

剛床上で圧縮されるリンクの飛移座屈理論

SNAP-THROUGH BUCKLING OF LINK LAID ON RIGID FLOOR

川 口 昌 宏*
By Masahiro Kawaguchi

1. 序 論

舗装の座屈は、一種の飛移座屈であると考えられる¹⁾。代表的な飛移座屈としては、外圧による球殻、円錐殻などの座屈が知られている。これを理論的に取扱う方法としては、いわゆる古典的固有値問題による方法のほか、有限変形理論によって、外力とたわみの関係線図の極大点を求め、これを上座屈値とする方法、あるいはエネルギーを追跡して、座屈前後のエネルギーが等しいような状態があれば飛移座屈するという条件より、下限座屈値を求める方法が使われている²⁾。

しかし、舗装のように、一般に床の上に水平に置かれていて初期曲率がなく、圧縮によって持ち上がるような場合には、殻の場合と異なってくる。すなわち、舗装のような場合には、殻の飛移座屈における上座屈値を求めることができず、また通常の固有値問題ともならないので、残された方法として、エネルギー的考察が必要になる。

舗装の座屈を取扱った前論文では、この点について説明不足であり、また固有値問題に相当すると考えられるたわみに関する方程式の解の存在条件より求めた座屈荷重の下限と、エネルギー的にみた下限座屈値との関連についても明らかになっていない。

そこで、曲げ剛性無限大の棒 2 本をヒンジで連らねた簡単な構造によって、舗装のような場合の飛移座屈に関するこれらの問題を明らかにする。

2. 基礎方程式

図-1(a)のようなリンクが剛壁の間で圧縮され、中央を Q なる力で押しつけられている。床は剛である。座屈によってリンクは C だけ持ち上がり、軸力は P から P_A に減少する。

このときのつりあい条件は

$$Q = 2 P_A \sin \alpha \dots\dots\dots(1)$$

$$\sin \alpha = C / \sqrt{l^2 + C^2} \dots\dots\dots(2)$$

適合条件は

$$\sqrt{l^2 + C^2} - l = \frac{P - P_A}{EA} l \dots\dots\dots(3)$$

これらからは、

$$\sqrt{l^2 + C^2} (Q/2 C + EA/l) = P + EA \dots\dots\dots(4a)$$

これを無次元化し、 $v^2 \ll 1$ であるから、

$$\left. \begin{aligned} q/2 v + v^2/2 = p \\ v = C/l, q = Q/EA, p = P/EA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4b)$$

系の座屈前後のポテンシャル エネルギーは

$$\left. \begin{aligned} U &= \frac{P^2}{2EA} \times 2l \\ U_A &= \frac{P_A^2}{2EA} \times 2l + QC \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5a)$$

無次元表示して、

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U}{EA l} = \left(\frac{P}{EA}\right)^2 = p^2 \\ u_A &= \frac{U_A}{EA l} = \left(\frac{P_A}{EA}\right)^2 + \left(\frac{Q}{EA}\right)\left(\frac{C}{l}\right) = p_A^2 + q \cdot v \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5b)$$

ただし

$$p_A = p - \frac{1}{2} v^2 \dots\dots\dots(6)$$

3. 限界荷重

式(4)を、 p, q をパラメーターとする v に関する方

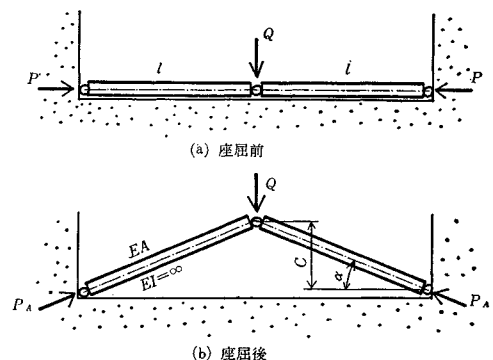


図-1 リンクの飛移座屈による持ち上がり

* 正会員 工博 日本大学講師 理工学部交通工学科

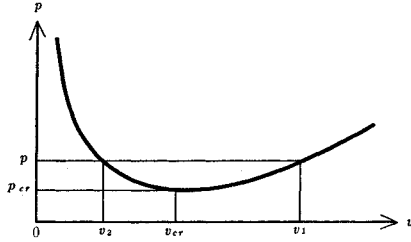


図-2 $p = \frac{q}{2v} + \frac{v^2}{2}$

程式と考えれば、与えられた q に対して、解が存在するために必要な p の最小値が求められる (図-2)。これを座屈荷重の下限 P_{cr} と呼ぶ¹⁾。

極小点は

$$\frac{dp}{dv} = -q/2v^2 + v = 0$$

から、

$$v_{cr} = (q/2)^{1/3} = 0.794 q^{1/3} \dots \dots \dots (8)$$

$$p_{cr} = 1.5(q/2)^{2/3} = 0.943 q^{2/3} \dots \dots \dots (9)$$

つぎに、つりあい条件と適合条件とを満足する (q, p, v) のポテンシャル エネルギーについて調べる。式 (4b) および (6) より $p_A = q/2v$ を考慮して、座屈前後のポテンシャル エネルギーの差 ($d = u - u_A$) を求める。

$$d = (q/2v + v^2/2) - \{(q/2v)^2 + qv\} = v(v^3 - 2q)/4 \dots \dots \dots (10)$$

これによれば、

$$v > v_e = (2q)^{1/3} \dots \dots \dots (11)$$

の場合にはじめて、持ち上がった場合の方がポテンシャル エネルギーが低く、水平のつりあい状態に比較して、持ち上がった方が安定なつりあい状態となる。このときの軸力 p_e は、下限座屈値であり

$$p_e = (v_e^3 + q)/2v_e = 1.19 q^{2/3} \dots \dots \dots (12)$$

よって、下限座屈値と座屈荷重の下限の比は、つぎのように一定である。

$$\lambda = p_e/p_{cr} = 1.26 \dots \dots \dots (13)$$

以上の計算を殻の場合と比較してまとめれば、下限座屈値は殻の場合と同じように存在し、解の存在条件より求めたいゆる座屈荷重の下限より 1.26 倍大きい。上座屈値は 図-2 にみるように存在しない。

4. 持ち上がり過程のエネルギー変化

3. で求めた下限座屈値は、持ち上がり前後のポテンシャル エネルギー レベルが等しくなる場合である。この様子を p, q を与えて v を次第に大きくしていったときのエネルギー変化を追跡することによって明らかにする。

v だけ持ち上がった場合の軸力は式 (6) であるから、持ち上がり後のポテンシャル エネルギーは式 (5 b) から

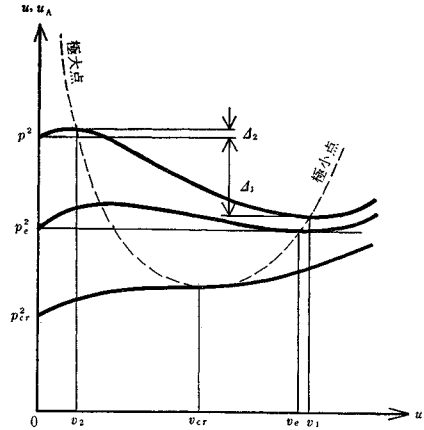


図-3 持ち上がり過程のエネルギー変化

$$u_A = p^2 - pv^2 + \frac{v^4}{4} + qv \dots \dots \dots (14)$$

u_A は 図-3 に示すように、 p が p_{cr} より大きい場合に、極大点と極小点を持つ。極点を求めるために式 (14) を v で微分すれば、

$$\frac{du_A}{dv} = v^3 - 2pv + q = 0$$

これは式 (4 c) に等しい。すなわちつりあい式を満足するたわみは、ポテンシャル エネルギーを極値にしている (ポテンシャル エネルギー最小の原理)。

図-3 の d_1, d_2 は式 (10) で示される持ち上がりの前と後とのエネルギーの差である。ところで、 $v_2 < v_{cr} < v_e$ であるから

$$d_2 = v_e(v_e^3 - 2q)/4 < 0$$

つまり、持ち上がりに際しては必ず $|d_2|$ のエネルギーの山を越えなければならない。このように越えなければならないエ

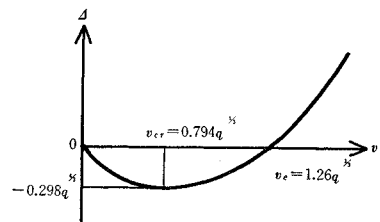


図-4 座屈前後のエネルギーの差 $d = u - u_A$

ネルギーの山が、 p が大きくなって必ず存在することは、たとえば外圧による部分球殻の飛移の場合にはみられないことである。これは、殻での上座屈値がこの場合には存在しないということから起こる。

式 (10) を図示すれば、図-4 となり極値は $v = v_{cr}$ で生ずる。

5. 数値計算例

例として、コンクリート ブロック (高さ 20 cm, 幅 100 cm, 長さ 5 m) 2 枚をヒンジで連らねて、これを圧縮したときの持ち上がり座屈を調べる。ただし曲げ剛性は無限大としている (ちなみに曲げ剛性を考えたときに

は、死荷重による曲げたわみはほぼ $0.4 \times 10^{-3} l$ である。
 また一枚のブロックのオイラー荷重は約 800 t である。

$$E = 3.0 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$A = 20 \times 100 \text{ cm}^2$$

$$l = 500 \text{ cm}$$

$$Q = Al \times 2.3 \times 10^{-3} \times 2 \times \frac{1}{2} = 2.3 \times 10^3 \text{ kg}$$

Q としては死荷重を考え、それが中央ヒンジに半分加わると考える。

$$q = Q/EA = 3.8 \times 10^{-6}$$

式 (8), (9) から座屈荷重下限は

$$v_{cr} = 1.23 \times 10^{-2}, C_{cr} = v_{cr} l = 6.15 \text{ cm}$$

$$p_{cr} = 2.30 \times 10^{-4}, P_{cr} = 138 \text{ t}, \sigma_{cr} = 69 \text{ kg/cm}^2$$

また下限座屈値については

$$C_e = 10.1 \text{ cm}, P_e = 174 \text{ t}, \sigma_e = 87 \text{ kg/cm}^2$$

これによれば、熱膨張係数を $1.0 \times 10^{-5}/^\circ\text{C}$ とすれば約 30°C で、このリンクは座屈することになる。

ただし、エネルギーの山を越えるために、何らかの方法で付加しなければならぬエネルギー d_2 は

$$|d_2| = 1.3 \times 10^{-8}$$

この値は、座屈前のエネルギー u に対して

$$\frac{|d_2|}{u} = \frac{|d_2|}{p^2} = 0.25$$

となり、かなり大きい値である。たとえば座屈時の軸力を約 12% 増加したことに相当する。したがって下限座屈値は、座屈の可能性を示す安全側の値である。

6. 圧縮力を加える持具の剛性の影響

(1) 条件式

図-5 のように、ばね μ (kg/cm) を加えた場合の基本式を考えると式 (3) に相当する適合条件式および式 (5) に対応するエネルギーは

$$\left. \begin{aligned} 2(\sqrt{l^2 + C^2} - l) &= \frac{P - P_A}{EA} \times 2l + \frac{P - P_A}{\mu} \\ U_A &= \frac{P_A^2 l}{2EA} \times 2 + \frac{P_A^2}{2\mu} + QC \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

となるので、

$$r = 1 + EA/2\mu l$$

として式を整理すれば、2. に示した式が r によって少々かわって

$$\left. \begin{aligned} p_A &= p - \frac{1}{r} \frac{v^2}{2} \\ q/2 v + v^2/2 r &= p \\ u &= p^2 r \\ u_A &= p_A^2 r + qv \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

(2) 限界荷重

座屈荷重の下限は、

$$\frac{dp}{dv} = 0$$

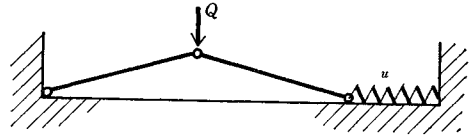


図-5 持具のばね作用

から、

$$\left. \begin{aligned} v_{cr} &= 0.794 q^{1/3} \cdot r^{1/3} \\ p_{cr} &= q/2 v_{cr} + v_{cr}^2/2 r = 0.943 q^{2/3} \cdot r^{-1/3} \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

下限座屈値

$$d = v_e(v_e^3 - 2r q)/4r = 0$$

より、

$$\left. \begin{aligned} v_e &= 1.26 q^{1/3} \cdot r^{1/3} \\ P_e &= 1.19 q^{2/3} \cdot r^{-1/3} \end{aligned} \right\} \dots (18)$$

(3) 数値計算

5. でとりあげた例において、軸力 1 t をあたり 1/100 mm の変形を生ずるループ力計を 図-5 のように加えた」とすると、

$$\mu = 10^6 \text{ kg/cm}$$

$$r = 1 + EA/2\mu l = 1.6$$

$$r^{1/3} = 1.17$$

$$r^{-1/3} = 0.855$$

したがって、限界荷重は 15% 減、持ち上がりは 17% 増となる。

7. 初期変形の影響

(1) 条件式

図-6 の C_0 のごとき初期変形がある場合には、適合条件は

$$\sqrt{l^2 + C^2} - \sqrt{l^2 + C_0^2} = \frac{P - P_A}{EA} \sqrt{l^2 + C_0^2} \dots (19)$$

ここで $v_0^2 \ll 1$ を考慮に入れて

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{P}{EA} + \frac{v_0^2}{2} &= p, \quad \frac{P_A}{EA} = p_A, \quad \frac{Q}{EA} = q, \\ v &= \frac{C}{l}, \quad v_0 = \frac{C_0}{l} \end{aligned} \right\} \dots (20)$$

と置き、式 (19) を変形すれば、基礎方程式は式 (4 b) と全く一致する。

ポテンシャル エネルギーは、床を基準にすれば

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{U}{EA l} = (p - v_0^2/2)^2 \\ u_A &= \frac{U_A}{EA l} = p_A^2 + q(v - v_0) \end{aligned} \right\} \dots (21)$$

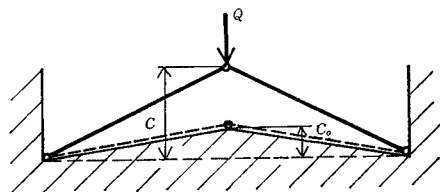


図-6 初期変形 C_0 がある場合

(2) 限界荷重

基礎方程式は式(4b)と全く一致するので、座屈荷重の下限は式(9),(20)から

$$p_{cr} = \frac{P_{cr}}{EA} = 0.942 q^{2/3} - 0.5 v_0^2 \dots\dots\dots(22)$$

これより $v_0 = 1.37 q^{1/3}$ のとき $P_{cr} = 0$ である。

つぎに下限座屈値を求める。式(4b),(6),(21)などから

$$\begin{aligned} \Delta &= (p - v_0^2/2)^2 - \{(p - v^2/2)^2 + q(v - v_0)\} \\ &= \frac{q}{2v} (v^2 - v_0^2) + \frac{1}{4} (v^2 - v_0^2)^2 - q(v - v_0) \end{aligned}$$

下限座屈を生ずるたわみ v_e は $\Delta = 0$ より求められる。すなわち

$$\begin{aligned} v_e^4 + v_0 v_e^3 - v_0^2 v_e^2 - (v_0^3 + 2 q v_0^2 + 2 q) \\ \times v_e + 2 q v_0 = 0 \dots\dots\dots(23) \end{aligned}$$

v_e が求められれば

$$p_e = \frac{P_e}{EA} = \frac{q}{2v_e} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{v_0^2}{2} \dots\dots\dots(24)$$

偏心圧縮の場合は、図-7のごとく、偏心圧縮を初期変形としてあつかうことができる。

(3) 数値計算例

5. でとりあげた例について、初期変形の影響を調べ、その結果を表-1に示す。持ち上がり v_e は、初期変形によって減少する。

表-1 初期変形の影響
(水平の場合を1.00とする)

初期変形	座屈荷重の下限 P_{cr}	下限座屈値 P_e
$C_0 = 1 \text{ cm}$ $C_0/l = 0.002$	0.99	0.95
$C_0 = 5 \text{ cm}$ $C_0/l = 0.01$	0.78	0.67

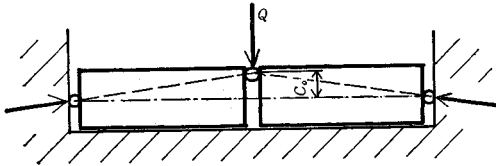


図-7 偏心は初期変形と考えられる

8. 結論

解析方法について

殻などの飛移座屈を解析する方法として

- 1) 微小変形理論による固有値問題の解(古典座屈値)
- 2) 有限変形理論による荷重変形曲線の追跡(上座屈値)
- 3) ポテンシャルエネルギーによる考察(下限座屈値)

がある。

これに対して、ここで取扱ったような力学系(実例としては敷きつめた重いブロックの熱膨張による座屈)では、

① 適合条件とつりあい条件を満たす解の存在条件より、座屈荷重の下限を求める方法(殻の場合の1)に対応する。ただし有限変形理論)

② ポテンシャルエネルギー的考察により下限座屈値を求める方法(殻の3)に同じ)がある。この②は①に比して合理的である。2)の方法は使うことができない。

解析の結果

① 座屈荷重の下限 $P_{cr} = 0.942 Q^{2/3} (EA)^{1/3}$

下限座屈値 $P_e = 1.19 Q^{2/3} (EA)^{1/3}$

② 圧縮力を加えるための持具のばね剛性 μ の影響によって P_{cr}, P_e とも $(1 + EA/2\mu l)^{-1/3}$ の比率で減少する。

③ 初期変形による座屈荷重の低下は、初期変形の自乗に関係する。

記号

- A : 棒の断面積
- C : リンク中央における持ち上がり
- C_0 : リンク中央における初期変形
- C_{cr} : 座屈荷重の下限時の持ち上がり
- C_e : 下限座屈時の持ち上がり
- P : 棒に加わる圧縮力
- P_{cr} : 座屈荷重の下限
- P_e : 下限座屈値
- p, p_{cr}, p_e : それぞれ $P/EA, P_{cr}/EA, P_e/EA$
- Q : リンク中央に加わる鉛直荷重
- q : $= Q/l$
- U : 座屈前のポテンシャルエネルギー
- U_A : 座屈後のポテンシャルエネルギー
- u, u_A : それぞれ $U/EAl, U_A/EAl$
- v, v_0, v_{cr}, v_e : それぞれ $C/l, C_0/l, C_{cr}/l, C_e/l$
- α : 持ち上がり角度
- r : $= 1 + EA/2\mu l$
- Δ : 座屈前後のポテンシャルエネルギーの差
- λ : $= p_e/p_{cr}$
- μ : 持具のばね定数 (kg/cm)
- σ : 圧縮応力

参考文献

- 1) 川口昌宏：“連続舗装の熱膨張座屈”，土木学会論文報告集，170号，1969.10.
- 2) 林毅編：“軽構造の理論とその応用”，上巻，pp. 315~365, JUSE 出版社，1966.