

## アナログ計算機による曲線桁橋の動的応答解析\*

APPLICATION OF THE ANALOGUE COMPUTER TO THE ANALYSIS  
OF DYNAMICAL RESPONSE OF CURVED GIRDER BRIDGES小松定夫\*\*・中井博\*\*\*  
By Sadao Komatsu and Hiroshi Nakai

## 1. ま え が き

曲線桁橋に動的荷重を作用させると、曲率の影響により曲げ振動とねじり振動が連成するために、直線桁橋よりも複雑な動的応答を呈することは、すでに文献 1)~4) などの研究によって明らかにされている。このような挙動を考慮して動的解析を行なうと基礎運動方程式は、曲げならびにねじりの時間に関する連立微分方程式として与えられる<sup>1)~4)</sup>。そして、簡単な強制力による動的応答であれば、Laplace 変換などを利用した解析的方法<sup>5)</sup>によって解を容易に求めることができる。しかし、自動車が行走する場合のように、その応答を曲線桁橋と自動車との連成振動系として取扱わなければならないときには、与えられた連立微分方程式は変数係数を持つために、解析的な取扱いが困難な問題になる<sup>5)</sup>。

従来、この種の微分方程式を解く代表的な方法には、(1) デジタル計算機を用いる数値積分法<sup>5)~7)</sup>、(2) アナログ計算機を用いる直接積分法<sup>5)~6)~8)</sup> などの方法があり、これらの計算法を比較するとつぎのようである。まず、前者では時間のある有限の間隔に分割し、関数の初期値とその勾配より Step by Step に演算を実行するのに対し、後者では時間に関しすべての物理量を連続的なものとして取扱う点が数値積分法とアナログ計算法の著しい相違点である。また、数値積分法では時間間隔を小さく取れば、計算精度を向上することができるが、応答の変化のはげしい過度的な現象ではその時間間隔を非常に小さく取らなければならないという欠点もある。これに反し、アナログ計算はすべての物理量を電氣量に置き換えて計算するので、解の精度はある程度の制約をうけるが、比較的変動のはげしい過度現象でも容易に求める

ことができる。

いっぽう、アナログ計算機では以下の特長のほかに解がグラフとして得られるので、計算結果の妥当性をただちに照査できることや、またパラメーターを種々変化させたときの応答特性を容易に検討できることなど多くの利点がある。したがって、解の精度はあまり問題とはせず、むしろ与えられた微分方程式の解がパラメーターや初期値の変化によってどのように変動するかを調べたいとき、アナログ計算機を使用すると短時間にその特性が解明できるので有用な方法であると思われる<sup>9)~10)</sup>。

そこで、本文では以上のような長所を持つアナログ計算機を使用して、曲線桁橋の種々な動的応答の解析を試みる。取り扱った問題は、(1) 減衰を伴う自由振動、(2) 周期力や衝撃力などによる強制振動、(3) 自動車が行走するときの強制振動などである。計算は日立 ALS 型低速アナログ計算機を使用して行なったが、プログラムはすべてブロック・ダイアグラムとして表わす。

最近、このようなアナログ計算機用のブロック・ダイアグラムをそのまま利用し、デジタル計算機で演算する ADSL<sup>11)</sup>(Analogue to Digital Simulation Language) というシステムが開発されている。この方法は、簡明なアナログ計算用のブロック・ダイアグラムを独自の Language によって書きかえプログラムするものであり、数値積分法で行なうフローチャートの作成や FORTRAN あるいは ALGOL を使用した面倒なコーディングは行なわなくてもよい。また、作成したプログラムの論理チェックも行なうことができ、初期値およびパラメーターの設定は任意に指定できる。そして、数値計算結果はライン・プリンターによる印刷はもちろんのこと、XY プロッターによりグラフとして得られる画期的なシステムである。したがって、アナログ計算機による解析結果よりも精度の高い解が必要なとき、本文で示すブロック・ダイアグラムをもとにして ADSL を活用すれば、さらに一層高精度の演算が可能であると思われる。

\* 第 21 回年次学術講演会で一部発表、I-141, 昭.42.5

\*\* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

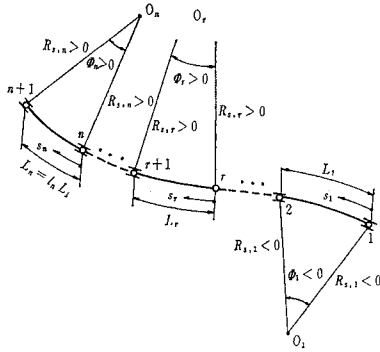
\*\*\* 正会員 工修 大阪市立大学助教授 工学部土木工学教室

最後に、曲線桁橋の振動実験結果はあまり報告されていないが、今回2等径間連続曲線桁橋について現場実験を行なったので、その結果を報告する。そして実験結果とアナログ計算機によってシミュレーションした結果とを比較して、理論解析上の仮定の妥当性を検討するとともに、曲線桁橋の振動特性に関して2, 3の考察を行なう。

2. 曲線桁橋の動的応答

(1) 移動しない強制力による応答

図一1は連続曲線桁橋の平面形状を示すが、第r径間の右端より  $s_r = j_r$  だけ離れた点における第i次振動時



図一1 連続曲線桁橋の平面図

の鉛直たわみ  $w_{i,j_r}$ 、および断面回転角  $\beta_{i,j_r}$  に関する微分方程式は文献1) よりつぎのように与えられる。  
( $d/dt = \cdot$ )

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w}_{i,j_r} + \bar{d}_{i,ww} \dot{w}_{i,j_r} + \bar{P}_{i,ww} w_{i,j_r} \\ - \bar{d}_{i,\beta w} \dot{\beta}_{i,j_r} - \bar{P}_{i,\beta w} \beta_{i,j_r} = \bar{P}_{0,i,j_r} \\ \ddot{\beta}_{i,j_r} + \bar{d}_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_{i,j_r} + \bar{P}_{i,\beta\beta} \beta_{i,j_r} \\ - \bar{d}_{i,w\beta} \dot{w}_{i,j_r} + \bar{P}_{i,w\beta} w_{i,j_r} = \bar{P}_{0,i,j_r} \end{aligned} \right\} (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_{i,ww} &= (A_z^* I_s^* p_{i,ww} - S_z^* S_z^* p_{i,w\beta}) / A_s^* I_G^* \\ \bar{P}_{i,\beta w} &= S_z^* I_s^* (p_{i,\beta\beta} - p_{i,\beta w}) / A_s^* I_G^* \\ \bar{P}_{i,w\beta} &= A_z^* S_z^* (p_{i,w\beta} - p_{i,ww}) / A_s^* I_G^* \\ \bar{P}_{i,\beta\beta} &= (A_z^* I_s^2 p_{i,\beta\beta} - S_z^* S_z^* p_{i,\beta w}) / A_s^* I_G^* \end{aligned} \right\} (2)$$

$$\left. \begin{aligned} A_{z,r} &= A_{s,r} - S_{z,r} / R_{S,r} \\ S_{z,r}' &= S_{z,r} - I_{s,r} / R_{S,r} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

- $A_{s,r}$  : 曲線桁橋の断面積 (第r径間)
- $S_{z,r}$  : せん断中心を通る鉛直軸に関する断面1次モーメント (第r径間)
- $I_{s,r}$  : せん断中心に関する極断面2次モーメント (第r径間)
- $I_{G,r}$  : 重心に関する極断面2次モーメント (第r径間)
- $R_{S,r}$  : せん断中心の曲率半径 (第r径間)

また、曲線桁橋の非連成振動数  $p_{i,ww}$ ,  $p_{i,\beta w}$ ,  $p_{i,w\beta}$ ,  $p_{i,\beta\beta}$  は、

$$\left. \begin{aligned} p_{i,ww} &= \frac{E_s I_y^*}{m^* A_z^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 - (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_r}{L_r}\right)^2 A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\ p_{i,w\beta} &= \frac{E_s I_y^*}{m^* S_z^* L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{L_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} - \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{L_r}\right)^3 V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\ p_{i,w\beta} &= \frac{E_s C_w^*}{m^* S_z^* L_1^5} \left\{ (k_i L_1)^4 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{L_r}\right) V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} + \frac{L_1^2 (G_s J^* + I_y^*)}{C_w^*} (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{L_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\ p_{i,\beta\beta} &= \frac{E_s C_w^*}{m^* I_s^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 + \frac{G_s J^* L_1^2}{E_s C_w^*} (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} + \frac{I_y^* L_1^2}{C_w^*} \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_r}{L_r}\right) V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

$$\left. \begin{aligned} I_{y,r}' &= R_{0,r} / R_{S,r} \times I_{y,r} \\ m_r &= R_{G,r} / R_{S,r} \times \tau_{s,r} / g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

- $R_{0,r}$  : 図心の曲率半径 (第r径間)
- $R_{G,r}$  : 重心の曲率半径 (第r径間)
- $\tau_{s,r}$  : 材料の密度 (第r径間)
- $g$  : 重力加速度
- $I_{y,r}'$  : 水平軸に関する断面2次モーメント (第r径間)
- $J_r$  : せん断中心に関するねじり抵抗 (第r径間)

$C_{w,r}$  : せん断中心に関する曲げねじり抵抗 (第r径間)

- $E_s$  : ヤング係数
- $L_1$  : 第1径間のせん断中心軸上でのスパン長
- $L_r$  : 第r径間と第1径間のスパン長の比
- $\phi_r$  : 第r径間の中心角

なお、\*印をつけた断面定数は全スパンにわたって平均値をとることを示す。

そして第i次の振動モードの近似解としてつぎのもの

を採用する。

$$Q_{i,r}(s_r) = \lambda_{i,r} \left[ \frac{\sin \{k_i(L_r - s_r)\}}{\sin k_i L_r} \frac{\sinh \{k_i(L_r - s_r)\}}{\sinh k_i L_r} \right] + \lambda_{i,r+1} \left[ \frac{\sin k_i s_r}{\sin k_i L_r} \frac{\sinh k_i s_r}{\sinh k_i L_r} \right] \dots \dots \dots (6)$$

(i=1, 2, 3, ..., r=1, 2, 3, ..., n)

ただし、 $k_i$  値はつぎの連立同次方程式の固有値として与えられる。

$$A_{i,r} l_r \psi_{i,r} + A_{i,r+1} (l_r \chi_r + l_{r+1} \chi_{r+1}) + A_{i,r+2} l_{r+1} \psi_{r+1} = 0 \dots \dots \dots (7)_1$$

(A\_{i,1} = A\_{i,n+1} = 0, r=1, 2, \dots, n-1)

したがって、

$$\left. \begin{aligned} A_{i,r} &= l_r \{ (\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) \mu_{i,r} + \lambda_{i,r} \lambda_{i,r+1} \epsilon_{i,r} \} \\ \nu_{i,r} &= l_r \{ (\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) \nu_{i,r} + \lambda_{i,r} \lambda_{i,r+1} \theta_{i,r} \} \\ \lambda_{i,r} &= A_{i,r} / A_{i,2}, \lambda_{i,1} = \lambda_{i,n+1} = 0, \lambda_{i,2} = 1 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (7)_2$$

ここに、 $\psi_{i,r}, \chi_{i,r}, \mu_{i,r}, \epsilon_{i,r}, \nu_{i,r}, \theta_{i,r}$  値は  $l_r k_i L_i$  の関数であるが、これらの値は文献12)に示した。

つぎに、減衰係数  $\bar{d}_{i,ww}, \bar{d}_{i,w\beta}, \bar{d}_{i,\beta w}, \bar{d}_{i,\beta\beta}$  は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{d}_{i,ww} &= d_{i,w} \times I_s^* I_G^* = 2 \mathfrak{D}_{i,1} f_{i,1} \times I_s^* I_G^* \\ \bar{d}_{i,\beta w} &= d_{i,\beta} \times S_z^* I_s^* / (A_s^* I_G^*) \\ &= 2 \mathfrak{D}_{i,II} f_{i,II} \times S_z^* I_s^* / (A_s^* I_G^*) \\ \bar{d}_{i,w\beta} &= d_{i,w} \times S_z^* I_G^* = 2 \mathfrak{D}_{i,1} f_{i,1} \times S_z^* I_G^* \\ \bar{d}_{i,\beta\beta} &= d_{i,\beta} \times I_s^* I_G^* = 2 \mathfrak{D}_{i,II} f_{i,II} \times I_s^* I_G^* \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (8)$$

また、 $f_{i,1} < f_{i,II}$  は第  $i$  次の曲げ振動とねじり振動の連成振動数 (cycle/sec) で、 $\mathfrak{D}_{i,1}$  および  $\mathfrak{D}_{i,II}$  は対応する振動の対数減衰率とする。

$$\left. \begin{aligned} f_{i,1 \text{ or } II} &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{b_i^2 \pm \sqrt{b_i^2 - 4ac_i}}{2a}} \\ a &= A_s^* I_s^* \\ b_i &= A_z^* I_s^* (p_{i,ww} + p_{i,\beta\beta}) - S_z^* S_z' (p_{i,\beta w} + p_{i,w\beta}) \\ c_i &= A_z^* I_s^* p_{i,ww} p_{i,\beta\beta} - S_z^* S_z' p_{i,\beta w} p_{i,w\beta} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (9)$$

最後に、強制項  $\tau_{P_{0,i,j_r}}, \tau_{P_{0,i,j_r}}$  は第  $r$  径間の断面  $s_r = c_r$  に集中荷重  $P_0$  が作用する場合で、

a) ある時刻  $t = t_0$  に突然作用するとき (Indicial Response)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{P_{0,i,j_r}} &= q P_{0,i,j_r} U(t - t_0) \\ \tau_{P_{0,i,j_r}} &= \tau P_{0,i,j_r} U(t - t_0) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (10)$$

b) 周期力するとき (Sinusoidal Response)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{P_{0,i,j_r}} &= q P_{0,i,j_r} \sin \omega_0 t \\ \tau_{P_{0,i,j_r}} &= \tau P_{0,i,j_r} \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (11)$$

ここに、 $U$ : Unit step function

$\omega_0$ : 周期力の円振動数 (rad/sec)

また、

$$\left. \begin{aligned} q P_{0,i,j_r} &= \tilde{P}_{i,ww} \omega St_{i,j_r} - \tilde{P}_{i,\beta w} \beta St_{i,j_r} \\ \tau P_{0,i,j_r} &= \tilde{P}_{i,w\beta} \omega St_{i,j_r} + \tilde{P}_{i,\beta\beta} \beta St_{i,j_r} \end{aligned} \right\} (12)$$

ただし、第  $i$  次振動モードの静的たわみと断面回転角をそれぞれ  $w_{St,i,j_r}, \beta_{St,i,j_r}$  とすると

$$\left. \begin{aligned} w_{St,i,j_r} &= \frac{R_{p,r} P_0}{R_{S,r}} \frac{K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta} \gamma_{p,r}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \\ &\quad \cdot \frac{Q_{i,r}(c_r)}{Q_{i,r}(j_r)} \\ \beta_{St,i,j_r} &= \frac{R_{p,r} P_0}{R_{S,r}} \frac{K_{B,i,w\beta} \gamma_{p,r} - K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \\ &\quad \cdot \frac{Q_{i,r}(c_r)}{Q_{i,r}(j_r)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

$R_{p,r}$ : 第  $r$  径間荷重荷点の曲率半径

$\gamma_{p,r} = R_{p,r} - R_S$ : 第  $r$  径間の荷重の偏心距離

式(13)中のばね定数  $K_{B,i,ww}, K_{B,i,w\beta}, K_{B,i,\beta\beta}$  は次式で求めることができる。

$$\left. \begin{aligned} K_{B,i,ww} &= \frac{E_s I_y'^*}{L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} + \frac{C_w^*}{I_y'^* L_1^2} (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \left( \frac{\Phi_r}{L_r} \right)^2 \mathfrak{V}_{i,r} + \frac{G_s J^*}{E_s I_y'^*} (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n \left( \frac{\Phi_r}{L_r} \right)^2 4_{i,r} \right\} / Q_{i,r}^2(j_r) \\ K_{B,i,w\beta} &= \frac{E_s I_y'^* + G_s J^*}{L_1^2} \left\{ \frac{E_s C_w^*}{(E_s I_y'^* + G_s J^*) L_1^2} (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \left( \pm \frac{\Phi_r}{L_r} \right) \mathfrak{V}_{i,r} + (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n \left( \pm \frac{\Phi_r}{L_r} \right) 4_{i,r} \right\} / Q_{i,r}^2(j_r) \\ K_{B,i,\beta\beta} &= \frac{E_s C_w^*}{L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} + \frac{G_s J^* L_1^2}{E_s C_w^*} (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n 4_{i,r} + \frac{I_y'^* L_1^2}{C_w^*} \sum_{r=1}^n \left( \frac{\Phi_r}{L_r} \right)^2 \mathfrak{V}_{i,r} \right\} / Q_{i,r}^2(j_r) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (14)$$

## (2) 自動車による動的応答

図-2 は連続曲線桁橋の第  $r$  径間を自動車が一定速度  $V_0$  で走行する際の変形状態を示す。このスパンの右端より  $s_r = j_r$  だけ離れた点における桁の第  $i$  次振動時の鉛直たわみ  $w_{i,j_r}$ , 断面回転角  $\beta_{i,j_r}$  および自動車のばね上質量の変位  $z_{v,r}$  とばねの変位  $\delta_r$  は、文献1)よりつぎの連立微分方程式の解として与えられる。(d/dt =  $\cdot$ )

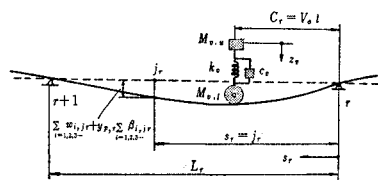


図-2 第  $r$  径間の変形状態

$$\left. \begin{aligned}
 & \ddot{w}_{i,j_r} + \tilde{d}_{i,ww} \dot{w}_{i,j_r} + \tilde{F}_{i^2,ww} w_{i,j_r} \\
 & \quad - \tilde{d}_{i,\beta w} \dot{\beta}_{i,j_r} - \tilde{F}_{i^2,\beta w} \beta_{i,j_r} \\
 & = q_{V,i,j_r} \left( 1 + \frac{K_V}{M_{Vg}} \delta_r + d_v \delta_r \right) \sigma_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \\
 & \ddot{\beta}_{i,j_r} + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_{i,j_r} + \tilde{F}_{i^2,\beta\beta} \beta_{i,j_r} \\
 & \quad - \tilde{d}_{i,w\beta} \dot{w}_{i,j_r} + \tilde{F}_{i^2,w\beta} w_{i,j_r} \\
 & = \tau_{V,i,j_r} \left( 1 + \frac{K_V}{M_{Vg}} \delta_r + d_v \delta_r \right) \sigma_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \\
 & \quad (i=1, 2, 3, \dots) \\
 & \ddot{z}_{V,r} + d_v \delta_r + p_v^2 \delta_r = 0 \\
 & \delta_r = z_{V,r} - \left\{ \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,j_r} \sigma_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right. \\
 & \quad \left. + y_{p,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,j_r} \sigma_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(15)_{1\sim4}$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 p_v^2 &= K_V / M_{V,u} \\
 d_v &= \mathcal{D}_V p_v / \pi \\
 M_V &= M_{V,u} + M_{V,l}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(16)$$

$K_V$ ：自動車のばね定数

$M_{V,u}, M_{V,l}$ ：自動車のそれぞればね上，ばね下質量

$\mathcal{D}_V$ ：自動車の対数減衰率

また、

$$\left. \begin{aligned}
 q_{V,i,j_r} &= \frac{R_{p,r}}{R_{S,r}} \left( \frac{K_{B,i,\beta\beta} - y_{p,r} K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i^2,w\beta}} \tilde{F}_{i^2,ww} \right. \\
 & \quad \left. - \frac{y_{p,r} K_{B,i,ww} - K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i^2,w\beta}} \tilde{F}_{i^2,\beta w} \right) M_{Vg} \\
 \tau_{V,i,j_r} &= \frac{R_{p,r}}{R_{S,r}} \left( \frac{K_{B,i,\beta\beta} - y_{p,r} K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i^2,w\beta}} \tilde{F}_{i^2,w\beta} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{y_{p,r} K_{B,i,ww} - K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i^2,w\beta}} \tilde{F}_{i^2,\beta\beta} \right) M_{Vg}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(17)$$

そして、

$$\sigma_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) = \frac{[\mathcal{Q}_{i,r}]_{s=r} = \frac{R_{s,r}}{R_{p,r}} v_{0,t}}{[\mathcal{Q}_{i,r}]_{s=r=j_r}} \dots\dots\dots(18)$$

以上、連立微分方程式 (1), (15) をつぎの初期条件のもとに解けばよい。

$$w_{i,j_r}(0), \dot{w}_{i,j_r}(0), \beta_{i,j_r}(0), \dot{\beta}_{i,j_r}(0) \dots\dots(19)$$

$$z_{V,r}(0), \dot{z}_{V,r}(0) \dots\dots\dots(20)$$

### 3. アナログ計算機による解析法

#### (1) Time factor と Scale factor

アナログ計算機の原理や、プログラミングについては多くの文献<sup>9),10)</sup>に述べられているので省略するが、アナログ計算をする際、関数値はすべて電圧として取扱うためにこの電圧が極端な値になると演算が不可能になる。ちなみに、本文で使用した日立 ALS 型低速アナログ計算機 (主な構成要素は、積分器：12, 加算機：12, 符号

変換器：6, 係数器：56, 演算増幅器 (補助インピーダンスの組合わせで積分器にも加算機にもなる)：4, サーク式掛算器：4, Resolver：1, その他) の演算可能な電圧は、±100 V 以内に限定されている。したがって、プログラムを作成する前にあらゆる変数を電圧に換算したときに、これらすべてが ±100 V 以内におさまるような最も適切な Time factor と Scale factor を決定しなければならない。

一般の桁橋について、以下のような換算を行なうのが適当であろう。

#### a) Time factor

いま、実際の時間  $t$  を 30 倍拡大して、これを演算時間  $\tau$  とすれば、

$$t = \tau / 30 \dots\dots\dots(21)$$

そして、以下演算時間  $\tau$  についての微分をつぎの記号で表わす。

$$d/d\tau = ' \dots\dots\dots(22)$$

#### b) Scale factor

曲線桁橋や自動車の変位は一般に小さいので、cm 単位の代りに mm 単位で表わす。また、断面回転角は 10 000 倍に拡大する。このような換算を行なったものをつぎの記号で表わす。

$$\left. \begin{aligned}
 w_{i,j_r} &= W_{i,j_r} / 10 \\
 \beta_{i,j_r} &= B_{i,j_r} / 10^4 \\
 z_{V,r} &= Z_{V,r} / 10 \\
 \delta_r &= \Delta_r / 10
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(23)$$

さて、種々な振動を解析するプログラムを示せば、以下の通りである。

#### (2) 自由振動

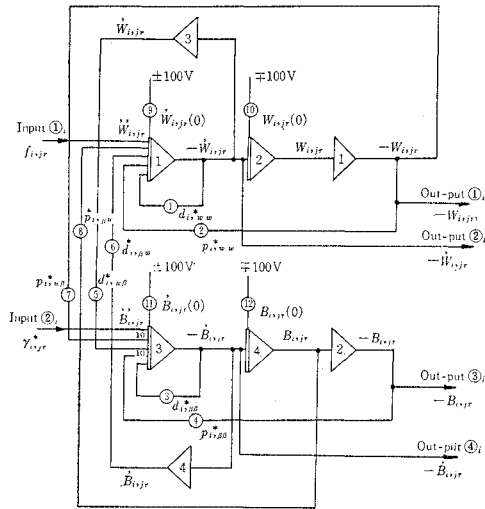
式 (1) で強制項  $[P_{0,i,j_r}, \tau P_{0,i,j_r}]$  を無視し、式 (21) ~ (23) を用いると自由振動に関するつぎの方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{W}_{i,j_r} &= -d_{i,*ww} \dot{W}_{i,j_r} - p_{i,*ww} W_{i,j_r} \\
 & \quad + d_{i,*\beta w} \dot{B}_{i,j_r} + p_{i,*\beta w} B_{i,j_r} \\
 \dot{B}_{i,j_r} &= -d_{i,*\beta\beta} \dot{B}_{i,j_r} - 10 \times p_{i,*\beta\beta} B_{i,j_r} \\
 & \quad + d_{i,*w\beta} \dot{W}_{i,j_r} - 10 \times p_{i,*w\beta} W_{i,j_r}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 p_{i,*ww} &= \tilde{F}_{i^2,ww} / 900 \\
 p_{i,*\beta w} &= \tilde{F}_{i^2,\beta w} \times 10^{-3} / 900 \\
 p_{i,*\beta\beta} &= \tilde{F}_{i^2,\beta\beta} / 9\ 000 \\
 p_{i,*w\beta} &= \tilde{F}_{i^2,w\beta} \times 10^3 / 9\ 000 \\
 d_{i,*ww} &= \tilde{d}_{i,ww} / 30 \\
 d_{i,*\beta w} &= \tilde{d}_{i,\beta w} \times 10^{-3} / 30 \\
 d_{i,*\beta\beta} &= \tilde{d}_{i,\beta\beta} / 30 \\
 d_{i,*w\beta} &= \tilde{d}_{i,w\beta} \times 10^3 / 30
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

第  $i$  次固有振動のみについてのプログラムを示せば、



演算要素の記号

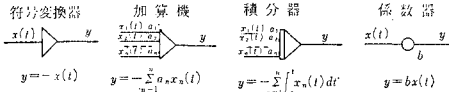


図-3 曲線桁の種々な振動を求めるブロック・ダイアグラム (第*i*次振動のみを記す)

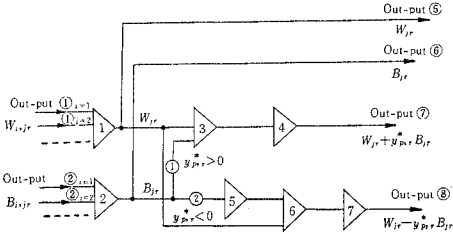


図-4 曲線桁の変形量  $W_{jr}$ ,  $B_{jr}$ ,  $W_{jr} \pm y_{p_r}$ ,  $B_{jr}$  を求めるためのブロック・ダイアグラム

図-3 のようである。

求める解  $W_{jr}$ ,  $B_{jr}$  は図-4 のように  $i=1, 2, 3, \dots$  に関するものを、それぞれ合計することによって求められる。また、せん断中心より  $y_{jr}$  (単位: cm) だけ偏倚した点のたわみ  $W_{jr, y_{jr}}$  (単位: mm) は、

$$W_{jr, y_{jr}} = \sum_{i=1,2,3,\dots} W_{i,jr} + y_{jr} \sum_{i=1,2,3,\dots} B_{i,jr} \dots (27)$$

によって求めることができる。ここで、 $y_{jr}^*$  は

$$y_{jr}^* = y_{jr} / 1000 \dots (28)$$

$y_{jr}^*$  の符号は正負をとるので、図-4 では  $y_{jr}^* > 0$  と  $y_{jr}^* < 0$  の2つの場合に関するプログラムが示してある。

図-3 のプログラムにおいて、第*i*次固有振動の自由振動波形を調べたいときには、 $W_{i,jr}$ ,  $B_{i,jr}$  に関する初期条件

$$\left. \begin{matrix} \dot{W}_{i,jr}(0), W_{i,jr}(0), \\ \dot{B}_{i,jr}(0), B_{i,jr}(0) \end{matrix} \right\} \dots (29)$$

に種々な値を想定して、曲線桁橋を自由振動させればよ

い。その時の解は、図-3 の出力 ① $_i \sim$ ④ $_i$ 、または図-4 の出力 ⑤ $_i \sim$ ⑧ $_i$  のところから電圧として取り出し、それをオシログラフ等で記録すればよい。

(3) 強制振動

強制振動の場合には、式 (24) の右辺に強制項

$$\left[ P_0, {}^*i, jr, \tau P_0, {}^*i, jr \right]$$

を加えればよい。簡単な例としてつぎの2つの場合についてのレスポンスを考えよう。

a) Initial Response

集中荷重  $P_0$  が  $s_r = c_r$  断面上のせん断中心より  $y_{p_r}$  だけ偏心して、ある時刻  $t = t_0$  に突然作用するときの着目断面  $s_r = j_r$  点のたわみ  $W_{i,jr}$  および断面回転角  $B_{i,jr}$  は、図-3 の Input ① $_i$ , ② $_i$  につぎの強制項を加えればよい。

$$\left. \begin{matrix} \dot{P}_0, {}^*i, jr = qP_0, {}^*i, jr U(\tau - \tau_0) \\ \tau P_0, {}^*i, jr = \tau P_0, {}^*i, jr U(\tau - \tau_0) \end{matrix} \right\} \dots (30)$$

ここに、 $qP_0, {}^*i, jr$  と  $\tau P_0, {}^*i, jr$  は

$$\left. \begin{matrix} qP_0, {}^*i, jr = qP_0, {}^*i, jr / 900 \\ \tau P_0, {}^*i, jr = \tau P_0, {}^*i, jr \times 10^3 / 900 \end{matrix} \right\} \dots (31)$$

したがって、強制項のプログラムを示せば、図-5 のように簡単なものでよい。このとき、桁が

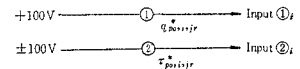


図-5 Initial Response を求めるための入力

最初静止しているものとすれば、

$$\left. \begin{matrix} \dot{W}_{i,jr}(0) = W_{i,jr}(0) = 0 \\ \dot{B}_{i,jr}(0) = B_{i,jr}(0) = 0 \end{matrix} \right\} \dots (32)$$

に取ればよい。

b) Sinusoidal Response

周期力  $P_0 \sin \omega_0 t$  が断面  $s_r = j_r$  上のせん断中心より  $y_{p_r}$  だけ偏心して作用する場合の強制力は、

$$\left. \begin{matrix} \dot{P}_0, {}^*i, jr = qP_0, {}^*i, jr \sin \omega_0^* \tau \\ \tau P_0, {}^*i, jr = \tau P_0, {}^*i, jr \sin \omega_0^* \tau \end{matrix} \right\} \dots (33)$$

と表わすことができる。

ところで、周期関数  $\sin \omega_0 t$  は関数発生器でも作りうるが、以下に示すよう容易に発生することができる。いま、微分方程式

$$a\ddot{z} + b\dot{z} + cz = f(t)$$

において  $b=0, c/a = \omega_0^2, f(t) = 0$ 、とし初期条件を  $\dot{z}(0) = \omega_0$  とすれば、解は  $z = \sin \omega_0 t$  となることは明らかである。したがって、 $\sin \omega_0 t$  を発生する回路は一種の harmonic oscillator を作ればよい。このプログラムを図-6 に示す。ただし、ここで時間  $t$  は演算時間  $\tau$  に変換してあるので、 $\omega_0^*$  は

$$\omega_0^* = \omega_0 / 30 \quad (\omega_0 : \text{rad/sec}) \dots (34)$$

とし、初期条件  $i_1 = 0.010 \times \omega_0^*$  に取らなければならない

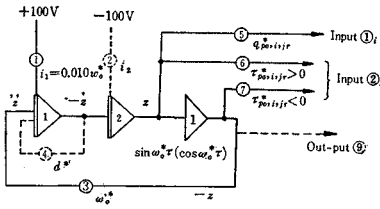


図-6 Sinusoidal Response を求めるためのブロック・ダイアグラム

いことに注意を要す。

図-3 の Input ①<sub>i</sub>, ②<sub>i</sub> にそう入すべき入力力は図-6 に示す出力とする。もし、起振力が  $\cos \omega_0 t$  であれば、 $i_1=0, i_2=0.010$  とすればよい。また、周期力が位相角  $\varphi = \tan^{-1}(i_1/i_2)$  を持つときには、所要の位相差  $\varphi$  および振幅  $\sqrt{i_1^2+i_2^2}=0.010$  になるような  $i_{1,2}$  値を求めこの値に係数器をセットすれば、任意の周期波形  $\sin(\omega_0 t - \varphi)$  が得られる。また起振力が粘性減衰する場合には、減衰係数  $d^*$  を考え、図-6 中点線で示すフィード・バック回路を付加すればよい。数個の異なった周期や位相を持つ Sinusoidal な荷重が同時に作用する場合は、図-6 の回路を周期力の数だけ組立て、それらの出力にそれぞれ式 (31) の係数を掛け、図-3 の Input ①<sub>i</sub>, ②<sub>i</sub> に入ればよい。さらに、Ramdam な強制力に対しては、アナログ計算機の場合 Noise generator があるので、これを利用すれば不規則な振動についても解析を行なうことができる。

(4) 走行車による曲線桁の動的応答

自動車と曲線桁橋の連成振動は、式 (15)<sub>1-4</sub> を書きかえてプログラムすればよいが、曲線桁橋に関するプログラムは図-3 が適用できるので、これにつぎの強制項  $f_{V,i,j,r}, r_{V,i,j,r}$  を加えればよい。

$$\left. \begin{aligned} f_{V,i,j,r} &= q_{V,i,j,r} (10 \times k_V \Delta_r + d_V \dot{\Delta}_r) \\ &\quad \times 0.250 \sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau) \\ r_{V,i,j,r} &= 10 \times \tau_{V,i,j,r} (10 \times k_V \Delta_r + d_V \dot{\Delta}_r) \\ &\quad \times 0.250 \sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ここに、定数項  $q_{V,i,j,r}, \tau_{V,i,j,r}$  は式 (17) より

$$\left. \begin{aligned} q_{V,i,j,r} &= 4 \times q_{V,i,j,r} / 900 \\ \tau_{V,i,j,r} &= 4 \times \tau_{V,i,j,r} \times 10^2 / 900 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

また、 $k_V = K_V / M_V g, d_V = d_0 / 30$  (37)

そして、 $v_{0,i,r}$  は速度パラメーターで、つぎのように置く。

$$v_{0,i,r} = \frac{R_{S,r} V_0 k_i \times 10^2 / 3.6}{R_{P,r}} \dots\dots\dots (38)$$

( $V_0$  : km/h)

さて、式 (35) の強制項  $f_{V,i,j,r}, r_{V,i,j,r}$  には自動

車の振動項  $\Delta_r$  が含まれるので 3.(3) のように独立してプログラムすることはできない。そこで、自動車との連成振動から  $\Delta_r$  を求め、その解を式 (35) に反映させなければならない。この方程式は (15)<sub>3</sub> になるが、これを式 (21)~(23) を用いて書きかえる。そして、式 (15)<sub>4</sub> はそのままの形では微分器を使用してプログラムしなければならない、アナログ計算機で微分器を使用することは誤差の点で好ましくない、その式を時間  $t$  について 1 回微分し、しかるのちに演算時間  $\tau$  に変換する。これらの結果より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \dot{Z}_{V,r} &= -d_V \dot{\Delta}_r - p_V \Delta_r \\ \dot{\Delta}_r &= \dot{Z}_{V,r} \\ &\quad - \sum_{i=1,2,3,\dots} \{ (\dot{W}_{i,j,r} \pm y_{p,r} \dot{B}_{i,j,r}) \sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau) \} \\ &\quad - \sum_{i=1,2,3,\dots} \{ v_{0,i,r} (W_{i,j,r} \pm y_{p,r} B_{i,j,r}) \sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau) \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

ここに、定数項は

$$\begin{aligned} p_V &= p_V^2 / 900 \dots\dots\dots (40) \\ y_{p,r} &= y_{p,r} / 1000 \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

関数  $\sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau)$  は、次式で求められる。

$$\sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau) = \frac{1}{v_{0,i,r}} \frac{d \sigma_{i,j,r}(v_{0,i,r} \tau)}{d \tau} \dots\dots\dots (42)$$

式 (35), (39) のプログラムを示せば、図-7 に示すようになる。初期条件は、曲線桁についてのつぎの4つの条件

$$\left. \begin{aligned} \dot{W}_{i,j,r}(0), W_{i,j,r}(0) \\ \dot{B}_{i,j,r}(0), B_{i,j,r}(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (43)$$

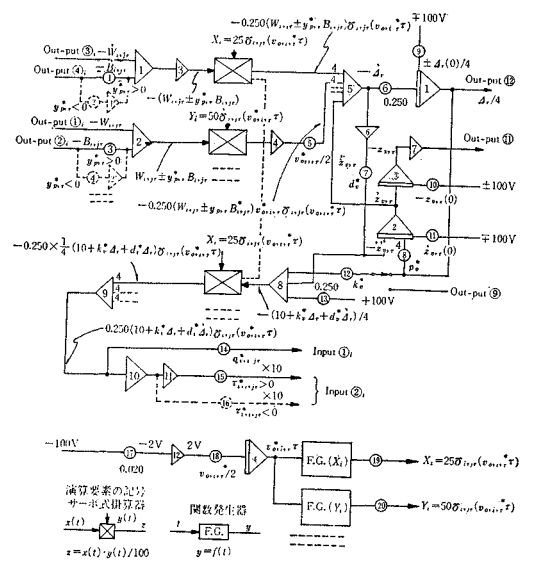


図-7 自動車と曲線桁橋との連成振動を解析するブロック・ダイアグラム (第 i 次振動に対応するもののみを示す)

および、自動車についての2つの条件

$$\left. \begin{aligned} 4_r(0) &= Z_{V,r}(0) \\ \dot{Z}_{V,r}(0) & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

が入られるように図-7では考慮してある。

ところで、図-7で  $k_V^* = 0$  とすれば、振動しない荷重が移動する場合のレスポンスを求める回路になる。もし、質量  $M_V$  のうちのばね上質量  $M_{V,u}$  が曲線桁とは連成振動をしないで、円振動数  $\omega_c$  の周期力として曲線桁上を移動する場合のレスポンスを求めたいならば、図-7の係数器⑬に入れるべき入力力は図-6の出力⑨を用いればよい。さらに、

$$M_{V,u} = M_V$$

ならば、係数器⑬の値を0にセットすればよい。

以上に示したように、曲線桁橋に動的荷重が作用する際の種々なレスポンスは、アナログ計算機で容易に計算することができる。アナログ計算の一つの大きい特徴は、種々なパラメーターの変化が係数器の値を変化させるだけでよいので、あらゆる変化に対する応答が容易に求められる点にある。また、計算結果はグラフとして得られるので解の妥当性の照査も容易に行なえる。

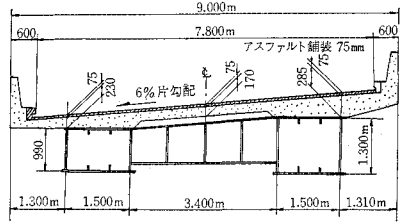
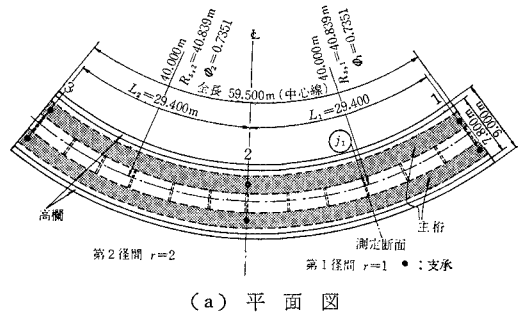
なお、本文では簡単のために移動荷重は1つだけを考えたが、質量や振動特性の異なった数台の自動車が連行する際のレスポンスを求めたいときには、図-7に示した回路を自動車の台数だけ組立てる。そして、自動車が曲線桁橋上を走行しているときだけ、関数発生器が作動する回路をリレーを利用して組立てれば、解析が可能であると思われる。

4. 実験結果と計算結果との比較、および考察

振動実験は、名神高速道路西宮 インター チェンジ内に建設されたスパン 29.4m, 曲率半径 40.0m の2等径間連続曲線桁橋について行なった。平面図および断面図を図-8に示す。

(1) 断面定数

本橋は合成桁ではないが、静的載荷実験を行なった結果コンクリート床版の協力作用があることがわかったので、断面定数は合成断面として求める。表-1は全橋にわたる断面定数の平均値と測定断面(図-8(a)のj, 断面)の断面定数を示す。橋端は緩和曲線が採用され、また中間支点上は負のモーメントに抵抗させるために、スパン中央の測定断面よりその付近の断面はいずれも大きく設計されている。そのために、表-1に見られるように測定断面の断面定数は平均断面より小さい。したがって、ばね定数は測定断面の断面定数を用いて計算し、いっぽう固有振動数を算定する場合の断面定数は、全橋



(a) 平面図  
(b) 断面図  
図-8 実験桁橋一般図

表-1 断面定数

断面 諸 量	全橋の平均	測定断面
$A_S$ (cm <sup>4</sup> )	$1.2713 \times 10^4$	
$S_2$ (cm <sup>3</sup> )	$5.3531 \times 10^5$	
$S_2'$ (cm <sup>3</sup> )	$4.3197 \times 10^5$	
$I_y'$ (cm <sup>4</sup> )	$1.3834 \times 10^7$	$1.1770 \times 10^7$
$I_S$ (cm <sup>4</sup> )	$4.2203 \times 10^8$	
$J$ (cm <sup>4</sup> )	$9.9898 \times 10^6$	$8.1128 \times 10^6$
$C_w$ (cm <sup>6</sup> )	$8.2144 \times 10^{11}$	$6.9465 \times 10^{11}$
$R_S$ (cm)	$4.0839 \times 10^3$	$4.0786 \times 10^3$
$R_0$ (cm)	$4.0265 \times 10^3$	$4.0241 \times 10^3$
$m$ (kg/cm <sup>2</sup> ·sec <sup>2</sup> )	$7.8976 \times 10^{-6}$	
$L$ (cm)	$3.0021 \times 10^3$	

断面にわたる平均値を用いて計算することにした。

(2) 振動モード  $Q_{i,r}$  および  $\nu_{i,r}$ ,  $d_{i,r}$  値

図-8の2等径間連続曲線桁に対しては、以下のように振動モードは容易に求められる<sup>12)</sup>。

a) 逆対称モード

$$\left. \begin{aligned} Q_{i,r} &= \sin i \pi s_r / L_r \\ \nu_{i,r} &= d_{i,r} = 1/2 \\ (i=1, 3, 5, \dots, r=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)$$

b) 対称モード

$$\left. \begin{aligned} Q_{i,1} &= \frac{\sin k_i(L_1 - s_1)}{\sin k_i L_1} \frac{\sinh k_i(L_1 - s_1)}{\sinh k_i L_1} \\ (i=2, 4, 6, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)$$

$$k_2 L_1 = 3.927, k_4 L_1 = 7.069, \dots\dots$$

そして、2等径間連続桁 ( $L_1 = L_2$ ) に対しては、

$$\left. \begin{aligned} \nu_{i,r} &= \mu_{i,r} \\ d_{i,r} &= \nu_{i,r} \\ (i=2, 4, 6, \dots, r=1, 2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

表-2  $Q_{i,j_1}$ ,  $V_{i,r}$ ,  $A_{i,r}$  値

$i$	$Q_{i,j_1}$	$\sum_{r=1}^2 V_{i,r}$	$\sum_{r=1}^2 A_{i,r}$
1	1.0000	1.0000	1.0000
2	-1.4420	1.9984	1.4922
3*	0	—	—
4	-0.5705	1.9938	1.7119
5	-1.0000	1.0000	1.0000

\* 測定断面では、3次振動モードは無関係になる。

表-3 ばね定数

$i$	$K_{B,i,ww}$ (kg/cm)	$K_{B,i,w\beta}$ (kg·cm/cm)	$K_{B,i,\beta\beta}$ (kg/cm)
1	$9.0629 \times 10^4$	$2.6487 \times 10^7$	$3.0933 \times 10^{10}$
2	$2.2571 \times 10^5$	$3.1162 \times 10^7$	$4.0334 \times 10^{10}$
4	$1.4058 \times 10^7$	$8.7267 \times 10^7$	$1.4250 \times 10^{12}$
5	$7.2486 \times 10^6$	$3.3096 \times 10^8$	$6.2419 \times 10^{11}$

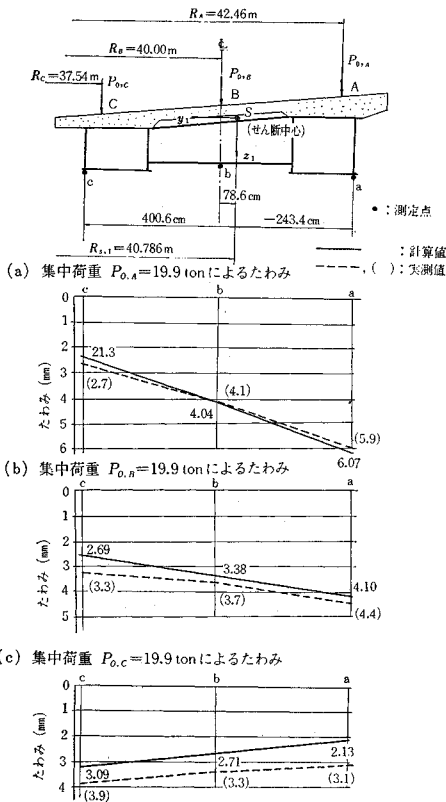


図-9 断面内のたわみ図

表-4 静的変形量  $w_{St,i,j_1}$ ,  $\beta_{St,i,j_1}$  ( $P_0=1$ kg)

載荷点 $i$	A		B		C	
	$w_{St,i,j_1}(\times 10^{-5}$ cm)	$\beta_{St,i,j_1}(\times 10^{-8}$ rad)	$w_{St,i,j_1}(\times 10^{-5}$ cm)	$\beta_{St,i,j_1}(\times 10^{-9}$ rad)	$w_{St,i,j_1}(\times 10^{-5}$ cm)	$\beta_{St,i,j_1}(\times 10^{-9}$ rad)
1	1.7517	-2.1102	1.3462	-9.0352	0.9781	1.2835
2	0.5259	-0.7965	0.4121	-1.4582	0.3085	4.3052
4	0.0081	-0.1269	0.0068	0.0114	0.0052	0.2057
5	0.0159	-0.0364	0.0132	0.0531	0.0108	0.4215
$\sum_{i=1}^5$	$2.3016 \times 10^{-5}$	$-3.0700 \times 10^{-8}$	$1.7783 \times 10^{-5}$	$-1.0429 \times 10^{-6}$	$1.3026 \times 10^{-5}$	$6.2159 \times 10^{-9}$

表-2 には、測定断面（第1径間スパン中央） $s_1=j_1$ 、 $=L_1/2$  に対する計算結果を示す。

(3) 静的特性

ばね定数  $K_{B,i,ww}$ ,  $K_{B,i,w\beta}$ ,  $K_{B,i,\beta\beta}$  を式 (14) より算定した結果を、表-3 に示す。

さて、このばね定数の妥当性を照査するために、静的載荷実験によって得られた変形量とばね定数より計算した変形量を比較検討する。図-9 に測定断面の横断面を示すが、この図の載荷点 A, B, C に  $P_0=1$  kg を作用させたときの静的たわみ  $w_{St,i,j_1}$ 、および断面回転角  $\beta_{St,i,j_1}$  を式 (13)~(14) より算定した結果を表-4 に示す。

表-4 より明らかなように、 $w_{St,i,j_1}$ ,  $\beta_{St,i,j_1}$  は振動次数  $i$  の増大に伴って減少し、求める解  $w_{St} = \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{St,i,j_1}$ ,  $\beta_{St} = \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{St,i,j_1}$  は収れんすることがわかる。この級数はまだ完全に収れんしていないが、一応  $i=1\sim 5$  まで取ってそれらの合計を静的変形量とした。その結果を表-4 の最下段に示す。

つぎに、現場において  $P_0=19.9$  t の自動車の重心を点 A, B, C に載荷したときの横断面内のたわみを図-9 に示す。図中には、表-4 の結果を利用して計算したたわみの値も示してある。また、図-10 は図-9 の測定点 a, b, c のたわみの影響面を示す。

図-9~10 の結果から、実測値と計算値は良好に一致することがわかる。したがって、理論上のばね定数  $K_{B,i,ww}$ ,  $K_{B,i,w\beta}$ ,  $K_{B,i,\beta\beta}$  ならびに (2) 項で述べた振動モード  $Q_{i,r}$  および  $V_{i,r}$ ,  $A_{i,r}$  値は妥当であると思われる。

(4) 自由振動

実験橋の  $p_i^2$  値を式 (4) より計算した結果を表-5 に示す。また、固有振動数を式 (9) より求めた結果を表-6 に示す。

自由振動実験は、自動車が橋端を通過した後の振動記録を取って行なった。代表的な記録を図-11 に示す。この図より固有振動数を求めれば、 $f_{1,1}=2.60$  c/s を得る。これは表-6 に示した鉛直方向のたわみ振動が支配



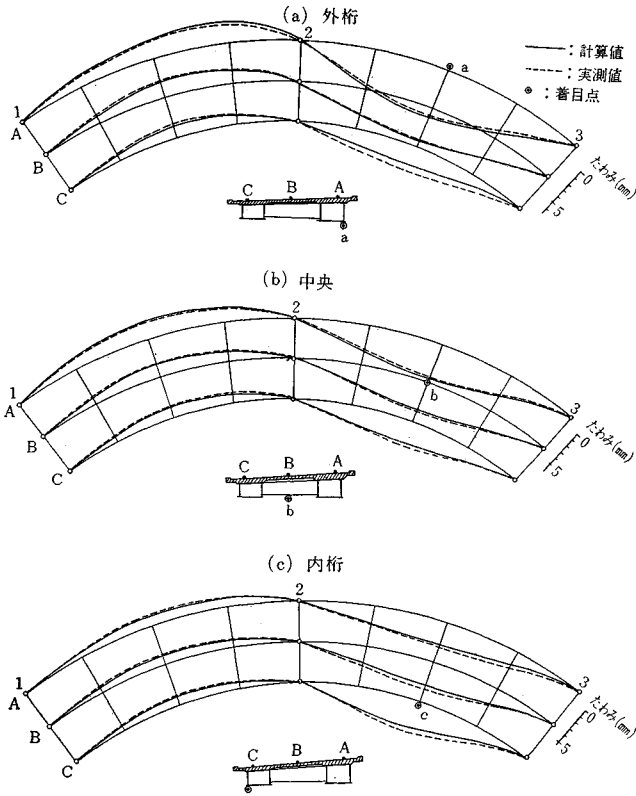


図-10 たわみの影響面

表-5  $p_i^2$  値

$i$	$p_{i,ww}^2$	$p_{i,\beta w}^2$	$p_{i,w\beta}^2$	$p_{i,\beta\beta}^2$
1	$3.2816 \times 10^2$	$2.1589 \times 10^3$	$2.4455 \times 10^3$	$3.8029 \times 10^3$
2	$8.0735 \times 10^2$	$4.6528 \times 10^3$	$5.2542 \times 10^3$	$7.6008 \times 10^3$

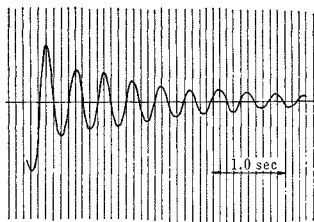


図-11 自由振動記録の一例

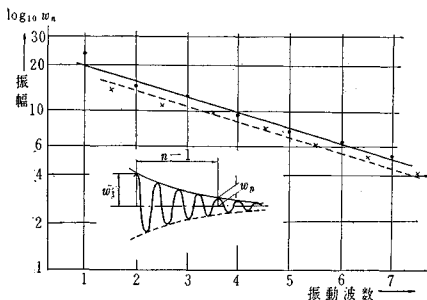


図-12 実験橋の自由振動振幅の変化状態

表-6 固有振動数  $f_{i,I}, f_{i,II}$  (c/s)

$i$	$f_{i,I}$	$f_{i,II}$
1	2.655	9.492
2	4.195	12.735

表-7 減衰係数  $d_{i,w}, d_{i,\beta}$

$i$	$d_{i,w}$	$d_{i,\beta}$
1	1.227	4.385
2	1.938	5.884

的<sup>12)</sup>な  $f_{i,I}=2.655$  c/s の振動に相当するものである。それで、 $(f_{i,I})_{cal}/(f_{i,I})_{test}$  を求めれば、その比が 102% という良好な結果を得た。したがって、表-5 の  $p_i^2$  値を求める算定公式も妥当なものであると思われる。

以上では、減衰作用を無視してきたが、図-11 の実験結果からこの曲線桁橋の減衰作用について考察しよう。図-12 は図-11 の自由振動記録図より振幅が最大となる点の包絡線をプロットしたものである。このグラフの縦軸は、対数目盛りに取っているため、包絡線がほぼ直線状であることは、減衰作用が粘性減衰であることを意味する。したがって、この直線の勾配を換算すれば、対数減衰率が求められる。すなわち、次式を用いると  $\mathfrak{D}_{i,I}$

$=0.231$  になる。

$$\mathfrak{D}_{i,I} = \frac{1}{n-1} \ln 10 \cdot \log_{10} \left( \frac{w_0}{w_n} \right) \dots \dots \dots (48)$$

実験では、1次固有振動以外の高次振動波形は明確ではなかったが、ちなみにどの振動次数の場合でも対数減衰率を等しく、 $\mathfrak{D}_{i,I} = \mathfrak{D}_{i,II} = \mathfrak{D}_{i,I}$  と仮定し、式(8)の  $d_{i,w}, d_{i,\beta}$  値を求めてみれば表-7 のようになる。

これらの結果を用いて、曲線桁橋の減衰を伴う自由振動をアナログ計算機でシミュレーションしてみよう。ただし、 $\tilde{p}_i^2, \tilde{d}_i(p_i^*, d_i^*)$  は表-8 に示す値となる。

表-8  $\tilde{p}_i^2, \tilde{d}_i, p_i^*, d_i^*$  値

振動次数 $i$	$i=1$	$i=2$
定数値		
$\tilde{p}_{i,ww}^2 (p_{i,ww}^*)$	$2.3278 \times 10^2$ (0.259)	$6.0705 \times 10^2$ (0.674)
$\tilde{p}_{i,\beta w}^2 (p_{i,\beta w}^*)$	$5.8376 \times 10^4$ (0.065)	$1.0468 \times 10^5$ (0.116)
$\tilde{p}_{i,w\beta}^2 (p_{i,w\beta}^*)$	2.8065 (0.312)	5.8944 (0.697)
$\tilde{p}_{i,\beta\beta}^2 (p_{i,\beta\beta}^*)$	$3.8769 \times 10^3$ (0.431)	$7.7335 \times 10^3$ (0.884)
$\tilde{d}_{i,ww} (d_{i,ww}^*)$	1.506 (0.050)	2.378 (0.079)
$\tilde{d}_{i,\beta w} (d_{i,\beta w}^*)$	$2.267 \times 10^2$ (0.008)	$3.041 \times 10^2$ (0.010)
$\tilde{d}_{i,w\beta} (d_{i,w\beta}^*)$	$1.910 \times 10^{-3}$ (0.064)	$3.017 \times 10^{-3}$ (0.101)
$\tilde{d}_{i,\beta\beta} (d_{i,\beta\beta}^*)$	5.381 (0.179)	7.221 (0.241)

図-13 (a)~(d) は、種々な初期条件  $w_i(0), \beta_i(0)$  を曲線桁橋に与えたときの自由振動をアナログ計算機によって求めた結果を示す。

これらの図より明らかなように、曲線桁橋では曲率の影響により曲げとねじりが連成し、桁を鉛直方向にたわませただけでも曲線桁橋はねじれ(図-13(a)~(b))、また桁をねじっただけでも曲線桁橋は鉛直方向にたわむ(図-13(c)~(d))ことがわかる。

とくに、図-13(a)~(b)に示すように曲線桁橋を鉛

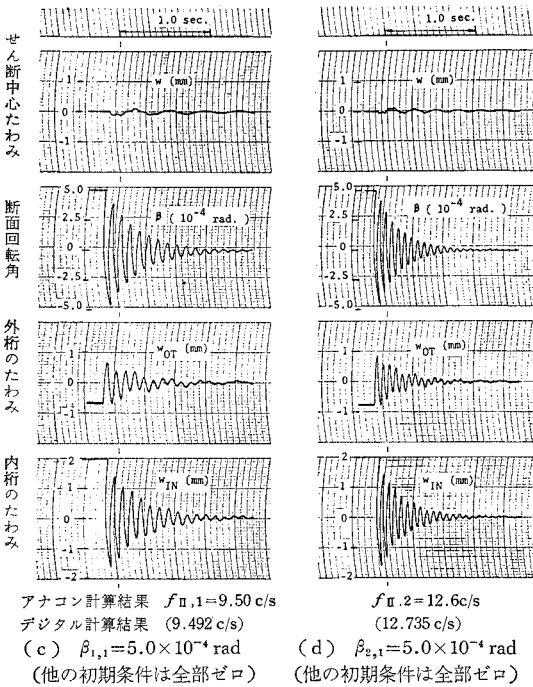
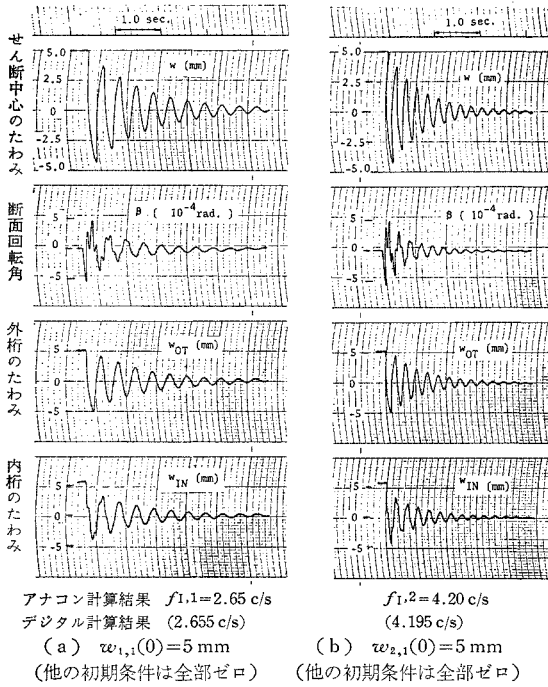


図-13 アナログ計算機による自由振動の計算結果

直方向にたわませて自由振動を与えると、初期の過渡的な状態では曲げ振動のほかねじり振動も生じ、これら2つの振動波形の重ね合わされた合成波が生じることが明確にわかり興味深い。しかし、自由振動に関し曲げ振動とねじり振動の対数減衰率が等しいと仮定すれば、同じ次数でも固有振動数の高いねじり振動のほうは急速に減衰し、時間の経過に伴って曲げ振動が卓越するようになる。また、図-13には外桁と内桁のたわみも示してあるが、両者の振動波形は若干異なっている。これは、せん断中心が内桁と外桁の真中になく、および曲げとねじりの振動波形が相異なるためである。

以上に示した計算をデジタル計算機で行ないグラフ化するのはかなり面倒であるが、アナログ計算機によるとこれらの応答特性をグラフとして直観的にわかりやすい形として容易に表わすことができる。また、図-13(a)~(d)を観察すれば、(a)~(b)はそれぞれ曲げ1次、2次の振動が卓越し、(c)~(d)はそれぞれねじりの1次、2次振動が卓越することが明白である。それで、これらの振動波形より求めた固有振動数を図中に示したが、この結果と表-7の数値計算結果とを比較すると、アナログ計算をしてもかなり精度が良いことがわかる。なお、理論的には減衰作用が固有振動数に多少影響をおよぼすが<sup>1)</sup>、これらの結果によるとその影響は小さく、実用的には式(9)に示したように減衰項を無視して固有振動数を求めてよいことを示している。

(5) 強制振動

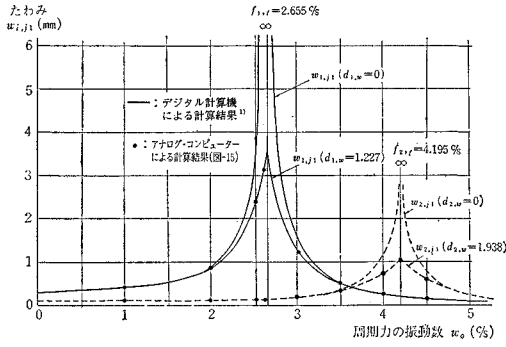
強制振動を求めるために、単位荷重  $P_0 = 1 \text{ kg}$  による強制項  $QP_{0,i,j_1}$ ,  $\tau P_{0,i,j_1}$  を式(12)より計算した結果を表-9に示す。

表-9 強制項  $QP_{0,i,j_1}$ ,  $\tau P_{0,i,j_1}$

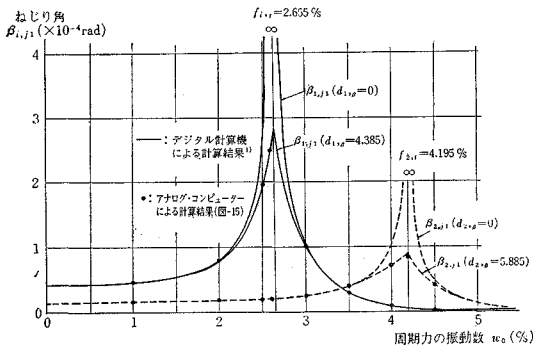
載荷点	$i$	$QP_{0,i,j_1}$	$\tau P_{0,i,j_1}$
A (外桁)	1	$5.3094 \times 10^{-3}$	$-3.2646 \times 10^{-5}$
	2	$4.0260 \times 10^{-3}$	$-3.0600 \times 10^{-5}$
B (桁中央)	1	$3.6610 \times 10^{-3}$	$2.7517 \times 10^{-6}$
	2	$2.6543 \times 10^{-3}$	$1.3013 \times 10^{-5}$
C (内桁)	1	$2.2018 \times 10^{-3}$	$3.2453 \times 10^{-5}$
	2	$1.4220 \times 10^{-3}$	$5.1476 \times 10^{-5}$

a) 共振曲線

今回は、起振機により周期力を作用させた場合の応答を求める実験は行なわなかったが、デジタル計算結果とアナログ計算結果を比較したものを以下に示す。図-14は、共振曲線の代表的なものとして、載荷点A(図-9参照)に周期力  $P_0 \cos \omega_0 t$  を作用させたときのせん断中心におけるたわみ  $w_{i,j_1}$  および断面回転角  $\beta_{i,j_1}$  の定常解を数値計算してプロットしたものである。また、図-15はアナログ計算機によって応答を計算したものを



(a) 周期力の固有振動数  $\omega_0$  とたわみ  $w_{i,j1}$  の関係 (図-10 の点Aに  $P_0=2 \text{ ton} \cos \omega_0 t$  を作用)



(b) 周期力の振動数  $\omega_0$  とねじり角  $\beta_{i,j1}$  の関係 (図-10 の点Aに  $P_0=2 \text{ ton} \cos \omega_0 t$  を作用)

図-14 共振曲線

示す(演算要素数(3.(1)参照)の関係上  $i=2$  次振動までを考えている)。解は最初過度現象が現われているが、時間が約 3.0 sec 以上になると定常状態となることがわかる。これらの結果を図-14中に●印で示すが、アナログ計算でも良好な結果が得られている。また、数値計算では過度現象を解析するのはかなり面倒なものであるが、アナログ計算機を用いれば図-15に示すように過度現象も含めて Sinusoidal Response を容易に求めることができる。

b) 衝撃力による応答

図-16は、 $P_0=20 \text{ t}$  を曲線桁橋に突然作用させたときの Indicial Response を  $i=1\sim 2$  次振動までを考慮してアナログ計算機によって求めた結果を示す。

これに対し、ロード・ローラー(自重 3.6 t)を橋上で高さ 3.0 cm のステップ台より落下させ衝撃実験を行った。そして実験結果と計算結果とを比較すると、最初は振動波形が乱れた過度現象が現われたが、計算値に示すように時間の経過に伴って1次の固有振動が顕著になり、実測値と計算値の振動波形は類似した良好な傾向が得られた(実測値は省略する)。なお、Indicial Response の終極値は静的な変形量と一致するはずであり、この結果も図-16中に示すように良好な一致がみられる。

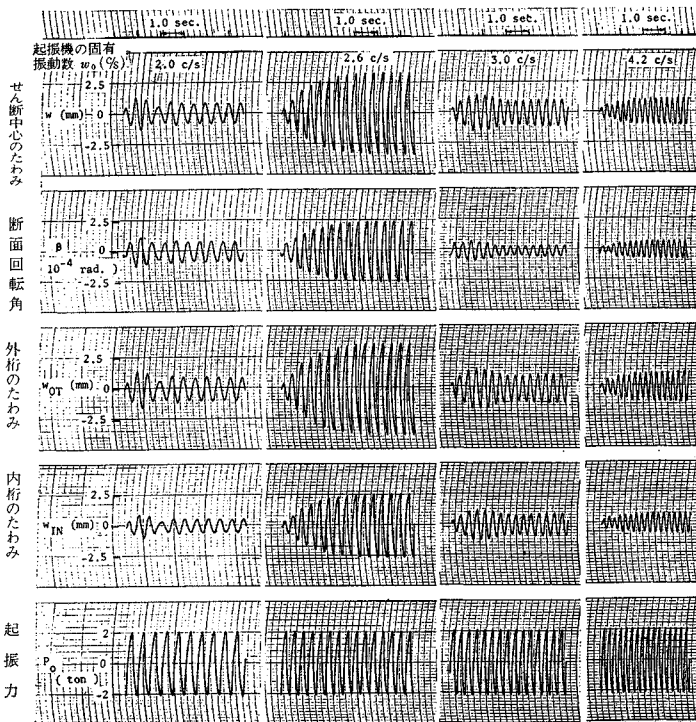


図-15 Sinusoidal Response の計算例 ( $\omega_{i,1}(0)=\dot{\omega}_{i,1}(0)=\beta_{i,1}(0)=\dot{\beta}_{i,1}(0)=0$ )

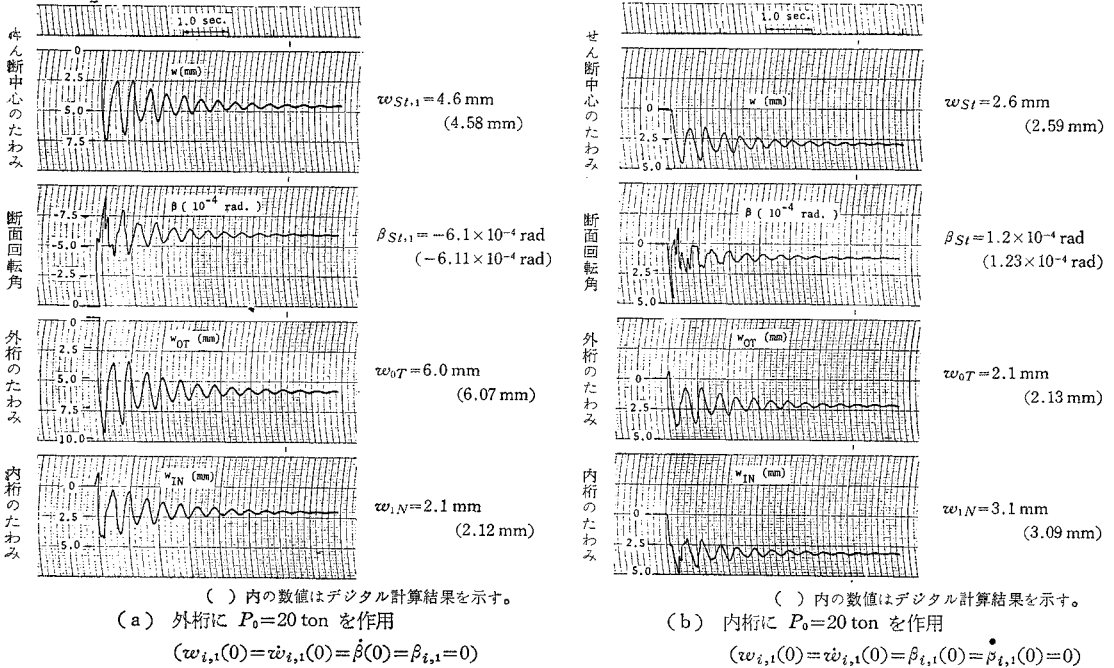


図-16 Indicial Response の計算結果

(6) 自動車による動的応答

a) 自動車の振動特性

実験車は、自重 7.2t の大型貨物トラックに鋼板を 12.7t 積載し、全重量 19.9t (前輪 3.7t, 後輪 16.2t, 軸距 4.82m) として使用した。

荷重を自動車に積載するときに、自動車後輪のスプリングのたわみ量をダイヤル・ゲージによって測定し、ばね定数を求めると、

$$K_V = 1.49 \times 10^3 \text{ kg/cm}$$

であった。

図-17 は、橋面上に自動車を走行させたときの自動車重心点の鉛直加速度を記録したもののうち代表的な結

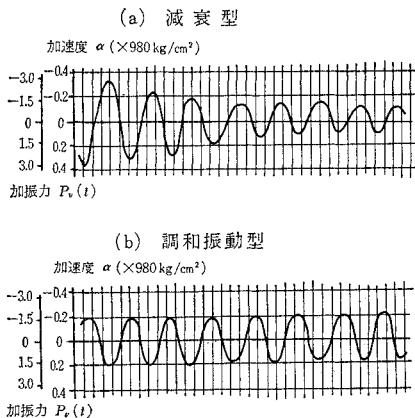


図-17 自動車の振動記録の一例

果を示す。路面の微小な凹凸やエンジンによる高周波の微小振動が含まれていたため、振幅の平均値をとり、プロットしてあるが、これより自動車の固有振動数を求めれば、

$$f_v = 2.15 \text{ c/s}$$

であった。また、自動車の対数減衰率は自由振動をおこして測定した結果、

$$\mathcal{D}_V = 0.2$$

程度の値を持つことがわかった。

以上の実測結果より、自動車のばね上質量を算定すれば、

$$M_{V,u} = 8.164 \text{ kg/cm}^{-1} \cdot \text{sec}^2$$

したがって  $M_{V,u}/M_V = 0.4$ , すなわち自動車全質量のうち約 40% がばね上質量になっていることがわかる。

表-10 は、アナログ計算するためのパラメータ  $p_v^*, C_v^*, k_v^*$  値を示したものである。

表-10 自動車のパラメーター  $p_v^*, c_v^*, k_v^*$

$p_v^*$	$c_v^*$	$k_v^*$
0.203	0.032	0.075

b) 強制項

3.(4) で述べたように自動車による応答の解析は、 $i=1, 2, 3, \dots$  として計算すれば厳密解が得られるが、アナログ計算機の要素数の関係上、以下のような近似を行なって解析する。まず、図-14 に示す共振曲線より、この実験で用いた自動車のように固有振動数が  $f_0 = 3 \text{ c/s}$  以下の場合には、2次以上の高次振動モードの影響は小

さいことが明白である。そこで、自動車が走行する際の応答解析は、1次振動モードのみを考慮して行なう。ただし、2次モード以上の影響を無視すると静的たわみが連続桁としての値に一致しないので、式(12)より強制項を求める際の静的な値  $w_{St,i,j_1}$ ,  $\beta_{St,i,j_1}$  には  $\sum_{i=1 \sim 5} w_{St,i,j_1}$ ,  $\sum_{i=1 \sim 5} \beta_{St,i,j_1}$  を用いて近似計算することにした。表-11にこれらの値を示す。

表-11 自動車による強制項 ( $i=1$ )

走行位置	$q_{V,i,j_1} (q_{V,i,j_1}^* \tau)$	$\tau_{V,i,j_1} (\tau_{V,i,j_1}^* \tau)$
A (外桁)	$1.4229 \times 10^2$ (0.632)	-1.0832 (-0.481)
C (内桁)	$5.3123 \times 10^4$ (0.230)	1.2071 (0.536)

つぎに、関数  $\sigma_{1,j_1}(v_{0,1,1}^* \tau)$  は 4.(2) で  $\Omega_{1,1}$  が与えられているので実験橋に対しては、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{1,j_1} &= \sin v_{0,1,1}^* \tau \\ \dot{\sigma}_{1,j_1} &= \cos v_{0,1,1}^* \tau \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

となる。また、速度パラメーター  $v_{0,1,1}^*$  はつぎのようになる。

$$v_{0,1,1}^* = \frac{R_{p,1} k_i V_0 \times 10^2}{R_{S,1}} \times 3.6 = \frac{\pi R_p V_0}{3.6 R_{S,1} L_1} \times 10^2 \dots\dots\dots(50)$$

表-12は  $v_{0,1,1}^*/2$  値を示す。

表-12 速度パラメーター  $v_{0,1,1}^*/2$

速度 $V_0$ (km/h)	10	20	30	40
走行位置				
A (外桁)	0.140	0.279	0.419	0.558
C (内桁)	0.158	0.316	0.474	0.631

関数  $\sin v_{0,1,1}^* \tau$  および  $\cos v_{0,1,1}^* \tau$  の発生は、アナログ計算機の場合、図-18に示す Resolver という関数発生機が備わっているのが容易である。

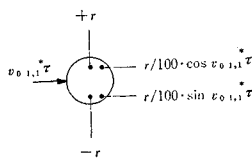


図-18 Resolver の記号

c) 初期条件

曲線桁には、4つの初期条件  $w(0)$ ,  $\dot{w}(0)$ ,  $\beta(0)$ ,  $\dot{\beta}(0)$  が存在するが、時間  $t=0$  のとき曲線桁が静止状態にあるものとして計算する。したがって、

$$\left. \begin{aligned} W_{1,j_1}(0) &= \dot{W}_{1,j_1}(0) = 0 \\ B_{1,j_1}(0) &= \dot{B}_{1,j_1}(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(51)$$

つぎに自動車については式(20)に示したように、2つの初期条件  $z_{V,1}(0)$ ,  $\dot{z}_{V,1}(0)$  が存在する。初期条件  $z_{V,1}(0) = \delta_1(0)$  は自動車が曲線桁に突入するとき、伸縮継手などにより桁端部で自動車を受ける初期変位であり、曲線桁の動的応答に大きい影響をおよぼす重要な値である。

この実験では、 $\delta_1(0)$  は直接測定はしなかったが、自動車に加速度計を取付けて、鉛直加速度  $\alpha_1(0)$  を測定

し、この結果より  $\delta_1(0)$  を以下のようにして推定することにした。すなわち、

$$\delta_1(0) = \alpha_1(0) \times M_{V,u} / K_V \dots\dots\dots(52)_1$$

したがって、式(23)の換算を行えば、

$$\delta_1(0) = 10 \alpha_1(0) \times M_{V,u} / K_V \dots\dots\dots(52)_2$$

ちなみに、後で示す図-17の実測結果より  $\alpha_1(0) = 0.3 \text{ g}$  とすれば、 $\delta_1(0) = 1.62 \text{ cm}$  となる。

最後に、初期条件  $\dot{z}_{V,1}(0)$  は自動車の絶対変位  $z_{V,1}$  やばねの変位  $\delta_1$  の位相差に関係するものであり、

$$-p_u z_{V,1}(0) \leq \dot{z}_{V,1}(0) \leq p_u z_{V,1}(0) \dots\dots\dots(53)_1$$

の範囲内にある。したがって、

$$-p_u \dot{z}_{V,1}(0) / 30 \leq \dot{z}_{V,1}(0) \leq p_u \dot{z}_{V,1}(0) / 30 \dots\dots\dots(53)_2$$

なる範囲内でこの値を仮定してシミュレーションすればよい。

d) 実験結果と計算結果との比較

走行実験は、4.(6)a)で述べた振動特性を有する自動車を、第2スパンから第1スパン(図-8参照)の方向に走行させて行なった。載荷位置は、図-9に示す通りとした。走行速度は、それぞれ約10, 20, 30 km/hとし、そのときの第1径間の外桁および内桁のたわみを機械式のたわみ計で記録した(図-10参照)。これと同時に、自動車の鉛直加速度の測定も行なった(図-17参照)。第1径間の代表的な実測記録を静的たわみで無次元化してプロットしたものを図-19に示す(第2スパンの実験値は省略してある)。

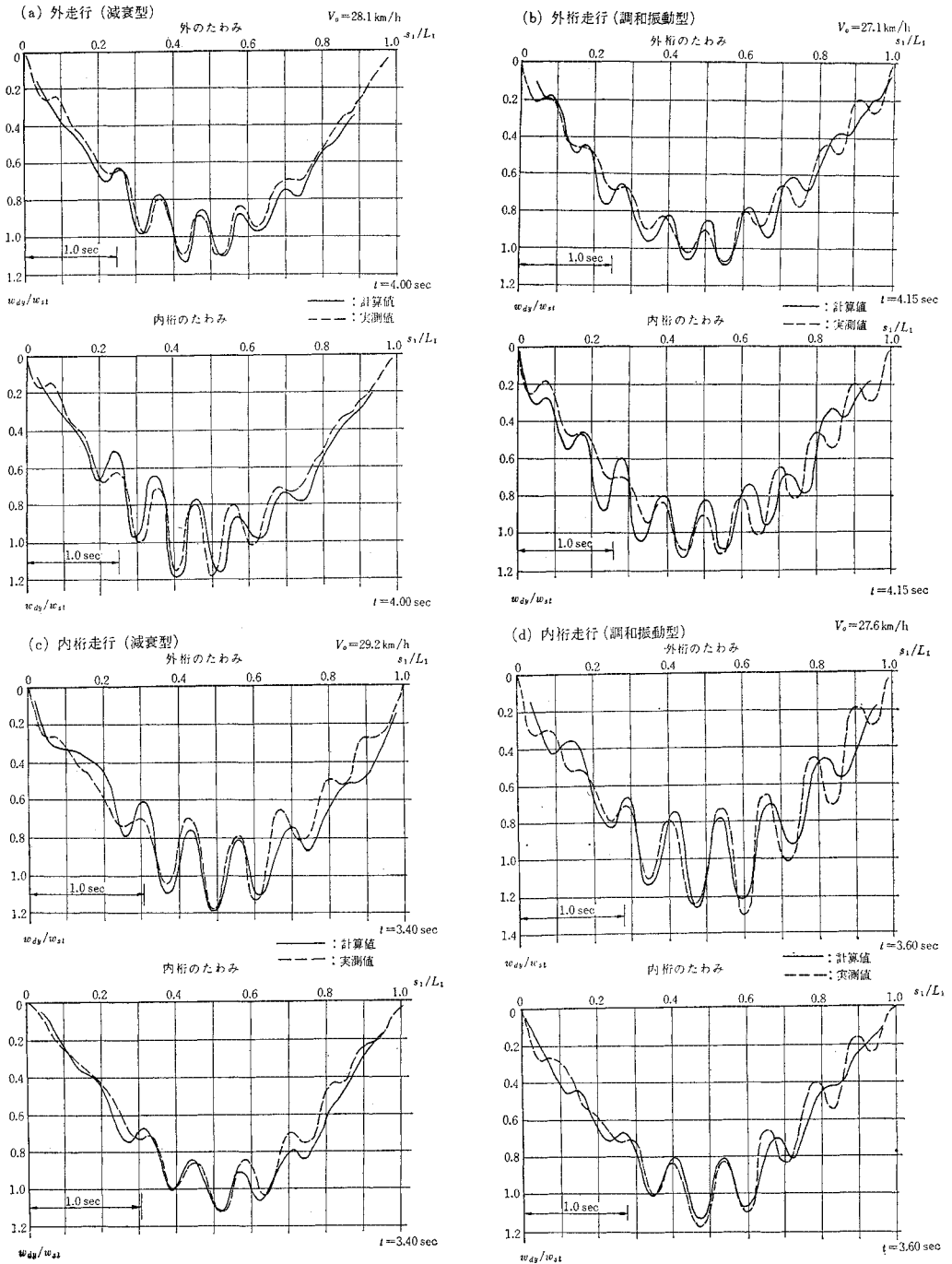
このような走行実験を同一速度のもとで数回繰り返して行なったけれども、同一の応答曲線は得られなかった。これは、曲線桁橋の曲率半径が小さいために、自動車を一定速度を保つなど同一条件で走行させることがきわめて困難であったことや、路面の凹凸やその他の不規則な要素が多かったからであると思われる。

しかしながら、自動車の鉛直加速度の記録を整理すると図-17に示したようにその波形は2つのタイプに分類することができる。すなわち、図-17(a)は自動車が曲線桁に進入するとき、桁端部の伸縮継手などにより初期変位を受け振動が励起されるが、時間の経過に伴ってその振動は次第に減衰する型のものである。また、図-17(b)は上と同様に初期変位を受け自動車が振動するが、その振動は走行中にも減衰せずにほぼ一定の振幅を保っている型のものである。2つの型に対応する曲線桁橋の動的たわみの実測値が図-19(a)~(d)に点線で示してある。これらの図からもわかるように、減衰型の場合曲線桁橋の振動は次第に減衰し、自動車が橋端に近づくとほとんど曲線桁には振動が生じなくなる。しかし、調和振動型の場合曲線桁の振動はあまり減衰せずに、自動車が橋端に近づいてもまだかなりの振動が残

存している。ところが、いずれの型の場合も最大振幅にはあまり大きな差異はないようである。以上のほかに、鉛直加速度は微少で、ほとんど自動車には振動が発生せず、単に自動車が曲線桁橋上を滑って行く型のもも観察された。このような場合の曲線桁の振動は、他のものと比較すると問題なく小さかったので、今回この型に

ついでの解析は省略し、図一17 (a), (b) に示す型の振動を対象として解析を行なうことにした。

さて、3.(3) で述べた解析法によってアナログ計算機を使用し、シュミレーションした計算結果が図一19 (a) ~ (d) に実線で示してある。すなわち、図一19 (a) ~ (d) は、図一17 (a), (b) に示した自動車の鉛直振動が



図一19 動的たわみの実測値と理論値との比較

再現されるように、自動車のばねの初期変位 ( $x_v(0)$ ) および位相角 ( $\dot{x}_v(0)$ ) を種々変化させて計算し、そのときの曲線桁の動的たわみをプロットしたものである。ただし、実測値と比較するために縦軸は静的たわみで無次元化し、横軸は自動車的位置  $s_1/L_1$  で無次元化してある。これらの図を観察すると、実測値と計算値とはよく一致する傾向がある。したがって、本文で述べた解析方法は理論解析上種々な仮定を設けたが、走行自動車による曲線桁橋の動的挙動をかなり明確に説明することができるものと思われる。

最後に、実験車による走行速度  $V_0$  と衝撃係数  $i_m$  (最大動的たわみ/静的たわみ) の関係を計算し、プロットしたものを図-20 に示す。計算結果によると、走行速度  $V_0 \approx 30$  km/h までは衝撃係数  $i_m$  は速度の増大に伴って大きくなるが、速度  $V_0 \approx 40$  km/h 付近で  $i_m$  はほぼ一定となる傾向が見られる。また図中には実測値 (衝撃係数の小さいものは省略してある) もプロットしてある。これらの実測値を計算値と比較すると、個々の実測値にはばらつきがあり、実測値のデータも少ないので速度と衝撃係数との関係はそれほど明確ではないが、全体的にみると計算値にほぼ近い妥当な値が得られているものと思われる。なお、自動車が外桁を走行するときの外桁の衝撃係数と内桁を走行するときの内桁の衝撃係数とを比較すれば、内桁を走行するときのほうが外桁を走行するときより衝撃係数  $i_m$  が大であった。曲線桁橋の合理的な衝撃係数を定めるためには、曲線桁橋のスパン、曲率半径、自動車の固有振動数、減衰係数、初期変位、

および走行速度のほかに走行位置による影響も考慮して解析する必要があるように思われる。

### 5. 結 論

本文は、曲線桁橋の動的応答をアナログ計算機によって解析することを試み、同時に理論解析結果と実橋の現地実験結果とを比較検討したものである。

実験結果によると

- (1) 曲線桁橋の有効質量
- (2) 換算ばね定数
- (3) 振動モード

などの振動解析上基本的な諸量を定める理論式が、実際の現象を明確に説明できる妥当なものであると思われる。

また、

- (4) 曲線桁橋の減衰特性
- (5) 減衰を伴う自由振動、および
- (6) 強制振動させたときの特性、とくに曲げ振動とねじり振動の連成作用

を計算例によって明らかにした。

さらに、

- (7) 自動車を走行させたときの動的応答

を現地実験を行なって求め、それをアナログ計算機によってシュミレーションし再現した結果、理論解析上の仮定が適切であるように思われる。また、自動車を走行させたときの振動特性や衝撃係数に関しても十分本文の理論によって明確にすることができたと思われる。

現在、各地において曲線桁が建設される機会が多いが、曲線桁橋を経済的でしかも安全に設計するためには、一般の不規則な自動車荷重に対して振動解析<sup>7)</sup>を行ない、合理的な衝撃係数を求めることが重要な課題であり、今後この種の問題を取扱う際、本文に述べた解析方法が役立つものと考えている。

最後に、アナログ計算機は物理量を一度電気量に置き換えて計算するので、演算結果には多少誤差 (演算要素1つに対して0.1%以下) が含まれる。しかし、解はグラフとして得られ、初期値やパラメーターの変化による応答特性を容易に調べることができるので、構造物の振動解析にはきわめて応用範囲が広く、かつ有用な方法であると思われる。

なお、本研究は昭和43年度文部省科学研究費の補助のもとに行なったものである。また、現地実験を行なうに当たり日本道路公団、松尾橋梁(株)、および大阪市立大学教授 故橋善雄博士をはじめ同橋梁工学研究室の諸氏の絶大な御支援をうけた。さらに、アナログ計算機のオペレーションには、大阪市立大学工学部電気工学教室 北

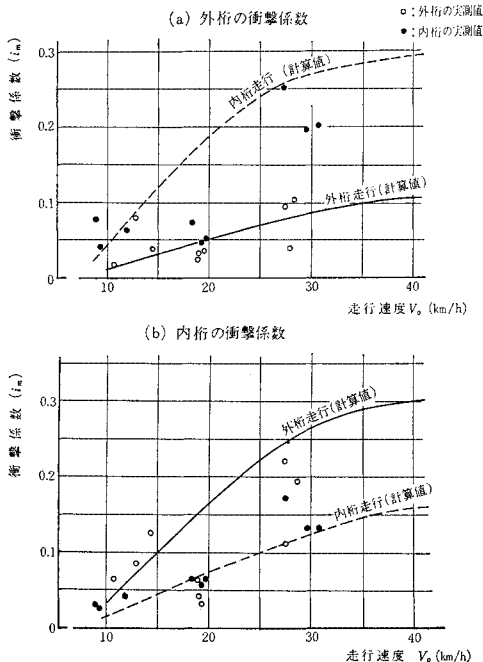


図-20 走行速度  $V_0$  と衝撃係数  $i_m$  との関係

嶋靖三講師のご指導を受けたことを付記し、関係者各位に深甚の謝意を表する次第である。

#### 参 考 文 献

- 1) 小松・中井：曲線桁橋の動的応答に関する基礎的研究，土木学会論文報告集第 174 号，昭 45.2.
- 2) 平井・深沢：第 19 回土木学会年次学術講演会 I-65，昭 39.5.
- 3) 山崎・崎山：走行荷重に対する円形曲り梁の動的応答，九大工学集報，Vol. 41, No. 2, 昭 43.
- 4) Tan C.P. and Shore S. : Response of Horizontal Curved Bridge to Moving Load, Proce. of A.S.C.E., ST. 9, Sept., 1958.
- 5) Norris, Hansen, Holley, Biggs, Namyet and Minami : Structural Design for Dynamic Load, Mc-Grall-Hill, 1959.
- 6) 平井一男：種々の移動荷重をうけるはり構造の基礎方程式とその応用，土木学会論文集第 90 号，昭 38.2.
- 7) 山田・小堀：ランダム自動車荷重列による道路橋の衝撃に関する研究，土木学会論文集 119 号，昭 40.7.
- 8) 小松・中井：第 21 回土木学会年次学術講演会，I-141，昭 40.7.
- 9) Fifer, S. : Analogue Computation, Vol.1~3, Mc-Graw-Hill., 1961.
- 10) 防災ハンドブック：防災ハンドブック編集委員会編，技報堂，昭 39.
- 11) ADSL 解説書：FACOM 270-20/30 ADSL 解説書，富士通信.
- 12) 小松・中井：曲線桁橋の自由振動に関する研究，土木学会論文集 136 号，昭 41.21.

(1969.11.29・受付)