

差分による構造解析の高精度化について*

IMPROVED FINITE DIFFERENCE METHOD OF GREATER
ACCURACY FOR STRUCTURAL ANALYSIS

岸野 佑 次**・佐 武 正 雄***

By Yuji Kishino and Masao Satake

1. ま え が き

板やシェルなどを数値的に解析する方法として、差分法や finite element 法が用いられている。いずれの場合も構造を適当に分割し、有限個の分割点で力のつり合いや変形の適合条件が満たされるように式を立てて解析を行なうのであるから、解析結果は近似値であり、その精度を知ることや精度を高めることが重要な問題であると考えられる。しかし、従来の差分法や finite element 法においてはその解析学的な精度を求めることが非常に困難であると思われる。とくに finite element 法において、element の大きさを小さくすることによって解が正解に近づくこと、またそのときの精度をどう見積るべきかについての正確なことは知られていないように思われる。また、通常の差分法では、差分化された微分演算子に個々の点でどの位のオーダーの誤差が含まれるかは把握できても、それらを用いて与えられた問題を解析した結果、全体としての誤差をどのように見積ったらいかがを明らかにすることは一般に困難である。

差分による微分方程式の解析には、従来いくつかの改良が提案されている^{2)~4)}が、本論文は荷重が高次の微係数まで連続であるような関数で与えられる場合、矩形板や円筒シェルなど比較的単純な形状の構造に対して高精度の数値解を与える一方法について述べたものである。この方法は通常の差分法と同じように微分方程式を差分化して解析するのであるが、その際、微係数の高次の項までを含む Taylor 展開式により求める。しかし、単に微分演算子の高精度差分式を用いて解析を行なうのではなく、解関数が一つの Taylor 級数で表わされることを基礎として、与えた分割に対し可能となる最大限の項数をとって解析を行なうのである。本方法によれば、精

度は一定の分割に対して通常の差分法より当然増大し、しかもその誤差は級数の第何項までを計算に入れうるかということで、正確に評価されると考えられる。

また、従来の差分法において境界条件を取り扱う場合に、しばしば境界を越えた仮想の点を設けて境界条件を与える方法が用いられているが、この方法によると支点でたわみの3次以上の微係数が不連続となることがあり、誤差を生ずる原因となる場合もある。したがって、とくに高精度差分式を用いる場合には文献^{3),4)}のような方法によるのが適当と思われる。本方法では、境界条件についてこれらの方法と同様な取り扱いを行ない、さらに境界上においても基礎微分方程式を考慮することにより精度の一層の向上をはかっている。

3.には本方法の応用例として固定正方形板と固定円筒シェルの計算例を示す。分割を次第に細かくして計算すれば正解に収れんする様子がわかるが、固定正方形板の例では少ない分割の場合でも他の方法に比較して精度の高い結果を得た。また、4.では本方法の適用性について若干の考察を述べている。

2. 解 析 方 法

(1) 基本的な考え方

はりの基礎微分方程式 $\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p}{EI}$ を解く場合、 p が n 次式ならば y は $(n+4)$ 次式となる。一般に解関数 y をべき級数に仮定すれば、できるだけ多くの discrete な点での y またはその微係数の値を与えることによって、べき級数の高次の項までの未定係数を定めることができる。板やシェルのように2次元の広がりをもつ問題では、2方向からの制約があることから、一般にはりの場合のように簡単に解析することはできないが、解関数を2個のパラメーターに関するべき級数として取り扱えば、はりの場合と同様な解析が可能となる。ここで述べる方法は通常の差分法と同じように、考えている境界内

* 本文の概要は、土木学会第24回学術講演会で発表した¹⁾

** 学生員 工修 東北大学大学院工学研究科博士課程

*** 正会員 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

を適当に分割し(等分割でなくても差し支えない),各分点での微係数の差分表示を Taylor 展開によって求めるのであるが,通常の差分法と異なり,どの分点の微係数についても共通の未知数の一次結合によって近似する。この共通の未知数とは後に示すように基礎微分方程式により決定しようとしている各点での変位や,境界条件により定まる境界上の微係数の値である。これは考えている境界内の解関数を共通の一つのべき級数で近似して解析することと同等である。

各分点での微係数の差分表示を得れば,与えられた基礎微分方程式や境界条件式を前記の全未知数の一次結合として表わすことができ,連立1次方程式を得る。この方程式を解いた後,得られた各点での変位や境界上の微係数の値を各点での微係数を与える差分式に代入すれば,曲げモーメントその他必要な量を求めることができる。

(2) 各分点における微係数の差分表示

a) 1変数の関数の場合

図-1 において区間 A, B で任意階の連続な微係数を

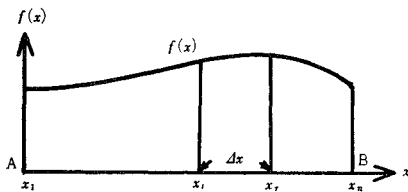


図-1

もつ関数 $f(x)$ を考える。いま, AB を $(n-1)$ 個に分割し,その分点 x_1, \dots, x_n での $f(x)$ の値 (n 個),および境界点 x_1, x_n での $f(x)$ の微係数の値 (m 個,なお境界点でどのような微係数を含めるかについては (3) に述べる)より成る $(n+m)$ 元のベクトルを V と記す。 $f(x)$ の近似式として,各分点の関数値および境界上の微係数の値によって定まる有限べき級数を考えると,その項数を $(n+m)$ とすれば,近似式は一意的に定まる。このことから,区間内の1点 x_i を中心とする Taylor 展開について $(n+m-1)$ 次の微係数までを考慮に入れると, x_r 点での関数の値 f_r , およびその s 次の微係数の値 $f_r^{(s)}$ は $f_i, f_i', \dots, f_i^{(n+m-1)}$ によりつぎのように表わされる。

$$f_r \approx f_i + \Delta x f_i' + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f_i'' + \dots + \frac{(\Delta x)^{n+m-1}}{(n+m-1)!} f_i^{(n+m-1)} \dots \dots \dots (1)$$

$$f_r^{(s)} \approx f_i^{(s)} + \Delta x f_i^{(s+1)} + \dots + \frac{(\Delta x)^{n+m-1-s}}{(n+m-1-s)!} f_i^{(n+m-1)} \dots \dots \dots (2)$$

x_i 点について $(n+m)$ 元のベクトル

$$v_i = (f_i, f_i', f_i'', \dots, f_i^{(n+m-1)}) \dots \dots \dots (3)$$

を定義すると,式 (1),(2) を用いて

$$V = A v_i \dots \dots \dots (4)$$

なる正方マトリックス A_i が定まる。 A_i の逆マトリックス A_i^{-1} を求めれば

$$v_i = A_i^{-1} V \dots \dots \dots (5)$$

となり, x_i 点での $(n+m-1)$ 次以下の任意の微係数が V の要素の一次結合として表わされる。このような表示を慣用にしながら, i 点の微係数の差分表示と称することにする。本方法ではすべての差分表示が,一定の分割に対して最大個数の共通な未知量 (V の要素) によって示されているのが特長である。

b) 2変数の関数の場合

図-2 に示すような境界内で定義されている2変数の関数 $f(x, y)$ について考える。この図に示すように x, y 方向の辺をそれぞれ $(n-1), (k-1)$ 分割(等分割でなくてもよい)する。 x, y 方向の微分 $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}$ を $(\cdot)', (\cdot)''$ で表わすことにすれば,関数 $f(x, y)$ の偏微分係数の中, f', f'', f''', \dots などは式 (5) と同様に求めることができる。たとえば x に関する偏微分係数については $y=y_j$ なる線上における n 個の分点の関数値と境界上の m 個の微係数の値とから成るベクトル V_j を定めれば (i, j) 点で考えたベクトル

$$v_{ij} = (f_{ij}, f_{ij}', f_{ij}'', \dots, f_{ij}^{(n+m-1)}) \dots \dots \dots (6)$$

は式 (5) にならって次のように表わされる。

$$v_{ij} = A_{ij}^{-1} V_j \dots \dots \dots (7)$$

ここにマトリックス A_{ij} は

$$V_j = A_{ij} v_{ij} \dots \dots \dots (8)$$

から求められる。

y に関する偏微分係数についても同様で, $x=x_i$ 上の k 個の関数値と境界での l 個の微係数の値とから成るベクトルを V_i^* とすれば,

$$v_{ij}^* = (f_{ij}, f_{ij}', f_{ij}'', \dots, f_{ij}^{(k+l-1)}) \dots \dots \dots (9)$$

は

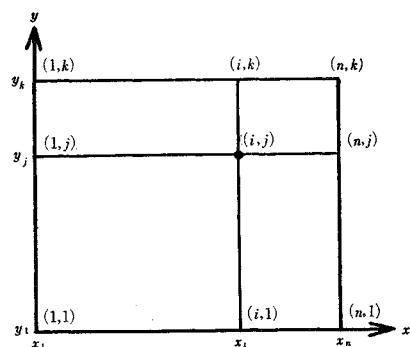


図-2

$$v_{ij}^* = (A_{ij}^*)^{-1} V_{ij}^* \dots\dots\dots (10)$$

と表現される。

つぎに、2方向に関係する偏微分係数 $f'_{ij}, f''_{ij}, f'''_{ij}, \dots$ などは、1方向の微係数の差分表示を合成することにより次のようにして与えることができる。たとえば、 y 方向へは1階の偏微分係数を考える場合、 v_{ij}^*, V_{ij}^* が v_{ij}, V_{ij} のおのおのの成分を y について1階偏微分したものを表わすとすれば、式(7)と同一の A_{ij}^{-1} により

$$v_{ij}^* = A_{ij}^{-1} V_{ij}^* \dots\dots\dots (11)$$

となり、この V_{ij}^* の成分の中、 f_{ij}^* は式(10)の v_{ij}^* の要素の中から選び出すことによって V_{ij}^* の成分の差分表示で与えられる。また、 V_{ij}^* に含まれる境界点での f_{ij}^* などについて、境界条件を直接与えることのできる場合はそのまま残し、そうでない場合、たとえば(1, j)点での x 方向に s 階の微係数 $f_{ij}^{(s)}$ を差分表示する必要がある場合には、 $i=1$ とした式(10)を x について s 階偏微分することにより、 $(V_{ij}^*)^{(s)}$ の成分すなわち V_{ij} に含まれる $f_{ij}^{(s)}$ および V_{ij}^* に含まれる(1, 1), (1, k)点での微係数を x 方向に s 階偏微分したものの一次結合で表わされる。したがって、必要な場合は(1, 1), (1, k)点におけるこれらの微係数を未知数として加え、差分表示を行なうことができる。

(3) 基礎方程式のマトリックス表示と境界条件

はりのような1変数の問題の V に対し、また板のような2変数の問題では V_{ij} および V_{ij}^* の成分など((2) b)の式(11)以下に述べた未知数も含めたすべて)を並べることにより得られるベクトル V に対し、与えられた基礎微分方程式および境界条件式が V の成分の数と同数あれば、これらの差分表示は正方形マトリックス S 、荷重などから与えられるベクトル C によって

$$SV=C \dots\dots\dots (12)$$

と表わされる。

ここで、境界上での未知数として何を V に含めるかについて述べておく。境界条件として、たとえばたわみが0の場合は f 、たわみ角が0の場合は f' (または f'') というように、 V には境界条件1個に対し、それに関係する微係数を1個未知数として含める。この際、境界条件式がいくつかの微係数を結合したもので表わされる場合には、それらの中、主な微係数を一つだけ未知数とし、その他の微係数は差分表示で与えることとする。また、基礎微分方程式は境界のごく近傍の内部の点でも満たされていなければならないことから、境界点においても、基礎微分方程式が成立すると考えられ、これに対応して未知数を1個考えることができる。境界条件で境界点の変位の条件が与えられない場合には一般の内部の点

と同様に境界点の変位そのものを未知数として入れる。また、境界点の変位の条件が与えられている場合には境界条件では定めることのできない微係数のうち、最低次のものを未知数として残しておけばよい。差分法を適用する場合に、従来は境界上では境界条件のみを与えていたが、このように基礎方程式も同時に考えることにより解全体の精度が向上するものと思われる。

前節 b) の式(7)で v_{ij} を求めるときにも、式(11)で v_{ij}^* を求めるときにも、それぞれ V_{ij}, V_{ij}^* に同一の A_{ij}^{-1} を用いたが、同様のことは $v_{ij}^*, v_{ij}^*, \dots$ などについてもいえる。これは $v_{ij}^*, v_{ij}^*, \dots$ と V_{ij}, V_{ij}^*, \dots との関係が v_{ij}^* と V_{ij} との関係と同様となるからである。そして、一つの境界条件、たとえば $x=\text{const.}$ なる境界上で $f'=0$ という条件が与えられれば当然 $f'=f''=\dots=0$ であるので、 V_{ij}, V_{ij}^*, \dots の成分中の境界点での未知数 f' などに対しても境界条件が与えられていることになる。

また、境界辺上で基礎微分方程式に対応させて微係数を一つの未知数として残す場合には、(2) b) の最後に述べたように境界辺端点(すなわち角の点)で f', f'', f''' , \dots のような新しい未知数が残ることになる。これらは角の点での境界条件式(あるいはそれを境界辺に沿って偏微分したもの)や基礎方程式を考慮することにより、一般に同数の方程式を与えることができる。

変位やたわみ角が0の境界条件が与えられる場合のように、境界点の微係数の中、0になるものが知られている場合には、式(12)において V の成分の中からそれを取り除くことにより未知数の数、マトリックス S の次数を減ずることもできる。たとえば板の問題で、固定端においてはたわみとたわみ角が0となることから、その両方を取り除くことができるが、単純支持や自由端の場合には微係数を組み合わせたもので条件が与えられるから、これらの必要な微係数を未知量として残して置かなければならない。このような場合は、境界条件を基礎方程式と同様に差分式によって与え、連立させて方程式を解くことになる注1。

このように、基礎微分方程式、境界条件式を考慮して組み立てられたマトリックス S の逆マトリックス S^{-1} によって、 V は

$$V=S^{-1}C \dots\dots\dots (13)$$

として求められる。

V が得られれば、断面力などは前節 a), b) に述べた

注1 単純支持板の場合、角の点の特異点(集中反力が作用し、また境界条件からは $\Delta \Delta w=0$ となる)であるが、その近傍では基礎方程式 $\Delta \Delta w = \frac{p}{D}$ が満たされているので、辺上では w' または w'' 角の点では w'' を未知数として残し基礎方程式を考慮に入れて計算を行なえばよい。この場合、角の点の集中反力は $R=2M_{xy} = 2D(1-\nu)w''$ からただちに求められる。

v または v, v^* などから必要な微係数を拾い出して組み合わせることにより、容易に計算することができる。

シエルやアーチの問題のように、連立微分方程式を解かねばならない場合でも各点で変位置（シエルでは3個アーチでは2個）ごとに考えた差分式（式(7),(10)のような式）を組み合わせることにより、同様な解析を行なうことができる。

3. 応 用 例

(1) 等分布荷重を受ける固定正方形板

固定正方形板 ($L \times L$, 曲げ剛性 D) が等分布荷重 p を受ける場合について本方法の応用例を示す。計算は種々の分割に対して電子計算機を用いて行なったが、ここでは微係数の差分表示の求め方を中心として、 x, y 方向ともに4等分した例によって説明する（図-3）。

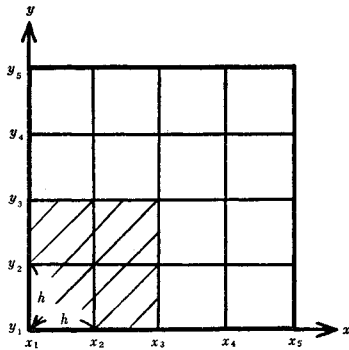


図-3

板の基礎方程式

$$\Delta \Delta w = \frac{p}{D} \dots\dots\dots (a)$$

境界条件

$$x = x_1, x = x_5 \text{ で } w = 0, w' = 0 \dots\dots\dots (b)$$

$$y = y_1, y = y_5 \text{ で } w = 0, w' = 0 \dots\dots\dots (c)$$

対称性により、図の斜線部分について計算すればよい。まず、 x に関する偏微分係数はつぎのようにして求

注2 $x = x_3$ のまわりで x 方向の Taylor 展開式は、対称性を考慮して

$$w(x_3 + \Delta x, y_j) = w_{3j} + \frac{(\Delta x)^2}{2} w_{3j}'' + \frac{(\Delta x)^4}{24} w_{3j}^{(4)} + \dots$$

となるが、この中 w_{3j} は基礎方程式に対応する未知数とすれば、残りの $w_{3j}'', w_{3j}^{(4)}, \dots$ は V の中に含まれる $x = x_3$ 以外における要素すなわち $w_{1j}, w_{1j}', w_{1j}'', w_{2j}$ の一次結合になっていなければならない。これより、 $w_{3j}'', w_{3j}^{(4)}, w_{3j}^{(6)}, w_{3j}^{(8)}$ の4個の微係数は一意に決定されることになる。

注3 $w_{ij}^{(n)}$ を式(d)に加えて式(f)より一次元高いマトリックスを組み立てて考えてもその影響はなく、同一の結果を得るから、 $w^{(9)}$ のオーダーまで考慮されていると考えてよい。

める。 $x = x_1$ における境界条件が2個あるから、 V の中に3個の要素 $w_{1j}, w_{1j}', w_{1j}''$ を含めることができる。 $x = x_2, x_3$ ではそれぞれ w_{2j}, w_{3j} を未知数とするが、 $x = x_3$ では更に対称性の条件から $w_{3j}' = w_{3j}''' = w_{3j}^{(5)} = \dots = 0$ が成立ち、この条件式をいくつとすることができるかは分割数によって決まる。図-3の分割に対しては $w_{3j}^{(7)} = 0$ までの4つをとり、 $w_{3j}', w_{3j}''', w_{3j}^{(5)}, w_{3j}^{(7)}$ を未知数に加える注2。これは対称性を考慮しない場合には $w_{4j}, w_{5j}, w_{5j}', w_{5j}''$ を V_j に含めることに相当している。よって V_j は次式で与えられる。

$$V_j = (w_{1j}, w_{1j}', w_{1j}'', w_{2j}, w_{3j}, w_{3j}', w_{3j}''', w_{3j}^{(5)}, w_{3j}^{(7)}) \dots\dots\dots (d)$$

つぎに、たとえば $x = x_2$ におけるベクトル v_{2j} は V_j の成分の数と対応させてつぎのように定める。

$$v_{2j} = (w_{2j}, w_{2j}', w_{2j}'', w_{2j}''', w_{2j}^{(4)}, w_{2j}^{(5)}, w_{2j}^{(6)}, w_{2j}^{(7)}, w_{2j}^{(8)}) \dots\dots\dots (e)$$

したがって、マトリックス A_{2j} は式(1),(2)より

$$A_{2j} = \begin{pmatrix} 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & -\frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \\ 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & -\frac{h^7}{7!} \\ 0 & 0 & 1 & -h & \frac{h^2}{2!} & -\frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & -\frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} & \frac{h^8}{8!} \\ 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} & \frac{h^6}{6!} & \frac{h^7}{7!} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} & \frac{h^4}{4!} & \frac{h^5}{5!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h & \frac{h^2}{2!} & \frac{h^3}{3!} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & h \end{pmatrix} \dots\dots\dots (f)$$

となる。 $x = x_1, x = x_3$ においても同様のマトリックスを得る。実際にはマトリックス A_{ij} は、計算機中で適当なサブルーチンを作って置くことにより機械的に組み立てられ、この逆マトリックスを求めれば、式(7)に示すように各点の微係数を V_j の要素の一次結合として表わすことができる。

V_j の要素の中、境界条件を考慮して0になるものを除けば、 w_{1j}'', w_{2j}, w_{3j} だけが未知数として残り、各点の x 方向の微係数はこれらの一次結合で近似され、その誤差は $w^{(10)}$ のオーダーと考えることができる注3。

y 方向の微係数の表現も全く同様にして求めることができる。 V^* の要素の中、0でないものは w_{i1}, w_{i2}, w_{i3} だけであり、結局未知数として残るものは図-4に示す9個である（対角線に対する対称性からさらに6個とすることもできる）。2つの方向に関係する微係数は式(11)

のように表現されるが、結局それらも図-4の9個の未知数の一次結合として表わされる。板の基礎方程式は

$$w_{ij}'''' + 2w_{ij}'' + w_{ij} = \frac{1}{D} p_{ij} \dots\dots (g)$$

$$\begin{pmatrix} 167.11 & -51.38 & -51.38 & 12.81 & -3.729 & 0.554 & -3.729 & 0.554 & 0.0239 \\ -93.23 & 114.94 & 24.00 & -42.09 & 1.037 & -3.328 & 2.389 & -0.422 & -0.0182 \\ -93.23 & 24.00 & 114.94 & -42.09 & 2.389 & -0.422 & 1.037 & -3.328 & -0.0182 \\ 44.95 & -75.85 & -75.85 & 69.50 & -0.790 & 2.083 & -0.790 & 2.083 & 0.0139 \\ -398.20 & 0 & 150.00 & 0 & 27.083 & 5.063 & 0 & 0 & 0.2188 \\ 0 & -398.20 & 0 & 150.00 & 9.482 & 30.750 & 0 & 0 & -0.1666 \\ -398.20 & 150.00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27.083 & 5.063 & 0.2188 \\ 0 & 0 & -398.20 & 150.00 & 0 & 0 & 9.482 & 30.750 & -0.1666 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.0000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{22} \\ w_{32} \\ w_{23} \\ w_{33} \\ h^2 w_{21}'' \\ h^2 w_{31}'' \\ h^2 w_{12}'' \\ h^2 w_{13}'' \\ h^4 w_{11}'''' \end{pmatrix} = \frac{h^4}{D} \begin{pmatrix} p_{22} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ p_{21} \\ p_{31} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{11} \end{pmatrix} \dots\dots (h)$$

得、これを解けば未知数が決定される。

式 (h) は一般に AA', BB' について対称な分布荷重を受ける固定正方形板に应用することができる。

x, y 両方向に4等分、6, 8, 10, 12 等分で計算を行なった結果を、中央線上のたわみおよび中央線方向の曲げモーメントについて示せば、図-5および表-1のようになる。図-5より比較的少ない分割でよい収れんを示していることが観察される。また、表-1には比較のため、Zienkiewicz⁶⁾ の finite element 法による数値および Timoshenko⁷⁾ による数値も掲げた。同一の分割で、本方法は finite element 法よりかなり精度が高いことが認められる。

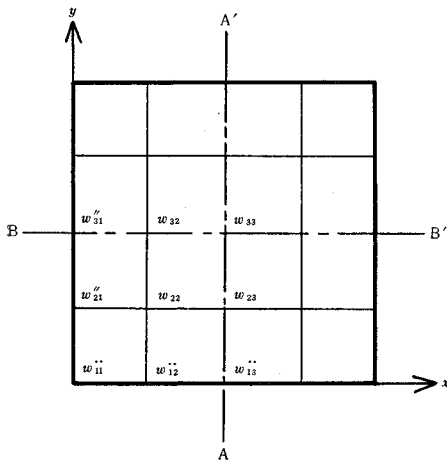


図-4

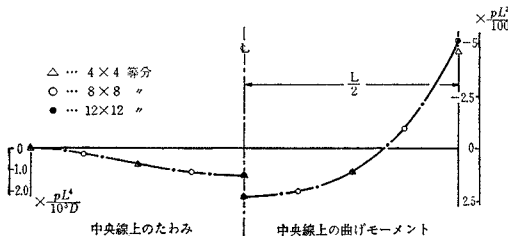


図-5

であるから、必要な微係数を v, v^*, v'' の中から拾い、これを9個の分点について考えれば9個の未知数に関する連立方程式(計算の結果、式(h)のようになる)を

(2) 法線方向の等分布荷重を受ける固定円筒シェル

図-6に示すような円筒シェルについて例示する。基礎微分方程式は

$$\left. \begin{aligned} u'' + \frac{1-\nu}{2} u'' + \frac{1+\nu}{2} v'' + \nu w' \\ + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'' + w''' - \frac{1-\nu}{2} w'' \right\} = 0 \\ \frac{1+\nu}{2} u'' + v'' + \frac{1-\nu}{2} v'' - w' \\ - k \left\{ \frac{3(1-\nu)}{2} v'' + \frac{3-\nu}{2} w'' \right\} = 0 \\ \nu u' + v' - w + k \left\{ \frac{1-\nu}{2} u'' - u''' \right. \\ \left. - \frac{3-\nu}{2} v'' - 2w'' - w - \Delta \Delta w \right\} = -\frac{a^2}{B} p \end{aligned} \right\} \dots\dots (i)$$

で与えられる⁸⁾。ここに u, v, w はそれぞれ x, y, z 方向の変位、 p は法線方向の等分布荷重、 $k = \frac{t^2}{12a^2}$ 、 $B = \frac{Et}{1-\nu^2}$ である。境界条件は

$$\left. \begin{aligned} y=0, y=a \phi_0 \text{ で } w=0, w'=0, u=0, v=0 \\ x=0, x=s \text{ で } w=0, w'=0, u=0, v=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (j)$$

表-1

分割	中央のたわみ	中央の曲げモーメント	固定辺中央の曲げモーメント
本論文の方法			
4×4	0.00126958 $\frac{pL^4}{D}$	0.0232486 pL^2	-0.0472319 pL^2
6×6	0.00126539	0.0229088	-0.0516526
8×8	0.00126532	0.0229046	-0.0513034
10×10	0.00126531	0.0229049	-0.0513355
12×12	0.00126531	0.0229050	-0.0513340
finite element 法			
4×4	0.00140	0.0278	-0.0476
6×6	0.00133	0.0249	-0.0496
8×8	0.00130	0.0240	-0.0503
Timoshenko			
-	0.00126	0.0231 (0.0229) ⁸⁾	-0.0513

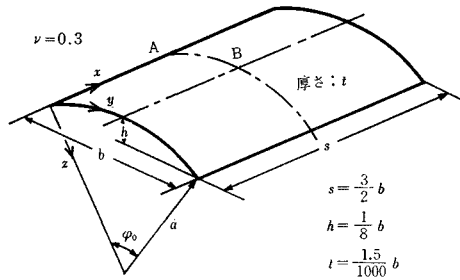


図-6

である。

偏微分方程式 (i) の厳密解は一般にこのままの形で得ることが困難であり、通常は微小項を無視して近似的な級数解を求めている。本方法を用いれば式 (i) のままで計算を進めることができ、より精密な数値解を得ることが可能である。

この例に示すような場合には (1) と同様に対称性から 4 分の 1 の部分をとって計算を行えばよい。 w の微係数の差分表示の方法は (1) の w と全く同様である。 u については y 方向対称、 x 方向逆対称であり、 v については x 方向対称、 y 方向逆対称であるから、対称となる方向については w と同様に考えることができる。ただし、境界条件は $u=0$ または $v=0$ だけであるから、境界上では 1 階の微係数だけを未知数として残すことになる。逆対称性は、 u または v そのものの値と偶数次の微係数を 0 と置くことによって与えることができる。このように各変数ごとに微係数の差分表示を得れば、これらを式 (i) に代入して差分化することができ、各分点での未知数 u, v, w および境界上での微係数を未知数とする連立 1 次方程式を組み立てることができる。

分割を次第に細かくして x, y 各方向 14 等分まで計算を行なった。図-7, 8 および 9 はそれぞれ長手方向中央の円弧 AB に沿う z 方向の変位 w 、膜力 (N_x, N_y) および曲げモーメント (M_x, M_y) を示す。

図より解はほぼ取れんし正解値が得られていると思われる。

4. 適用性についての考察

本方法の応用にあたっては、境界の形状が比較的単純なこと、また境界内では解関数が収束性の Taylor 級数で表わされるような任意階微分可能な連続関数であることが要求されるが、実用としてはつぎに示すような多くの場合にも本方法の適用が可能であると考えられる。

(1) 境界が複雑な形状を有する場合

本方法は、適当な座標系に対して境界線が“一つの座

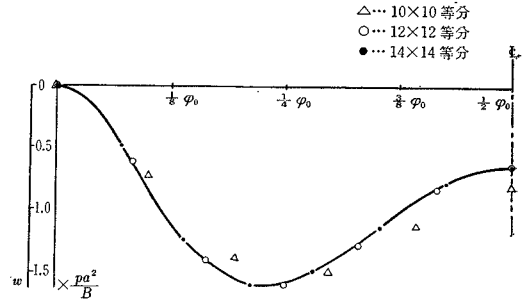


図-7 AB 上の w

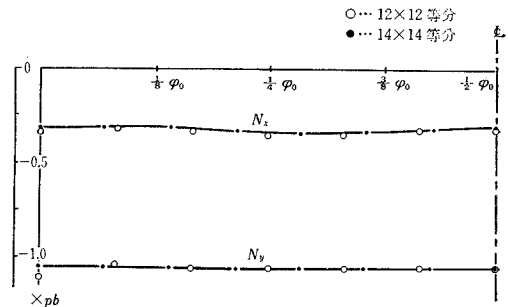


図-8 AB 上の N_x, N_y

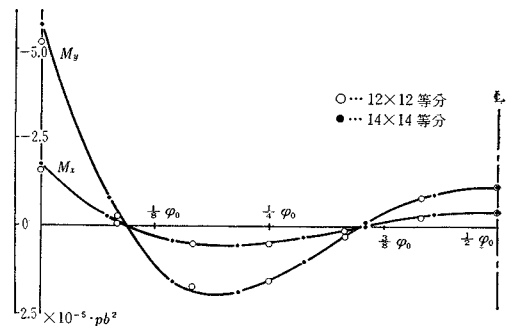


図-9 AB 上の M_x, M_y

標一定”と表わされるような形状の場合に容易に適用できる (たとえば、矩形板、円板、扇形板など)。一般に、微分方程式を複雑な形状の境界に対して解くことは困難であるが、その領域をいくつかの単純な形状の部分に区分することができるような場合には、本方法の応用が可能となる。

(2) 集中荷重あるいは集中モーメント荷重を受ける場合

1 次元の問題では載荷点を分点の一つとして集中荷重を連続の条件の中に取り入れて扱うことができる⁴⁾。板やシエルがその内部の点で集中荷重を受ける場合 (薄板の理論ではその点でモーメントが無限大となる) の解析としては次のような方法が考えられる。まず第一には、集中荷重を適当なある範囲に分布させて分布荷重として

扱う方法で（この場合モーメントは有限値）、つぎの(3)の場合の扱い方を適用する。この場合、その載荷点付近でメッシュを細かくすることが必要である。モーメント荷重に対しても等価な逆対称分布荷重を考え解析することができる。第二は、板の場合、集中荷重 P に対する特解

$$w_p = \frac{P}{8\pi D} r^2 \log r \dots\dots\dots (14)$$

を用い（ただし、 $r = \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}$ 、 (x_1, y_1) は集中荷重載荷点の座標）、この w_p と

$$\Delta \Delta w = 0 \dots\dots\dots (15)$$

の一般解 w_g とを重ね合わせて境界条件を満足させるようにする方法で、まず式(14)による境界値を求め、これを打ち消すような境界条件を与えて式(15)を本論文の方法で解けばよい。同様なことは集中モーメント荷重 M を受ける場合にも応用できる。この場合の特解は

$$w_p = \frac{M}{4\pi D} r \log r \cos \theta \dots\dots\dots (16)$$

（ただし、 θ は M の方向と r とのなす角）で与えられる。

(3) 部分的な分布荷重や不連続な分布荷重を受ける場合

領域を適当に区分することにより、各領域で連続な分布荷重（任意階の微係数が連続で Taylor 展開可能なもの）とすることができるならば、区分された各領域で本方法を応用し、その接合線上で変形や断面力の連続性が保たれるようにすればよい。

また、Fourier 解析では不連続関数も一つの級数で表わされるように、本解析法でも不連続荷重を区分せずにそのまま Taylor 級数で近似することにより解析を行なうことも実用的には有用であると思われる。いま、図-10の実線で示す荷重に対して考えると、各分点での荷重の値は式(12)における C の成分となっており、このことは荷重が分点の数と等しい項数の Taylor 級数で近似されることを意味している。すなわち、同図の破線のような関数で近似されることになり、分割を細かく（とくに荷重の急変する付近で）すれば精度を増すことができ実用的な数値解を得ることができるとと思われる（同図(b)）。

また、板の場合、与えられた荷重に対する特解

$$w_p = \frac{1}{8\pi D} \iint p(x_1, y_1) \{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2\} \log \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} dx_1 dy_1 \dots\dots (17)$$

が容易に求められるような荷重に対しては(2)に述べたと同様な解析を行なうことができる。

(4) 複合境界条件の場合

一つの境界辺に沿って境界条件が部分的に異なる場合

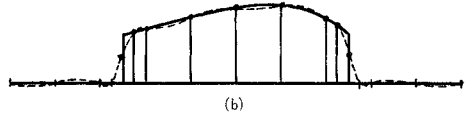
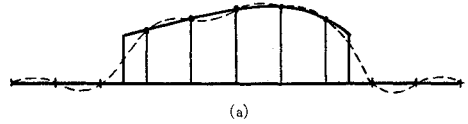


図-10

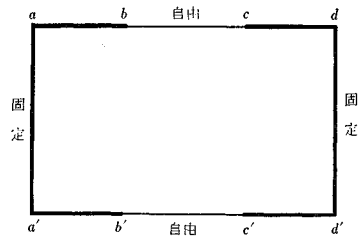


図-11

（たとえば図-11）、境界上の境界に沿う方向の微係数については各区間（ab, bc など）ごとに差分表示を行なう必要がある。この場合、所定の精度を得るためには、各区間を必要な程度分割しなければならない。また差分表示をつくる際に、同一の境界線上でも場所により残すべき微係数が異なることになるので注意しなければならない。

5. あとがき

Taylor 展開を用いて差分による構造解析を高精度化する方法を述べた。まえがきにも述べたように、本方法によれば級数解の計算と同様に誤差が評価されると考えられ、分割を多くすることが式(1)、式(2)において級数の項を増加させることに直接結びつき、誤差は省略された高次の微係数の項程度のもので表わされる。また、本方法は与えられた分割に対して、最大限度の未知数を考慮しているので、差分による構造解析としては一般に最高の精度をもつものと考えられる（荷重の微係数を考慮することにすればさらに精度を高めることもできる）⁴⁾。

一般に、線型の微分方程式を基礎とする問題で、解関数が収束性の Taylor 級数に展開されることが予想され、かつ比較的単純な形状の境界をもつような場合には本論文の方法が非常に有用であると思われる。また、本方法では境界条件の相違は単に差分表示の違いとして扱われることから、ある級数解を仮定する解析方法では適用が困難な境界条件をもつ問題（たとえば固定板の問題

など)に対して、とくに有効であると考えられる。

なお、本方法を適用して実際に電子計算機により計算を行なう場合には、計算機の容量によって未知数が制限され、したがって複雑な問題では分割数が制限されること、連立方程式を解く際に元数が多くなるにつれ誤差が増加するため、分割数を多くすることにより演算に起因する誤差が増加することなどに注意しなければならないことは、通常の差分法や finite element 法などと同様である。本文の数値計算には東北大学大型計算機センター NEAC 2200 (通常 10~11 桁精度)を用いたが、例題の 50 元程度の連立一次方程式の消去法による解の精度は有効数字 6 桁以上であった。

参 考 文 献

- 1) 岸野佑次・佐武正雄：差分による構造解析を高精度化する一方法について，土木学会第 24 回学術講演会講演集第

- 1 部 (1969), 169-172.
- 2) Mann, W.R., Bradshaw, C.L. & Cox, J.G. : Improved Approximations to Differential Equations by Difference Equations, J. Math. Phys. **35** (1955-56), 408-415.
- 3) Zurmühl, R. : Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren, Z. angew. Math. Mech. **37** (1957), 1-16.
- 4) 佐武正雄：はりの高精度差分式について，土木学会論文報告集 **165** (1969), 53-58.
- 5) 坪井善勝：平面構造論，丸善 (1960), 120.
- 6) Zienkiewicz, O.C. & Cheung, Y.K. : The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Inst. Civil Engrs. **28** (1964), 471-488.
- 7) Timoshenko, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill (1959), 202.
- 8) 坪井善勝：曲面構造，丸善 (1965), 276.

(1969.10.27・受付)