

変形法による任意形状の薄肉断面格子桁の解析

ANALYSIS OF ARBITRARY GRILLAGE GIRDER BRIDGE WITH THIN-WALLED SECTION BY DEFORMATION METHOD

鷹羽 信勝*・成岡 昌夫**

By Nobukatsu Takaba and Masao Naruoka

要 旨 面外荷重をうける平面構造物の解法の一つとして従来用いられている変形法を拡張し、断面のそり変形を拘束することにより生ずる曲げねじりモーメント、二次ねじりモーメントの影響をも考慮した、各種境界条件に対する変形法の基本式を述べ、おもなねじり荷重に対する荷重項を記すとともに、計算法、および、計算例を示した。

た、断面が変化する場合には、断面変化点に節点を設けると、解析が可能となる。なお、計算上は、せん断中心線と重心線とは一致していると仮定する。さらに、横桁の剛性（曲げ剛性、ねじり剛性、曲げねじり剛性）も、横桁を構成部材とみなすことにより、考慮しうる。

1. ま え が き

道路線形の複雑化、都市の立体化、高張力鋼の発達などに伴い、多くの薄肉断面構造物が施工されるようになってきている。これらの薄肉断面構造物の解法としては、すでに多くの文献が発表されているが、本文は、K. Klöppel 教授らにより提案された変形法による解法^{1),2)}を、面外荷重を受ける任意形状の薄肉断面格子構造物の解析に適用しうるようにしたものである。

従来の変形法による格子構造物の解析では、そり変形の拘束により生ずる曲げねじりモーメント、二次ねじりモーメントを考慮していない。したがって、構造物の形状、および、断面形状によっては、この解法が不適當である場合もある。また、曲げねじり理論による解法では、構造物の形状に制限があり、任意形状の薄肉断面格子桁に適用することができない。われわれは、上記の不都合さを減少させるため、K. Klöppel 教授らの研究を拡張し、任意の形状、任意の支持状態の平面格子構造物の解析に対し、曲げねじりモーメント、二次ねじりモーメントをも考慮した変形法を用いるようにした。

この研究では、薄肉断面よりなる格子構造物の各構成部材は、解析を簡単にするために、直線であるとし、また、部材内では断面は一定であると、仮定している。このため、曲線橋に対しては、多角形で近似させる。ま

2. 基 本 式

(1) 部材座標表示による基本式

格子構造物の任意の構成部材 r (図-1(a) 参照) において、部材軸方向に ξ 軸、構造物面内で ξ 軸に直角方向に η 軸、 $\xi\eta$ 面に垂直下方に ζ 軸を定める。部材 r の材端 i, j における断面力（せん断力、曲げモーメント、ねじりモーメント、曲げねじりモーメント）と変形量（たわみ、たわみ角、ねじり角、ねじり率は）、図-1(b), (c) に示す方向を、それぞれ、正の方向とする。部材 r において、曲げ剛性 EI_r 、ねじり剛性 GI_{Tr} 、曲げねじり剛性 EC_{Mr} は一定であるものと仮定すれば、たわみ曲線に対する微分方程式、および、ねじり角に対する微分方程式は、それぞれ、

$$EI_r \frac{d^4 \rho}{d\xi^4} = q(\xi) \dots\dots\dots (1)$$

$$EC_{Mr} \frac{d^4 \theta_\xi}{d\xi^4} - GI_{Tr} \frac{d^2 \theta_\xi}{d\xi^2} = q_t(\xi) \dots\dots\dots (2)$$

となる¹⁾。部材間には、外力が作用しないものとすれば、式(1)、(2)に対する解は、それぞれ、つぎのようになる。

$$\zeta = C_1 \xi^3 + C_2 \xi^2 + C_3 \xi + C_4 \dots\dots\dots (3)$$

$$\theta_\xi = K_1 \sinh(\lambda_r \xi) + K_2 \cosh(\lambda_r \xi) + K_3 \xi + K_4 \dots\dots\dots (4)$$

ここに、

$$\lambda_r = (GI_{Tr}/EC_{Mr})^{1/2} \dots\dots\dots (5)$$

である。したがって、たわみ角、および、ねじり率は、

$$\theta_\eta = d\zeta/d\xi = 3C_1 \xi^2 + 2C_2 \xi + C_3 \dots\dots\dots (6)$$

* 正会員 元名古屋大学受託研究員、日建設計工務(株)土木業務所

** 正会員 工博 名古屋大学教授 工学部土木工学教室

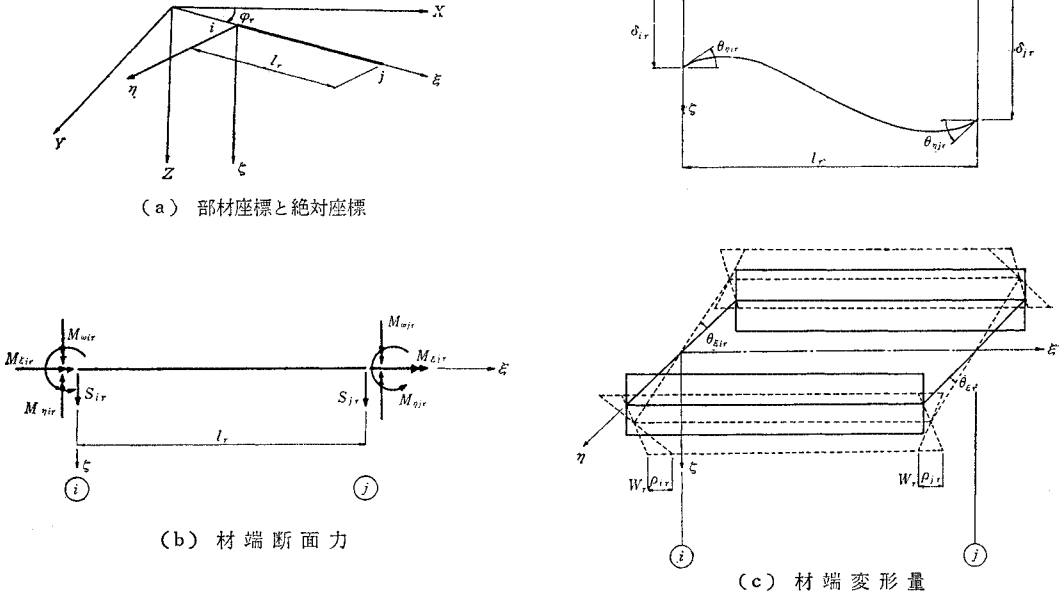


図-1

$$\rho = d\theta_\xi / d\xi$$

$$= \lambda_r \cdot K_1 \cosh(\lambda_r \xi) + \lambda_r \cdot K_2 \sinh(\lambda_r \xi) + K_3 \quad (7)$$

となる。また、断面力は、

$$S_{(\xi)r} = -EI_r \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} \quad (8)$$

$$M_{\xi(\xi)r} = GI_r \frac{d\theta_\xi}{d\xi} - EC_{Mr} \frac{d^3 \theta_\xi}{d\xi^3} \quad (9)$$

$$M_{\eta(\xi)r} = -EI_r \frac{d^2 \zeta}{d\xi^2} \quad (10)$$

$$M_{w(\xi)r} = -EC_{Mr} \frac{d^2 \theta_\xi}{d\xi^2} \quad (11)$$

で表わされる。式 (3), (4), (6), (7) に含まれる積分定数 $C_1 \sim C_4$, $K_1 \sim K_4$ を、材端 i, j における境界条件により定め、式 (8)~(11) において $\xi=0$ とすれば、材端 i における断面力が、両端における変形量と断面定数とを用いて表わすことができる。結果を行列表示すれば、つぎのようになる。

$$\begin{pmatrix} S_{ir} \\ M_{\xi ir} \\ M_{\eta ir} \\ M_{wir} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{12EI_r}{l_r^3} & \frac{12EI_r}{l_r^3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} & \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \\ \frac{6EI_r}{l_r^2} & -\frac{6EI_r}{l_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} & -\frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \\ \frac{6EI_r}{l_r^2} & \frac{6EI_r}{l_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \\ -\frac{4EI_r}{l_r^2} & \frac{2EI_r}{l_r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\bar{\alpha}_r}{l_r} EC_{Mr} & -\frac{\bar{\beta}_r}{l_r} EC_{Mr} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_{ir} \\ \delta_{jr} \\ \theta_{\xi ir} \\ \theta_{\xi jr} \\ \theta_{\eta ir} \\ \theta_{\eta jr} \\ \rho_{ir} \\ \rho_{jr} \end{pmatrix} \quad (12)$$

ここに、

$$\epsilon_r = \lambda_r \cdot l_r \quad (13)$$

$$\bar{\alpha}_r = -\frac{\epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r - \epsilon_r^2 \cdot \cosh \epsilon_r}{2(1 - \cosh \epsilon_r) + \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r} \quad (14)$$

$$\bar{\beta}_r = -\frac{\epsilon_r^2 - \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r}{2(1 - \cosh \epsilon_r) + \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r} \quad (15)$$

であり、これらは、断面形状が与えられていると、求められる。

式 (12) が、断面のそり変形の影響を考慮した場合の変形法の基礎式である。従来の変形法では、式 (12) の右辺第 1 項の行列の第 4 行、および、第 7, 8 列がなく、第 2 行の各要素は GI_{Tr}/l_r となる³⁾。

(2) 絶対座標表示

$\xi\eta$ 面内の任意の点に原点をもつ絶対座標系 x, y, z を定め (図-1 (a) 参照), ξ 軸が x 軸と時計方向に角 φ_r をなすものとし,

$$s_r = \sin \varphi_r, c_r = \cos \varphi_r \dots\dots\dots(16)$$

とする絶対座標系における変形量, 断面力を, 部材座標系の場合と同様に定義するものとし, 式 (12) を部材座

標系より絶対座標系に, 座標変換を行なう。座標変換に際し,

$$\begin{bmatrix} \theta_{\xi r} \\ \theta_{\eta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & s_r \\ -s_r & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x r} \\ \theta_{y r} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} M_{\xi r} \\ M_{\eta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & s_r \\ -s_r & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x r} \\ M_{y r} \end{bmatrix} \dots\dots\dots(17)$$

なる関係が成り立つことを考慮すれば, 式 (12) はつぎのようになる。

$$F_{0r} = \begin{bmatrix} S_{ir} \\ M_{xir} \\ M_{yir} \\ M_{wir} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 EI_r \frac{1}{l_r^3} & 12 EI_r \frac{1}{l_r^3} & -6 EI_r \frac{s_r}{l_r^2} \\ -6 EI_r \frac{s_r}{l_r^2} & 6 EI_r \frac{s_r}{l_r^2} & -4 EI_r \frac{s_r^2}{l_r} - \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot c_r^2 \\ 6 EI_r \frac{c_r}{l_r^2} & -6 EI_r \frac{c_r}{l_r^2} & \left[\frac{4 EI_r}{l_r} - \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \right] s_r c_r \\ 0 & 0 & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot c_r \\ -6 EI_r \frac{c_r}{l_r^2} & 6 EI_r \frac{c_r}{l_r^2} & 0 \\ -2 EI_r \frac{s_r^2}{l_r} + \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot c_r^2 & \left[\frac{4 EI_r}{l_r} - \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \right] s_r c_r & -\frac{4 EI_r}{l_r} c_r^2 - \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot s_r^2 \\ \left[\frac{12 EI_r}{l_r} + \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \right] s_r c_r & -\frac{4 EI_r}{l_r} c_r^2 - \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot s_r^2 & -\frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot c_r \\ -\frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot c_r & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot s_r & 0 \\ 6 EI_r \frac{c_r}{l_r^2} & 0 & 0 \\ \left[\frac{2 EI_r}{l_r} + \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \right] s_r c_r & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot c_r & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot c_r \\ -2 EI_r \frac{c_r^2}{l_r} + \frac{2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot s_r^2 & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^3} EC_{Mr} \cdot s_r & \frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot s_r \\ -\frac{\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r}{l_r^2} EC_{Mr} \cdot s_r & -\frac{\bar{\alpha}_r}{l_r} EC_{Mr} & -\frac{\bar{\beta}_r}{l_r} EC_{Mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{ir} \\ \delta_{jr} \\ \theta_{xir} \\ \theta_{yir} \\ \theta_{yjr} \\ \rho_{ir} \\ \rho_{jr} \end{bmatrix} \equiv S_{0r} \cdot X_{0r} \dots\dots(18)$$

式 (18) は部材 r の中間に荷重が載荷されていない場合の基本式であるが, 中間荷重が存在する場合には,

$$F_{0r} = S_{0r} \cdot X_{0r} + \begin{bmatrix} S_{ir}^0 \\ M_{xir}^0 \\ M_{yir}^0 \\ M_{wir}^0 \end{bmatrix} \equiv S_{0r} \cdot X_{0r} + C_{0r} \dots\dots(19)$$

となる。ここに, C_{0r} は絶対座標系の表示の荷重項の列ベクトルであり, その要素 M_{xir}^0, M_{yir}^0 は

$$\begin{bmatrix} M_{xir}^0 \\ M_{yir}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & -s_r \\ s_r & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{\xi ir}^0 \\ M_{\eta ir}^0 \end{bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

である。おもなねじり荷重に対する荷重項 M_{ξ}^0, M_{η}^0 の値を, 表-1 に示す。表の一部は文献 4) より引用したが, その他はみずから計算した。なお, 材端 j の断面力は, 式 (18) において, $\varphi_r' = \varphi_r + 180^\circ$ とすれば, 求められる。

(3) 部材端における境界条件による基本式の修正

式 (18), (19) は, 部材が両端で他の部材と剛結され

ている場合に対する基本式であるが, 部材端の境界条件が異なると, 式の形はかわってくる。たとえば, 材端 i が, そり変形に対し, 自由に變形しうる状態であれば, $M_{wir} = 0$ なる条件より, ρ_{ir} を消去すれば, 式 (18) のマトリックスの要素は, 表-2 (a) において, 係数 $g_1 \sim g_5$ の値を, 表-2 (c) の第 2 行のように定めた値となる。おもな材端の境界条件に対する式 (18) の行列 S_{0r} の要素を, 表-2 に示す。式 (12) より明らかなように, 部材座標表示における曲げモーメントとねじり角, ねじり率, および, 曲げねじりモーメントとたわみ, たわみ角は, それぞれ, 独立であり, 曲げモーメントと曲げねじりモーメントを同時に考慮した材端の境界条件に対しては, それぞれ, 別々に, 表-2 (b), (c) より, おのおのの係数を定めるとよい。これらの境界条件の場合のねじり荷重による荷重項を表-1 に示してある。

特殊な場合として, 曲げモーメントに対して, 両端ともピン結合の場合は, $k_1 \sim k_5$ のおのおのの係数は 0 となる。また, 両端でそり変形が拘束されず, 自由に變形し

表-1 荷

荷	重	境界条件	$M\bar{w}_i^0$
		$\frac{m_r \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[1 - \frac{1}{2} (\bar{\alpha}_r - \bar{\beta}_r) \right]$	
		0	
		$\frac{T \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\sinh \epsilon_2}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) \bar{\alpha}_r - \left(\frac{\sinh \epsilon_1}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) \bar{\beta}_r \right]$	
		0	
		$\frac{p \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\frac{2 \bar{\beta}_r - \bar{\alpha}_r}{6} \right]$	
		0	
		$\frac{p \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} - \frac{1}{6} \bar{r}_r \right]$	
		0	
		$\frac{l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\left(1 - \frac{2 \bar{\alpha}_r - \bar{\beta}_r}{6} \right) p + \left(\frac{2 \bar{\beta}_r - \bar{\alpha}_r}{6} \right) q \right]$	
		0	

ただし, $\epsilon_1 = \lambda_r \cdot a, \epsilon_2 = \lambda_r \cdot b, \epsilon_r = \lambda_r \cdot l_r$

$$\bar{\alpha}_r = -\frac{\epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r - \epsilon_r^2 \cdot \cosh \epsilon_r}{2(1 - \cosh \epsilon_r) + \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r}, \quad \bar{\beta}_r = -\frac{\epsilon_r^2 - \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r}{2(1 - \cosh \epsilon_r) + \epsilon_r \cdot \sinh \epsilon_r}$$

表-2

(a) 行列 S_0 の一般形

$-\frac{k_1}{l_r^3}$	$\frac{k_1}{l_r^3}$	$-\frac{k_2}{l_r^2} s_r$	$-\frac{k_2}{l_r^2} s_r$	$\frac{k_2}{l_r^2} c_r$	$\frac{k_2}{l_r^2} c_r$	0	0
$-\frac{k_2}{l_r^2} s_r$	$\frac{k_2}{l_r^2} s_r$	$-\frac{k_4}{l_r} s_r^2 - \frac{g_1}{l_r^3} c_r^2$	$-\frac{k_5}{l_r} s_r^2 + \frac{g_1}{l_r^3} c_r^2$	$\left(\frac{k_4}{l_r} - \frac{g_1}{l_r^3} \right) s_r c_r$	$\left(\frac{k_5}{l_r} + \frac{g_1}{l_r^3} \right) s_r c_r$	$\frac{g_2}{l_r^2} c_r$	$\frac{g_3}{l_r^2} c_r$
$\frac{k_2}{l_r^2} c_r$	$-\frac{k_2}{l_r^2} c_r$	$\left(\frac{k_4}{l_r} - \frac{g_1}{l_r^3} \right) s_r c_r$	$\left(\frac{k_5}{l_r} + \frac{g_1}{l_r^3} \right) s_r c_r$	$-\frac{k_4}{l_r} c_r^2 - \frac{g_1}{l_r^3} s_r^2$	$-\frac{k_5}{l_r} c_r^2 + \frac{g_1}{l_r^3} s_r^2$	$\frac{g_2}{l_r^2} s_r$	$\frac{g_3}{l_r^2} s_r$
0	0	$\frac{g_2}{l_r^2} c_r$	$-\frac{g_2}{l_r^2} c_r$	$\frac{g_2}{l_r^2} s_r$	$-\frac{g_2}{l_r^2} s_r$	$-\frac{g_4}{l_r}$	$-\frac{g_4}{l_r}$

(b) 曲げ変形に対する境界条件による上記 k の係数

材端の境界条件	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5
i, j : 剛結	12	6	6	4	2
i : ヒンジ, j : 剛結	3	0	3	0	0
i : 剛結, j : ヒンジ	3	3	0	3	0

(c) そり変形に対する境界条件による上記 g の係数

材端の境界条件	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5
i, j : 剛結	$2(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) + \epsilon_r^2$	$\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r$	$\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r$	$\bar{\beta}_r$	$\bar{\alpha}_r$
i : 自由, j : 剛結	$\bar{r}_r + \epsilon_r^2$	0	\bar{r}_r	0	0
i : 剛結, j : 自由	$\bar{r}_r + \epsilon_r^2$	\bar{r}_r	0	0	\bar{r}_r

重 項

$Mw_{j,r}^0$	$M\xi_{i,r}^0$	$M\xi_{j,r}^0$
$-\frac{mT \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[1 - \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_r - \bar{\beta}_r) \right]$	$\frac{1}{2} mT \cdot l_r$	$\frac{1}{2} mT \cdot l_r$
$-\frac{mT \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[1 + \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} - \frac{1}{2} \bar{\gamma}_r \right]$	$mT \cdot l_r \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\epsilon_r^2} \left(1 + \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} - \frac{\bar{\gamma}_r}{2} \right) \right]$	$mT \cdot l_r \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\epsilon_r^2} \left(1 + \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} - \frac{\bar{\gamma}_r}{2} \right) \right]$
$-\frac{T \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\sinh \epsilon_1}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) \bar{\alpha}_r - \left(\frac{\sinh \epsilon_2}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_2}{\epsilon_r} \right) \bar{\beta}_r \right]$	$\frac{T}{\epsilon_r^2} \left[(\bar{\alpha}_r + \bar{\beta}_r) \left(\frac{\sinh \epsilon_1}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\sinh \epsilon_2}{\sinh \epsilon_r} + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) + \epsilon_r \epsilon_1 \right]$	$T - M\xi_{i,r}^0$
$-\frac{T \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\sinh \epsilon_1}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) \bar{\gamma}_r \right]$	$T - M\xi_{j,r}^0$	$\frac{T}{\epsilon_r^2} \left[- \left(\frac{\sinh \epsilon_1}{\sinh \epsilon_r} - \frac{\epsilon_1}{\epsilon_r} \right) \bar{\gamma}_r + \epsilon_r \epsilon_1 \right]$
$-\frac{p \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[1 - \frac{2\bar{\alpha}_r - \bar{\beta}_r}{6} \right]$	$\frac{p \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} + 1 \right]$	$\frac{p \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\frac{2\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} - 1 \right]$
$\frac{p \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\bar{\gamma}_r}{3} - 1 \right]$	$\frac{p \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[1 + \frac{\epsilon_r^2}{2} - \frac{\bar{\psi}_r}{3} \right]$	$\frac{p \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\bar{\psi}_r}{3} - 1 \right]$
0	$\frac{p \cdot l_r}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\bar{\psi}_r}{6} - \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} \right]$	$\frac{p \cdot l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\frac{\epsilon_r^2}{2} - \frac{\bar{\psi}_r}{6} + \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} \right]$
$-\frac{l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{2\bar{\beta}_r - \bar{\alpha}_r}{6} \right) p + \left(1 - \frac{2\bar{\alpha}_r - \bar{\beta}_r}{6} \right) q \right]$	$\frac{l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{2\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} - 1 \right) p + \left(\frac{\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} + 1 \right) q \right]$	$\frac{l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{2\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} + 1 \right) p + \left(\frac{2\bar{\gamma}_r - 3}{6} \bar{\alpha}_r - \frac{\bar{\beta}_r}{2} - 1 \right) q \right]$
$-\frac{l_r^2}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} - \frac{\bar{\gamma}_r}{6} \right) p - \left(\frac{\bar{\gamma}_r}{3} - 1 \right) q \right]$	$\frac{l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\epsilon_r^2}{2} - \frac{\bar{\psi}_r}{6} + \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} \right) p + \left(1 + \frac{\epsilon_r^2}{2} - \frac{\bar{\psi}_r}{3} \right) q \right]$	$\frac{l_r}{\epsilon_r^2} \left[\left(\frac{\bar{\psi}_r}{6} - \frac{\bar{\beta}_r}{\bar{\alpha}_r} \right) p + \left(\frac{\bar{\psi}_r}{3} - 1 \right) q \right]$

$$\bar{\gamma}_r = -\frac{\epsilon_r^2 \cdot \sinh \epsilon_r}{\sinh \epsilon_r - \epsilon_r \cdot \cosh \epsilon_r}, \quad \bar{\psi}_r = \frac{-\epsilon_r^3 \cdot \cosh \epsilon_r}{\sinh \epsilon_r - \epsilon_r \cdot \cosh \epsilon_r}$$

うる場合は、従来用いられている変形法の係数と一致する。

3. 剛性行列 (Stiffness Matrix)

(1) つりあい条件式

節点 k にあつまる部材を、 t_1, t_2, \dots, t_n とし、節点 k に作用する外力を、 $P_k^*, M_{xk}^*, M_{yk}^*$ とすれば、つりあい条件式は、図-2 を参照して、

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n [S_{i,i}] + P_k^* &= 0 \\ \sum_{i=1}^n [M_{xi,i}] + M_{xk}^* &= 0 \\ \sum_{i=1}^n [M_{yi,i}] + M_{yk}^* &= 0 \\ \sum_{i=1}^n [M_{wi,i}] &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

となる。式 (21) をおのおのの節点でつくり、その結果を行列表示すれば、

$$S \cdot X = P \dots\dots\dots(22)$$

と表わされる。ただし、

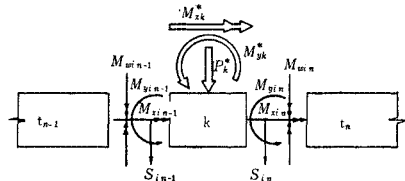


図-2 節点でのつりあい

$$X^T = [\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n, \theta_{x1}, \theta_{x2}, \dots, \theta_{xn}, \theta_{y1}, \theta_{y2}, \dots, \theta_{yn}, \rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n]$$

である。

行列 S は、 m を節点数とすれば、 $4m \times 4m$ の対称行列となる。各節点における未知数は、 $\delta, \theta_x, \theta_y, \rho$ の4個であり、未知数は、合計、 $4m$ 個となる。つりあい条件式 (21) も、各節点について4個あるから、条件式は $4m$ となる。したがって、式 (22) を解くことにより、すべての未知数が求められる。

(2) 支持条件による剛性行列の修正

式 (22) に含まれる未知数 X は、一般の場合、その一部は支持条件により既知であるか、他の条件がつけ加えられている。したがって、つぎのように、支持条件に

よる方程式の修正が必要である。

a) 絶対座標系における変形が拘束されている場合

絶対座標系における変形が拘束されている場合には、拘束条件より、ただちに変形量は求められる。たとえば、節点 k における鉛直変位が拘束されている場合には、 $\delta_k=0$ となる。また、 x 軸まわりの回転が拘束されている場合には、 $\theta_{xk}=0$ が得られる。

b) 部材座標系における変形が拘束されている場合

鉛直変位、および、そり変形に対する拘束は、座標系に無関係であり、a) の場合と同様であるが、部材軸まわりの回転変形 θ_ξ 、および、それに直角方向の回転変位 θ_η に関しては、その様相は異なってくる。多くの曲線橋にみられるように、部材軸まわりの回転変形 θ_ξ を拘束し、 θ_η に対してなんら拘束しない場合は、 $\theta_{\xi i}=0$ 、 $M_{\eta i}=0$ なる条件より、式 (18) の行列 S_{0r} の要素は、つぎようになる。すなわち、表-2 において、 $k_1 \sim k_5$ については、表-2 (b) の第 2 行のように定めたのち、表-2 (a) の第 3、5 列の要素を 0 とした形となる。

c) 節点で弾性支持される場合

節点で弾性的に支持される場合には、式 (22) はつぎようになる。

$$(S-K) \cdot X = P \dots \dots \dots (23)$$

ここに、 K は対角行列であり、その要素は、それぞれの変形に対するばね定数となり、弾性支持でない他の節点においては、ばね定数は 0 となる。

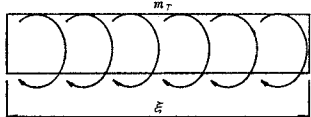
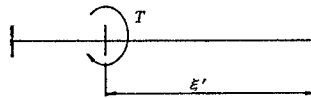
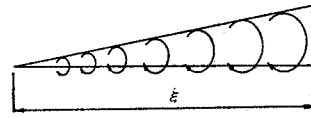
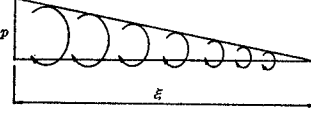
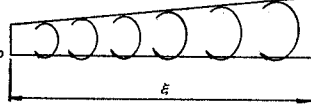
4. 部材断面力の計算

連立方程式 (22)、または、(23) の解を、式 (18)、または、式 (19) に代入すると、絶対座標系による部材端の断面力が計算される。さらに、部材座標系における曲げモーメント、ねじりモーメントを求めるには、つぎの計算を行なえばよい。

$$\begin{bmatrix} M_{\xi i r} \\ M_{\eta i r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_r & s_r \\ -s_r & c_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x i r} \\ M_{y i r} \end{bmatrix} \dots \dots \dots (24)$$

部材の中間における曲げモーメント、せん断力、ねじりモーメントは、材端の断面力と、中間荷重より、通常用いられている方法で計算して、求められる。曲げねじりモーメントのみは、材端の断面力のみから計算できず、材端の変形量にも影響される。部材 r の断面 ξ におけるねじりモーメント、曲げねじりモーメント、ねじり角、ねじり率を、それぞれ、 M 、 M_w 、 θ_ξ 、 ρ_ξ とすれば、

表-3 中間荷重による $\tilde{\theta}_\xi$ 、 $\tilde{\rho}$ 、 \tilde{M}_ξ 、 \tilde{M}_w の値 ($\epsilon = \lambda_r \xi$ 、 $\epsilon' = \lambda_r \xi'$)

荷重	$GI_{T_r} \cdot \tilde{\theta}_\xi$	$GI_{T_r} \cdot \tilde{\rho}$
	$\frac{m_r T}{\lambda_r^2} \left[\cosh \epsilon - 1 - \frac{\epsilon^2}{2} \right]$	$\frac{m_r T}{\lambda_r} [-\sinh \epsilon + \epsilon]$
	$\frac{T}{\lambda_r} [\sinh \epsilon' - \epsilon']$	$T [-\cosh \epsilon' + 1]$
	$\frac{p}{\lambda_r^2} \left[\frac{\sinh \epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon^2}{6} - 1 \right]$	$p \xi \left[-\frac{\cosh \epsilon - 1}{\epsilon^2} + \frac{1}{2} \right]$
	$\frac{p}{\lambda_r^2} \left[-\frac{\sinh \epsilon}{\epsilon} + \cosh \epsilon - \frac{\epsilon^2}{3} \right]$	$-p \xi \left[\frac{1 - \cosh \epsilon}{\epsilon^2} + \frac{\sinh \epsilon}{\epsilon} - \frac{1}{2} \right]$
	$\frac{1}{\lambda_r^2} \left[(-p+q) \frac{\sinh \epsilon}{\epsilon} - \frac{\epsilon^2}{6} (2p+q) + p \cosh \epsilon - q \right]$	$-\xi \left[(p-q) \frac{1 - \cosh \epsilon}{\epsilon^2} - \frac{1}{2} (p+q) + p \frac{\sinh \epsilon}{\epsilon} \right]$

つぎの関係が成立する⁵⁾。

$$\begin{pmatrix} \theta_\xi \\ \rho \\ \frac{M_\xi}{GI_{T_r}} \\ \frac{M_w}{GI_{T_r}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\sinh(\lambda_r \xi)}{\lambda_r} & \xi - \frac{\sinh(\lambda_r \xi)}{\lambda_r} & 1 - \cosh(\lambda_r \xi) \\ 0 & \cosh(\lambda_r \xi) & -1 + \cosh(\lambda_r \xi) & \lambda_r \sinh(\lambda_r \xi) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\sinh(\lambda_r \xi)}{\lambda_r} & \frac{\rho \sinh(\lambda_r \xi)}{\lambda_r} & \cosh(\lambda_r \xi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\theta}_\xi \\ \tilde{\rho} \\ \tilde{M}_\xi \\ \tilde{M}_w \end{pmatrix} \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 $\tilde{\theta}_\xi, \tilde{\rho}, \tilde{M}_\xi, \tilde{M}_w$ は中間荷重によるものであり、おもなねじり荷重に対する値を表-3に示す。さらに、上記のようにして得られた断面力より断面応力度を計算する場合、ねじりモーメントに対しては、St. Venant のねじりモーメント $M_{\xi s}$ と、二次ねじりモーメント $M_{\xi w}$ に分割して考える必要がある⁶⁾。St. Venant のねじりモーメントは、つぎの式で計算される。

$$M_{\xi s i r} = \frac{GI_{T_r}}{l_r} (\theta_{\xi i r} - \theta_{\xi i}) + M_{\xi s i}^0 \dots\dots\dots (26)$$

ここに、 $M_{\xi s i}^0$ は、St. Venant のねじりモーメントに対する荷重項であり、従来の変形法の荷重項である。したがって、二次ねじりモーメントに対しては、

$$M_{\xi w i r} = M_{\xi i r} - M_{\xi s i r} \dots\dots\dots (27)$$

が得られる。

$GI_{T_r} \tilde{M}_\xi$	$GI_{T_r} \tilde{M}_w$
$-mT\xi$	$\frac{mT}{\lambda_r^2} [1 - \cosh \xi]$
$-T$	$-T \frac{\sinh \xi'}{\lambda_r}$
$-\frac{p\xi}{2}$	$\frac{p}{\lambda_r^2} \left[1 - \frac{\sinh \xi}{\xi} \right]$
$-\frac{p\xi}{2}$	$\frac{p}{\lambda_r^2} \left[\frac{\sinh \xi}{\xi} - \cosh \xi \right]$
$-\frac{1}{2} (p+q)\xi$	$\frac{1}{\lambda_r^2} \left[(p-q) \frac{\sinh \xi}{\xi} - p \cosh \xi + q \right]$

5. 計 算 例

(1) 両端単純支持曲線桁橋

上に述べた解法を、両端単純支持曲線桁橋に適用した。本法では、曲線桁橋に対しては、曲線を適当に分割し、直線部材で近似させなければならない。曲線桁橋の理論解との比較のため、文献 7) に論じられている、スパン 33.527 m、曲率半径 30.0 m の合成箱桁橋を引用した。分割数は解の精度に直接影響を与えるが、ここでは、図-3 に示すように、曲線桁橋の中心線にそって、16 等分した。

スパン中央に集中荷重を載荷した場合の計算結果の一部を示すと、表-4 のようである。この場合、文献 7) に示されている理論解との差は、最大 4% であった。

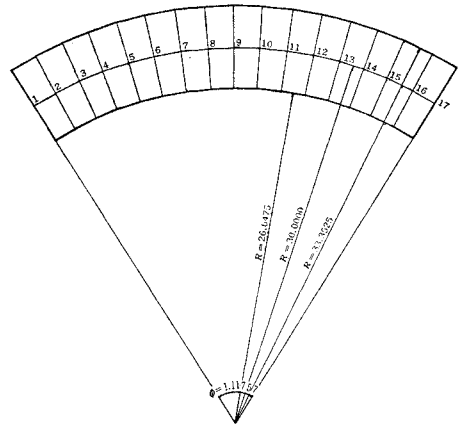


図-3 単純支持曲線桁橋の一般形状

(2) 3 スパン連続曲線桁橋

3 スパン連続曲線桁橋の計算例として、文献 8) に論じられている、図-4 に示すような合成桁を用いる。3 つのスパンは、いずれも、33.527 m の等スパンで、両側スパンは直線桁からなり、中央スパンは、曲率半径 30 m の円弧状の曲線桁である。また、有効幅員は、6.705 m で、全橋長にわたって、等断面とする。ヤング係数、せん断弾性係数、および、断面諸量はつぎのようである。

$$E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, \quad G=7.88 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2,$$

$$C_{M_1} = C_{M_3} = 0.48803 \times 10^{12} \text{ cm}^6$$

$$C_{M_2} = 0.48135 \times 10^{12} \text{ cm}^6$$

$$I_1 = I_3 = 10.2308 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_2 = 10.2601 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_{T_1} = I_{T_3} = 4.9773 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

$$I_{T_2} = 5.0229 \times 10^6 \text{ cm}^4$$

第1スパン中央、および、第2スパン中央に、単位集中荷重を載荷した場合、それぞれの載荷点における断面力をこの方法、および、文献8)にもとづいて求めると、表-5のようになる。表中、計算法Aはこの方法による計算値であり、Bは、小松理論による値である。表-5より、A/Bの値は、第1スパン中央の有効幅員の中央に、単位集中荷重を載荷した場合の、ねじりモーメント、曲げねじりモーメントを除けば、その差は最大4%程度である。また、前記のねじりモーメント、曲げねじりモーメントの差異も、工

表-4

断面力および変形 載荷状態	計算法	支 点 上		ス パ ン 中 央				
		せん断力	ねじりモーメント	たわみ	せん断力	曲げモーメント	ねじりモーメント	曲げねじりモーメント
P=1tを有効幅員の最も内側 R=26.6475mの中心に載荷した場合	A	0.500	-0.698	0.444	0.500	8.351	1.677	-3.300
	B	0.500	-0.713	0.454	0.500	8.300	1.676	-3.406
	A/B	100.0	97.9	97.8	100.0	100.6	100.0	96.9
P=1tを橋軸 R=30mの中心に載荷した場合	A	0.500	-2.633	0.716	0.500	9.258	0	5.767
	B	0.500	-2.690	0.741	0.500	9.378	0	5.714
	A/B	100.0	97.9	96.6	100.0	98.7	100.0	100.9
P=1tを有効幅員の最も外側 R=33.333mの中心に載荷した場合	A	0.500	-4.569	0.989	0.500	10.164	-1.677	14.834
	B	0.500	-4.667	1.027	0.500	10.426	-1.676	14.835
	A/B	100.0	97.9	96.3	100.0	97.5	100.0	100.0
単 位		t	tm	mm	t	tm	tm	tm ²

注 A：本計算法，B：小松理論（文献7），A/B：%

学的には、なんら問題にならない。なお、表-5のうち、第2スパン中央に載荷した場合の曲げモーメント、ねじりモーメントは、その点における円弧の接線方向の断面力に変換し表示してある。

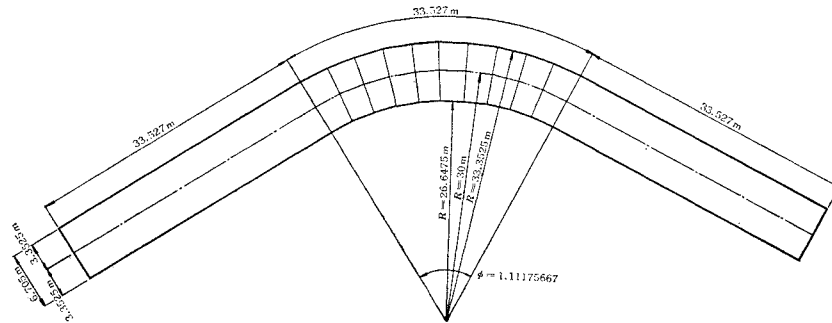


図-4 3スパン連続曲線桁橋

表-5

載 荷 点 お よ び 着 目 点 載 荷 状 態	計算法	第 1 ス ン 中 央				第 2 ス ン 中 央			
		M(tm)	T(tm)	M _w (tm ²)	S(t)	M(tm)	T(tm)	M _w (tm ²)	S(t)
P=1tを有効幅員の最も内側に載荷した場合	A	6.53	-1.49 1.86	-8.31	-0.59 0.41	5.80	-1.68	-5.12	-0.50
	B	6.82	-1.48 1.87	-8.30	-0.59 0.41	5.75	-1.68	-5.23	-0.50
	A/B	96	101 99	100	100 100	101	100	98	100
P=1tを有効幅員の中央に載荷した場合	A	6.64	-0.04	0.05	-0.59 0.41	5.30	0	2.61	-0.50
	B	6.92	-0.05	0.06	-0.59 0.41	5.44	0	2.51	-0.50
	A/B	96	80	83	100 100	97	100	104	100
P=1tを有効幅員の最も外側に載荷した場合	A	6.72	1.78 -1.57	8.41	-0.58 0.42	4.95	1.68	10.34	-0.50
	B	7.01	1.78 -1.58	8.42	-0.58 0.42	5.14	1.68	10.25	-0.50
	A/B	96	100 99	100	100 100	96	100	101	100

注 A：本計算法，B：小松理論（文献8），A/B：%

6. む す び

以上、K. Klöppel 教授の研究を拡張して、変形法による断面のそり変形を考慮した、任意の形状の薄肉断面よりなる格子桁の解法を示したが、この解析法の特徴はつぎのようである。

- 1) 形状、および、部材端の境界条件は任意でよい。
- 2) 境界条件が自由に入れられる。
- 3) 断面の変化が任意でよい。
- 4) 曲線橋に対しては、多角形で近似させて解析できる。
- 5) 未知数は、普通の格子桁の解析の場合にくらべて、比較的多くなるが、これは電子計算機を利用した場合、さほど問題とならない。
- 6) 部材のせん断中心線と断面重心線とが大きく異なる場合には、部材を示す線を適当に仮定しなければならない。

この研究は、第1著者が名古屋大学受託研究員として同大学工学部土木工学教室に勤務した際に行なった研究

をとりまとめたものである。また、数値計算は、第1著者が名古屋大学にて研究中はすべて東京大学大型計算機 HITAC 5020 E によった。また、帰社後計算したものは、日建設計工務(株)の IBM 1130 によった。

参 考 文 献

- 1) K. Klöppel und H. Friemann: Erweiterung des Formänderungsgrößen-Verfahrens auf die Theorie der Wölbkrafttorsion, Stahlbau, 12 (1966), pp. 365~372.
- 2) 太田: 曲げ振り理論についての変形法の拡張, 工学研究, 17.8 (昭 43.8), pp. 421~425.
- 3) 星: 橋梁床組の計算について, 土木学会誌, 37.8 (昭27.8), pp. 353~357.
- 4) K. Klöppel und H. Friemann: Übersicht über Berechnungsverfahren für Theorie II. Ordnung, Stahlbau, 9 (1964), pp. 270~277.
- 5) 奥村 外共訳: ウラソフ 薄肉弾性ばりの理論, 技報堂, 昭和 42 年.
- 6) 小西・小松・大橋: 合成箱桁橋の応力解析と設計計算法, 土木学会論文集, 25 (昭 30.3), pp. 1~28.
- 7) 小西・小松: 単純支持曲線桁橋の立体的解析, 土木学会論文集, 90 (昭 38.2), pp. 11~26.
- 8) 小西・小松: 薄肉連続曲線桁橋の立体的解析, 土木学会論文集, 91 (昭 38.3), pp. 13~23.

(1969.11.25・受付)