

トラス構造物の最適設計法に関する研究

OPTIMIZATION OF TRUSS

大久保 禎 二*
By Sadaji Okubo

1. ま え が き

構造物の最適設計法に関して、著者はすでに、構造物の状態変数の偏微係数および線型計画法を用いて、電子計算機により自動的に最適設計を行なう方法についての基本的な考え方を発表しているが^{(1),(2)}、今回は、この理論をトラス構造物に適用した結果について報告するものである。なお、トラス構造物の解析および偏微係数の計算には変位法を用いた。

2. 最適設計法の概要

本論文に用いた最適設計法の概要を簡単にまとめてみると、つぎのとおりである^{(1),(2),(3)}。すなわち、一般に構造物の応力、変位などの状態変数 (Y_j) および構造物の総工費または鋼重量などの目的関数 (M) は、設計変数 (X_i) の非線型な関数で表わされる。

$$Y_j = G_j(X_1, X_2, \dots, X_m) \dots \dots \dots (1)$$

$$M = F(X_1, X_2, \dots, X_m) \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 m : 独立な設計変数の数

一方、状態変数 (Y_j) および設計変数 (X_i) は、設計示方書などにより制限を受け、つぎのような条件式を満足しなければならない。

$$X_{li} \leq X_i \leq X_{ui}, Y_{lj} \leq Y_j \leq Y_{uj} \dots \dots \dots (3)$$

ここに、サフィックス L, u はそれぞれ制約条件の下限および上限を表わす。

いま、設計変数として $X^{(1)}$ を仮定すると、式 (1) より状態変数 ($Y^{(1)}$)、式 (2) より目的関数 ($M^{(1)}$) を得るが、 $X^{(1)}$ および $Y^{(1)}$ は必ずしも式 (3) の設計条件式を満足し、かつ、式 (2) の目的関数を最小にするとは限らない。そこで、最適な設計変数 (X) を得るため、 X を ΔX だけ微小変化させると、新しい設計変数 ($X^{(2)}$)、状

態変数 ($Y^{(2)}$) および設計条件式は、つぎのように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} X^{(2)} &= X^{(1)} + \Delta X^{(1)} \\ Y^{(2)} &= Y^{(1)} + \Delta Y^{(1)} \\ Y_l^{(1)} + \Delta Y_l^{(1)} &\leq Y^{(1)} + \Delta Y^{(1)} \\ Y_u^{(1)} + \Delta Y_u^{(1)} &\geq Y^{(1)} + \Delta Y^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

また、新しい目的関数 ($M^{(2)}$) は、
 $M^{(2)} = M^{(1)} + \Delta M^{(1)}$

となる。

いま、 i 番目の状態変数 ($Y_i^{(2)}$) を Taylor 展開すると、つぎのごとくなる。

$$\begin{aligned} Y_i^{(2)} &= G_i(X_1^{(2)}, X_2^{(2)}, \dots, X_m^{(2)}) \\ &= G_i(X_1^{(1)} + \Delta X_1^{(1)}, X_2^{(1)} + \Delta X_2^{(1)}, \dots, X_m^{(1)} + \Delta X_m^{(1)}) \\ &= Y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial X_j} \right) \Delta X_j^{(1)} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \\ &\quad \times \left(\frac{\partial^2 Y_i^{(1)}}{\partial X_j \partial X_k} \right) \Delta X_j^{(1)} \Delta X_k^{(1)} + \dots \dots \dots \end{aligned} \dots \dots \dots (5)$$

一般に上式における二次の微係数以下の項は、きわめて微小であるので無視すると、 $Y_i^{(2)}$ は近似的に次式で表わすことができる。

$$\begin{aligned} Y_i^{(2)} &\cong Y_i^{(1)} + \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial X_j} \right) \Delta X_j^{(1)} \cong Y_i^{(1)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^m S_{ij}^{(1)} \Delta X_j^{(1)} \dots \dots \dots (6) \end{aligned}$$

ここに、 $\frac{\partial Y_i}{\partial X_j} = S_{ij}$ は X_j 近傍における Y_i の、 X_j の微小変化に対する変化量を示すもので、「影響係数」と呼ぶことにする。式 (6) の関係式をすべての $Y_i^{(2)}$ について求め、構造物全体についてマトリックス表示すると、

$$Y^{(2)} \cong Y^{(1)} + S^{(1)} \Delta X^{(1)} \dots \dots \dots (7)$$

となる。状態変数が N 個、設計変数が M 個ある場合は、 $Y^{(1)}, Y^{(2)}$ は $N \times 1$ 次の列マトリックス、 $S^{(1)}$ は $S_{ij}^{(1)} \left(= \frac{\partial Y_i^{(1)}}{\partial X_j} \right)$ よりなるマトリックスで $N \times M$ 次のマトリックス、 $\Delta X^{(1)}$ は $M \times 1$ 次の列マトリックスとなる。

* 正会員 工修 愛媛大学助教授 工学部土木工学科

同様に目的関数 ($M^{(2)}$) についても,

$$M^{(2)} \cong M^{(1)} + C^{(1)} \Delta X^{(1)} \dots\dots\dots (8)$$

と表わすことができる。ここに、 $C^{(1)}$ は設計変数 X_j の微小変化による目的関数 (M) への影響値 : $C_j^{(1)} (= \frac{\partial M^{(1)}}{\partial X_j})$ を要素とするマトリックスで、設計変数が M 個の場合は、 $1 \times M$ 次の行マトリックスである。

また、設計条件式も設計変数の関数である場合には、

$$\left. \begin{aligned} Y_u^{(2)} &\cong Y_u^{(1)} + D_u^{(1)} \Delta X^{(1)} \\ Y_l^{(2)} &\cong Y_l^{(1)} + D_l^{(1)} \Delta X^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

と表わすことができる。ここに、 $D_u^{(1)}$ (または $D_l^{(1)}$) は偏微係数 : $\frac{\partial Y_{ui}^{(1)}}{\partial X_j}$ (または $\frac{\partial Y_{li}^{(1)}}{\partial X_j}$) よりなる行マトリックスである。

式 (4), (7), (9) を、式 (3) に代入し整理すると、

$$\left. \begin{aligned} X_u - X^{(1)} &\geq \Delta X^{(1)} \\ X_l - X^{(1)} &\leq \Delta X^{(1)} \\ [S^{(1)} - D_l^{(1)}] \Delta X^{(1)} &\geq Y_l^{(1)} - Y^{(1)} \\ [S^{(1)} - D_u^{(1)}] \Delta X^{(1)} &\leq Y_u^{(1)} - Y^{(1)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

となり、結局最適な設計変数 (X) を決定することは、式 (10) の条件式群を満足し、かつ、式 (8) の $C^{(1)} \Delta X^{(1)}$ を最小とする $\Delta X^{(1)}$ を決定する問題に帰着することができる。

ところで、式 (8) および式 (10) は、 $\Delta X^{(1)}$ の一次の関数であるので、上記の最小値問題は、線型計画法の手法を用いて解くことができる^{4),5)}。

このようにして求めた設計変数の変化量 $\Delta X^{(1)}$ を、もとの設計変数 $X^{(1)}$ に加え、 $X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)}$ を新しい設計変数として上記のサイクルをくりかえすことにより、目的関数 (M) を最小にする最適の設計変数 (X) を求めることができる。

この設計法の概略的な流れ図を 図-1 に示す。

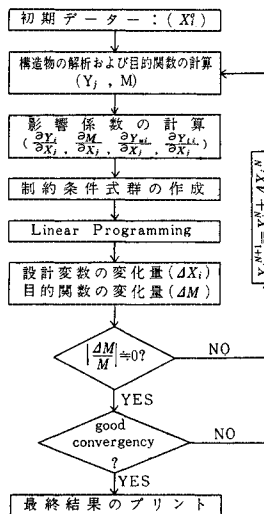


図-1 最適設計法の概略的な流れ図

3. トラス構造物における設計変数および設計条件式

トラス構造物において考えられる設計変数としては、部材の断面寸法 (図-2 参照) および各格点の x, y 座標が考えられる。

一方、設計条件式としては、各部材について板厚、細

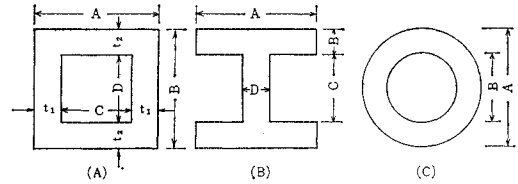


図-2 Design Variables of Member Cross Section.

長比、許容応力度に関するものがあり、各格点については格点の変位に関するものがある。したがって、いま、図-2 (A), (B) に示すような、4 つの断面寸法を独立な設計変数とする断面を有する部材を考えると、1 部材に対する条件式の数は、

板厚に関する設計条件式	2
細長比に関する設計条件式	1
許容応力度に関する設計条件式	$\frac{1}{4}$
計	

となる。

さらに後節に述べるごとく、線型計画法により最適解を求めるに際して、解の収斂性をよくするため、設計変数の変化量 ΔX のとり得る範囲を限定する条件式が、各設計変数に対して 1 個ずつ必要となり、結局一部材に対して必要となる条件式の数は 8 個となり、部材数が N 個のトラスでは、部材に関する条件式のみで $8N$ 個の条件式が必要となる。

設計変数についても $4N$ 個 (実際に最適解を求める場合には、設計変数として $+\Delta X, -\Delta X$ の両方を考慮しなければならないので、設計変数の数は $4N \times 2 = 8N$ 個となる) となり、シンプレックス・タブローのために必要とするマトリックスは、一般に非常に大きくなり、計算上あまり好ましいこととはいえない。そこで、つぎにこれらの設計変数の数を合理的に減少させる工夫が必要となる。

4. 部材断面の Sub-Optimization

(1) 部材の荷重と最小断面積との関係

トラス構造物の設計変数の数を減少させるため、まず部材断面に着目し、長さ L の部材が荷重 P なる圧縮荷重を受ける場合に必要とする最小断面積およびその断面寸法を求めてみよう。この場合も 2. で述べた最適設計法の考え方をそのまま適用することができる。

いま、例として箱形断面を有する圧縮材を考える (図-2 (A))。この場合の設計変数 (X) は A, B, C, D の 4 つであり、「溶接鋼道路橋設計方書」(昭和 39 年 5 月) にしたがうものとすれば、部材の設計条件式としてつぎの 3 式が得られる。

すなわち、部材の材質が SS 41 の場合は、

- ③ 許容応力度に関して
 - $0 < \frac{L}{r} \leq 110$ において

$$\sigma_{ca} \leq 1\,300 - 0.06(L/r)^2 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$
 - $\frac{L}{r} > 110$ において

$$\sigma_{ca} \leq 7\,200\,000 / (L/r)^2 \text{ (kg/cm}^2\text{)}$$
- ④ 細長比に関して
 - $\frac{L}{r} \leq 120$
- ⑤ 板厚に関して
 - 8 mm 以上または $C/40, D/40$ 以上

…(11)

ここに、 L ：部材長 (cm)、 r ：部材断面の最小断面二次半径 (cm)、 σ_{ca} ：軸方向圧縮応力度 (kg/cm²)

部材の断面積 (SA)、板厚 (t_1, t_2)、断面二次モーメント (I_X, I_Y)、許容応力度 (σ_{ca})、細長比 ($\frac{L}{r}$) などを設計変数 A, B, C, D で偏微分し、それぞれの影響係数を求めてみると、表-1 のようになる。

上記の影響係数および式 (11) を式 (10) に代入して ΔX に関する設計条件式を作成すると、次式のごとくなる。

許容応力度に関して $\sigma_{ca} - \sigma_c \geq 0$ より

$$\frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial A} \Delta A - \frac{\partial \sigma_c}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial B} \Delta B - \frac{\partial \sigma_c}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial C} \Delta C - \frac{\partial \sigma_c}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial D} \Delta D - \frac{\partial \sigma_c}{\partial D} \Delta D \times \Delta D \geq \sigma_c - \sigma_{ca}$$

細長比に関して

$$\frac{\partial \frac{L}{r}}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial \frac{L}{r}}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial \frac{L}{r}}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial \frac{L}{r}}{\partial D} \Delta D \leq 120 - \frac{L}{r}$$

板厚に関して $t_1 \geq 8 \left(\text{or } \frac{C}{40} \right)$ より

$$\frac{\partial t_1}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial t_1}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial t_1}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial t_1}{\partial D} \Delta D \times \Delta D \geq 8 \left(\text{or } \frac{C}{40} \right) - t_1$$

$t_2 \geq 8 \left(\text{or } \frac{D}{40} \right)$ より

$$\frac{\partial t_2}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial t_2}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial t_2}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial t_2}{\partial D} \Delta D \times \Delta D \geq 8 \left(\text{or } \frac{D}{40} \right) - t_2$$

……………(12)

また、最小断面積を与える断面が最も経済的であるとすれば、 ΔX に関する最小とすべき目的関数は、

$$\frac{\partial SA}{\partial A} \Delta A + \frac{\partial SA}{\partial B} \Delta B + \frac{\partial SA}{\partial C} \Delta C + \frac{\partial SA}{\partial D} \Delta D$$

……………(13)

となる。

表-1 Influence Coefficients for Compression Member (SS 41)

設計変数	A	B	C	D
項				
$SA = A \times B - C \times D$	B	A	-D	-C
$t_1 = \frac{A-C}{2}$	0.5	0	-0.5	0
$t_2 = \frac{B-D}{2}$	0	0.5	0	-0.5
$I_X = \frac{A \times B^3 - C \times D^3}{12}$	$\frac{B^3}{12}$	$\frac{3AB^2}{12}$	$-\frac{D^3}{12}$	$-\frac{3CD^2}{12}$
$I_Y = \frac{B \times A^3 - D \times C^3}{12}$	$\frac{3BA^2}{12}$	$\frac{A^3}{12}$	$-\frac{3DC^2}{12}$	$-\frac{C^3}{12}$
$r = \sqrt{\frac{I_X \text{ or } I_Y}{SA}}$	$\frac{\partial r}{\partial X} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{SA}{I}} \times \left(\frac{\partial I}{\partial X} \frac{SA - I \frac{\partial SA}{\partial X}}{(SA)^2} \right)$			
細長比 $= \frac{L}{r}$	$\frac{\partial \frac{L}{r}}{\partial X} = -\frac{\partial r}{\partial X} \frac{L}{r^2}$			
$\sigma_{ca} \leq 1\,300 - 0.06(L/r)^2$	$\frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial X} = \frac{2 \times 0.06 \times L^2 \times \frac{\partial r}{\partial X}}{r^3} \left(\text{ここに } X = A \text{ or } B \text{ or } C \text{ or } D \right)$			
$\sigma_{ca} \leq 7\,200\,000 / (L/r)^2$	$\frac{\partial \sigma_{ca}}{\partial X} = \frac{2 \times 7\,200\,000 \times r \times \frac{\partial r}{\partial X}}{L^3}$			
$\sigma_c = \frac{P}{SA}$	$\frac{\partial \sigma_c}{\partial X} = -\frac{P \times \frac{\partial SA}{\partial X}}{(SA)^2}$			

上記の条件式群 (12) を満足し、目的関数 (13) を最小にする $\Delta A, \Delta B, \Delta C, \Delta D$ の値を線型計画法のシンプレックス法 (Simplex Method) により求め、その結果を $\Delta X^{(1)}$ とし、 $X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)}$ を新しい設計変数として、目的関数 (13) が 0 に収束するまで計算をくりかえし、最小の断面積を与える設計変数 A, B, C, D を求める。以上の方法により、圧縮力 80 t を受ける部材長 5 m の圧縮部材について計算した結果を図-3 および図-4 に示す。

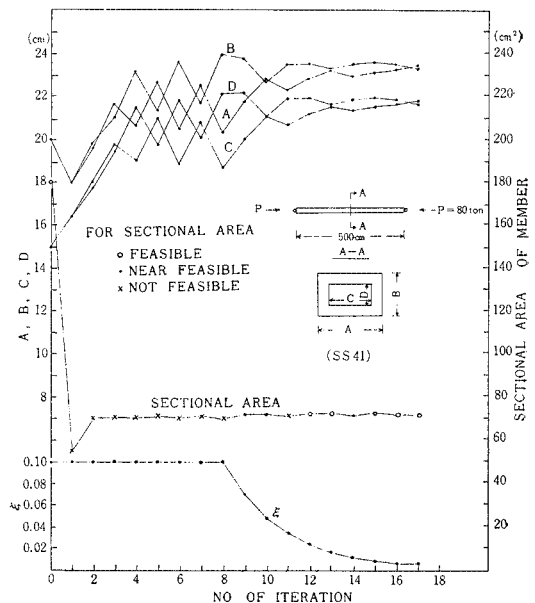


図-3 Optimization of Compression Member.

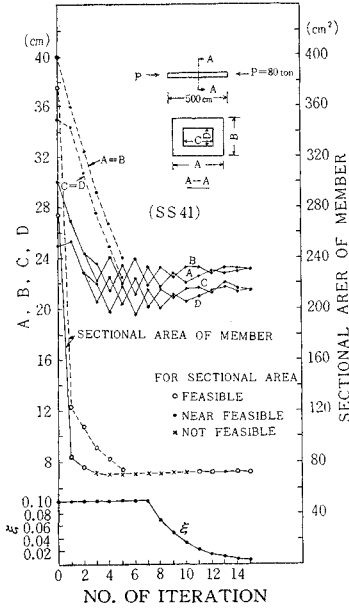


図-4 Optimization of Compression Member.

設計変数 A, B, C, D の初期値を $A=B=40\text{ cm}$, $C=D=35\text{ cm}$ とした場合, $A=B=30\text{ cm}$, $C=D=25\text{ cm}$ とした場合, $A=B=20\text{ cm}$, $C=D=15\text{ cm}$ とした場合のいずれも, 同一の最適解 $A=B=23.1\text{ cm}$, $C=D=21.5\text{ cm}$ に収斂している。また, 上記の4個の設計条件式により設計した場合, その最適な断面は $A=B, C=D$ であり, かつ, 板厚は最小板厚 (この場合 8 mm) となっている。

図-5 は 図-3 および 図-4 に示した圧縮材の断面寸法の独立な設計変数 A, B, C, D について $A=B, C=D$ とし, 設計変数を A と C の2つにまとめた場合の設計条件, 実行可能解が存在する領域, および初期値が最適解へ収斂してゆく過程を示したものである。

この図において, 曲線 I は部材の細長比に関する制約条件, 曲線 II は板厚に関する制約条件, 曲線 III は許容応力度に対する制約条件であり, 実行可能解が得られる領域は, これらの曲線 I, II, III で囲まれた斜線部分となる。これに対して, 目的関数 (断面積) の等値線は曲線 IVのごとくなり, 最適解は曲線 II と III の交点 (M) において得られ, この場合設計変数の値は, $A=23.1\text{ cm}$, $C=21.5\text{ cm}$, 曲線 IV の目的関数の値は 71.4 cm^2 となり, すべて 図-3 および 図-4 で求めた計算結果と一致している。また, 図-5 より明らかなように, この解は, 全域的な最適解であることもわかる。

このようにして, 圧縮部材の各部長および各圧縮荷重について, 設計条件をすべて満足し, かつ,

断面積が最小となる断面寸法および断面積を求めた結果を, 図-6 (a), (b) および 図-7 に示す。

図-7 に示す圧縮荷重と最小断面積の関係曲線におい

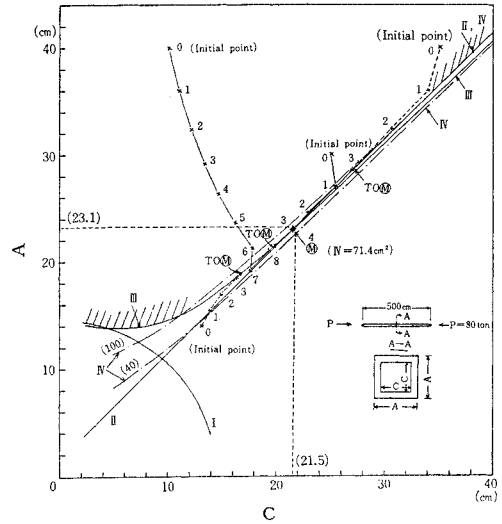


図-5 Successive Solution Points to Optimum Point (M) for Compression Member.

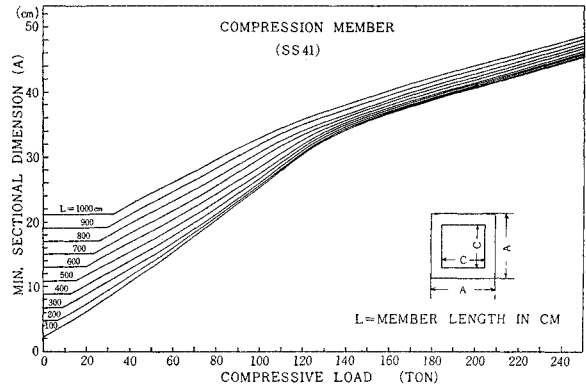


図-6 (a) Compressive Load-Min. Sectional Dimension (A) Relations for Compression Member.

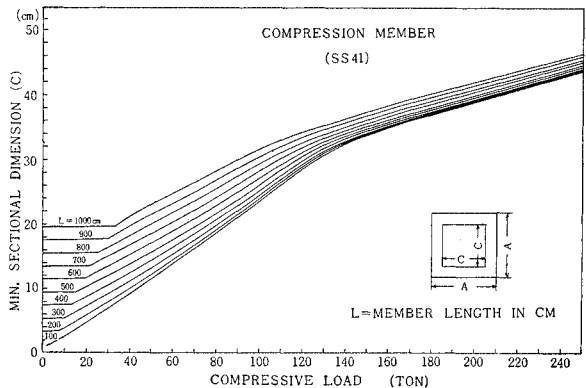


図-6 (b) Compressive Load-Min. Sectional Dimension (C) Relations for Compression Member.

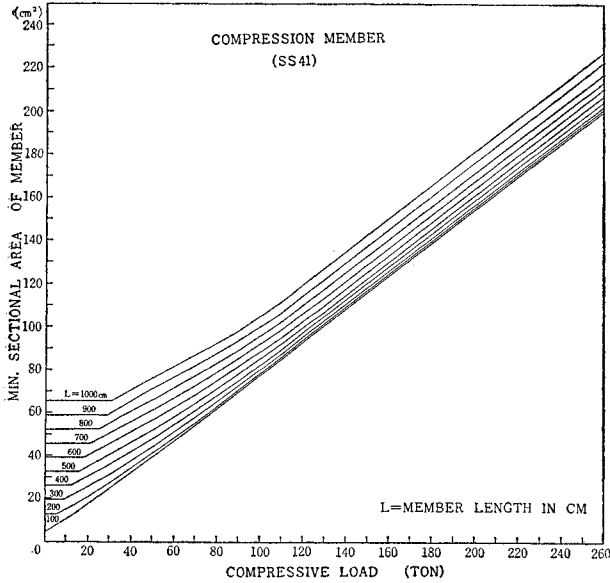


図-7 Compressive Load-Min. Sectional Area Relations for Compression Member.

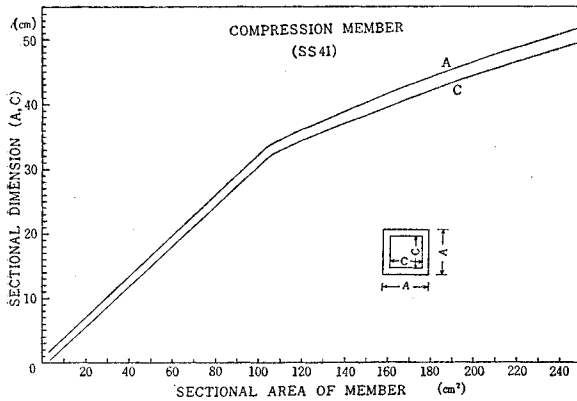


図-8 Sectional Area-Sectional Dimension Relations for Compression Member.

て、圧縮荷重が大きい場合は、最小断面は許容応力度の条件式により決定され、荷重が変化するにしたがって最小断面積も変化している。しかし、荷重が比較的小さな範囲では、最小断面は許容応力度の条件式よりも、むしろ細長比の条件式により決定され、荷重が変化しても必要とする最小断面は変化せず、一定値となっている。また、部材の断面積と断面寸法との関係を 図-8 に示す。

同様にして求めた引張材における引張荷重と最小断面積の関係曲線の例を、図-9 に示す。引張部材の場合、引張許容応力度は部材の断面寸法および部材長に関係せず一定であるので、部材の最小断面が細長比で決定される範囲以外では、最小断面積 = $\frac{P}{\sigma_{ta}}$ となっている。

また、部材の最小断面が細長比により決定される場合

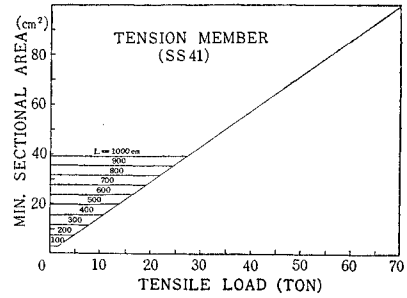


図-9 Tensile Load-Min. Sectional Area Relations for Tension Member.

(図-9 の曲線が水平である部分) の部材長と最小断面寸法および最小断面積との関係曲線を 図-10 に示す。

(2) 圧縮部材の断面積と最大許容応力度との関係式

4.(1) で求めた圧縮部材の荷重-最小断面積の関係曲線より、各断面積における最大許容応力度を求めてみると 図-11 のようになる。

図-11 に示す関係曲線群の一般式は、部材の断面積を X 、最大許容応力度を Y とすると、部材の長さによって異なるが、最大許容応力度 (Y) が $450 \sim 1290 \text{ kg/cm}^2$ ($L=100 \text{ cm}$)、 $450 \sim 1140 \text{ kg/cm}^2$ ($L=1000 \text{ cm}$) の範囲では、

$$Y = \{A(X-B)\}^{1/n} + C$$

Y がそれ以上の範囲では、

$$Y = DX + E$$

で表わすことができる。 A, B, C, n, D, E の例を表-2 に示す。このようにして求めた最大許容応力度は、各断面積における許容応力度のみならず、部材の細長比、板厚など部材に関する設計条件すべてを満足する応力度の上限を示すものである。

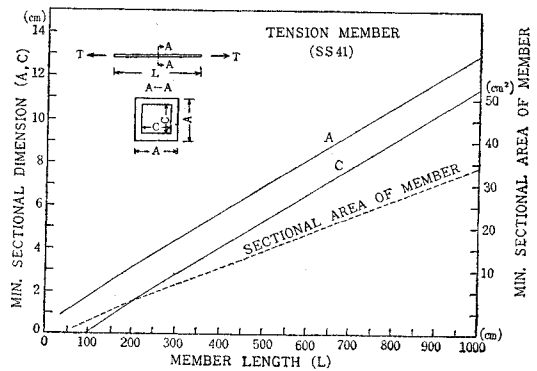


図-10 Min. Sectional Area and Sectional Dimension to Member Length Relations for Tension Member.

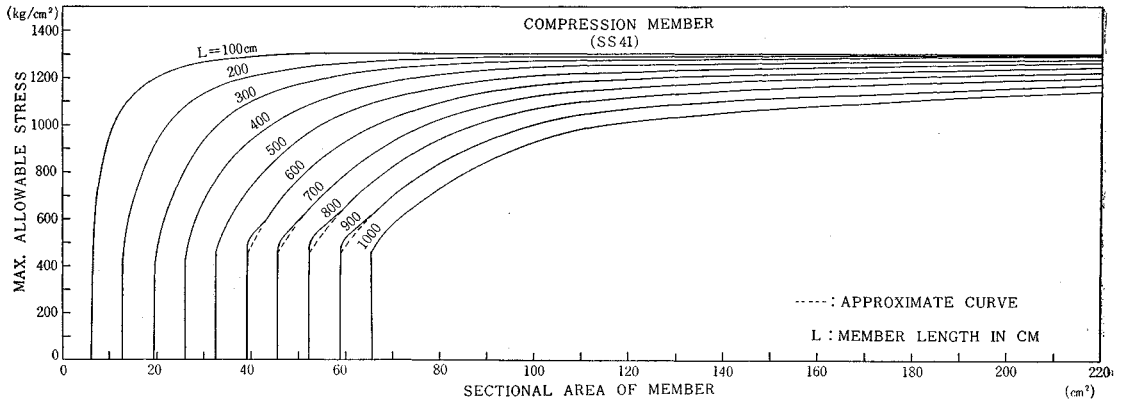


図-11 Sectional Area-Max. Allowable Stress Relations for Compression Member.

表-2 A, B, C, n, D, E of Sectional Area-Max. Allowable Stress Relations for Compression Member (SS 41)

L (cm)	X (cm ²)	A	B	C	n	D	E
300	19.43~31.20	1.85 × 10 ³	19.43	450.0	1.6	—	—
	31.20~44.21	3.4 × 10 ⁶	19.43	450.0	2.8	—	—
	44.21~65.0	1.17 × 10 ¹³	19.43	450.0	5.1	—	—
	65.0 ~115.0	5.3 × 10 ²²	19.43	450.0	11.9	—	—
	115.0 以上	—	—	—	—	0.1173	1259.09
500	32.56~45.0	3.4 × 10 ²	32.56	450.0	1.4	—	—
	45.0 ~64.77	6.8 × 10 ³	32.56	450.0	1.9	—	—
	64.77~100.0	5.1 × 10 ⁹	32.56	450.0	4.0	—	—
	100.0~160.60	5.6 × 10 ³⁴	32.56	450.0	12.7	—	—
	160.0 以上	—	—	—	—	0.2304	1208.33
800	52.19~70.0	1.23 × 10 ²	52.19	450.0	1.3	—	—
	70.0 ~95.0	2.35 × 10 ³	52.19	450.0	1.8	—	—
	95.0 ~130.0	2.50 × 10 ¹³	52.19	450.0	5.4	—	—
	130.0~209.70	1.14 × 10 ¹⁹	52.19	450.0	7.4	—	—
	209.70 以上	—	—	—	—	0.4430	1099.29

したがって、もし外力による部材の応力が、ここで得られた最大許容応力度よりも小さければ、その部材は部材に関するすべての設計条件を満足していることになる。

したがって、この断面積-最大許容応力度関係式を、先に述べた断面寸法に関する条件式群のかわりに用いることによって、4個の設計条件式を1個に減少させることができ、さらに部材断面に関する4個の設計変数をも、部材の断面積1個のみに収約して考えることができる。

このことは、線型計画法により解くために必要とするシンプレックス タブローの大きさをほぼ 1/16 に減少させ、実際の計算を行なうにあたって、同じトラスを、部材の各断面寸法をも含めた設計変数の多い状態で解くよりも、解の収斂性を大いに向上させ、計算に要する時間も非常に短縮させることができる (6. 参照)。

また、本理論により電子計算機を用いて構造物の最適設計を行なう場合、その電子計算機により扱える設計変数および設計条件式の数は、その計算機の演算装置の

中でとり得るシンプレックス タブローの大きさによって決定される。したがって、ここで導入した部材の Sub-Optimization の方法を用いることにより、同一の計算機により、ほぼ 16 倍の大きさのトラス構造物の最適問題を解くことが可能となるわけである。

このようにして、トラス構造物において、その部材の断面積および格点の座標を設計変数として、計算を行ない、各部材の最適な断面積および各格点の座標が求められれば、各部材の最適な断面寸法は、図-8 および 図-10 に示す引張部材、圧縮部材の断面積-断面寸法関係曲線より求めることができる。

なお、本節では、すべて 図-2 (a) に示す箱形断面を有する部材について、その計算例を示したが、図-2 (b) および (c) に示す I 形断面、円形断面など任意の断面形状の部材についても、全く同様にして Sub-Optimization を行なうことができる。

5. トラス構造物の状態変数および影響係数の理論式

(1) トラス構造物の状態変数の理論式

トラス構造物において、

U_1 を未知の格点変位量のマトリックス

U_2 を既知の格点変位量のマトリックス

とすれば、トラスの格点の変位量のマトリックス (U) は、

$$U = \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix}$$

で表わされる。また、

P_1 を既知の格点外力マトリックス

P_2 を未知の格点外力マトリックス

とすれば、トラスに作用する格点外力のマトリックス (P) は、

$$P = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}$$

で表わされる。いま、

α を格点の変位置量 (U) と部材の変形量 (e) との変換マトリックス

β を外力 (P) と部材力 (F) との変換マトリックス

とすれば、格点における力のつりあい方程式より、

$$P = \beta F, P_1 = \beta_1 F, P_2 = \beta_2 F \dots\dots\dots(14)$$

を得る。部材の変形量 (e) と格点変位置量 (U) との関係式は、

$$e = \alpha U = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 \dots\dots\dots(15)$$

また、部材力 (F) と部材の変形量 (e) との関係式は、

$$e = e_0 + fF \dots\dots\dots(16)$$

ただし、

$$f_i = \frac{1}{k_i} = \frac{L_i}{A_i E_i}$$

e_{0i} = 部材 i の初期変形量

L_i = 部材 i の長さ

A_i = 部材 i の断面積

E_i = 部材 i の材料の弾性係数

で表わされる。

したがって、部材力 (F) と格点変位置量 (U) との関係式は、

$$e_0 + fF = \alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 \dots\dots\dots(17)$$

となる。上式において、トラスの幾何学的形状が線形である場合には、

$$\alpha = \beta^T \dots\dots\dots(18)$$

である。変位法においてはまず未知格点位置量を求めるため、式 (17) を F について解き、その F を式 (14) に代入すると次式を得る。

$$(\beta_i k \alpha_i) U_i = P_i - \beta_i k (\alpha_2 U_2 - e_0) \dots\dots\dots(19)$$

また、部材力 (F) は、

$$F = k \alpha_i U_i + k (\alpha_2 U_2 - e_0) \dots\dots\dots(20)$$

ここに、 $k = f^{-1}$

式 (19) および式 (20) において $k(\alpha_2 U_2 - e_0)$ を部材の無載荷状態における初期部材力 (F_0) とし、この F_0 による各格点の初期格点外力を $P_{1,0}$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} F_0 &= k(\alpha_2 U_2 - e_0) \\ P_{1,0} &= \beta_1 F_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(21)$$

となり、上式を式 (19) および式 (20) に代入すると次式を得る。

$$(\beta_i k \alpha_i) U_i = P_i - P_{1,0} \dots\dots\dots(22)$$

$$F = k \alpha_i U_i + F_0 \dots\dots\dots(23)$$

いま、 $P_{1,0} = F_1 = 0$ とすれば、

$$U_i = (\beta_i k \alpha_i)^{-1} P_i = K^{-1} P_i \dots\dots\dots(24)$$

$$F = k \alpha_i U_i \dots\dots\dots(25)$$

となる。ここに

$$K = \beta_i k \alpha_i \left\{ \begin{array}{c} \left[\begin{array}{ccc} k_i & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & k_n \end{array} \right] \left(k_i = \frac{A_i E_i}{L_i} \right) \end{array} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

n : トラスの部材数

(2) トラス構造物の影響係数の理論式

5. (1) で導入したトラスの状態変数 U_i および F の設計変数 (X_i) に対する「影響係数」を求めるための理論式は、式 (24), (25), (26) よりつぎのように導くことができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} &= \frac{\partial K^{-1}}{\partial X_i} P_i \\ \frac{\partial F}{\partial X_i} &= \frac{\partial k}{\partial X_i} \alpha_i U_i + k \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} U_i + k \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial K^{-1}}{\partial X_i} &= -K^{-1} \frac{\partial K}{\partial X_i} \cdot K^{-1} \\ \frac{\partial K}{\partial X_i} &= \frac{\partial \beta_i}{\partial X_i} k \alpha_i + \beta_i \frac{\partial k}{\partial X_i} \alpha_i + \beta_i k \frac{\partial \alpha_i}{\partial X_i} \end{aligned} \right\}$$

上式中の X_i に関する各影響係数は、設計変数 (X_i) の性質によりそれぞれ異なった計算式を用いなければならない。

すなわち、設計変数としてトラスの各部材の断面積 (A_i) を考える場合には、トラス部材の結合状態および方向余弦のみに関係するマトリックス α_i, β_i の影響係数はすべて 0 となり、 $\frac{\partial U_i}{\partial X_i}, \frac{\partial F}{\partial X_i}$ は次式のように簡単にすることができる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U_i}{\partial X_i} &= \beta_i \frac{\partial k}{\partial X_i} \alpha_i \\ \frac{\partial F}{\partial X_i} &= \frac{\partial k}{\partial X_i} \alpha_i U_i + k \alpha_i \frac{\partial U_i}{\partial X_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $\frac{\partial k}{\partial X_i}$ は式 (29) に示すように、着目している部材 i に関する項のみ 0 でなく、他の要素はすべて 0 となるマトリックスとなる。

$$\frac{\partial k}{\partial X_i} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & \textcircled{2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{E_i}{L_i} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{array} \right) \dots\dots\dots(29)$$

つぎに、トラスの各格点の座標 (x, y) を設計変数と考えた場合における影響係数を求めてみよう。

トラスの各部材の長さおよび方向余弦は格点の座標 (x, y) の関数であり、図-12 に示すごとく部材 i の \oplus の格点を m , \ominus の格点を n とすると、部材長 L_i および方向余弦 r_{xi} および r_{yi} は次式で表わされる。

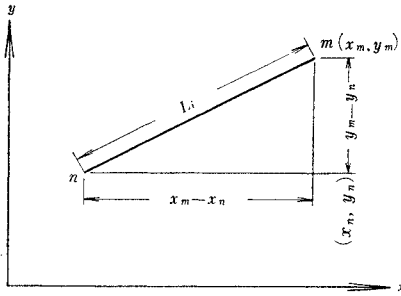


図-12 *i* th Member.

$$\left. \begin{aligned} L_i &= \sqrt{(y_m - y_n)^2 + (x_m - x_n)^2} \\ r_{xi} &= \frac{x_m - x_n}{L_i} \\ r_{yi} &= \frac{y_m - y_n}{L_i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

いま、格点 *m* の *y* 座標 (*y_m*) を設計変数と考える場合には、部材 *i* に関する *L_i*, *r_{xi}*, *r_{yi}* および *k_i* の *y_m* に関する影響係数 $\frac{\partial L_i}{\partial y_m}$, $\frac{\partial r_{xi}}{\partial y_m}$, $\frac{\partial r_{yi}}{\partial y_m}$, $\frac{\partial k_i}{\partial y_m}$ はそれぞれ次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial y_m} &= \frac{y_m - y_n}{L_i} \\ \frac{\partial r_{xi}}{\partial y_m} &= -\frac{(x_m - x_n)(y_m - y_n)}{L_i^3} \\ \frac{\partial r_{yi}}{\partial y_m} &= \frac{L_i^2 - (y_m - y_n)^2}{L_i^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(31)$$

したがって、

$$\frac{\partial k_i}{\partial y_m} = \frac{\partial \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \right)}{\partial y_m} = -\frac{A_i E_i (y_m - y_n)}{L_i^3}$$

また、格点 *n* の *y* 座標 (*y_n*) を設計変数と考えた場合、部材 *i* の *y_n* に関する影響係数は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial y_n} &= -\frac{(y_m - y_n)}{L_i} \\ \frac{\partial r_{xi}}{\partial y_n} &= \frac{(x_m - x_n)(y_m - y_n)}{L_i^3} \\ \frac{\partial r_{yi}}{\partial y_n} &= \frac{-L_i^2 + (y_m - y_n)^2}{L_i^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(32)$$

したがって、

$$\frac{\partial k_i}{\partial y_n} = \frac{\partial \left(\frac{A_i E_i}{L_i} \right)}{\partial y_n} = \frac{A_i E_i (y_m - y_n)}{L_i^3}$$

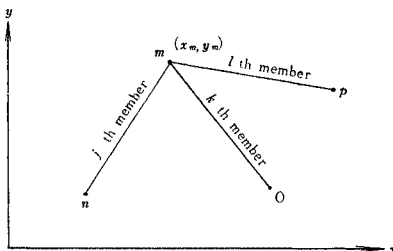


図-13 Members Connected to *m* th Panel Point.

となる。上記の影響係数は格点：*m* (または *n*) に接続しているすべての部材について求められる。したがって図-13のごとく格点 *m* に部材 *j*, *k*, *l* が接続している場合の $\frac{\partial k}{\partial y_m}$ マトリックスは、部材 *j*, *k*, *l* に関してそれぞれ $\frac{\partial k_j}{\partial y_m}$, $\frac{\partial k_k}{\partial y_m}$, $\frac{\partial k_l}{\partial y_m}$ を有し、他の部材に関しては 0 となるマトリックスとなる。

すなわち、

$$\frac{\partial k}{\partial y_m} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \frac{\partial k_j}{\partial y_m} & & \vdots \\ & & 0 & \\ & & & \frac{\partial k_k}{\partial y_m} & \\ & & & & 0 \\ & & & & & \frac{\partial k_l}{\partial y_m} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(33)$$

同様に、 $\frac{\partial \alpha_i}{\partial y_m}$, $\frac{\partial \beta_i}{\partial y_m}$ マトリックスも、部材 *j*, *k*, *l* に関する項のみ $\frac{\partial r_{xy}}{\partial y_m}$ を有するマトリックスとなる。設計変数が格点の *X* 座標である場合も、全く同様にして式 (30) よりその影響係数を求めることができる。

すなわち、格点 *m* の *x* 座標 (*x_m*) を設計変数と考える場合には、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial x_m} &= \frac{x_m - x_n}{L_i} \\ \frac{\partial r_{xi}}{\partial x_m} &= \frac{L^2 - (x_m - x_n)^2}{L_i^3} \\ \frac{\partial r_{yi}}{\partial x_m} &= -\frac{(y_m - y_n)(x_m - x_n)}{L_i^3} \\ \frac{\partial k_i}{\partial x_m} &= \frac{A_i E_i (x_m - x_n)}{L_i^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(34)$$

格点 *n* の *x* 座標 (*x_n*) を設計変数と考える場合には、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial x_n} &= -\frac{x_m - x_n}{L_i} \\ \frac{\partial r_{xi}}{\partial x_n} &= \frac{-L^2 + (x_m - x_n)^2}{L_i^3} \\ \frac{\partial r_{yi}}{\partial x_n} &= \frac{(y_m - y_n)(x_m - x_n)}{L_i^3} \\ \frac{\partial k_i}{\partial x_n} &= -\frac{A_i E_i (x_m - x_n)}{L_i^3} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(35)$$

以上の影響係数を計算するにあたっては、考えている格点が各部材の⊕の格点か、あるいは⊖の格点であるかについて十分注意しなければならない。

6. 線型計画法の利用および結果の収斂性について

4. で導入した部材の断面積-最大許容応力度関数および 5. で求めたトラスの状態変数および影響係数の理論式を用い、2. で述べた計算の流れ図にしたがって、部材の許容応力度および節点の変位などについて、 ΔX_i に関

する制約条件式群を作成し、線型計画法のシンプレックス法を利用してこれらの不等式群を解き、 $\Delta X^{(1)}$ を求め $X^{(2)} = X^{(1)} + \Delta X^{(1)}$ として計算をくりかえすことによって最適の設計変数 (X) を求めることができる。

ところで、トラス構造物のように、その状態変数 (Y) および目的関数 (M) が、設計変数 (X) の非線型な関数である場合には、影響係数 $\left(\frac{\partial Y}{\partial X}, \frac{\partial M}{\partial X}\right)$ の値は、 X の値により変化し、 $\frac{\partial Y}{\partial X}$ および $\frac{\partial M}{\partial X}$ は、 X の近傍においてのみ十分な精度をもって適用することができる (図-14 参照)。

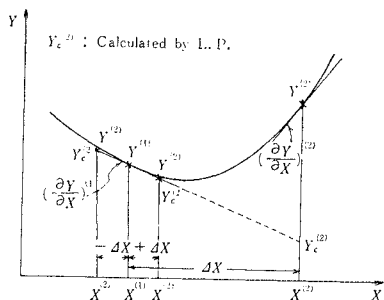


図-14 Influence Coefficient.

しかし、式 (10) の ΔX に関する設計条件式群は、すべて ΔX の線型な関数であり、 $\frac{\partial Y}{\partial X}, \frac{\partial M}{\partial X}$ の値は、 ΔX の値にかかわらず一定としている。したがって、影響係数の値が、 X の微小変化により大きく変化するような関数の場合には、式 (10) の設計条件式群のみから ΔX を求め、 $X^{(i+1)} = X^{(i)} + \Delta X^{(i)}$ として計算をくり返しても、 X および Y の値は最適解に収斂せず、振動または発散して、最適解が得られないことが多い。このような場合には、 X および Y の最適解への収斂性をよくするため、式 (10) の設計条件式群に、さらに、各計算サイクルにおいて、 ΔX のとり得る最大または最小の範囲をある限度の大きさに制限する条件式群

$$-\varepsilon X_i \leq \Delta X_i \leq \varepsilon X_i \dots \dots \dots (36)$$

を加える必要がある。また、構造物によっては、目的関数 (M) が最適解に近づくにしたがって、上式の ε をしだいに小さくしていく方が、よりよい収斂を示す場合がある。

たとえば、部材断面の Sud-Optimization において (図-4)、初期値を $A=B=30$ cm, $C=D=25$ cm とし、式 (36) の ε を 0.1 とすると、3 サイクルでほぼ最適解に近づいている。しかし、その後 ε を変えずにさらに 4 サイクルくりかえしても、 A, B, C, D の値は最適解のまわりを振動し、最適解に収斂しない。また、各サイクルにおける A, B, C, D の値はいずれも最適解に近い値ではあるが、設計条件式をすべて満足しているとはいえず、実行不可能な解である。

そこで、8 サイクル目から各サイクルごとに ε を漸次小さくしていくと、 A, B, C, D の値はしだいに最適解に収斂し、11 サイクル目で実行可能解を得、以後実行可能解が続き、15 サイクル目で最適解を得ることができた。

また、図-19 に示すトラスの計算例においても、 $\varepsilon = 0.2$ とすると、4 サイクルでほぼ最適解に近づき、その後 ε を変えずにさらに 6 サイクルくりかえしても、設計変数 A, B および Y は最適解のまわりを振動し、かつ徐々にではあるが発散し始めている。そこで 11 サイクルより ε を漸次小さくしていくと、再び最適解に収斂し始め、13 サイクルで実行可能解を得、以後最適解とほぼ等しい解が続いている。

このように、最適解への収斂性をよくするためには、電子計算機のプログラムの作成にあたって、各計算サイクルの結果の収斂状態を検査しながら、 ε を変化させ得るように、プログラムを作成することが望ましい。

ところで、上記の圧縮部材の例について断面寸法を $A=B, C=D$ とし、設計変数を A と C の二つにまとめた場合は (図-5 参照)、上記の例と同じ初期条件を与えた場合でも、わずかに 4 サイクルで同一の最適解に達している。また、この場合は、 ε の値を各サイクルごとに修正する必要は生じなかった。

この圧縮部材の二つの例を比較して明らかなように、同一の最適問題においては、設計変数の数を少なくすればするほど、解の収斂性がよくなることが考えられる。

7. 計 算 例

つぎに、上記の理論を適用したトラス計算例について述べる。なお、以下に述べるすべてのトラスの材質は SS 41、部材の断面は箱形断面とし、目的関数としてはトラスの重量のみを考え、最小重量を与える設計が最も経済的であると仮定し計算を行なった。

例 1: 図-15 に示すトラスの各部材の断面積を設計変数とし、部材応力の制約条件のみから最適部材断面を求めた結果を 図-15 に示す。初期の部材断面積を極端に変え、 $A=B=C=100$ cm² とした場合および $A=200$ cm², $B=100$ cm², $C=50$ cm² とした場合ともに同一結果を得、全般的な最適解を得たことがわかる。また、最適解では部材②の断面積は 0 となり、不必要であることもわかる。

例 2: 例 1 のトラスで、応力の制約条件に、さらに格点 1 の X 軸および Y 軸方向の変位を 4 mm 以内に制限する制約条件を追加した場合の計算結果を 図-16 に示す。この場合は、格点 1 の X 軸方向の変位の制限がもっともきびしい条件となり、したがって、部材の断面もこの条件により決定され、部材①および③の断面積は例 1

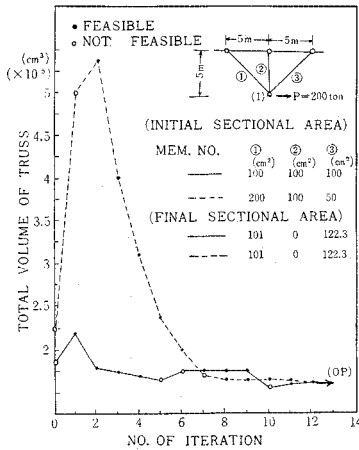


図-15 Three Bar Truss-Stress Constrained.

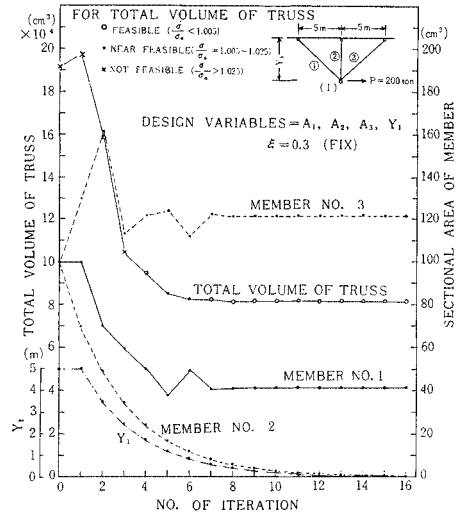


図-17 Three Bar Truss-Stress Constrained.

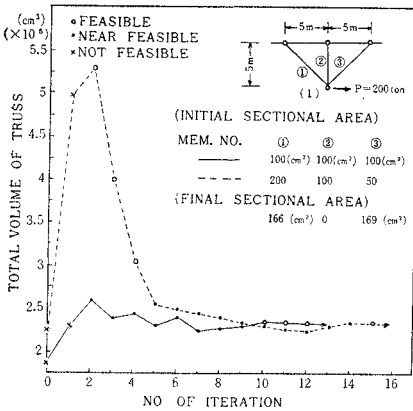


図-16 Three Bar Truss-Stress and Displacement Constrained.

の結果より相当大きくなり、応力に関しては余裕のある断面となっている。しかし、この場合も最適解では例 1 と同様に、部材②の断面積は 0 となり不必要となっている。また、初期の断面積を極端に変えても同一結果に達し、全域的な最適解を得たことがわかる。

例 3：例 1 のトラスで、部材の断面積 (A_i) のみならず、格点 1 の Y 座標 (Y_1) をも設計変数とし、最適の A_i および Y_1 を求めた結果を図-17 に示す。この例では最適解に近づくにしたがって Y_1 および A_2 はしだいに 0 に近づき、最適解では Y_1, A_2 ともに 0 となっている。この結果は一見して全域的な最適解であることがわかる。また、 $\xi=0.3$ とし、各サイクルを通して一定とした。この例のように格点の座標が設計変数の場合には、各格点の座標は各サイクルごとに変化し、それにしたがってその格点に接続している部材の長さも変化する。このような場合には各計算サイクルごとに異なった任意の部材長における断面積-最大許容応力度関数が必要となるが、それは図-11 の関係曲線群より補間法を用いて計算することができる。

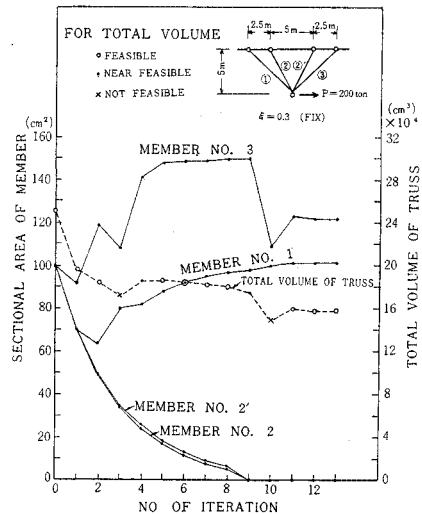


図-18 Four Bar Truss-Stress Constrained.

例 4：図-15 に示すトラスの部材②のかわりに図-18 の部材②および②'を加えたトラスについて各部材の断面積のみを設計変数とし、部材応力の制約条件のみから最適部材断面を求めた結果を図-18 に示す。この場合においても部材②および②'は一樣に減少してゆき、最終的には 0 となり、例①で求めた最適解と同一となっている。この場合 $\xi=0.3$ とし、各サイクルを通じて一定とした。

例 5：図-19 に示すような 2 本の部材を有するトラスが、垂直荷重 100t を受ける場合、各部材の断面積および格点①の Y 座標を設計変数とし、最適な部材断面および格点①の Y 座標を求めた結果を図-19 に示す。この場合 ξ を 0.2 とし一定とすると、4 サイクルでほぼ最適解に達するが、その後は最適解のまわりを振動しか

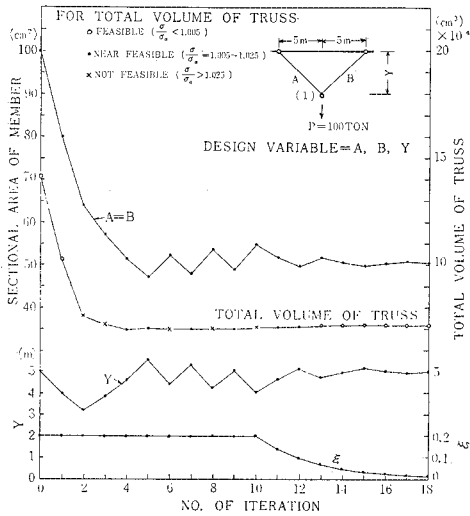


図-19 Two Bar Truss-Stress Constrained.

つ徐々に発散を始めている。そこで、11 サイクルより ϵ を漸次小さくすることにより、13 サイクルで実行可能解を得、最適解では $A=B=50.6 \text{ cm}^2$ 、 $Y=500 \text{ cm}$ となっている。この最適解の結果を検討するため、図-19 のトラスの Y 座標とトラスの必要最小の容積との関係曲線を求めてみると、図-20 のごとくになり、Y 座標が 500 cm、断面積 $A=B=50.6 \text{ cm}^2$ のとき最小の容積を示し、上記の最適解が全域的な最適解であることが確認できる。

8. 結 論

本論文において、部材断面の Sub-Optimization, 変位法, 影響係数および線型計画法を用いて、トラス構造物の最適部材断面（剛度, 断面寸法）および最適構造形状（格点の座標）を、電子計算機により自動的に決定する方法およびその計算例を示したが、本研究によりつぎのことながら明らかとなった。

(1) トラスの計算例および部材断面の Sub-Optimization の計算結果などより、設計変数の数が比較的小さいトラス構造物や部材断面においては、本理論により全域的な最適解を得ることができる。

(2) 本理論においては、最適設計のために不必要となるトラス構造物の部材の断面積は、自動的に 0 とすることができる。しかし、最適設計のために必要となる部材を、自動的に新しく追加することはできない。したがって、構造物の最適設計を行なう場合には、まず最初に設計条件の許す範囲で考えられるすべての部材を仮定し、計算を行なうことが望ましい。

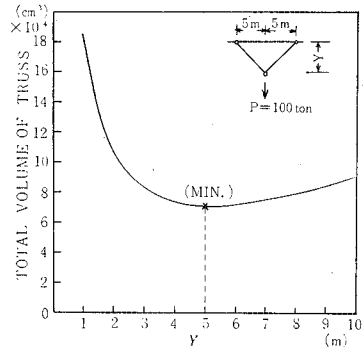


図-20 Volume of Two Bar Truss.

(3) 部材断面の Sub-Optimization を行ない、部材の断面積-最大許容応力度関係式を導入することによって、部材断面の設計変数および設計条件式を、一部材につき 1 個にまで少なくすることができ、最適解への収斂性をよくし、計算時間を短縮することができる。さらに、同一の計算機で、より複雑な大きな構造物を解くことが可能となる。

(4) 部材断面の Sub-Optimization により導入した、圧縮部材の各部材長における荷重と最小断面寸法および断面積との関係曲線（図-6 (a), (b), 図-7), 断面積と断面寸法との関係曲線（図-8）および引張部材の部材長と最小断面寸法および断面積との関係曲線（図-10）などは、実際の溶接鋼道路トラス橋の部材断面を設計する場合、きわめて有用であると考えられる。

(5) 構造物によっては、最適解を得るために、設計条件式群に、さらに設計変数の変化量 (dX) をある限度に制限する条件式群（式 (36)）をも追加することが必要となり、さらに最適解に近づくにしたがって、その制限を小さくしてゆくことが必要となる場合がある。

おわりに、本研究の計算には、愛媛大学に設置されている HIPAC-103 を使用した。計算に際して協力頂いた計算機室の方々に謝意を表したい。

参 考 文 献

- 1) Okubo, S.: "Optimum Design of Composite Plate Girder Superstructures", C.E. Thesis M.I.T., Sept. 1965
- 2) 大久保禎二: "構造物の最適設計法について", 土木学会第 21 回年次学術講演会, 昭和 41 年
- 3) Cornell, C.A., Reinschmidt, K.F., Brochie, J.F.: "Structural Optimization", R 65-26 Department of Civil Engineering, M.I.T., Sept. 1965
- 4) Dantzig, G.B.: "Linear Programming and Extensions", Princeton University Press, 1963
- 5) 三根久著: "オペレーションズリサーチ", 上巻, 朝倉書店, 昭和 41 年, pp. 15-79

(1969.10.31・受付)