{aligned} \alpha^2 &= \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\sigma_x\sigma_y\rho \\ \alpha &= (\mu_x - \mu_y)/a \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

とおくと、 $\max(x, y)$ の期待値 μ と分散 σ^2 は次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \mu &= \mu_x\Phi(\alpha) + \mu_y\Phi(-\alpha) + a\varphi(\alpha) \\ \sigma^2 &= (\mu_x^2 + \sigma_x^2)\Phi(\alpha) + (\mu_y^2 + \sigma_y^2)\Phi(-\alpha) \\ &\quad + (\mu_x + \mu_y)a\varphi(\alpha) - \mu^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

上式において $\rho = r(x, y) = 0$ とおくと x, y は相互に独立であることを表わし、これは2つのパスが並列であることを示している。

いま、 $\rho = 0$ において計算を行ない、この結果を検討することによって、つぎのような結論が得られている。

- ① 期待値 μ は、 $\max\{\mu_x, \mu_y, \dots\}$ よりも大きい。
- ② 分散 σ^2 は $\max\{\mu_x\}$ を与える x^* の分散 $\sigma_{x^*}^2$ よりも小さい。

(4) 従来の確率 PERT における問題点

上述の(2), (3)で得られた結果をまとめてみると、

従来の確率 PERT の手法に関する問題点がつぎのように示される。

- ① ベータ分布に近似することは必ずしも妥当ではなく、(2)のa)で述べた条件を満たさないような場合には相当の誤差が生じる。
- ② 期待値については明らかに過小評価されている。
- ③ 平行なパスにおいては分散が過大評価されている。

以上のことより、従来の確率 PERT 手法による安全性の評価は、かなりの誤差を生じるおそれがあることから、土木工事のように所要時間にある程度のバラツキを考慮しなければならないような場合には適用してもあまり意味がないことになる。

したがって、われわれは以下においてプロジェクトの安全性や妥当性を正しく評価することができ、かつ分布形が一般的な場合に対しても数値計算が可能な工程計画手法をコンボリューションを導入することによって開発していくこととする。

5. コンボリューションを導入した確率 PERT

(1) コンボリューションの計算法

一般に、所要時間が確率分布にしたがう n 個の作業を直列(図-5(a))、並列(図-5(b))につないだとき、全作業を完成するのに要する時間の確率分布は、以下のように求められる。

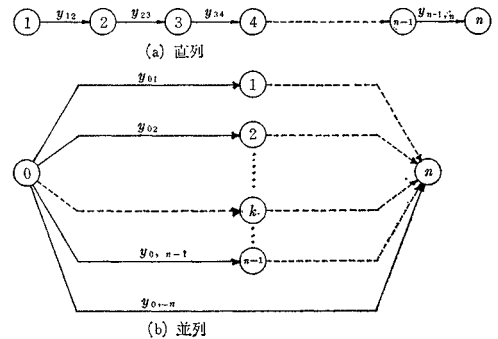


図-5

a) 直列の場合

図-5(a)のように n 個の作業を直列に連結した場合、 k 番目の所要時間を $y_{k-1,k}$, その確率密度関数を $f_{k-1,k}(y_{k-1,k})$ とする。いま、ネットワーク全体の長さ λ_n は、

$$\lambda_n = \sum_{k=1}^n y_{k-1,k} \dots\dots\dots (15)$$

で、与えられるが、 λ_n の確率密度関数はコンボリューション(convolution)の操作を繰り返し適用すること

によって、容易に求めることができる。 $g_k(t)$ で結合点 k の最早結合点時刻の確率密度関数を表わすと、

$$\left. \begin{aligned} g_1(t) &= f_{0,1}(t) \\ g_2(t) &= \int_0^t f_{1,2}(y_{12}) g_1(t-y_{12}) dy_{12} \\ &\dots\dots\dots \\ g_k(t) &= \int_0^t f_{k-1,k}(y_{k-1,k}) g_{k-1}(t-y_{k-1,k}) dy_{k-1,k} \\ &\dots\dots\dots \\ g_n(t) &= \int_0^t f_{n-1,n}(y_{n-1,n}) g_{n-1}(t-y_{n-1,n}) dy_{n-1,n} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

b) 並列の場合

図-5 (b) のように n 個の作業を並列につないだ場合、ネットワーク全体の長さは、

$$\lambda_n = \max \{y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n}\} \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。いま、各作業の所要時間の確率分布関数を $F_{0k}(y_{0k})$ とおくと、 λ_n の累加分布関数 $G_n(t)$ は、

$$G_n(t) = P_r [\lambda_n \leq t] = \prod_{k=1}^n F_{0k}(t) \dots\dots\dots (18)$$

で与えられる。したがって、確率密度関数 $g_n(t)$ は、

$$g_n(t) = G_n'(t) \dots\dots\dots (19)$$

によって与えられる。

(2) ネットワークにおけるコンボリューションの計算法

つぎに、一般のネットワークにおいて、コンボリューション手法を導入した結合点時刻の確率分布形の計算法について述べることにするが、一般のネットワークに対する計算法に入るまえに準備として、図-6 (a) に示すような直列部 図-6 (b) に示すような並列部におけるコンボリューションの計算法を先述の方法を参考にしながら示すことにする。また、実際の計算にあたって作業所要時間は日単位で与えられるので、これを離散変数として取扱うことにする。まず、記号の定義を行なう。

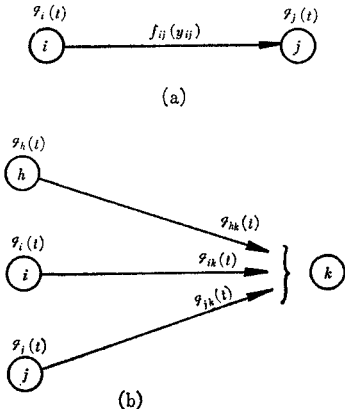


図-6

$f_{ij}(y_{ij})$ を作業 (i, j) の所要時間が y_{ij} である確率 $g_{ij}(t)$ を作業 (i, j) の最早完了時刻が t である確率 a_{ij} を $f_{ij}(y_{ij})$ における y_{ij} の下限値 b_{ij} を $f_{ij}(y_{ij})$ における y_{ij} の上限値 r_{ij} を $g_{ij}(t)$ における t の下限値 s_{ij} を $g_{ij}(t)$ における t の上限値

とすると、図-6 (a), (b) に対するコンボリューションの計算法は以下のように表わされる。

a) 直列部結合点 j の確率密度関数 $g_j(t)$

$$g_j(t) = \sum_{y_{ij}=a_{ij}}^{b_{ij}} g_i(t-y_{ij}) f_{ij}(y_{ij}) \Delta y_{ij} \dots\dots (20)$$

上式において $\Delta y_{ij}=1$ とおくと、

$$g_j(t) = \sum_{y_{ij}=a_{ij}}^{b_{ij}} g_i(t-y_{ij}) f_{ij}(y_{ij}) \dots\dots\dots (21)$$

b) 並列部結合点 k の確率密度関数 $g_k(t)$

① まず、 $g_{ik}(t)$ をすべての $(i, k) \in P(k)$ に対して求める。ただし $P(k)$ は k を終点にもつ作業の集合とする。

$$g_{ik}(t) = \sum_{y_{ik}=a_{ik}}^{b_{ik}} \sum_{(i,k) \in P(k)} g_i(t-y_{ik}) f_{ik}(y_{ik}) \dots\dots\dots (22)$$

② つぎに、 $g_{ik}(t)$ の累加分布関数 $G_{ik}(t)$ を求める。

$$G_{ik}(t) = \sum_{\tau=r_{ik}}^t g_{ik}(\tau) \Delta \tau \dots\dots\dots (23)$$

ここで、 $\Delta \tau=1$ とおくと、

$$\left. \begin{aligned} G_{ik}(t) &= \sum_{\tau=r_{ik}}^t g_{ik}(\tau) \\ G_{ik}(s_{ik}) &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

③ 結合点 k の最早完了時刻の累加分布関数 $G_k(t)$ を次式によって求める。

$$G_k(t) = \prod_{(i,k) \in P(k)} G_{ik}(t) \dots\dots\dots (25)$$

④ 結合点 k の最早完了時刻の確率密度関数 $g_k(t)$ は、

$$g_k(t) = G_k(t) - G_k(t-1) \dots\dots\dots (26)$$

c) 初期条件

a), b) で述べた計算法により、結合点 $k(k=1, 2, \dots, n)$ に対して順次 $g_k(t)$ を求めて行くが、初期条件は次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \text{(直列部)} \quad g_j(t) &= f_{0j}(y_{0j}) \quad a_{0j} \leq t \leq b_{0j} \\ \text{(並列部)} \quad g_{0j}(t) &= f_{0j}(y_{0j}) \quad a_{0j} \leq t \leq b_{0j} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

以上が、作業の所要時間の分布形が一般形で与えられた場合の、図-6 に示すような直列部および並列部に対するコンボリューションの計算法である。

(3) 一般的なネットワークの直列-並列ネットワークにおけるコンボリューション計算法

土木工事のために作成される工程ネットワークは、一

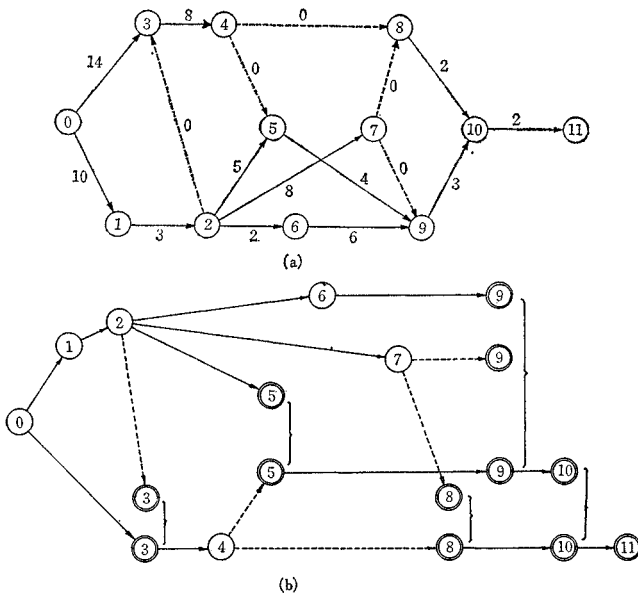
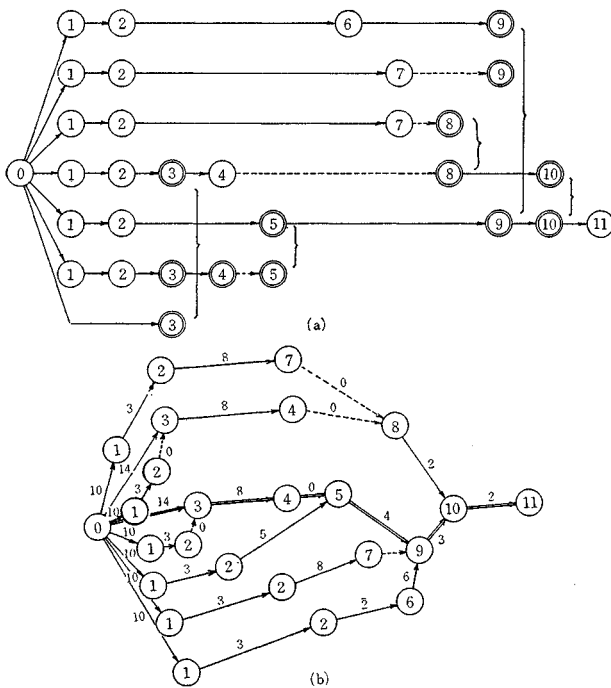


図-7 トリー構造によるネットワークの表示



チェーン名	チェーン	チェーン名	チェーン
α	0 → 1 → 2	ϵ	0 → (α) → 2 → (β) → 9
β	0 → (α) → 2 → 3	κ	0 → (α) → 2 → 9
γ	0 → (α, β) → 3	λ	0 → (α) → 9
δ	0 → (γ) → 3 → 4 → 5	μ	0 → (γ) → 3 → 4 → 8
ϵ	0 → (α) → 2 → 5	ν	0 → (α) → 2 → 7 → 8
ζ	0 → (δ, ε) → 5	ξ	0 → (δ) → 8
η	0 → (ε) → 5 → 9	\omicron	0 → (δ) → 8 → 10
θ	0 → (α) → 2 → 7 → 9	π	0 → (α, α) → 10
υ	2 → 6 → 9	ρ	10 → (α) → 10 → 11

図-8 修正された直列-並列ネットワーク

般に必ずしも上述のような単純な形ではなく、直列部、並列部の双方が複合した形をとる場合が多い。すなわち、一般的なネットワークは、直列-並列ネットワークを構成要素として、それを中間結合路で連結した形をとっている。この性質を明らかにするため、ネットワークをトリー構造で表現して考えてみる。トリー構造とは、開始結合点 0 (source) を頂点として矢印にそって結合点を樹枝状に書き連ねたものであり、図-7 にその例を示す。

ここで問題になるのは、直列-並列ネットワーク中のサブネットワークの開始、吸収結合点と中間結合路の出発結合点、終点結合点をこのトリー構造の上で区別することである。図-7 のトリー構造において、たとえば、結合点⑤は 2 個あらわれているが、これらの結合点⑤は結合点⑩までしかのぼって、はじめて共通の開始結合点に達する。このことは、⑩→⑤までに 1 本の中間結合路ができてきていることを意味している。このような中間結合路をもった一般的なネットワークを直列-並列ネットワークへ修正するためには、図-8 に示したような双対作業をつけ加えればよい。双対作業は図-7 の②のような自分のすぐ下の枝に異なった結合点のくる枝分れの部分に相当する結合点を、図-8 のようにに分けることによって作り出される。その所要時間の分布は分ける前の各作業の所要時間分布に等しいものとする。こうすれば共通の開始結合点から、ただ 1 本の経路を通して終点結合点までの道ができる。この新たに作った直列の経路では、2 つの作業の所要時間は互いに独立であるから、ただちにコンボリューションの操作が用いられる。ここで前とちがってくる点は、並列な作業群を 1 つの作業にまとめることである。このようにトリー構造で表わした場合、双対作業同士では、もう互いに独立であるとはいえない。

したがって、図-9 のような並列サブネットワ

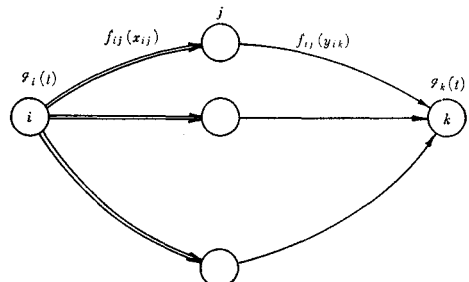


図-9

ークの中に双対作業が含まれている場合のコンポリューションについて考える必要がある。

この双対作業の所要時間分布を $f_{ij}(x_{ij})$, 作業 (j, k) の所要時間分布を $f_{jk}(y_{jk})$ とし, $g_{ik}(t)$ をチェーン (i, k) の最早完了時刻が t である確率とすると,

$$g_{ik}(t|x_{ij}) = \frac{g_{ik}(t \cap x_{ij})}{f_{ij}(x_{ij})} = \frac{f_{ij}(x_{ij}) \cdot f_{jk}(y_{jk})}{f_{ij}(x_{ij})} = f_{jk}(y_{jk}) \quad \dots\dots\dots(28)$$

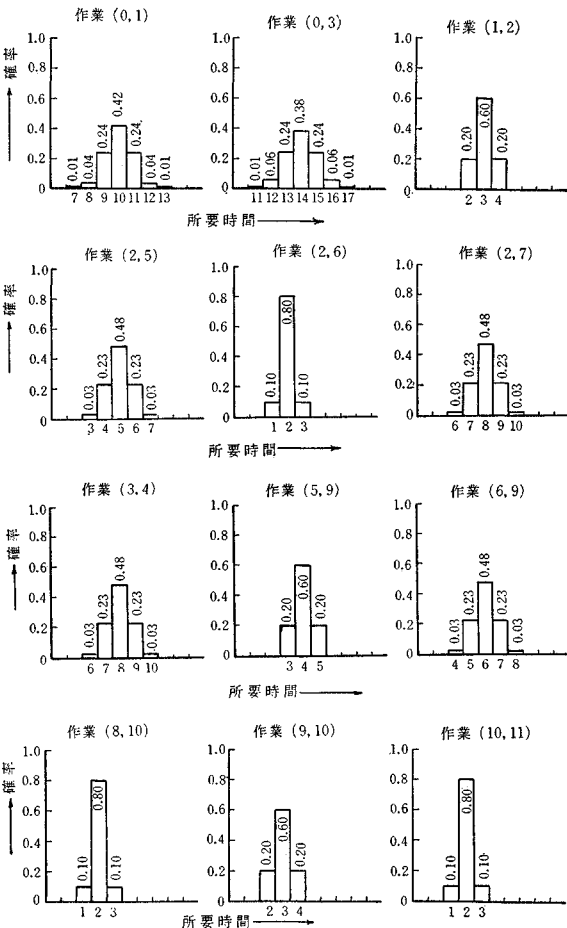
つぎに, $g_{ik}(t|x_{ij})$ の累加分布関数 $G_{ik}(t|x_{ij})$ を求める。

$$G_{ik}(t|x_{ij}) = \sum_{\tau=1}^t g_{ik}(\tau|x_{ij}) \quad \dots\dots\dots(29)$$

結合点 k の条件つき最早完了時刻の累加分布関数 $G_k(t|x_{ij})$ を次式によって求める。

$$G_k(t|x_{ij}) = \prod_{(i,k) \in P(k)} G_{ik}(t|x_{ij}) \quad \dots\dots\dots(30)$$

結合点 k の条件つき最早完了時刻の確率密度関数 $g_k(t|x_{ij})$ は,



図一〇 作業所要時間の確率分布

$$g_k(t|x_{ij}) = G_k(t|x_{ij}) - G_k(t-1|x_{ij}) \quad \dots\dots\dots(31)$$

となる。したがって, 結合点 k の最早完了時刻の確率密度関数 $g_k(t)$ は,

$$g_k(t) = \sum_{x_{ij}} g_k(t \cap x_{ij}) = \sum_{x_{ij}} g_k(t|x_{ij}) f_{ij}(x_{ij}) \quad \dots\dots\dots(32)$$

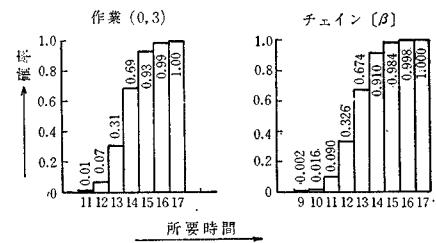
で与えられる。

(4) コンポリューションの計算例

以下 図一7 に示したネットワークを用いて計算例を示すこととする。このプロジェクト P は 12 個の作業と 5 個のダミーからなっている。矢印の横に書いてある数字は, その作業所要時間分布の期待を表わしている。また各作業所要時間分布を表わすヒストグラムは, 表一1 および 図一10 のように表わされているとする。

表一1 作業所要時間分布

作業 i	j	$f_{ij}(\delta-3)$	$f_{ij}(\delta-2)$	$f_{ij}(\delta-1)$	$f_{ij}(\delta)$	$f_{ij}(\delta+1)$	$f_{ij}(\delta+2)$	$f_{ij}(\delta+3)$
0	1	0.01	0.04	0.24	0.42	0.24	0.04	0.01
0	3	0.01	0.06	0.24	0.38	0.24	0.06	0.01
1	2			0.20	0.60	0.20		
2	5		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
2	6			0.10	0.80	0.10		
2	7		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
3	4		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
5	9			0.20	0.60	0.20		
6	9		0.03	0.23	0.48	0.23	0.03	
8	10			0.10	0.80	0.10		
9	10			0.20	0.60	0.20		
10	11			0.10	0.80	0.10		



図一〇 作業時間の累加分布

ただし, $f_{ij}(\delta)$ は計画どおり期待値 δ 日で作業が完了する確率であり, たとえば $f_{ij}(\delta+1)$ は計画より 1 日遅れる確率を表わす。

a) 作業 (0, 1), (1, 2) の直列コンポリューション作業 $[\alpha]$

$$g_2(9) = g_1(7) f_{12}(2) = 0.01 \times 0.20 = 0.002$$

$$g_2(10) = g_1(8) f_{12}(2) + g_1(7) f_{12}(3) = 0.04 \times 0.20 + 0.01 \times 0.60 = 0.014$$

$$g_2(11) = g_1(9) f_{12}(2) + g_1(8) f_{12}(3) + g_1(7) f_{12}(4) = 0.24 \times 0.20 + 0.04 \times 0.60 + 0.01 \times 0.20 = 0.074$$

$$g_2(12) = g_1(10) f_{12}(2) + g_1(9) f_{12}(3) + g_1(8) f_{12}(4) = 0.42$$

$$\begin{aligned} & \times 0.20 + 0.24 \times 0.60 + 0.04 \times 0.20 = 0.236 \\ g_2(13) &= g_1(11)f_{12}(2) + g_1(10)f_{12}(3) + g_1(9)f_{12}(4) = 0.24 \\ & \times 0.20 + 0.42 \times 0.60 + 0.24 \times 0.20 = 0.348 \\ g_2(14) &= g_2(12)f_{12}(2) + g_1(11)f_{12}(3) + g_1(10)f_{12}(4) = 0.04 \\ & \times 0.20 + 0.24 \times 0.60 + 0.42 \times 0.20 = 0.236 \\ g_2(15) &= g_1(13)f_{12}(2) + g_1(12)f_{12}(3) + g_1(11)f_{12}(4) = 0.01 \\ & \times 0.20 + 0.04 \times 0.60 + 0.24 \times 0.20 = 0.074 \\ g_2(16) &= g_1(13)f_{12}(3) + g_1(12)f_{12}(4) = 0.01 \times 0.60 + 0.04 \\ & \times 0.20 = 0.014 \\ g_2(17) &= g_1(13)f_{12}(4) = 0.01 \times 0.20 = 0.002 \end{aligned}$$

b) 作業 (0, 3), チェイン $[\beta]$ の並列コンボリューション $[\gamma]$

$$\begin{aligned} G_3(11) &= G_{03}(11) \times G_\beta(11) = 0.01 \times 0.090 = 0.001 \\ G_3(12) &= G_{03}(12) \times G_\beta(12) = 0.07 \times 0.326 = 0.023 \\ G_3(13) &= G_{03}(13) \times G_\beta(13) = 0.31 \times 0.674 = 0.209 \\ G_3(14) &= G_{03}(14) \times G_\beta(14) = 0.69 \times 0.910 = 0.628 \\ G_3(15) &= G_{03}(15) \times G_\beta(15) = 0.93 \times 0.984 = 0.915 \\ G_3(16) &= G_{03}(16) \times G_\beta(16) = 0.99 \times 0.998 = 0.988 \\ G_3(17) &= G_{03}(17) \times G_\beta(17) = 1.00 \times 1.000 = 1.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_3(17) &= G_3(17) - G_3(16) = 0.012 \\ g_3(16) &= G_3(16) - G_3(15) = 0.073 \\ g_3(15) &= G_3(15) - G_3(14) = 0.287 \\ g_3(14) &= G_3(14) - G_3(13) = 0.419 \\ g_3(13) &= G_3(13) - G_3(12) = 0.186 \\ g_3(12) &= G_3(12) - G_3(11) = 0.022 \\ g_3(11) &= G_3(11) = 0.001 \end{aligned}$$

c) チェイン $[\delta]$, $[\epsilon]$ の並列コンボリューション $[\zeta]$

$$\begin{aligned} G_5(17|11) &= G_\delta(17|11)G_\epsilon(17|11) = 0.03 \times 0.97 = 0.03 \\ G_5(18|11) &= G_\delta(18|11)G_\epsilon(18|11) = 0.26 \times 1.00 = 0.26 \\ G_5(19|11) &= G_\delta(19|11) = 0.74 \\ G_5(20|11) &= G_\delta(20|11) = 0.97 \\ G_5(21|11) &= G_\delta(21|11) = 1.00 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_5(21|11) &= G_5(21|11) - G_5(20|11) = 0.03 \\ g_5(21 \cap 11) &= g_5(21|11)g^\alpha(11) = 0.03 \times 0.001 = 0.000 \\ g_5(20|11) &= G_5(20|11) - G_5(19|11) = 0.23 \\ g_5(20 \cap 11) &= 0.23 \times 0.001 = 0.000 \\ g_5(19|11) &= G_5(19|11) - G_5(18|11) = 0.48 \end{aligned}$$

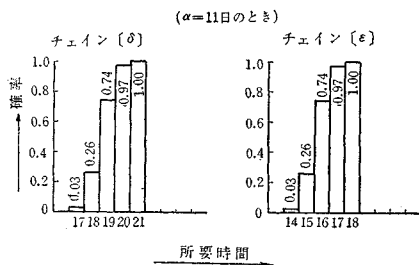
$$\begin{aligned} g_5(19 \cap 11) &= 0.48 \times 0.001 = 0.000 \\ g_5(18|11) &= G_5(18|11) - G_5(17|11) = 0.23 \\ g_5(18 \cap 11) &= 0.23 \times 0.001 = 0.000 \\ g_5(17|11) &= G_5(17|11) = 0.03 \\ g_5(17 \cap 11) &= 0.03 \times 0.001 = 0.000 \end{aligned}$$

以下同様にして

$$\begin{aligned} g_5(18 \cap 12) &= 0.03 \times 0.022 = 0.001 \\ g_5(19 \cap 13) &= 0.03 \times 0.186 = 0.006 \\ g_5(19 \cap 12) &= 0.23 \times 0.022 = 0.005 \\ g_5(20 \cap 13) &= 0.23 \times 0.186 = 0.042 \\ g_5(20 \cap 12) &= 0.48 \times 0.022 = 0.011 \\ g_5(21 \cap 13) &= 0.48 \times 0.186 = 0.089 \\ g_5(21 \cap 12) &= 0.23 \times 0.022 = 0.005 \\ g_5(22 \cap 13) &= 0.23 \times 0.186 = 0.042 \\ g_5(22 \cap 12) &= 0.03 \times 0.022 = 0.001 \\ g_5(23 \cap 13) &= 0.03 \times 0.186 = 0.006 \\ g_5(20 \cap 14) &= 0.03 \times 0.419 = 0.013 \\ g_5(21 \cap 15) &= 0.03 \times 0.287 = 0.009 \\ g_5(21 \cap 14) &= 0.23 \times 0.419 = 0.096 \\ g_5(22 \cap 15) &= 0.23 \times 0.287 = 0.066 \\ g_5(22 \cap 14) &= 0.48 \times 0.419 = 0.201 \\ g_5(23 \cap 15) &= 0.48 \times 0.287 = 0.138 \\ g_5(23 \cap 14) &= 0.23 \times 0.419 = 0.096 \\ g_5(24 \cap 15) &= 0.23 \times 0.287 = 0.066 \\ g_5(24 \cap 14) &= 0.03 \times 0.419 = 0.013 \\ g_5(25 \cap 15) &= 0.03 \times 0.287 = 0.009 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_5(22 \cap 16) &= 0.03 \times 0.073 = 0.002 \\ g_5(23 \cap 17) &= 0.03 \times 0.012 = 0.000 \\ g_5(23 \cap 16) &= 0.23 \times 0.073 = 0.017 \\ g_5(24 \cap 17) &= 0.23 \times 0.012 = 0.003 \\ g_5(24 \cap 16) &= 0.48 \times 0.073 = 0.035 \\ g_5(25 \cap 17) &= 0.48 \times 0.012 = 0.006 \\ g_5(25 \cap 16) &= 0.23 \times 0.073 = 0.017 \\ g_5(26 \cap 17) &= 0.23 \times 0.012 = 0.003 \\ g_5(26 \cap 16) &= 0.03 \times 0.073 = 0.002 \\ g_5(27 \cap 17) &= 0.03 \times 0.012 = 0.000 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_5(18) &= g_5(18 \cap 12) = 0.001 \\ g_5(19) &= g_5(19 \cap 12) + g_5(19 \cap 13) = 0.005 + 0.006 = 0.011 \\ g_5(20) &= g_5(20 \cap 12) + g_5(20 \cap 13) + g_5(20 \cap 14) \\ &= 0.011 + 0.042 + 0.013 = 0.066 \\ g_5(21) &= g_5(21 \cap 12) + g_5(21 \cap 13) + g_5(21 \cap 14) \\ &+ g_5(21 \cap 15) = 0.005 + 0.089 + 0.096 \\ &+ 0.009 = 0.199 \\ g_5(22) &= g_5(22 \cap 12) + g_5(22 \cap 13) + g_5(22 \cap 14) \\ &+ g_5(22 \cap 15) + g_5(22 \cap 16) = 0.001 + 0.042 \\ &+ 0.201 + 0.066 + 0.002 = 0.312 \end{aligned}$$



図一十二 作業時間の累加分布

$$g_s(23) = g_s(23 \cap 13) + g_s(23 \cap 14) + g_s(23 \cap 15) + g_s(23 \cap 16) = 0.006 + 0.096 + 0.138 + 0.017 = 0.257$$

$$g_s(24) = g_s(24 \cap 14) + g_s(24 \cap 15) + g_s(24 \cap 16) + g_s(24 \cap 17) = 0.013 + 0.006 + 0.035 + 0.003 = 0.117$$

$$g_s(25) = g_s(25 \cap 15) + g_s(25 \cap 16) + g_s(25 \cap 17) = 0.009 + 0.017 + 0.006 = 0.032$$

$$g_s(26) = g_s(26 \cap 16) + g_s(26 \cap 17) = 0.002 + 0.003 = 0.005$$

d) 作業 (2, 6), (6, 9) の直列コンボリユーション [ν]

(計算省略)

e) チェイン [η], [θ], [ι] の並列コンボリユーション [κ]

(計算省略)

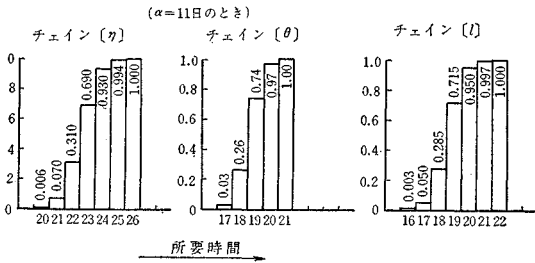


図-13 作業時間の累加分布

f) チェイン [μ], [ν] の並列コンボリユーション [ξ]

(計算省略)

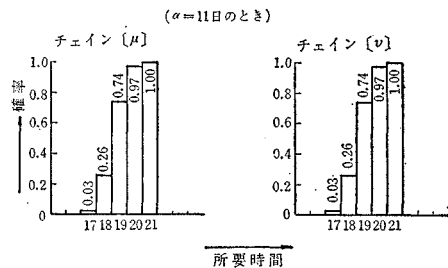


図-14 作業時間の累加分布

g) チェイン [λ], [σ] の並列コンボリユーション [π]

(計算省略)

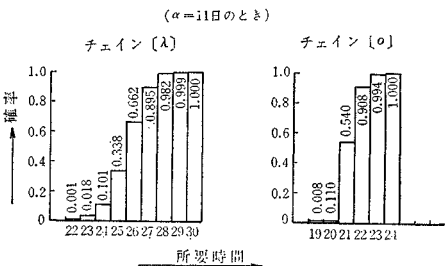


図-15 作業時間の累加分布

h) チェイン [π], 作業 (10, 11) の直列コンボリユーション [ρ]

$$g_{11}(26) = g_{10}f_{10,11}(1) = 0.005 \times 0.1 = 0.001$$

$$g_{11}(27) = g_{10}(26)f_{10,11}(1) + g_{10}(25)f_{10,11}(2) = 0.029 \times 0.1 + 0.005 \times 0.8 = 0.007$$

$$g_{11}(28) = g_{10}(27)f_{10,11}(1) + g_{10}(26)f_{10,11}(2) + g_{10}(25)f_{10,11}(3) = 0.092 \times 0.1 + 0.029 \times 0.8 + 0.005 \times 0.1 = 0.033$$

$$g_{11}(29) = g_{10}(28)f_{10,11}(1) + g_{10}(27)f_{10,11}(2) + g_{10}(26)f_{10,11}(3) = 0.191 \times 0.1 + 0.092 \times 0.8 + 0.029 \times 0.1 = 0.096$$

$$g_{11}(30) = g_{10}(29)f_{10,11}(1) + g_{10}(28)f_{10,11}(2) + g_{10}(27)f_{10,11}(3) = 0.255 \times 0.1 + 0.191 \times 0.8 + 0.092 \times 0.1 = 0.188$$

$$g_{11}(31) = g_{10}(30)f_{10,11}(1) + g_{10}(29)f_{10,11}(2) + g_{10}(28)f_{10,11}(3) = 0.226 \times 0.1 + 0.255 \times 0.8 + 0.191 \times 0.1 = 0.246$$

$$g_{11}(32) = g_{10}(31)f_{10,11}(1) + g_{10}(30)f_{10,11}(2) + g_{10}(29)f_{10,11}(3) = 0.133 \times 0.1 + 0.226 \times 0.8 + 0.255 \times 0.1 = 0.220$$

$$g_{11}(33) = g_{10}(32)f_{10,11}(1) + g_{10}(31)f_{10,11}(2) + g_{10}(30)f_{10,11}(3) = 0.054 \times 0.1 + 0.133 \times 0.8 + 0.226 \times 0.1 = 0.134$$

$$g_{11}(34) = g_{10}(33)f_{10,11}(1) + g_{10}(32)f_{10,11}(2) + g_{10}(31)f_{10,11}(3) = 0.013 \times 0.1 + 0.054 \times 0.8 + 0.133 \times 0.1 = 0.057$$

$$g_{11}(35) = g_{10}(34)f_{10,11}(1) + g_{10}(33)f_{10,11}(2) + g_{10}(32)f_{10,11}(3) = 0.002 \times 0.1 + 0.013 \times 0.8 + 0.054 \times 0.1 = 0.015$$

$$g_{11}(36) = g_{10}(34)f_{10,11}(2) + g_{10}(33)f_{10,11}(3) = 0.002 \times 0.8 + 0.013 \times 0.1 = 0.003$$

$$g_{11}(37) = g_{10}(34)f_{10,11}(3) = 0.002 \times 0.1 = 0.000$$

以上ではコンボリユーションを導入した確率 PERT の手法を用いてプロジェクト完了時刻を求めたが、これと1点見積りによる PERT 計算の結果をみて明らかなように、予定の31日間でプロジェクトが完了しない確率が55.2%だけ存在する。したがって、1点見積りによる PERT 計算で工期を決定するのは危険であるということがわかる。

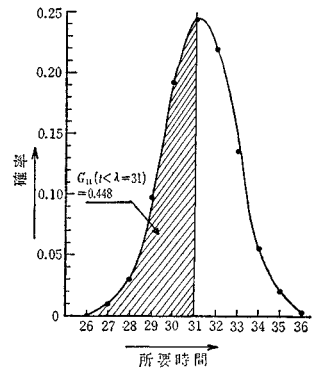


図-16 プロジェクト完了時刻の確率分布

また、途中の各結合点時刻の確率分布は、プロジェクト完了時刻の確率分布を求める計算過程ですでに求められている。

6. 工程計画における安全性の評価基準の設定

つぎに、スケジュールすなわち結合点時刻の分布を用いて安全性の評価を行なう方法について述べる。

現場管理者によって、工程計画が完成されたならば、まず第1に、工事の完了時刻について評価を行なわねばならない。いまここで、完了時刻 λ の工期に対する非超過確率を安全率と定義する。評価を行なうにあたって、まず第1に管理者はこの安全率 α の決定を行なわなければならない。安全率の決定に関しては、単に時間的な評価を行なう場合と、経済性も含めて行なう場合がある。

つぎに、安全率 α が決定されたならば、プロジェクト完了時刻の分布形 $F(t)$ は、工期を T とすれば、

$$F(t) = P_r[t \leq T] \geq \alpha \dots\dots\dots (33)$$

を満たすように定められなければならない。

作成されたプロジェクトが上式を満たす場合には、そのプロジェクトによって工事が実施され、満たされない場合には、そのプロジェクトは採択されず、もう一度検討され修正される。なお、修正に際しては、現場管理者は実施可能なスケジュールであることを確認する必要がある。

さて、これまではプロジェクトの完了時刻のみに注目してきたが、つぎに、中間時点における評価の方法について若干述べておくこととする。

前述したように、事務所レベルの管理者は日々の管理を行なう必要はなく、工事が目標を満たすように遂行されているかどうかを巨視的に管理することが重要である。このため、ネットワークの結合点のうち、管理の上で有用だと思われる結合点を選び出す。ここで、この結合点をマイルストーンと呼ぶことにする。これらのマイルストーンは、管理上フォローアップに適切な時間間隔を有し、かつ、トータルフロートの小さな作業が入っているような結合点でなければならない。また、このような結合点の中で、フォローアップに際して、以後の作業に対する修正を行ないやすい結合点を選ぶことも必要である。

さて、このようにマイルストーンが設定されたならば、これらの結合点時刻の分布形に対して、以後のスケジュールの修正変更が必要であるかどうかの評価の基準を上と同様に非超過確率によって与える。これを α_j とし、結合点時刻の分布関数を $F_j(t)$ とすると、実際の結合点時刻が t_j^* であるとき、

$$F_j(t_j^*) = P_r[t \leq t_j^*] \geq \alpha_j \dots\dots\dots (34)$$

ならば、以後のスケジュールを修正変更する必要はなく、

$$F_j(t_j^*) = P_r[t \leq t_j^*] < \alpha_j \dots\dots\dots (35)$$

のとき、以後のスケジュールを変更する必要があるものと判定できる。

これらの α_j は、完了時刻 λ に対応して適正に定められるべきであるが、一般には二重の評価として別個に定めてもよいと考えられる。また、 α_j と α と一致させて使用すると、用いるのに簡単であると同時に安全性も増加するが、安全側に過ぎるおそれもある。この点については若干の考察を必要とするが、2, 3 の試行錯誤により容易に決定されるであろう。

7. 橋梁下部工事への適用例

以上に示してきた確率 PERT 手法を、土木工事の工程計画・管理に適用するために、橋梁下部工事を例にと

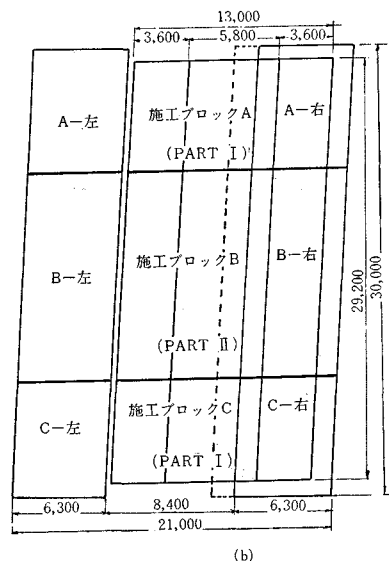
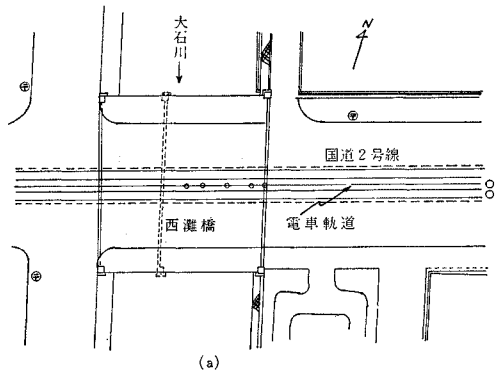


図-17 平面図

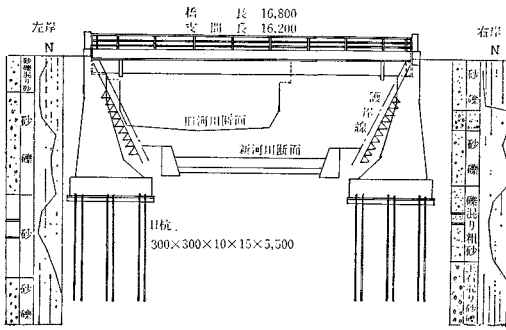


図-18 断面図

りあげた。本工事の概要は、河川の拡幅のため、現橋を撤去し、新橋を建設することであり、その平面図および断面図は 図-17、図-18 に示すとおりである。

基本的な工程は、図-19 に示すとおりであるが、これを工事工程計画としてネットワーク表示したものが 図-20 である。つぎに、作業の所要時間の推定とスケジュール計算について略述する。

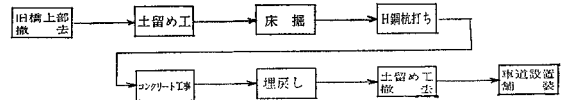


図-19 基本工程

(1) 所要時間の確率分布の推定

ネットワークに含まれている作業と全く同じ作業が、過去に類似した施工条件下で行なわれた実績がある場合には、分布形は容易に求められる。しかし、土木工事においては、施工条件が各工事ごとに大きく変化するので、過去の実績そのまま用いることはほとんど不可能である。しかし、1つの作業を例にとっていえば、その作業全般にわたって同じ施工条件であることは少ないが、一部分の作業については、施工条件が類似しているような過去の実績は得られやすい。したがって、本例においては、このような考え方に基づいて、確率分布形の推定に つぎのような方法を用いた。すなわち、各作業に対し

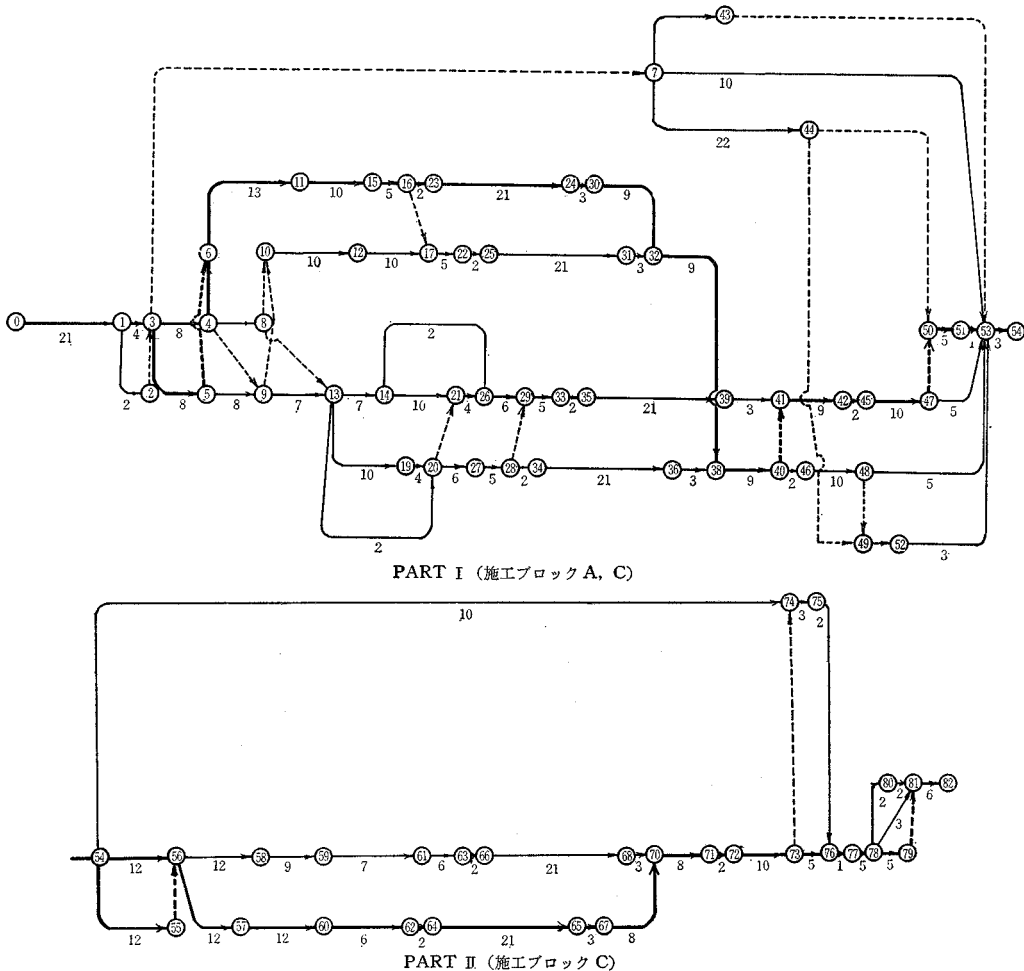


図-20

表-2 ネットワークにおける作業リスト

<i>i</i>	<i>j</i>	作	業	<i>i</i>	<i>j</i>	作	業
0	1	準	備	1	36	埋	戻
1	2	準	備	2	38	欠	板
1	3	仮	歩	道	39	埋	戻
2	3	タ	ミ	道	40	上	部
3	4	上	部	撤	去	40	上
3	5	矢	板	打	設	41	鋼
3	7	タ	ミ	架	設	42	上
4	6	タ	ミ	架	設	43	上
4	8	上	部	撤	去	44	49
4	9	タ	ミ	架	設	44	50
5	6	タ	ミ	架	設	45	47
5	9	矢	板	打	設	46	48
6	11	橋	台	撤	去	47	50
7	43	路	面	電	車	切	替
7	44	車	道	設	置	47	53
7	53	路	面	電	車	切	替
8	10	タ	ミ	架	設	48	49
8	13	タ	ミ	架	設	49	52
9	10	タ	ミ	架	設	50	51
9	13	矢	板	打	設	51	53
10	12	橋	台	撤	去	52	53
11	15	掘	削	削	削	53	54
12	17	掘	削	削	削	54	55
13	14	矢	板	打	設	54	56
13	19	橋	台	撤	去	54	74
13	20	仮	締	切	工	55	56
14	21	橋	台	撤	去	56	57
14	26	仮	締	切	工	56	58
15	16	H	杭	打	設	57	59
10	17	タ	ミ	架	設	58	61
16	23	基	礎	礎	礎	59	62
17	22	H	杭	打	設	60	63
19	20	矢	板	打	設	61	64
20	21	タ	ミ	架	設	62	64
20	27	掘	削	削	削	63	66
21	26	矢	板	打	設	64	65
22	25	基	礎	礎	礎	65	67
23	24	構	築	築	築	66	68
24	30	埋	戻	し	戻	67	70
25	31	構	築	築	築	68	70
26	29	掘	削	削	削	70	71
27	28	H	杭	打	設	71	72
28	29	タ	ミ	架	設	72	73
28	34	基	礎	礎	礎	73	74
29	33	H	杭	打	設	74	75
30	32	矢	板	引	抜	75	76
31	32	埋	戻	し	戻	76	77
32	38	矢	板	引	抜	77	78
33	35	基	礎	礎	礎	77	79
34	36	構	築	築	築	78	80
35	39	構	築	築	築	80	81

① 施工条件として、要因 a, b, c, \dots を設定し、それぞれいくつかのランクにクラス別ける。

$$\begin{bmatrix} a; a_1, a_2, \dots \\ b; b_1, b_2, \dots \\ c; c_1, c_2, \dots \\ \vdots; \dots, \dots \end{bmatrix}$$

② 対象とする作業のもつ要因の組、 (a^*, b^*, c^*, \dots) を作成する。

③ 過去の実績の中から、同じ要因の組、 $(a^*, b^*,$

$c^*, \dots)$ に対応する作業をとりだし、単位施工量 w に対する所要時間 t_w をサンプリングする。

④ 確率分布形 $f_w(t_w)$ を作成する。

⑤ 作業の全施工量を W とすると、 W は w の整数倍であるから、全施工量 W に対する所要時間 t_W の確率分布形を次式で計算する。

$$f_W(t_W) = f_w(t_w) * f_w(t_w) * \dots * f_w(t_w) \dots \dots (36)$$

ここで、 t_w が連続であれば、

$$f_w(t_w) * f_w(t_w) = \int_{t_w} f_w(t_w) f(t-t_w) dt_w \dots (37)$$

t_w が離散形であれば、

$$f_w(t_w) * f_w(t_w) = \sum f_w(t_w) f(t-t_w) \Delta t_w \dots (38)$$

さて、ここで一例として、矢板杭打設作業の場合の分布形の作成を示す。まず、施工条件の類似した過去の実績から、矢板杭打設の単位施工量を矢板杭 5 枚と仮定し、これに要した時間 t_s を

確率変数として分布形を図-21 のように求めた。つぎにこれをもとにして、各矢板杭打設作業の所要時間の分布形を求める。たとえば、作業 (13, 14) の場合には、矢板の施工量が 85 枚であるから、式 (36) において、

$W/w=17$ として、17回コンボリューション計算を行なえばよい。この結果、作業 (13, 14) の所要時間の確率分布として 図-22 に示すような分布形を得た。こ

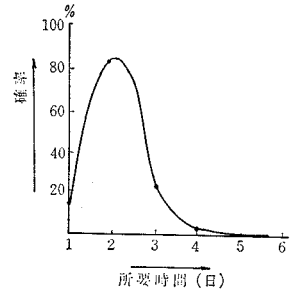


図-21 $w=5$ の場合の所要時間の確率分布

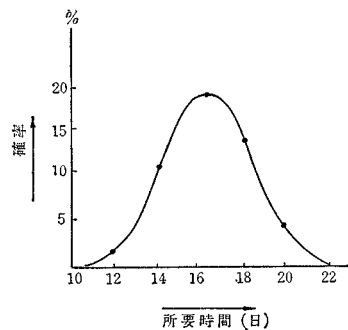


図-22 作業 (13, 14) の所要時間確率分布

こで、単位施工量を 5 枚と仮定したのは、一般には、総施工量が同じで、かつ施工条件の類似しているような実績は非常に少ないが、5~10 枚程度の単位であれば、条件の類似した場合の実績は容易に得られ、したがって、分布形の精度も高くなるからである。しかし、実績が数多く集められれば、適当なデータを選択することによ

て、精度を落すことなく、コンポリューション計算時における単位施工量 w を大きくすることができる。したがって、式(36)によって、作業の所要時間の分布形を求める場合のコンポリューションの回数を減少させることができる。

本例においては、同様の手順を繰り返して、すべての作業についての分布形を求めたが、その一部分を表-3に示す。

表-3 作業所要時間分布 (1 部分)

作 業		所要時間	確 率	累 加 確 率
i	j	y_{ij}	$f_{ij}(y_{ij})$	$G_{ij}(y_{ij})$
0	1	21	1.000	1.000
1	2	2	1.000	1.000
2	3	0	—	—
3	4	5	0.001	0.001
		6	0.026	0.027
		7	0.165	0.192
		8	0.378	0.570
		9	0.319	0.889
		10	0.099	0.988
		11	0.011	0.999
		12	0.001	1.000
3	5	9	0.001	0.001
		10	0.002	0.003
		11	0.021	0.024
		12	0.070	0.094
		13	0.142	0.236
		14	0.198	0.434
		15	0.200	0.634
		16	0.165	0.799
		17	0.103	0.902
		18	0.060	0.962
		19	0.024	0.986
		20	0.013	0.999
		21	0.001	1.000

(2) スケジュール計算

計算の方法については、すでに 5. においてくわしく述べたので、ここでは詳細は示さず、計算の結果と 2, 3 の考察を示すこととする。

厳密な結果を得るためには、多くの場合、電子計算機を用いなければならないほど計算量が多くなる。しかし、電子計算機を使用しないような場合に対しては、以下のような簡略的方法による近似計算法を用いても、十分精度の高い結果が得られることが明らかにされている。

ここで、図-23 に示されるような場合を考えてみると、この場合、2つの作業あるいはチェーン

の完了時刻の分布形は 図-24 に示したような (a), (b), (c) の 3 つの場合が考えられる。(a) の場合には、結合点時刻の分布形は (i, k) によって決まり、(j, k) には全く関係がない。(b) の場合には、分布形の重なりがある程度小さいときには、ほとんど (a) と同様なことはいえる。しかし、分布形の重なりが大きい (c) の場合には、どちらか一方によって決めるという方法は過小評価することになり、危険側に計算していることになるということが実証的に明らかにされている。

このような事実から、本例では、完了時刻の分布形の重なりの状態を検討することにより、図-25 に示す

ようなサブネットワークを作成し、コンポリューション計算を行ない、プロジェクトの完了時刻の分布形を求めたところ、図-26 のようになった。プロジェクト完了時刻の分布形の下限值および上限値は、それぞれ 271 日および 307 日、完了時刻の期待値および偏差はそれぞれ 289 日および 6 日となった。

これらの結果と、1 点見積りによる従来の PERT 計算の結果 ($\mu=284$ 日) をみても明らかなように、予定の 284 日でプロジェクトが完了しない確率は 75.3% だけ存在する。したがって、1 点見積りによる PERT 計算で工期を決定するのは危険であり、100% の確率で工事

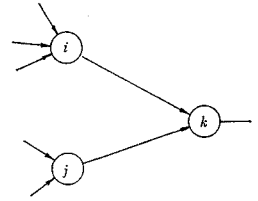


図-23

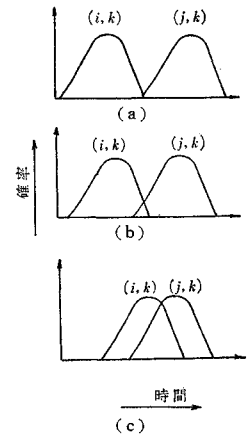


図-24

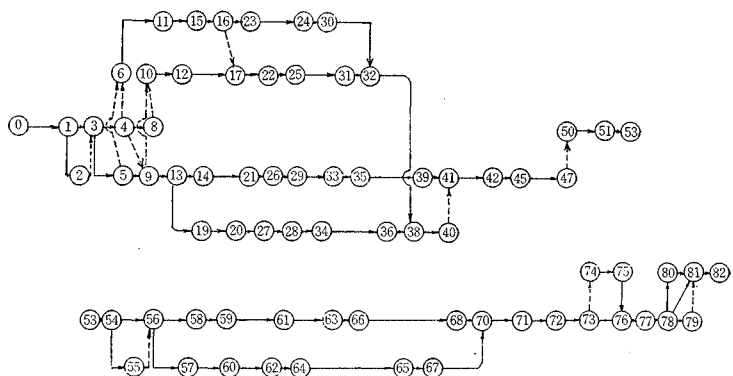


図-25 コンポリューション計算のためのサブネットワーク

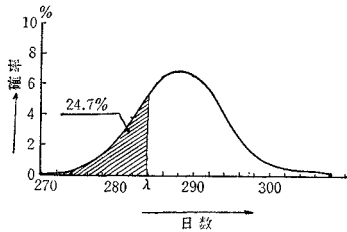


図-26 プロジェクトの完了時刻の確率分布

を完了するためにはあと 23 日の余裕分をみこまねばならないことになる。土木工事においては工期厳守が原則となっている。したがって、工期は非超過確率

が 0% に近くなるように決定するのが望ましい。この例で $\lambda=307$ 日に選ぶのが最も望ましいといえる。

8. 結 言

土木工事の近代化のために導入されてきた PERT, CPM 等のネットワーク手法も、その適用例が増加するにつれ、各例に対しての長所や短所が明らかにされ、さまざまな側面から検討が加えられている。土木の施工体制が特殊なものであるだけに、有効な管理技術として、これらの特殊性を十分消化したものが望ましい。本研究においても、土木工事の特殊性としての作業の不確定性をとりあげ、このうち、作業の所要時間の変動に着目し、問題点解決のためシステムを提案した。

さらに、中心的な手法としてコンボリューションを用いた確率 PERT を提案したが、これは従来の手法の欠点を補正し、より正確なプロジェクト完了時刻の確率分布を与える手法である。しかし、計算がはん雑で、多くの場合電子計算機の導入が必要となるので、現場レベル

での工程管理の手法としては適当でない。むしろ総合的な管理を行なう、より上位の事務所レベルでの管理手法として非常に有用であるということが本研究をとおして実証された。

最後に、事例研究を行なうにあたって、終始ご協力を賜った建設コンサルタンツ協会大阪支部施工管理分会の委員諸氏、ならびに資料作成にあたって、協力していただいた京都大学の谷添、細見の両氏に対して深く感謝いたします。

参 考 文 献

- 1) Goode, H.H. & Machol, R.F.: System Engineering, McGraw Hill, 1957.
- 2) Chorafs, D.N.: Systems and Simulation, Academic Press, 1965.
- 3) Clark, C.E.: The Greatest of a Finite Set of Random Variables, JORSA Vol. 9, 1961.
- 4) Clark, C.E.: The PERT Model for the Distribution of an Activity Time, JORSA Vol. 10, 1962.
- 5) Fulkerson, D.R.: Expected Critical Path Lengths in PERT Networks, JORSA Vol. 10, 1962.
- 6) Ford, D.R. Jr. & Fulkerson, D.R.: Flows in Networks, Princeton University Press, 1962.
- 7) Van Slyke, R.M.: Monte Carlo Methods and the PERT Problem, JORSA Vol. 11, 1963.
- 8) Nagao, Y. & Yoshikawa, K.: Study on a Mathematical Basis of Critical Path Method and Its Application, Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto University, Vol. XXVIII Part 3, 1966.
- 9) 吉川和広・春名 攻: ネットワーク手法による施工計画のシステムアプローチに関する研究 —CPM 計算の簡便化—, 土木学会論文集, 第 151 号, 昭和 43 年 2 月.
- 10) 春名 攻: 工程管理計画に関する基礎的研究, 修士論文, 昭和 43 年 2 月.

(1969. 12. 16・受付)