

円柱状ぜい性材料供試体の一軸圧縮強度に 対する有限要素解析について

FINITE ELEMENT ANALYSIS ON UNIAXIAL COMPRESSIVE
STRENGTH OF CYLINDRICAL BRITTLE SPECIMEN

梶 田 建 夫*・川 本 眺 万**
By Tateo Kajita and Toshikazu Kawamoto

1. ま え が き

著者らは土木学会論文報告集第 166 号において、円柱状ぜい性材料供試体の一軸圧縮試験における加圧面拘束が変形状態や一軸圧縮強度におよぼす影響について、軸対称有限要素法を用いて行なった研究成果を発表した¹⁾。その際、材料が非線形性質を有する場合に対して非線形解析を行ない、種々の荷重段階における荷重-変形関係および供試体内の各位置での応力-ひずみ関係、変形係数の変化の状態などを求め、さらに、弾塑性解析を行なって、供試体内の塑性領域が広がる過程、破壊時の全変形量およびひずみ分布、せん断ひずみエネルギー分布などを求め、それらの結果から、破壊荷重（圧縮強度）や破壊形状について考察した。その場合、破壊包絡線としては一軸引張強度 σ_t で規定される Griffith-Mohr 包絡線 $\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma)$ を用い、応力-ひずみ関係としては完全弾塑性的 (bi-linear な) 関係と、指数関数的な関係をもつ非線形的なものと考えて、解析が進められた。

bi-linear な応力-ひずみ関係を用いた荷重漸増法による解析結果では、荷重の増加による塑性域の発達過程が明確にわかり、塑性域が試験体の断面を横切った場合を供試体の破壊と見なして圧縮強度を算定した。一方、非線形な応力-ひずみ関係を用いた反復法による結果では、種々の荷重段階における変形係数の変化の状態などは明らかになるが、塑性域のひろがりには直接には求められない。したがって、平均荷重強度と加圧面の変位との関係から、それらの関係が急変し、圧縮強度が加圧面の変形量の増大に対して頭打ちの状態になるときを供試体の破壊と考えて、強度の算定を行なった。その結果、両者において仮定された応力-ひずみ関係が異なるにもかかわらず、

同一の圧縮強度が求められ、また、解析結果と実験結果とは質的にはかなりよく一致するが、量的にはかなりの差異が認められた。すなわち、仮定された降伏条件では、圧縮強度の解析値は実験値よりもかなり低い。これは前論文で考察したように、もっぱら降伏条件の不適合に原因しているものと考えられる。

それゆえ、ここでは前論文発表以後に降伏条件を変えて解析を行なって得た結果を示し、有限要素法によるこの種の問題の解析の妥当性を検討するとともに、ぜい性体の弾塑性解析において考慮すべき点を指摘した。

2. 応力-ひずみ関係および破壊包絡線

さきの論文ではモルタルの純三軸圧縮試験の結果に基づいて、その降伏条件が Griffith-Mohr 包絡線で近似できるものと仮定したが、ここではモルタル、片岩および大理石について行なった三軸試験結果を示し、解析に用いる応力-ひずみ関係および降伏条件について考えた。

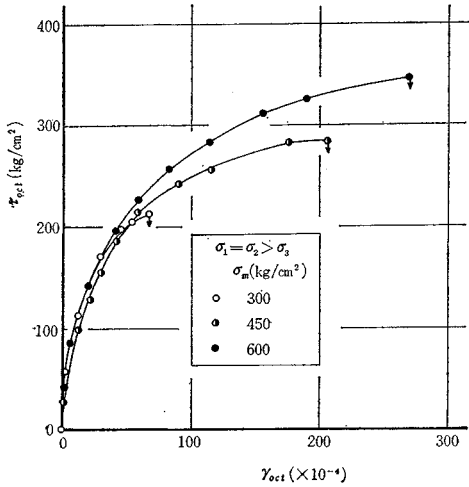
三軸圧縮状態で破壊試験を行なって得た結果は、平均応力 σ_m をパラメーターとして、それぞれ次式で表わされる八面体せん断応力 τ_{oct} と八面体せん断ひずみ r_{oct} との関係で示された。

$$\tau_{oct} = (1/3) \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

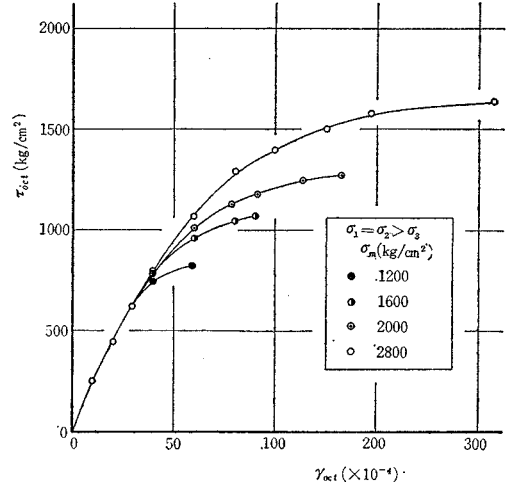
$$r_{oct} = (2/3) \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

モルタル、片麻岩および大理石に対する応力-ひずみ曲線の例を示すと 図-1, 2, 3 のようである²⁾。いずれの場合にも拘束応力としての平均応力 σ_m の値によって破壊までの曲線が変化することがわかる。しかし、 τ_{oct} の低いところでは σ_m の大きさは応力-ひずみ関係には大きくは影響を与えず、ほぼ一本の直線で表わされるが、 σ_m の大きさに応じて τ_{oct} がある値以上になると、この

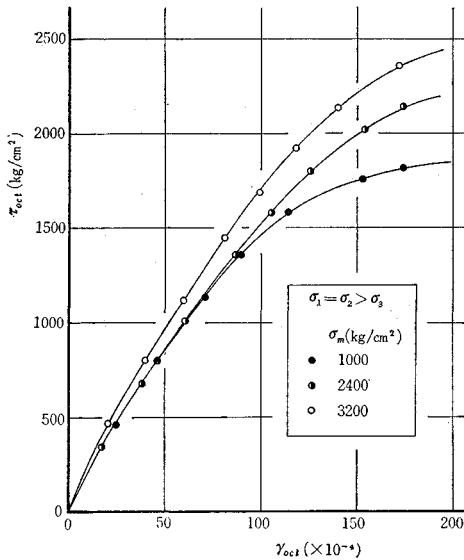
* 学生員 工修 名古屋大学大学院工学研究科 土木工学専攻博士課程在学
** 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学教室



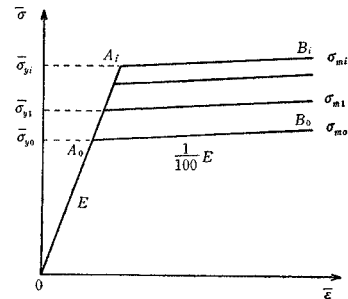
図一 三軸圧縮応力下でのモルタルの応力-ひずみ曲線



図三 三軸圧縮応力下での大理石の応力-ひずみ曲線



図二 三軸圧縮応力下での片麻岩の応力-ひずみ曲線



図四 解析に用いられた bi-linear な応力-ひずみ関係

関係は非線形性を示し、 r_{oct} の値が大きくなる。応力-ひずみ関係が著しく非線形性を示し始める応力 σ_{oct} のレベルやその後の破壊までのひずみ r_{oct} の伸びは当然 σ_m の値によって変化するが、このことは前論文でも説明したように、破壊包絡線と応力円との関係からも考えられることである。

このような応力-ひずみの非線形関係を有限要素解析に導入する場合、その関係が数式化されていると便利である。図一ないし三のように得られた応力-ひずみ曲線は級数表示で数式化できるが、前論文では bi-linear な関係（前論文中の 図一八）および指数関数的関係（前論文中の 図一〇）によって近似的に表示した。モルタルや岩石のようにぜい性な材料の場合でも、とくに材料が密な場合には、応力の低いレベルでは σ_m に関係なく同

じ変形挙動を示し、降伏領域以後ではひずみの増大が著しくなるから、bi-linear な関係で近似の方が妥当であるように思われる。この関数をあらためて 図一四に示す。なお、図一四では主応力差の半分 $\bar{\sigma}$ と主ひずみ差 $\bar{\epsilon}$ の関係を、主応力和（平均応力） σ_m をパラメータとして表示しているが、ここで取り扱っている軸対称問題では、 $r-z$ 平面内に最大、最小主応力があり、切線方向主応力 σ_θ が中間主応力になるので、 $\sigma_r, \sigma_z, \tau_{rz}$ より主応力 σ_1, σ_3 を求め、 $\sigma_\theta = \sigma_2$ とし、破壊に対する中間主応力の影響を無視している。したがって $\bar{\sigma} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ 、 $\bar{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon_3$ 、 $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ で表わされる。

応力-ひずみ関係のこのような近似的な取り扱い、前論文においても示したように、荷重増加による塑性域の拡がりや破壊強度に大きくは影響しないようである。それは降伏条件が応力状態によって与えられるからであるが、荷重増加に伴う変形挙動や破壊時の供試体の最大変形量等を正しく算定するには、正確な応力-ひずみ関係を計算に導入することが当然必要である。

つぎに、三軸圧縮試験により得られたモルタルの破壊包絡線の例を示すと 図一五のようである。この図からわかるように、破壊包絡線の形は主応力状態および荷重履

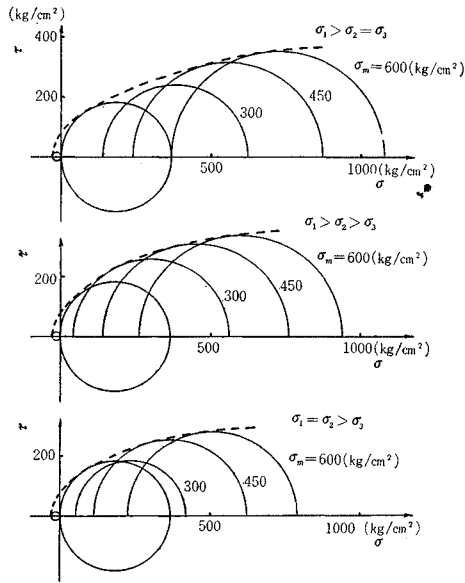


図-5 種々の三軸応力状態に対するモルタルの破壊包絡線

歴にいくらか影響されるようである。前論文ではこの包絡線に対して Griffith 理論により修正された Mohr の包絡線

$$\tau^2 = 4 \sigma_t (\sigma_t - \sigma) \dots\dots\dots (3)$$

を用いた。この降伏条件は材料の一軸引張強度 σ_t によって規定されるが、その後の検討の結果、図-5 に示す破壊包絡線はむしろ一軸引張強度 σ_t とせん断強度 τ_0 によって規定される

$$\tau^2 = \tau_0^2 (1 - \sigma/\sigma_t) \dots\dots\dots (4)$$

によって表わす方が適当であることが明らかになった。

円柱供試体の一軸圧縮試験時の各要素における応力状態はほとんど一軸的であり、破壊近くの状態におけるモールの応力円は τ 軸に近いところで降伏条件（破壊包絡線）に近づくことが考えられるから、低い応力レベルでの降伏条件がとくにこの場合の解析に影響をおよぼすものと思われる。それで、ここでは図-6 に示すような三種の降伏条件を考え、塑性域の発達過程と圧縮破壊強度の比較を行なった。図中、降伏条件1は $\tau^2 = 4 \sigma_t (\sigma_t - \sigma)$

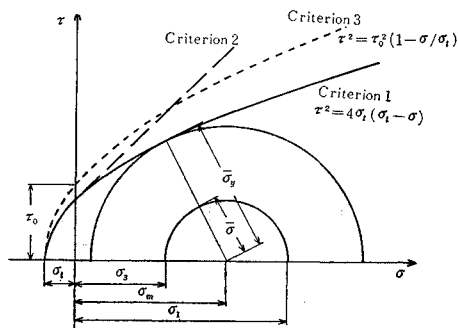


図-6 解析に用いられた種々の破壊包絡線

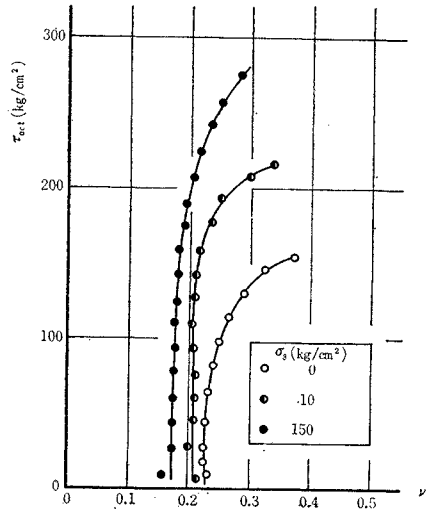


図-7 モルタルのポアソン比の変化

で与えられるものであり、降伏条件2は $\sigma < 0$ では $\tau^2 = 4 \sigma_t (\sigma_t - \sigma)$ で、 $\sigma > 0$ では $\sigma = 0$ の点でさきの曲線に接する直線と与えられるものである。また、降伏条件3は $\tau^2 = \tau_0 (1 - \sigma/\sigma_t)$ で与えられるものである。

解析はモルタル供試体を対象にして、一軸引張強度を $\sigma_t = -30 \text{ kg/cm}^2$ とし、降伏条件3では図-5の実験値より $\tau_0 = 70 \text{ kg/cm}^2$ と 75 kg/cm^2 の場合を考えた。なお降伏条件1および2の場合は $\tau_0 = 60 \text{ kg/cm}^2$ の場合にあたる。

解析に用いたモルタル材料のポアソン比は $\nu = 0.2$ とし、塑性状態になった領域の要素に対しては、0.45 とした。図-7 に示すモルタルに対する実験結果の例から明らかのように、モルタルのポアソン比は材料が降伏するまでにほぼ一定値であると考えてよいようである。

3. 解析法について

現在、有限要素法を用いた弾塑性問題の解析には、大別して二つの方法がある。その一つは今までよく用いられてきた incremental elasticity process³⁾ であり、他の一つは最近話題になってきている initial stress process⁴⁾ である。O.C. Zienkiewicz らは後者の方法による解析の方が収束性のよいことを指摘しているが、ここでは前者の方法を用いた。この incremental elasticity process では、さらに荷重漸増法と反復法が考えられ、各荷重段階あるいは各計算段階における解析領域内各要素の弾性性質をその前の段階における応力状態に対応させて逐次変化させ計算を進めて行くものである。本研究では、荷重漸増法と反復法による計算結果を比較している。

解析モデルとして、直径 10 cm、高さ 20 cm の円柱供試体はその加圧面で半径方向変位を完全に拘束されなが

ら、軸方向に等変位を与えられるように載荷される場合を考える。漸増法による解析では、加圧面の任意のある軸方向変位量に対して任意の要素の応力状態が降伏条件を満足していないときには、それからの変位増分に対しては、一定の弾性係数 E およびポアソン比 ν (図-4 の直線 \overline{OA}_i に相当する) を用い、変位の増加につれて降伏条件を満足した要素がでてくれば、その要素の変形係数およびポアソン比を塑性域に対する値 (図-4 の直線群 $\overline{A_iB_i}$ に相当する) に変化させて順次計算が進められる。モルタルに対しては、弾性状態にある要素に対して $E=2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, $\nu=0.2$ とし、降伏条件を満たし、塑性状態になった領域の要素に対しては、その変形係数を弾性係数 E の 1/100 倍とし、ポアソン比を 0.45 とし、解析を進めた。

反復法による解析ではつぎのように計算が進められた。まず与えられた全荷重 (この場合には加圧面の軸方向変位であるが) に対して、第一段階として初期弾性係数とポアソン比を用いて線形弾性解析を行ない、その結果得られる各要素の応力成分を用いて降伏条件をチェックする。たとえば、ある要素の主応力成分 ($\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$) より、 $\bar{\sigma}_0 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ と、 $\sigma_{m0} = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$ のもとの $\bar{\sigma}_y$ とを比較し、 $\bar{\sigma}_0 < \bar{\sigma}_y$ の場合にはその要素は弾性のままでとどまる。一方、 $\bar{\sigma}_0 > \bar{\sigma}_y$ の場合にはその要素は塑性状態となり、図-8 に示すように、 $(\epsilon_1 - \epsilon_3)_0 = (\epsilon_1 - \epsilon_3)_1$ の仮定のもとで、そのときの σ_{m0} に応じた降伏応力状態まで応力状態をもどし、 $\bar{\sigma}_0$ が塑性時の応力状態を越えないように変形係数の修正を行なう。この修正はすべての要素に対して行なわれ、あらためて stiffness matrix が作り直され、全荷重に対して通帯の線形弾性解析が行なわれる。この繰り返し計算を解が収束するまで行なう。図-8 には応力-ひずみ関係が $\bar{\sigma} \sim \bar{\epsilon}$ で示されているから、図の直線 \overline{OA}_0 や \overline{OA}_1 の傾斜は、それぞれせん断弾性係数 (あるいは変形係数) G_0, G_1 などを与える。

反復計算のある段階 i において G_i に対応した E_i および ν_i を用いて計算された応力成分 (σ_1, σ_3) $_i$ より、つぎの計算段階に用いられる E_{i+1} は、図-8 に示す関係より、一般に次式で与えられる。

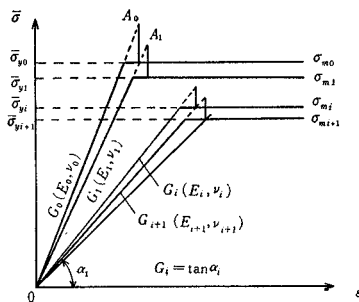


図-8 反復法における変形係数の修正

$$E_{i+1} = \frac{(1 + \nu_{i+1})}{(1 + \nu_i)} \cdot \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_i} \cdot E_i \dots \dots \dots (5)$$

ここで、ポアソン比としては弾性域で 0.2、塑性域で 0.45 を用いている。

4. 塑性域の発達過程および破壊強度

漸増法によって解析された結果から、降伏条件の相違による塑性域の発達過程および破壊強度を比較してみる。降伏条件 1 および 2 では $\sigma_t = -30 \text{ kg/cm}^2$ ($\tau_0 = 60 \text{ kg/cm}^2$ に相当する) を与え、降伏条件 3 では $\sigma_t = -30 \text{ kg/cm}^2$ と $\tau_0 = 70 \text{ kg/cm}^2$ および 75 kg/cm^2 を与えている。直径 10 cm, 高さ 20 cm の円柱供試体が初期弾性係数 $E_0 = 2.1 \times 10^5 \text{ cm}^2$, ポアソン比 $\nu = 0.2$ をもつものとし、その加圧面での半径方向変位を完全に拘束した状態で軸方向変位を与えるように加圧された。この供試体の破壊強度としては、供試体を横切って塑性域が広がった時点での軸方向変位に相応した全荷重より求められた平均軸方向応力がとられた。

それぞれの降伏条件に対する塑性域の発達の様子を図に示すと、図-9, 10, 11 (a), (b) のようである。これらの図は加えられた加圧面での軸方向変位量の大きさで示され、同時にその変位量に相当した平均軸方向応力値 (平均荷重強度) が示されている。これらの図より、塑性域の発達する様子は降伏条件のいかんにかかわらずほぼ同じようであり、同じような応力-ひずみ関係を有するぜい性材料円柱供試体の一軸圧縮試験時の破壊機構はほぼ類似しているものと思われる。しかし、図から明らかのように、供試体の破壊時の平均荷重強度の大きさおよび加圧面の変位量は、降伏条件 とくに τ_0 の値によ

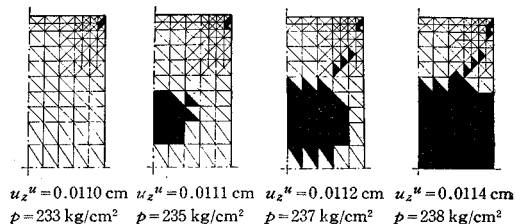


図-9 降伏条件 1 のもとの荷重漸増法による塑性域の発達過程

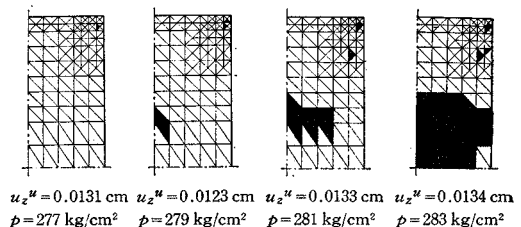


図-10 降伏条件 2 のもとの荷重漸増法による塑性域の発達過程

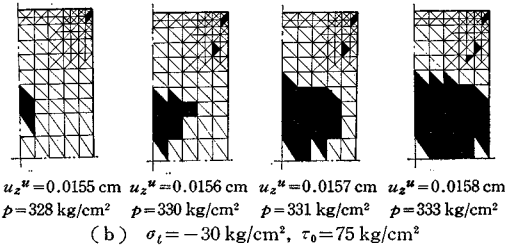
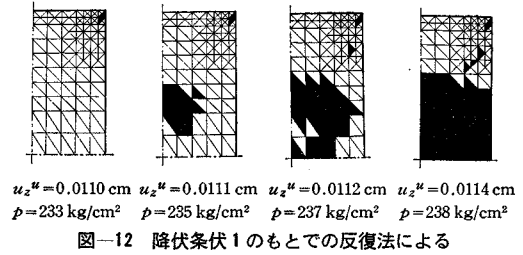
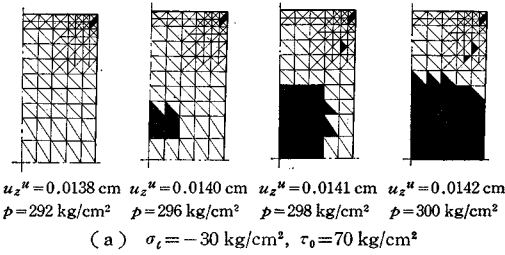


図-11 降伏条件 3 のもとの荷重漸増法による塑性域の発達過程

図-12 降伏条件 1 のもとの反復法による塑性域の発達過程

表-1

降伏条件	σ_t (kg/cm ²)	τ_0 (kg/cm ²)	破壊時		
			加圧面変位 u_z^M (cm)	平均圧縮強度 p (kg/cm ²)	
1	$\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma)$	30	(60)	0.0114	234
2	$\sigma < 0$ のとき $\tau^2 = 4\sigma_t(\sigma_t - \sigma)$ $\sigma > 0$ のとき $\tau = \sigma - 2\sigma_t$	30	(60)	0.0134	283
3	$\tau^2 = \tau_0^2(1 - \sigma/\sigma_t)$	70	0.0142	300	
		75	0.0158	333	

てかなり変化することがわかる。これらの値をまとめて表示すると表-1 のようである。

加圧面の半径方向変位を拘束した場合の破壊時の平均応力は、降伏条件 3 で $\tau_0 = 75 \text{ kg/cm}^2$ を用いたときには、 $\sigma_c = 333 \text{ kg/cm}^2$ であるのに対して、モルタル供試体での実験値は $\sigma_c = 335.6 \text{ kg/cm}^2$ で、かなりよい一致を示している。破壊時の軸方向全変形量を比較すると、解析値では $\delta = 2u_z^M = 0.316 \text{ mm}$ に対して、実験値は $\delta = 0.6 \sim 0.8 \text{ mm}$ とかなり大きい値を示しているが、実験での値は供試体が分離した後の値まで入っているのが、当然大きな値となり、正確には比較することは不可能である。さらに実験で得た供試体の破壊形状（前論文写真-1 参照）と、解析によって得た塑性域の広がる過程から考察すると、円柱供試体の破壊は、その中央部分から発達した塑性域が供試体を横切って変形能を増すことに原因して、加圧面下の剛性の高いくさび形の領域（前論文の図-13 から明らかなように、供試体中央部に塑性域が発達した時点においても加圧面近傍では弾性係数の低下がおこらない領域ができてい）が中央部の塑性域に押し込まれるような状態でおこっているように思わ

れる。

つぎに、漸増法と反復法による結果を比較してみる。降伏条件として条件 1 を用い、応力-ひずみ関係を図-4 に示すものと同じものを用いて解析を行なった。ただし、反復法の場合には塑性域での変形係数は 0 になる。すなわち、図-4 の応力-ひずみ関係で、塑性域では ϵ 軸に平行な直線を用いたことになる。漸増法の場合には図-9 に解析結果が示されているが、反復法に対するものを示すと図-12 のようである。いくつかの加圧面の軸方向変位量に対する塑性域の拡がりとは完全に一致していないが、ほぼ等しく、その発達過程は全く同一であることがわかる。また、加圧面の変位量に対応した平均軸方向応力の大きさや破壊荷重強度はまったく一致しており、この場合の問題は、漸増法で解いても反復法で解いても同一の結果を与えていると考えてよいだろう。

5. あとがき

解析結果と実験値の比較より、有限要素法をモルタルや岩石のようなぜい性材料の破壊形状の解析に適用することが有効であるように思われる。解析結果は、材料の降伏条件の違いにかかわらず、ほぼ同一の塑性域の発達（破壊機構）を示し、また解析に導入した降伏条件が適切であれば、破壊強度も実験値とほとんど一致することがわかった。しかし、ここで取りあげた問題のようにぜい性体の破壊に対する解析では、引張り応力状態あるいは一軸圧縮応力に近い状態で降伏条件を満たす場合がほとんどであるから、引張り応力領域ならびに圧縮応力の低いレベルでの材料の降伏条件、すなわち、破壊包絡線をはっきり把握して、有限要素解析に導入しなければならない。この点から考えて、モルタルの降伏条件としては、その引張強度とせん断強度とによって規定される式 (4) の条件の方が Griffith-Mohr の降伏条件よりも妥当である。

本論文で示した解析では要素内で応力あるいはひずみが一定となり、各要素間でのそれらの不連続性が解析結果に影響を与えることは当然考えられる。したがって、各計算段階における塑性域もスムーズな形とならない。

この点については要素の細分化によって解決されるが、著者らはさらに要素内で応力が線形変化する6節点三角形要素を使用して弾塑性解析を進めている。

なお、有限要素法を、逐次進行する現象としての破壊状態の解析に適用するためには、今後、不連続性の発生を合理的に表現するモデルを考えた解析を進め、さらに検討が加えられるべきであると思う。

終わりに、本研究を行なうにあたり、モルタルおよび岩石の三軸圧縮試験に協力いただいた当教室秋本昌胤助手および中日本建設コンサルタント 富田和政君に感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 梶田建夫・秋本昌胤・川本眺万：円柱状ぜい性材料供試体の一軸圧縮試験における加圧面拘束が変形状態および圧縮強度におよぼす影響について，土木学会論文報告集，166，pp. 27～38 (1969)。
- 2) 富田和政・秋本昌胤・川本眺万：三軸圧縮下におけるモルタルの変形特性，土木学会論文報告集，175，pp. 75～83，(1970-3)
- 3) O.C. Zienkiewicz and Y.K. Cheung：The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw Hill, 1967, pp. 192～201.
- 4) O.C. Zienkiewicz, et al：Elasto-plastic Solutions on Engineering Problems 'Initial Stress' Finite Element Approach, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1 (1969), pp. 75～100.

(1969.9.20・受付)