

球状物体の波による干渉

ON THE INTERFERENCE OF SUBMERGED SPHERES CAUSED BY SURFACE WAVES

河野 二夫*・椎貝 博美**
By Tsugio Kono and Hiroyoshi Shi-igai

1. 緒 言

流れの中におかれた物体が流れによりどのような作用を受けるか、または逆に物体が静水中を運動する場合に物体はどのような抵抗を受けるかという問題については、古くは Aristoteles (384~322 B.C.) や Philoponus の時代にもなされているが、波動の中におかれたいくつかの球状物体がお互いに十分接近している場合の相互干渉の問題については、著者の知る範囲では文献がほとんど見当らない。本論文は 図-1 に示すように 2 個の球状物体が波の進行方向と直角

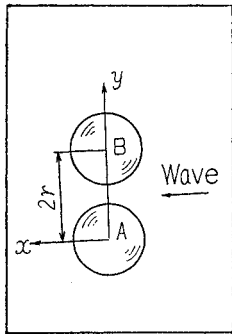


図-1

水平方向 (y 方向) に中心間隔 $2r$ に保っておかれた場合にこれに表面波を与えると球はお互いどのような影響を受けるかといった波動の中の 2 球による相互干渉の問題を取扱ったものである。とくに 2 球が表面波によって x 方向 (図-1 参照) に全く同様の振動をする場合 2 球の中心間隔 ($2r$) が小さくなると (2

球を接近させると) お互いの球の振動はどのような影響を受けるかといったことについて実験および理論的な考察を行なったものである。同様の問題として 2 球が y 方向 (図-1 参照) に振動する場合も考えられるが、このことについては後日発表したい。

さて、図-1 に示すように 2 球が一定間隔 $2r$ を保って同一方向に同様の振動をする場合は 図-2 に示すように、2 球の間隔の垂直に 2 等分する平面に関してはお互いの球は鏡像の関係にあるといえる。したがってこのよ

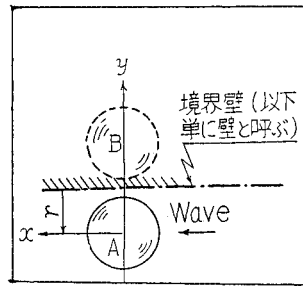


図-2

うな面を固体壁で置換えても (つまり他の側の流体や球を取り除いても) 流体および球の運動にはなんら変化はない。ゆえに 図-1 の 2 球の干渉の問題は 図-2 に示すような壁の近傍におかれた球が壁に平行に運動する問題

とか、あるいは壁に平行な流れが静止している球に作用する問題を扱うことに等しい。したがって本論文の実験においては 2 球による同時振動の実験をするかわりに、図-4 に示すような燐青銅板ばねに球を取りつけた 1 個の倒立振り子を造波水路壁の近傍に 図-3 に示すように置き表面波を与えて壁面に平行方向の振動をさせ (本実験

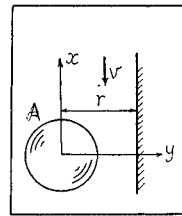


図-3

ではばねは壁に平行方向にしかたわまない) 球と壁との間隔を次第に接近させて行なった場合の振動の変化について調べることにした。くり返し述べるけれども、本論文の目的からすれば 図-3 で球を壁に接近させるということは、

図-1 で 2 球を接近させることを意味し、したがってたとえば図面の説明等で“壁の近くの X 振動”とあるのは“2 球を接近させたときの波の進行方向の球の振動”の意味が含まれていることを考えていただきたい。さて、このような振動の問題を取扱う場合に振動方程式をたてる時、まず物体に作用する外力と流体抵抗をどのように考え、どのように仮定をするかが必要な問題となる。外力については球表面に作用する波の変動水圧を考えることができる。つぎに流体抵抗については、たとえば Galileo (1564-1642) が実験したように球の速度に比例した抵抗を考えるべきか、または

* 正会員 東京工業大学助手 工学部土木工学科
** 正会員 工博 東京工業大学助教授 工学部土木工学科

Huyghens (1629—1695) がいうように速度の自乗に比例する抵抗を考えるべきかも問題になると思う。A. B. Basset¹⁾ のいうように速度が大きいと球のまわりの発生した熱の作用で運動状態は変わるので、球の速度は小さいとして速度の自乗の項は無視して方程式を取扱ったものもあるが、本論文では余りむずかしい論議は考えないで単純に両者を同時に考えることにする。

2. 記号の説明

本文で使用される主な記号の説明をつぎに示す (C.G. S: 単位)。

- M: 球の質量
- m: 球の仮想質量
- a: 球の半径
- d: 球の直径
- k: ばね定数
- ρ: 水の密度
- h: 平均水深
- g: 重力の加速度
- S: 球の表面積
- φ: 速度ポテンシャル
- c: 減衰係数
- 2g: c/M+m
- ω₀: 振子の固有 (角) 振動数
- ω₀₀: 振子を壁に近づけたときの固有振動数
- ω: 波の振動数
- T: 波の周期
- L: 波長
- H: 波高
- u: 球の移動速度
- v: 水粒子の速度の水平方向の成分
- r: 運動している球の中心と壁との間隔
- r₀: 静止している球の中心と壁との間隔

3. 理論的考察

(1) 振動の一般式

線形な減衰抵抗および振動体と流体との相対速度の自乗に比例するような非線形な流体抵抗を有する壁の近くにおける振動体の振動方程式はたとえば x 方向の振動 (図-2 参照) では式 (1) で与えられる。

$$M\ddot{x} + c\dot{x} + kx = P(t) + F_1(t) + F_2(t) \dots (1)$$

式 (1) で P(t) は物体に作用する外力で本文では球の表面に作用する動水圧が考えられる。F₁(t) は仮想質量による流体力、および球が壁面に影響されることによる

流体力 (結果的には一般にいわれる仮想質量 (m) が増加した “カッコウ” になるが) を示す。F₂(t) は振動体と流体との相対速度の自乗に比例するような抵抗力である。また式 (1) の左辺第 2 項は F₂(t) と同様に抵抗に關係する項であるが、後者が非線形部分を示すのに対し、前者は線形部分を示すものである。

(2) 物体に作用する外力について

外力という意味を本文の場合は物体の振動を促進させるような力あるいは振動を持続させるような力といった風に考えると式 (1) の p(t) はもちろん外力を示すが、F₂(t) について考えると 図-4 に示すように (a), (b)

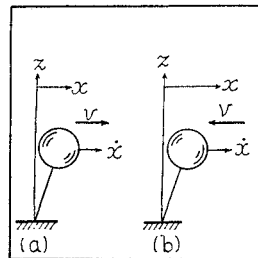


図-4

の 2 通りの場合が考えられる。(a) は $\dot{x} - v < 0$ のとき負抵抗となり振動は増大するが $\dot{x} - v > 0$ のときは球は減衰の作用を受ける。また (b) はすべての場合において減衰の作用を受ける。結局 F₂(t) は非線形部分の流体抵抗を示すと述べたけ

れども球の振動速度 (\dot{x}) と波の水粒子の速度のお互いの関係によっては負の抵抗ともなり上述の外力として取扱う (見做す) こともできる。したがって外力は式 (2) で与えられるものとする。

$$P_1 = P(t) + F_2(t) \dots (2)$$

式 (2) の右辺第 1 項は式 (3) になる^{2), 3)}

$$P(t) = \int_s \int_0^x \frac{\partial p}{\partial x} dx \cdot ds = \frac{1}{3} \rho \pi^3 d^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \times \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \dots (3)$$

ここで p は変動水圧、z は平均水面からの鉛直軸である。つぎに F₂(t) については ε' を比例定数とすると、

$$\left(\epsilon' = \frac{C_D \cdot \rho \cdot \pi \cdot d^3}{8}, C_D: \text{抵抗係数} \right)$$

式 (4) で与えられる。

$$F_2(t) = \pm \epsilon' (\dot{x} - v)^2 \dots (4)$$

式 (4) で \dot{x} は時間についての 1 回微分である。式 (4) の右辺の ± については上述のように 図-4 の (a), (b) の関係から式 (5) のような ± に対する条件式が得られる。

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} - v < 0 \text{ のとき } + \\ \dot{x} - v > 0 \text{ のとき } - \end{array} \right\} \dots (5)$$

さて波の速度ポテンシャルを φ とすると φ は式 (6) で与えられるので式 (4) の v は式 (7) になる。

$$\phi = -\frac{Hg}{2\omega} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\cosh \frac{2\pi}{L}h} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t\right) \dots\dots\dots(6)$$

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \times \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t\right) \dots\dots\dots(7)$$

ゆえに式(7)を式(4)に代入すると $F_2(t)$ は式(8)になる。

$$F_2(t) = \pm \epsilon' \left\{ \dot{x} - \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \times \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t\right) \right\}^2 \dots\dots\dots(8)$$

式(3)と式(8)を式(2)に代入すると

$$P_1 = P_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \pm \epsilon' \left\{ \dot{x} - \frac{H\omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \times \sin\left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t\right) \right\}^2 \dots\dots\dots(9)$$

ただし

$$P_0 = \frac{\rho}{3} \pi^3 d^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \dots\dots\dots(9)'$$

なお、 $(h+z)$ は水底から球の中心までの高さを示めす。

(3) 式(1)の $F_1(t)$ について

$F_1(t)$ は仮想質量による流体力、および球が壁面に影響される(本文の本質的意味は2個の球が接近することによるお互いの影響)ことによる流体力を示すことは既述の通りであるが、このような力は2個の球が同一方向に運動する場合のその球のまわりの速度ポテンシャルがわかれば容易に知ることができる。すなわち流体の運動を非回転とし、かつ非圧縮性とするれば球に作用する流体力は式(10)になる。

$$F_1(t) = -\rho \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right\} \right] \dots\dots\dots(10)$$

さて式(10)の速度ポテンシャル ϕ の値であるが図-5に示すように半径 a の2個の球が $2r$ の間隔を保って x 方向に U の速度で並進運動をしている場合の球のまわりの速度ポテンシ

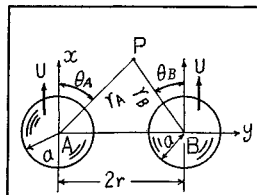


図-5

ャルを見出すと良い。このような ϕ の値はすでに Lamb または M. Thomson の本に示されている^{5), 6)}。

$$\phi = -\frac{U}{2} a^3 \left\{ \frac{1}{r_A^2} + \frac{a^3 \gamma_A}{2(2r)^6} + \frac{a^6}{4r_A^2(2r)^6} + \dots \right\} \cos \theta_A - \frac{U}{2} a^3 \left\{ \frac{1}{r_B^2} + \frac{a^3 \gamma_B}{2(2r)^6} + \frac{a^6}{4r_B^2(2r)^6} + \dots \right\} \cos \theta_B \dots\dots\dots(11)$$

さて、 B 球の近傍では式(12)が成立する。

$$\frac{\cos \theta_A}{r_A^2} = \frac{\gamma_A \cos \theta_A}{r_A^3} \approx \frac{\gamma_B \cdot \cos \theta_B}{(2r)^3} \dots\dots\dots(12)$$

図-6に示すように直角座標 (x, y, z) を用いると

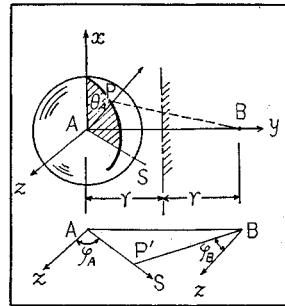


図-6

き、 $r_A, r_B, \theta_A, \theta_B, \phi_A, \phi_B$ の間には式(13)が成立する。ただし図で P' は P 点を z, y 面に投影したときの z, y 面との交点を示す。また式(13)で x_0, y_0, z_0 は球が運動しているときの中心座標を示す。

$$\left. \begin{aligned} r_A &= \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2} \\ r_B &= \{(x-x_0)^2 + (y-2r+y_0)^2 + (z-z_0)^2\}^{1/2} \\ y-y_0 &= r_A \sin \theta_A \cdot \sin \phi_A \\ y-2r+y_0 &= r_B \sin \theta_B \cdot \sin \phi_B \\ x-x_0 &= r_A \cos \theta_A, \text{ or } r_B \cos \theta_B \\ z-z_0 &= r_A \sin \theta_A \cos \phi_A, \text{ or } r_B \sin \theta_B \cos \phi_B \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

さて、式(10)の左辺の $F_1(t)$ は x, y, z 方向のその成分を $F_{1,x}, F_{1,y}, F_{1,z}$ とするとたとえば A 球(図-6参照)について計算すると式(14)のような計算式になる。

$$\left. \begin{aligned} F_{1,x} &= - \int_0^{\theta=\pi} \int_0^{\phi=2\pi} \{F_1(t)\}_{r_A=a} \times a^2 \cdot \cos \theta_A \cdot \sin \theta_A \cdot d\theta_A \cdot d\phi_A \\ F_{1,y} &= - \iint \{F_1(t)\}_{r_A=a} \times a^2 \cdot \sin^2 \theta_A \cdot \sin \phi_A \cdot d\theta_A \cdot d\phi_A \\ F_{1,z} &= - \iint \{F_1(t)\}_{r_A=a} \times a^2 \cdot \sin^2 \theta_A \cdot \cos \phi_A \cdot d\theta_A \cdot d\phi_A \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(14)$$

ゆえに式(12), (13)を考慮しながら式(11), (10)を式(14)に代入すると式(15)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_{1,x} &= -\frac{2}{3} \rho \pi a^3 \dot{U} \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^3 + \frac{3}{256} \left(\frac{a}{r}\right)^6 + \dots \right\} \\ F_{1,y} &= 0, F_{1,z} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)$$

式(15)の右辺第1項は一般にいわれる仮想質量の値であり、第2項は2個の球が中心間隔 $2r$ に接近したこ

とよる流体力に關係する項であり見掛け上は一般にいわれる仮想質量 $m = \frac{2}{3} \rho \pi a^3$ の値が $\frac{3}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^3$ 倍だけ増加した“カッコウ”になっている。

(4) 振動方程式

振動の一般式 (1) に式 (9) および式 (15) を代入すると振動方程式は式 (16) になる。

$$\begin{aligned} & \left[M+m \left\{ 1 + \frac{3}{16} \left(\frac{a}{r} \right)^3 + \dots \right\} \right] \ddot{x} + c \dot{x} + kx \\ & = P_0 \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \pm \varepsilon' \left\{ \dot{x} - \frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right. \\ & \quad \left. \times \sin \left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t \right) \right\}^2 \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

式 (16) でもし球が y 方向 (図-3 参照) にも運動するならば $\frac{3}{16} \left(\frac{a}{r}\right)^3$ の r の値は $r=r_0-y$ であるが、本文では y 方向の運動 (振動) は考えていないので $r=r_0$ である。

(5) 振動方程式の解

さて、式 (16) で球の振動と水粒子の相対速度の項は水粒子の速度を考える場合に近似的に球の中心位置に相当する点の水粒子の速度を考えるならば $\sin \left(\frac{2\pi}{L}x - \omega t\right)$ 中の x は球の振動中の x 座標の位置を示すから、もし球の振動幅が小さいと仮定するならば $\frac{2\pi}{L}x \ll 1$ と見なされる。

したがって式 (16) は式 (17) に変形される。

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2q_0 \dot{x} + \omega_{00}^2 x & = \frac{P_0}{M_0} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \\ & \pm \varepsilon \left\{ \dot{x} + \frac{H \omega}{2} \cdot \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \cdot \sin \omega t \right\}^2 \quad (17) \end{aligned}$$

$$x_0 = A_0 \sin (\omega t + \beta)$$

$$\bar{A}_0 = \frac{A_0/H}{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z) / \sinh \frac{2\pi}{L}h} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \frac{m}{M+m}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left\{\frac{\omega \cdot c}{\omega_0^2(M+m)}\right\}^2}} \dots \dots (22)$$

$$\tan \beta = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}}{c \cdot \omega / \omega_0^2 \cdot (M+m)} \dots \dots \dots (23)$$

b) 1次近似解

式 (22) を式 (20)' に代入すると式 (20)' は式(24)に書きかえられる。

$$\ddot{x}_1 + 2q_0 \dot{x}_1 + \omega_{00}^2 x_1 = \pm \left[\frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} - A_0 \omega \sin \beta \right]^2 \sin^2 \omega t + A_0^2 \omega^2 \cos^2 \beta \cos^2 \omega t$$

$$\left. \begin{aligned} 2q_0 & = \frac{2q}{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^3}, \quad 2q = \frac{C}{M+m} \\ \omega_{00}^2 & = \frac{\omega_0^2}{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^3}, \quad \omega_0^2 = \frac{k}{M+m} \\ & \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \\ \frac{P_0}{M_0} & = \frac{\rho \pi^3 d^3}{3(M+m)} \frac{H}{T^2} \frac{1}{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \cdot \left(\frac{a}{r_0}\right)^3} \\ \varepsilon & = \frac{\rho \cdot C_D \cdot \pi \cdot d^2}{8(M+m) \left\{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (18)$$

さて、式 (17) の解として式 (19) を仮定する。

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots + \varepsilon^n x_n \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 $\varepsilon^n x_n$ は n 次の近似解である。

式(19)を式(17)に代入すると式 (20), (20)' になる。

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 \text{ の場合} \quad & \ddot{x}_0 + 2q_0 \dot{x}_0 + \omega_{00}^2 x_0 \\ & = \frac{P_0}{M_0} \sin \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon = \varepsilon' \text{ の場合} \quad & \ddot{x}_1 + 2q_0 \dot{x}_1 + \omega_{00}^2 x_1 \\ & = \pm \left\{ \dot{x}_0 + \frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sin \omega t \right\}^2 \\ & \dots \dots \dots (20) \end{aligned}$$

a) 0次近似解

式 (20) により式 (21) が得られる。

$$\left. \begin{aligned} x_0 & = \frac{P_0/M_0 \cdot \omega_{00}^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{00}^2}\right)^2 + \left(\frac{2q_0 \omega}{\omega_{00}^2}\right)^2}} \cdot \sin(\omega t + \beta) \\ \tan \beta & = \frac{1 - \omega^2/\omega_{00}^2}{2q_0 \omega^2/\omega_{00}^2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (21)$$

式 (21) を式 (18) の関係を用いて書きかえると式 (22), (23) になる。

$$+ A_0 \omega \cos \beta \left\{ \frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} - A_0 \omega \sin \beta \right\} \cdot \sin 2\omega t \quad \dots\dots\dots(24)$$

式 (24) の右辺の±は式 (23) の右辺の分母が十分小さいとすると近似的には式 (25) の関係がいえる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega}{\omega_0} > 1 \text{ のとき } \beta &\doteq -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\omega}{\omega_0} < 1 \text{ のとき } \beta &\doteq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(25)$$

さて、式 (25) を考慮して式 (22) を式 (20)' に代入し

$$\text{た場合を考えると、} A_0 \omega \sin \beta < \frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h}$$

を仮定するならば (球の振幅が十分に小さいことを示す)、式 (20)' の±、(したがって式 (24) の±)、は $\sin \omega t$

によって決まることになる。ゆえに式 (5) の条件式によって式 (26) の条件式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sin \omega t < 0 \text{ のとき } (\pi < \omega t < 2\pi) &: + \\ \sin \omega t > 0 \text{ のとき } (0 < \omega t < \pi) &: - \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

式 (26) を用いて $\pm \sin^2 \omega t$, $\pm \sin 2\omega t$ を Fourier 展開すると

$$\left. \begin{aligned} \pm \sin^2 \omega t &= -\frac{8}{3\pi} \sin \omega t + \frac{8}{15\pi} \sin 3\omega t + \dots \\ \pm \sin 2\omega t &= -\frac{8}{3\pi} \cos \omega t + \frac{8}{5\pi} \cos 3\omega t + \dots \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

ゆえに式 (24) は式 (28) に書きかえられる。

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2q_0 \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = & -\frac{4}{3\pi} \left\{ \frac{(H\omega)^2}{2} \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 - 2H\omega^2 A_0 \sin \beta \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\} \sin \omega t \\ & - \frac{4}{3\pi} \left\{ H\omega^2 A_0 \cos \beta \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\} \cos \omega t + \dots, \quad \dots\dots\dots(28) \end{aligned}$$

ただし A_0^2 の項と振動数が波の3倍になるものなどは省略した。以上のことから x_1 は式 (29) になる。

$$x_1 = \frac{8}{3\pi} \frac{\omega^2 \cdot q_0 \cdot A_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4q_0^2 \omega^2} \cos(\omega t - \tau) - \frac{4}{3\pi} \frac{\omega^2 (\omega_0^2 - \omega^2) A_2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4q_0^2 \omega^2} \sin(\omega t - \tau) \quad \dots\dots\dots(29)$$

ただし

$$A_2 = -H \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sqrt{\left\{ \frac{H}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 - 2HA_0 \sin \beta \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}} \quad \dots\dots\dots(30)$$

$$\tan \tau = \frac{A_0 \cos \beta}{2A_0 \sin \beta - \frac{H}{2} \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}} \quad \dots\dots\dots(31)$$

ゆえに

$$\begin{aligned} \epsilon x_1 = & \frac{-\rho \cdot C_D \cdot d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right) \cdot A_2 \cdot \sin(\omega t - \tau)}{6(M+m) \left\{ 1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right\} \left[\left\{ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\}^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{2q_0}{\omega_0} \right)^2 \right]} \\ & + \frac{\rho \cdot C_D \cdot d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^3 \left(\frac{c}{\omega_0} \right) \cdot A_2 \cdot \cos(\omega t - \tau)}{6(M+m)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right\}^2 \left[\left\{ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\}^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{2q_0}{\omega_0} \right)^2 \right]} \quad \dots\dots\dots(32) \end{aligned}$$

$$= \frac{\rho C_D d^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \cdot A_2 \cdot \sin(\omega t - \tau - \delta)}{6(M+m) \left\{ 1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right\} \sqrt{\left\{ 1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right\}^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{2q_0}{\omega_0} \right)^2}} \quad \dots\dots\dots(33)$$

ただし

$$\tan \delta = \frac{2q_0 \omega / \omega_0^2}{1 - \omega^2 / \omega_0^2} = \frac{1}{\tan \beta} \quad \dots\dots\dots(34)$$

式 (33) は式 (18), (30) を用いて書き直すと式 (35) になる。

$$\varepsilon x_1 = \frac{C_D \cdot H A_0}{2\pi a} \sqrt{\left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}^2 - \frac{8 A_0}{H} \sin \beta \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\}} \cdot \sin(\omega t - \gamma - \delta) \dots (35)$$

さて、式 (22), (35) を式 (19) に代入すると 1 次までの近似解として次式が得られる。

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 = A_1 \sin(\omega t + \alpha) \dots (36)$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \beta - B_1 \sin(\gamma + \delta)}{\cos \beta + B_1 \cos(\gamma + \delta)} \dots (37)$$

$$A_1 = A_0 [1 + B_1^2 + 2 B_1 \{\cos(\gamma + \delta + \beta)\}]^{1/2} \dots (38)$$

式 (38) を無次元の形に書き直すと式 (39) になる。

$$\bar{A}_1 = \frac{A_1/H}{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)/\sinh \frac{2\pi}{L}h} = \frac{m}{M+m} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}} \dots (39)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left\{ 1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0} \right)^3 \right\} \right]^2 + \left[\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \left(\frac{c}{\omega_0 \cdot M+m} \right)^2 \right] \\ S_2 &= 1 + \left(\frac{C_D H}{\pi d} \right)^2 \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{8m}{M+m} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{\sin \beta}{\sqrt{S_1}} \right\} \\ &\quad + \frac{2C_D \cdot H}{\pi d} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sqrt{1 - \frac{8m}{M+m} \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \frac{\sin \beta}{\sqrt{S_1}}} \cdot \cos(\beta + \gamma + \delta) \\ B_1 &= \frac{C_D \cdot H}{2\pi a} \left[\left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 - \frac{8 A_0}{H} \sin \beta \left\{ \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right\} \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

さて、球に作用する外力については式 (9) で与えられることを述べたが、この式に $\dot{x} \doteq \dot{x}_0$ として式 (22) の x_0 の値を代入し、かつ式 (17) で仮定したように $\frac{2\pi}{L}x \ll 1$ として式 (27) の関係を用いて展開すると A_0^2 の項を無視すれば式 (9) は式 (14) になる。

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{C_D \cdot \rho \cdot d^2}{3} \left\{ H \omega^2 A_0 \sin \beta \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right) - \left(\frac{H \omega}{2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 \right\} \sin \omega t \\ &\quad - \left\{ P_0 + \frac{C_D \cdot \rho \cdot d^2 H \omega^2 A_0}{12} \cos \beta \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right) \right\} \cos \omega t + \frac{C_D \cdot \rho \cdot d^2}{15} \left\{ \frac{H^2 \omega^2}{4} \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - H \omega^2 A_0 \sin \beta \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right) \right\} \sin 3 \omega t + \frac{C_D \cdot \rho \cdot d^2}{20} \left\{ H \omega^2 A_0 \cos \beta \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right) \right\} \cos 3 \omega t + \dots (41) \end{aligned}$$

とくに式 (41) で $A_0 \ll 1$ の場合でかつ波の振動数の 3 倍になるものを無視すると外力の絶対値は式 (42) になる。

$$|P_1| = \frac{1}{3} \rho \pi^3 d^3 \frac{H}{T^2} \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sqrt{1 + \left(\frac{C_D \cdot H}{\pi d} \right)^2 \cdot \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2} \dots (42)$$

式 (42) を無次元の型に直すと式 (43) を得る。

$$\bar{P} = \frac{|P_1|}{1/3 \rho \pi^3 d^3 \frac{H}{T^2}} = \frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \sqrt{1 + \left(\frac{C_D \cdot H}{\pi d} \right)^2 \cdot \left(\frac{\cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\sinh \frac{2\pi}{L}h} \right)^2} \dots (43)$$

(6) 共振曲線と位相曲線

$\epsilon=0$ の場合について考えると共振および位相に関する式は式(9)', 式(22) によって式(44), (45) になる。

$$\frac{A_0}{A_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16} \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left\{\frac{\omega \cdot c}{\omega_0^2 \cdot M+m}\right\}^2}} \dots\dots\dots(44)$$

$$\tan \beta = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16} \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}}{2 \zeta \cdot \frac{\omega}{\omega_0}} \dots\dots\dots(45)$$

ただし, $A_{st} = \frac{P_0}{k}$, $\zeta = \frac{c}{c_c}$: 減衰係数比である。

4. 実験概要について

(1) 実験装置

実験に用いた水路は二次元造波水路で水路幅 60 cm, 水路長約 11 m, 高さ 1 m のもので水路の半分は両面ガラス張りになっている。造波板は flap-type のもので約 24 c.p.m ~ 90 c.p.m の回転が可能である。実験に使用した球はプラスチック製品であり板ばねは燐青銅を使用した。表-1 に実験に使用した板ばねや球および波の諸元を示す。本文の図面などでとくにつけ加える必要のない限り表-1 の実験番号によって記号を表示してある。

(2) 測定方法

振動の測定には板ばねの両側面に strain gage (PL-5 type) をはりつけ防水のため gage 面はアラルダイトでコーティングした。これをトランスジューサーとして板ばねの変位を直流増幅器によってビジグラフに記録させた。また波高は抵抗線式波高計によって球の振動と同時に測定した。なお既述の通りばねは一方向にしかたわまないようになっている。

5. 実験結果と考察

(1) r_0 と振子の固有振動数の関係

壁から球の中心までの距離 r_0 と球の固有振動数 (ω_{00}) の関係は式(18) を用いると式(46) で示せる。

$$\frac{\omega_0}{\omega_{00}} = \sqrt{1 + \frac{3m}{16(M+m)} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3} \dots\dots\dots(46)$$

$$\frac{A_1}{A_0} = \sqrt{1 + B_1^2 + 2B_1 \{\cos(r + \delta + \beta)\}} = \left[1 + \xi_0^2 \left\{ 1 - \frac{8 \xi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \sin \beta}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16} \xi_1 \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left[2 \zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}} \right\} \right. \\ \left. + 2 \xi_0 \left\{ 1 - \frac{8 \xi_1 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \cdot \sin \beta}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16} \xi_1 \left(\frac{a}{r_0}\right)^3\right\}\right]^2 + \left[2 \zeta \frac{\omega}{\omega_0}\right]^2}} \right\}^{1/2} \cdot \cos(\beta + r + \delta) \right]^{1/2} \dots\dots\dots(47)$$

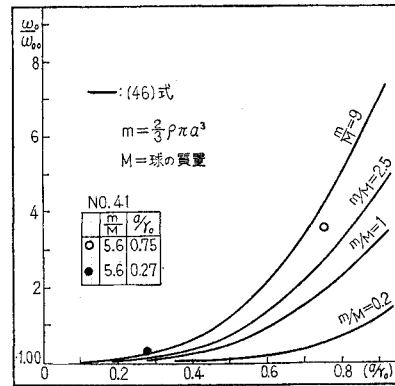


図-7 壁の近傍の振子の振動数

式(46) をグラフで示すと 図-7 になる。図で実験は少ないが理論と傾向は一致する。すなわち球の中心と壁との距離が小さくなると、ばねの振動数は減少する。このことを別の言葉で表現すると、流体の中におかれた2個の球を十分に接近すると、おのおのの球を支えるばねは弱くなるような結果になるといえるであろう。

(2) 球に作用する外力

式(43) をグラフで表示すると 図-8, 図-9 のようになる。実験値を 図-8 に示したが、理論と傾向は一致する。ただし実験値は理論より少々小さめになっているが、この理由については今後十分に検討したい。また図によると流体抵抗の非線形部分の影響はあまりない。

(3) 球の変位の0次近似解と1次まで考えた近似解との関係

式(36) を用いると1次近似までの変位の解はわかるのであるが、本文ではなるべく簡単にその比較をした。つまり0次近似値を A_0 とし、1次までの近似値を A_1 とすると式(38) によりその比率が式(47) のように得られる。

表-1 板ばね，球および波の諸元

No.	振子の種類									波の特性		
	球径 d (cm)	球の質量 M (g)	仮想質量 m (g)	板ばね長 (cm)	固有振動数 ω_0 (rad/s)	減衰係数 C (g/s)	ばね定数 k (dyn/s)	水路水深 h (cm)	壁との距離 r_0 (cm)	周期 T (sec)	波高 H (cm)	波長 L (cm)
37	3.75	2.47	13.8	7.5	34.8	59.5	5.63×10^4	40	2.30	0.66~2.3	1.1~7.3	68.2~432
37	3.75	2.47	13.8	7.5	34.8	59.5	5.63×10^4	40	5.50	0.67~2.3	1.2~9.5	70.2~432
39	3.75	47.47	13.8	7.5	16.2	62.3	12.5×10^4	40	2.00	0.66~2.4	1.3~9.6	67~453
39	3.75	47.47	13.8	7.5	16.2	62.3	12.5×10^4	40	15.00	0.67~2.54	1.7~9.6	69~473
40	5.4	16.8	41	8	21.7	190	1.8×10^4	40	2.85	0.65~2.4	1~8	66~453
40	5.4	16.8	41	8	21.7	190	1.8×10^4	40	8.00	0.65~2.5	1.2~7.8	66~473
41	3.75	2.47	13.8	8	14	29.8	0.14×10^4	40	2.50	0.65~2.4	1.2~7.9	66~453
41	3.75	2.47	13.8	8	14	29.8	0.14×10^4	40	7.00	0.65~2.4	2.9~8.1	66~453

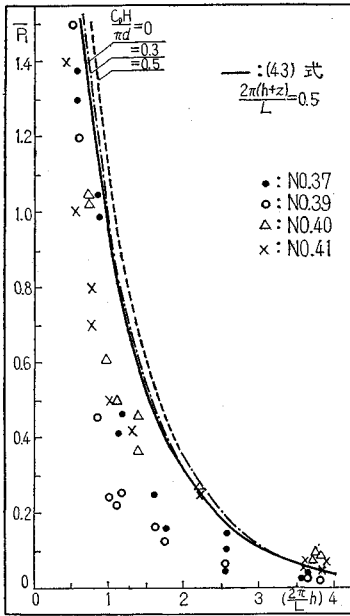


図-8 壁の近くの X 振動

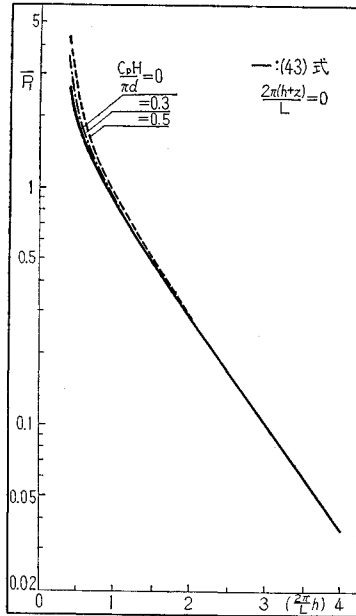


図-9 壁の近くの X 振動

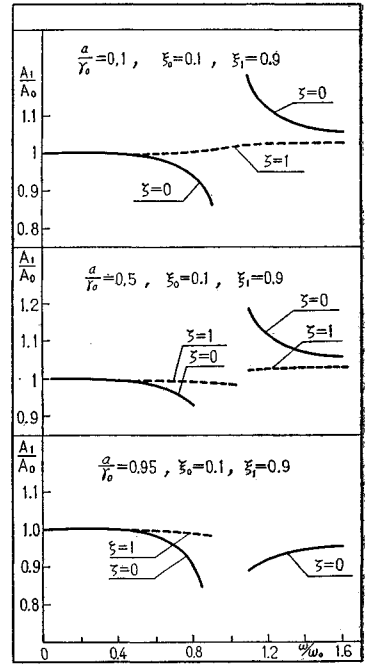


図-10 A_1 と A_0 の比率

$$\text{ただし } \xi_0 = \frac{C_D \cdot H \cdot \cosh \frac{2\pi}{L}(h+z)}{\pi d \cdot \sinh \frac{2\pi}{L}h}, \quad \xi_1 = \frac{m}{m+M},$$

$$\zeta = \frac{c}{c_c} \text{ である。}$$

式(47)を簡単にするため，さらにつぎの仮定をおく。

$$\left. \begin{aligned} \text{式(25)により } \frac{\omega}{\omega_0} > 1 \text{ のとき } \beta &\doteq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\omega}{\omega_0} < 1 \text{ のとき } \beta &\doteq \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\}$$

$$\text{式(31)により } \tan \gamma \doteq 0 \quad \gamma = 0$$

$$\text{式(34)により } \tan \delta \doteq 0 \quad \delta = 0$$

$$\dots\dots\dots(48)$$

式(48)の仮定のもとに式(47)を調べたものが図-10である。図によると共振点付近を除くと A_0 と A_1 の値は大差はない。つまり εx_1 の値は十分に小さいことがわかる。

(4) 球の変位について

$\varepsilon = 0$ の場合についての理論式(22)と実験値を比較したものが図-11~図-13である。ただし式(22)で減衰項 $\omega c/\omega_0^2(M+m)$ の値は十分小さいとして省略した。図によると実験値と理論値は比較的一致している。ただし球が壁に接近したことによる(別の言葉を用いると波動中の2球を接近させたことによる)比較は実験的には明確でない。理論によると，球が壁に接近する(a/r_0 が1に近づく)ほど $\omega/\omega_0 < 1$ の範囲では振幅は増大している。このことは一見壁の近くでは仮想質量が増大するため，流体抵抗が増して，振幅は減少すべきではないかと思われるのと矛盾するが，ばねを用いた場合には質量が増すとばねの固有振動数が小さくなる(図-7で m を増加すると $\frac{\omega}{\omega_0}$ の値は大きくなり，したがって ω_0 は小さくなる)。その結果見掛けばねは弱くな

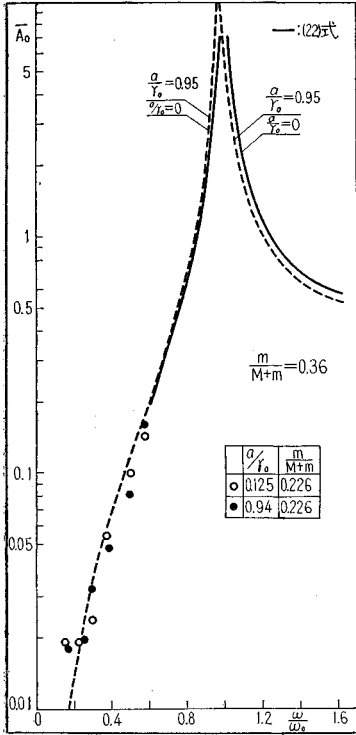


図-11 球の変位

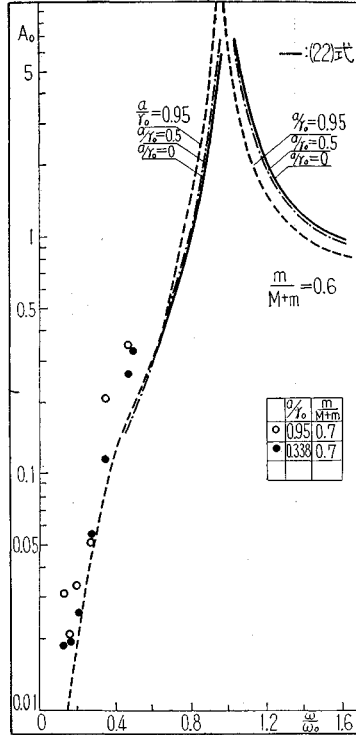


図-12 球の変位

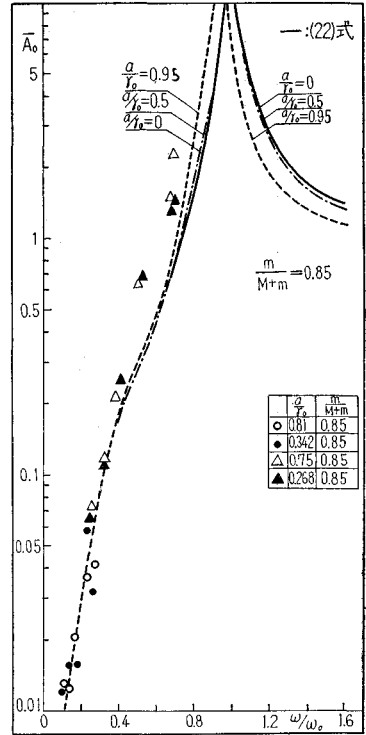


図-13 球の変位

るため振幅は増大すると考えられるであろう。そこで質量と振幅の関係を調べたものが図-14である。図-14で横軸は波形勾配を示し、縦軸に変位(A_0)と球径(d)の比率を示した。実験条件としては、球径、水深、仮想質量(m)、ばねの長さ、ばね定数、厚さ、幅などを一定にして、球の質量(M)だけをかえた時の(ただしこのときは、ばね定数だけは変わる) No. 37, No. 39を用いた。図-14によると(意外にも統一的な整理ができたと思うが)質量が増加するほど変位は大きくなってい

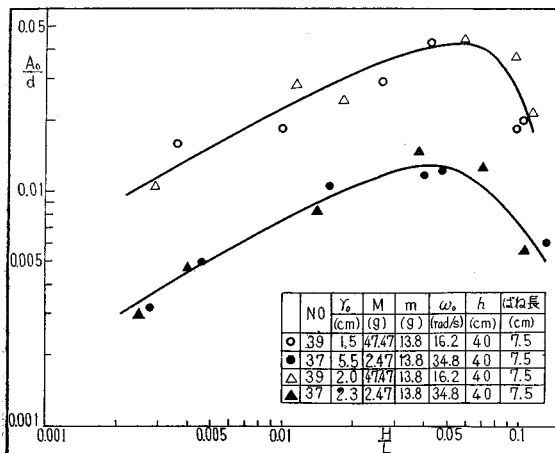


図-14 質量と変位の関係

る。

ただし壁との距離(r_0)による影響は明確でない。

(5) 共振曲線と位相曲線

式(44), (45)はおのおの式(49), (50)に書きかえられる。

$$\frac{A_0}{A_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16}\alpha\right\}\right]^2 + 4\zeta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \dots\dots\dots (49)$$

$$\tan \beta = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \left\{1 + \frac{3}{16}\alpha\right\}}{2\zeta \cdot \omega/\omega_0} \dots\dots\dots (50)$$

ただし $\alpha = \frac{m}{M+m} \left(\frac{a}{r_0}\right)^3$ である。

式(49), (50)による理論値を図-15, 図-16に示しておいた。

6. 結 論

以上の結果によるとつぎのような結論がされるであろう。

(1) 振子を壁に接近させると振子の振動数は減少する(図-7)。このことを別の言葉で表現すると、波動の中におかれた2個の球を接近させると、その球のばねの振動数は減少しばねは見掛け上弱くなる。

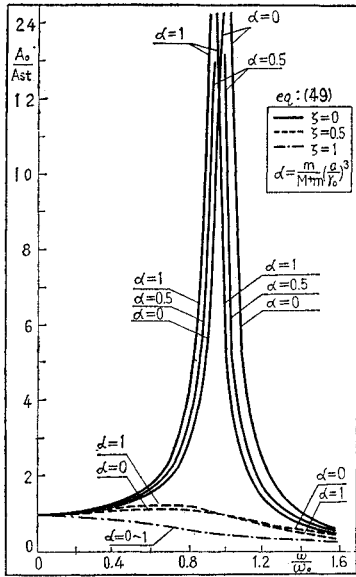


図-15 共振曲線

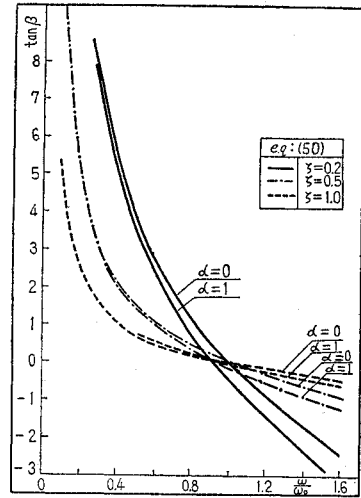


図-16 位相曲線

(2) 球に作用する外力は、主に水圧変動が原因として考えられる (図-8)。

(3) 振子の振動に対する理論解では球と波との相対速度の自乗に比例する抵抗の影響は小さい (図-10)。

(4) 振子を壁に接近させると $\omega/\omega_0 < 1$ の範囲ではわずかではあるが理論的には振幅は増大する (図-11, 12, 13)。このことを別の言葉で表現すると、波動の中におかれた2個の球を接近させると、球の振幅は増大する、ただしその比率は十分に小さい。

(5) 同一波動の中では、振子の質量を増大すると、振子の振幅は増大する (図-14)。

参考文献

- 1) Basset, A.B. : On the Motion of a Sphere in a Viscous Liquid, Philoso. Tran. Royal. Soc. of London. Vol. 43 (1883).
- 2) 椎貝・河野 : Study on Vibration of Submerged Spheres Caused by Surface Waves, Costal Eng. in Japan, 1969.
- 3) 椎貝・河野 : 波動による球の振動, 第15回海岸工学講演会講演集 (1986)
- 4) 友近 晋 : 流体力学, 共立出版
- 5) Lamb, H. : Hydrodynamics, (p. 130~p. 134)
- 6) Thomson, M. : Theoretica Hydrodynamics, (p. 525~p. 530)

(1969.11.29・受付)