

薄肉平板より成る立体的構造物の静力学的解析 に関する一方法とその応用

AN APPROACH TO STATICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL STRUCTURES CONSISTING OF THIN FLAT PLATES AND ITS APPLICATIONS

奥村 敏恵*・坂井 藤一**
By Toshie Okumura and Fujikazu Sakai

1. 序 論

一般に薄肉平板によって構成される構造物は、その構成要素が面内変形作用ないし面外曲げ変形作用を受け、とくに立体的な構造物ではこの両作用が常に共存しているところに特徴があり、また解析上の複雑性がある。このような薄肉平板構造物が土木構造の分野において使用されている例は近年ますます多く見受けられるようになってきている。薄肉ばりの場合を例に採ると、断面の薄肉化・複雑化あるいは支間・幅員などの大型化にともなって、その設計の安全性ならびに経済性の調和に関して立体的な解析の必要性が重要な意義をもとうとしている。しかしながら、現状では構成要素間の有機的関連を十分に考慮して解析したものはほとんどないといつてよい。

この論文は以上のような観点から、長方形平板の集合と見なすことのできる薄肉平板構造物の一般的な解析理論を提示し***、薄肉立体構造物への適用を意図したものである。

2. 解析理論

(1) 概 要

この理論は有限要素法の一つの考え方に基づいている。有限要素法は、1) 連続体としての構造物を有限な大きさとする有限な自由度を持つ要素の集合として把握し、かつ、2) そのような要素を用いて直接剛性法などによって組織的に構造解析を遂行できるという2点に意味があ

* 正会員 工博 東京大学教授 工学部土木工学科
** 学生員 東京大学大学院博士課程 (現川崎重工業鉄構事業部)

*** この理論の基本的な考え方については、鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム上に発表したが¹⁾、ここではその詳細を論じ、さらに種々の境界条件の取扱いについて述べた。

ると思われる。

1) に関しては、どのような要素を採るか、また要素内の変位あるいは応力をどのように仮定するかが問題となる。この両者は相互に関連する問題であるが、一般に自由度ならびにそれに対応する要素内での変位あるいは応力の状態の与え方についてはいろいろなものが考えられる。たとえば、厳密解に一致するような変位あるいは応力を仮定するならば、自由度は1で十分なわけで、これは骨組構造系のような一次元部材系の場合に見られる。しかし一般の二次元ならびに三次元構造物を有限要素法によって精度よく解析するには、自由度の採り方にむずかしい問題がある。ここでは、平板問題に関する偏微分方程式を一変数についてのみ有限な自由度を与えた変数分離法によって常微分方程式に変換し(有限要素解析)、つぎにこの常微分方程式を解いて未知変位を求めることにした。したがって本解析法は一般的にいういわゆる変位法に属するものである。

常微分方程式の取扱いにおいては、再び有限要素解析を行なってもよいし、変分法に基づく近似解法や還元法(遷移行列法)の適用も可能である。このように本解析法においては、通常の有限要素法と自由度の与え方が異なり、常微分方程式を厳密に取り扱えば従来の方法よりも精度を改良しうる可能性がある。

2) に関しては、一次元部材系に対しては等価節点荷重の問題などすでに完成されているように思われるが²⁾、二次元平板構造系に対しては、現在までの諸研究がもつばら1) に関してのものであり、等価節点荷重の問題などを組織的に取り扱ったものはないようである。本解析理論においては、重ね合せの原理**** (偏微分方程式論における第三種境界値問題の場合³⁾と同様に

**** 重ね合せの原理の利用に関しては、山本教授の論文も前述のシンポジウムで発表されたり、これは主として解析解と有限要素法の併用について述べたもので、等価節点荷重などには触れられていない。

よって、2) に関していくつかの点を明確にできる。すなわち、

- 1) 本論文の解析では、構造全体に係わるものと局所にのみ係わるものを分離して取り扱うところに特徴がある。この考え方に基づくと有限要素法によるものは局所よりもむしろ全体の挙動を表現するものであるということが出来る。
- 2) 局所にのみ係わる特解は、境界条件が簡単な形で定まっているので解析解が得やすく、また局所において細かい分割による有限要素解析も全体と全く無関係に厳密に求めることができる。
- 3) 有限要素法では要素内部の荷重（分布荷重ないしは初期ひずみなども含めて）を等価な節点荷重に換算する必要がある。その際通常の有限要素法では、仮定された変位関数を仮想変位として用いた仮想仕事の原理から等価節点荷重を導くのがその厳密な算定法である⁹⁾。本法によれば、局所の特解（厳密解あるいはそれにほぼ等しい近似解）を利用することによって、直接要素境界上に分布する等価節線^{注)}荷重を導くことになる。したがって、前者よりも厳密な等価荷重の算定が可能であろう。

さて現状では平板の面外曲げの問題に対して、変位の適合性を充足する変位関数の選択が困難で精度上も問題があること、ならびに計算機容量の制限もあることなどから薄肉立体構造物の解析において面外曲げが考慮されている例をあまり見かけない⁹⁾。ここでは、平板の面外曲げ作用の影響を観察するため、変位の適合性を充足する変位関数を仮定して解析を行なう。したがって、本論文の解析により要素間の変位ならびに傾きの連続性は要素の節点ばかりでなくその境界上を通じて保たれており、これによって構造全体で変位の適合性が満足される。

また薄肉平板から成る立体的構造においては、殻理論における“曲げの局所性”と同様の性質が存在することを推察し、集中的な応力・変形は特解を利用して分離できるので、いくぶん巨視的な有限要素法を採用するのが有利である。

従来このような構造物の取り扱いに対して一般的な方法と考えられたのは、主として折板構造理論であった^{7)~9)}。しかしながら、折板構造理論では種々のモデル化あるいは適用範囲の制限を必要とし、とくに平板の面外曲げ作用に関して解析が不十分である。また複雑な断面輪郭形状を有する構造物などの取り扱いにも不便である。本論文の解析によれば、折板構造理論において仮

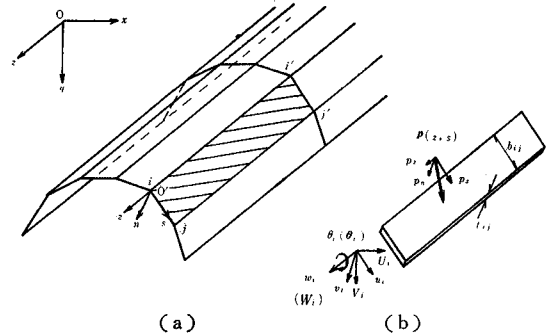
注) 要素の節点 (nodal point) に対応して、要素境界線を節線 (nodal line) と呼び、節点荷重に対応して節線荷重と呼ぶことにする。

† 折板構造の中で変位法によるものをあげた。

定されたモデル化ないし適用範囲の制限はほとんど不必要となり、複雑な断面の場合にも直接剛性法によって計算の組織化・簡易化が可能となる。

(2) 剛性マトリックス表現式の誘導

図一1 (a) に示すような構造系を考え、部材軸方向を



図一1 構造系と有限要素

z 軸の方向とする。 $z = \text{const.}$ によって切断される要素を採り、その節点を i, j, i', j' とし、以後この要素を要素 ij と呼ぶことにする。基準座標系を $x-y-z$ とし、要素 ij の局所座標系を $s-n-z$ とする。座標軸 $o'-n$ が z の正方向から見て反時計回りに 90° 回転して座標軸 $o'-s$ と一致するとき、 n の方向を正と定める。 s, n および z の方向に対する変位をそれぞれ u, v および w とし、 x, y および z の方向に対する変位をそれぞれ U, V および W とする。節線上の点の各方向変位を $u_i(U_i), v_i(V_i), w_i(W_i)$ 、また断面輪郭線に対する傾きを $\theta_i(\theta_i)$ のように表わす。荷重 \bar{p} が作用するものとし、その局所座標方向成分を \bar{p}_s, \bar{p}_n および \bar{p}_z とする (図一1 (b))。

a) 面内変形に対する剛性マトリックス

面内変形に対して変位関数をつぎのように仮定する。

$$w(x, s) = \alpha_1(x) + \alpha_2(x) \cdot s + w_p(x, s) \dots (1. a)$$

$$u(x, s) = \alpha_3(x) + \alpha_4(x) \cdot s + u_p(x, s) \dots (1. b)$$

ここで、 $w_p(x, s)$ ならびに $u_p(x, s)$ は節線 ii' ($s=0$) および節線 jj' ($s=b_{ij}$) が齊次境界なるときの荷重 \bar{p}_z, \bar{p}_s による変位の厳密解あるいは近似解である。

上式をマトリックス形式で表わせばつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} w(x, s) \\ u(x, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & s \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\} + \begin{Bmatrix} w_p(x, s) \\ u_p(x, s) \end{Bmatrix} \quad (1)'$$

ただし、

$$\{\alpha\}^T \equiv \{\alpha_1(x) \ \alpha_2(x) \ \alpha_3(x) \ \alpha_4(x)\}$$

したがって節線変位はつぎのように表わされる。

$$\begin{Bmatrix} w_i(x) \\ u_i(x) \\ w_j(x) \\ u_j(x) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} w(x, 0) \\ u(x, 0) \\ w(x, b_{ij}) \\ u(x, b_{ij}) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & b_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & b_{ij} \end{bmatrix} \cdot \{\alpha\}$$

.....(2)

式 (1)' と (2) の両式から $\{\alpha\}$ を消去すれば、

$$\begin{Bmatrix} w(x, s) \\ u(x, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{s}{b_{ij}} & 0 & \frac{s}{b_{ij}} & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{b_{ij}} & 0 & \frac{s}{b_{ij}} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i(x) \\ \delta_j(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_p(x, s) \\ u_p(x, s) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3)$$

ここで、

$$\{\delta_i(x)\} \equiv \begin{Bmatrix} w_i(x) \\ u_i(x) \end{Bmatrix}, \quad \{\delta_j(x)\} \equiv \begin{Bmatrix} w_j(x) \\ u_j(x) \end{Bmatrix}$$

さらに、

$$w^{(i)}(s) = u^{(i)}(s) \equiv 1 - \frac{s}{b_{ij}} \dots\dots\dots (4. a)$$

$$w^{(j)}(s) = u^{(j)}(s) \equiv \frac{s}{b_{ij}} \dots\dots\dots (4. b)$$

を用いれば、式 (3) はつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} w(x, s) \\ u(x, s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} w^{(i)} & 0 & w^{(j)} & 0 \\ 0 & u^{(i)} & 0 & u^{(j)} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i(x) \\ \delta_j(x) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w_p(x, s) \\ u_p(x, s) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (3)'$$

要素内のひずみ-変位関係は、

$$\{\epsilon\} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_z \\ \epsilon_s \\ \epsilon_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w' \\ u' \\ w' + u' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (5)$$

以後、 $()' = \frac{\partial}{\partial x} ()$ および $() \cdot = \frac{\partial}{\partial s} ()$ を用いる。

斉次境界時に生ずるひずみは、 $w_p(x, s)$ および $u_p(x, s)$ によってつぎのように表わされる。

$$\{\epsilon_p\} \equiv \begin{Bmatrix} \epsilon_{z,p} \\ \epsilon_{s,p} \\ \epsilon_{zs,p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_p' \\ u_p' \\ w_p' + u_p' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (6)$$

要素内の応力-ひずみ関係は、要素材料のヤング率 E およびポアソン比 ν を用いて、

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_s \\ N_{zs} \end{Bmatrix} = \frac{Et_{ij}}{1-\nu^2} [D] \cdot \{\epsilon\} \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

斉次境界時の応力は式 (7) と同様にして、

$$\begin{Bmatrix} N_{z,p} \\ N_{s,p} \\ N_{zs,p} \end{Bmatrix} = \frac{Et_{ij}}{1-\nu^2} [D] \cdot \{\epsilon_p\} \dots\dots\dots (8)$$

式 (7) に式 (5) の $\{\epsilon\}$ を代入し、さらに式 (3)' の表現を利用すれば、つぎの式を得る。

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_s \\ N_{zs} \end{Bmatrix} = K_{ij} [D] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i' \\ \delta_j' \end{Bmatrix}$$

$$+ [A_2] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{z,p} \\ N_{s,p} \\ N_{zs,p} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (9)$$

ただし、

$$K_{ij} = \frac{Et_{ij}}{1-\nu^2}$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} w^{(i)} & 0 & w^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^{(i)} & 0 & u^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^{(i)} & 0 & u^{(j)} \\ \dot{w}^{(i)} & 0 & \dot{w}^{(j)} & 0 \end{bmatrix}$$

さて面内力に対する平衡方程式は次の2式である注)。

$$N'_z + N'_{zs} + \bar{p}_z = 0$$

$$N'_{zs} + N'_s + \bar{p}_s = 0$$

したがって、変分原理(ガラーキン法)から式(4)'の試験関数 $w^{(i)}, u^{(i)}, w^{(j)}, u^{(j)}$ を用いてつぎの式を導くことができる†。

$$\int_0^{b_{ij}} (N'_z + N'_{zs} + \bar{p}_z) w^{(i)} ds = 0 \quad (l=i, j) \dots\dots\dots (10. a)$$

$$\int_0^{b_{ij}} (N'_{zs} + N'_s + \bar{p}_s) u^{(i)} ds = 0 \quad (l=i, j) \dots\dots\dots (10. b)$$

以後、積分はすべて $[0, b_{ij}]$ で行なわれるものとする。

式 (10) 中の $\partial/\partial s$ 項を部分積分して、

$$\int (N'_z w^{(i)} - N_{zs} \dot{w}^{(i)} + \bar{p}_z w^{(i)}) ds + (N_{zs} w^{(i)}) \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} = 0 \quad (l=i, j)$$

$$\int (N'_{zs} u^{(i)} - N_s \dot{u}^{(i)} + \bar{p}_s u^{(i)}) ds + (N_s u^{(i)}) \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} = 0 \quad (l=i, j)$$

$w^{(i)}$ および $u^{(i)}$ ($l=i, j$) の定義によって(式(4)参照)、上式はつぎのようになる。

$l=i$ の時

$$N_{zs}^{(i)}(x) \equiv -N_{zs}(x, 0) = - \int (N'_z w^{(i)} - N_{zs} \dot{w}^{(i)} + \bar{p}_z w^{(i)}) ds \dots (11. a)$$

$$N_s^{(i)}(x) \equiv -N_s(x, 0) = - \int (N'_{zs} u^{(i)} - N_s \dot{u}^{(i)} + \bar{p}_s u^{(i)}) ds \dots (11. b)$$

注) いわゆる平面応力の平衡方程式¹⁰⁾を板厚方向に積分して得られる。

† この場合、後で述べるように指定された境界条件の種類によっては、構造全体としては厳密な意味でガラーキン法にはならないでリッツ法(最小ポテンシャル エネルギー原理)になる。すなわち(4. a), 2 および(4. b), 2, 3, 4 の場合はリッツ法になる。しかしながら、式(10)の意味するところは、有限要素内の面内力に対し重みをつけた積分が平衡するという点である¹¹⁾。これはまた重みをつけた微分方程式の残差を0にするという変分法の別の観点を示すものである^{12), 13)}。この論文では通常の誘導法と異なり、以上の考え方に基づいて剛性マトリックスを誘導したが、仮想仕事の原理から誘導しても同じ結果を得られる。この考え方はつぎの2. b) においても適用される。

$l=j$ の時

$$N_{zs}^{(j)}(z) \equiv N_{zs}(z, b_{ij}) = - \int (N'_{zs} w^{(j)} - N_{zs} \dot{w}^{(j)} + \bar{p}_z w^{(j)}) ds \dots \dots \dots (11. c)$$

$$N_s^{(j)}(z) \equiv N_s(z, b_{ij}) = - \int (N'_{zs} u^{(j)} - N_s \dot{u}^{(j)} + \bar{p}_s u^{(j)}) ds \dots \dots \dots (11. d)$$

式 (11) の各式の N_z, N_s, N_{zs} に式 (9) の表現を代入することによって、整理するとつぎの式を得る。すなわち、式 (11.a) から、

$$\begin{aligned} N_{zs}^{(i)}(z) = & -K_{ij} \left[\left(\int w^{(i)} w^{(i)} ds \right) w_i'' + \left(\int w^{(j)} w^{(i)} ds \right) w_j'' + \left(\nu \int \dot{u}^{(i)} w^{(i)} ds - \frac{1-\nu}{2} \int u^{(i)} \dot{w}^{(i)} ds \right) u_i' \right. \\ & + \left(\nu \int \dot{u}^{(j)} w^{(i)} ds - \frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} \dot{w}^{(i)} ds \right) u_j' + \left(-\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(i)} \dot{w}^{(i)} ds \right) w_i \\ & \left. + \left(-\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} \dot{w}^{(i)} ds \right) w_j \right] - \int (N'_{z,p} w^{(i)} - N_{z,p} \dot{w}^{(i)} + \bar{p}_z w^{(i)}) ds \dots \dots \dots (12. a) \end{aligned}$$

式 (11.b) から、

$$\begin{aligned} N_s^{(i)}(z) = & -K_{ij} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \int u^{(i)} u^{(i)} ds \right) u_i'' + \left(\frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} u^{(i)} ds \right) u_j'' + \left(\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(i)} u^{(i)} ds - \nu \int w^{(i)} \dot{u}^{(i)} ds \right) w_i' \right. \\ & + \left(\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} u^{(i)} ds - \nu \int w^{(j)} \dot{u}^{(i)} ds \right) w_j' + \left(-\int \dot{u}^{(i)} \dot{u}^{(i)} ds \right) u_i + \left(-\int \dot{u}^{(j)} \dot{u}^{(i)} ds \right) u_j \\ & \left. - \int (N'_{zs} u^{(i)} - N_s \dot{u}^{(i)} + \bar{p}_s u^{(i)}) ds \dots \dots \dots (12. b) \end{aligned}$$

式 (11.c) から、

$$\begin{aligned} N_{zs}^{(j)}(z) = & -K_{ij} \left[\left(\int w^{(i)} w^{(j)} ds \right) w_i'' + \left(\int w^{(j)} w^{(j)} ds \right) w_j'' + \left(\nu \int \dot{u}^{(i)} w^{(j)} ds - \frac{1-\nu}{2} \int u^{(i)} \dot{w}^{(j)} ds \right) u_i' \right. \\ & + \left(\nu \int \dot{u}^{(j)} w^{(j)} ds - \frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds \right) u_j' + \left(-\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(i)} \dot{w}^{(j)} ds \right) w_i \\ & \left. + \left(-\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds \right) w_j \right] - \int (N'_{z,p} w^{(j)} - N_{z,p} \dot{w}^{(j)} + \bar{p}_z w^{(j)}) ds \dots \dots \dots (12. c) \end{aligned}$$

式 (11.d) から、

$$\begin{aligned} N_s^{(j)}(z) = & -K_{ij} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \int u^{(i)} u^{(j)} ds \right) u_i'' + \left(\frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} u^{(j)} ds \right) u_j'' + \left(\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(i)} u^{(j)} ds - \nu \int w^{(i)} \dot{u}^{(j)} ds \right) w_i' \right. \\ & + \left(\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} u^{(j)} ds - \nu \int w^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds \right) w_j' + \left(-\int \dot{u}^{(i)} \dot{u}^{(j)} ds \right) u_i + \left(-\int \dot{u}^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds \right) u_j \\ & \left. - \int (N'_{zs,p} u^{(j)} - N_s \dot{u}^{(j)} + \bar{p}_s u^{(j)}) ds \dots \dots \dots (12. d) \end{aligned}$$

式 (12.a) の最後の積分項は、再び部分積分によって、

$$- \int (N'_{z,p} + N'_{zs,p} + \bar{p}_z) w^{(i)} ds + (N_{z,p} w^{(i)}) \Big|_0^{b_{ij}}$$

となり、式 (12.b) の最後の積分項は同様にして、

$$- \int (N'_{zs,p} + N'_{s,p} + \bar{p}_s) u^{(i)} ds + (N_{s,p} u^{(i)}) \Big|_0^{b_{ij}}$$

となる。

$N_{z,p}, N_{s,p}$ および $N_{zs,p}$ は式 (8) によって表現されるもので、もともと斉次境界時の特解から導かれたものであるから、つぎの式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} N'_{z,p} + N'_{zs,p} + \bar{p}_z &= 0 \\ N'_{zs,p} + N'_{s,p} + \bar{p}_s &= 0 \end{aligned} \right\}$$

したがって、式 (12.a), (12.b), (12.c), (12.d) の各式における最後の積分項は、それぞれつぎのようになる。

$$N_{zs,p}^{(i)}(z) \equiv -N_{zs,p}(z, 0) \dots \dots \dots (13. a)$$

$$N_{p,s}^{(i)}(z) \equiv -N_{s,p}(z, 0) \dots \dots \dots (13. b)$$

$$N_{zs,p}^{(j)}(z) \equiv N_{zs,p}(z, b_{ij}) \dots \dots \dots (13. c)$$

$$N_{s,p}^{(j)}(z) \equiv N_{s,p}(z, b_{ij}) \dots \dots \dots (13. d)$$

式 (12.a), (12.b), (12.c), (12.d) の各式を書き換えて、マトリックス表示すればつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} N_{zs}^{(i)}(z) \\ N_s^{(i)}(z) \\ N_{zs}^{(j)}(z) \\ N_s^{(j)}(z) \end{Bmatrix} = [A^{(ij)}] \begin{Bmatrix} w_i''(z) \\ u_i''(z) \\ w_j''(z) \\ u_j''(z) \end{Bmatrix} + [B^{(ij)}] \begin{Bmatrix} w_i'(z) \\ u_i'(z) \\ w_j'(z) \\ u_j'(z) \end{Bmatrix}$$

$$+ [C^{(ij)}] \begin{Bmatrix} w_j(z) \\ u_i(z) \\ w_j(z) \\ u_j(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{zs,p}^{(i)}(z) \\ N_{s,p}^{(i)}(z) \\ N_{zs,p}^{(j)}(z) \\ N_{s,p}^{(j)}(z) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (14)$$

ここで、マトリックス $[A^{(ij)}], [B^{(ij)}], [C^{(ij)}]$ は一種の剛性を表わすものである。式 (14) は書き換えて、

$$\begin{Bmatrix} N^{(i)}(z) \\ N^{(j)}(z) \end{Bmatrix} = \left[[A^{(ij)}] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 + [B^{(ij)}] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + [C^{(ij)}] \right] \cdot \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\theta}_i(z) \\ \boldsymbol{\theta}_j(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_p^{(i)}(z) \\ N_p^{(j)}(z) \end{Bmatrix} \dots \dots \dots (14)'$$

b) 面外曲げ変形に対する剛性マトリックス

面外曲げ変形に対するたわみ関数をつぎのように仮定する。すなわち、内向き法線方向変位はつぎのように表

わされたとする†††。

$$v(x, s) = \beta_1(x) + \beta_2(x) \cdot s + \beta_3(x) \cdot s^2 + \beta_4(x) \cdot s^3 + v_p(x, s) \dots\dots\dots(15)$$

ここで、 $v_p(x, s)$ は節線 ii' および節線 jj' が齊次境界なるときの荷重 \bar{p}_n による変位の厳密解あるいは近似解である。マトリックス形式では、

$$v(x, s) = [1 \ s \ s^2 \ s^3] \cdot \{\beta\} + v_p(x, s) \dots\dots\dots(15)'$$

ただし、

$$\{\beta\}^T \equiv \{\beta_1(x) \ \beta_2(x) \ \beta_3(x) \ \beta_4(x)\}$$

したがって、節線の変位および s 方向の傾きはつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} v_i(x) \\ \theta_i(x) \\ v_j(x) \\ \theta_j(x) \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} v(x, 0) \\ \theta(x, 0) \\ v(x, b_{ij}) \\ \theta(x, b_{ij}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & b_{ij} & b_{ij}^2 & b_{ij}^3 \\ 0 & 1 & 2b_{ij} & 3b_{ij}^2 \end{Bmatrix} \cdot \{\beta\} \dots\dots\dots(16)$$

式 (15)' と式 (16) の両式から $\{\beta\}$ を消去すれば、

$$v(x, s) = \left[1 - \frac{3}{b_{ij}^2} s^2 + \frac{2}{b_{ij}^3} s^3 \ s - \frac{2}{b_{ij}} s^2 + \frac{1}{b_{ij}^2} s^3 \right. \\ \left. \frac{3}{b_{ij}^2} s^2 - \frac{2}{b_{ij}^3} s^3 \ - \frac{1}{b_{ij}} s^2 + \frac{1}{b_{ij}^2} s^3 \right] \\ \cdot \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} + v_p(x, s) \dots\dots\dots(17)$$

ここで、

$$\{r_i\} \equiv \begin{Bmatrix} v_i(x) \\ \theta_i(x) \end{Bmatrix}, \quad \{r_j\} \equiv \begin{Bmatrix} v_j(x) \\ \theta_j(x) \end{Bmatrix}$$

さらに、

$$v^{(i)}(s) \equiv 1 - \frac{3}{b_{ij}^2} s^2 + \frac{2}{b_{ij}^3} s^3 \dots\dots\dots(18. a)$$

$$\theta^{(i)}(s) \equiv s - \frac{2}{b_{ij}} s^2 + \frac{1}{b_{ij}^2} s^3 \dots\dots\dots(18. b)$$

$$v^{(j)}(s) \equiv \frac{3}{b_{ij}^2} s^2 - \frac{2}{b_{ij}^3} s^3 \dots\dots\dots(18. c)$$

$$\theta^{(j)}(s) \equiv -\frac{1}{b_{ij}} s^2 + \frac{1}{b_{ij}^2} s^3 \dots\dots\dots(18. d)$$

を用いれば、式 (17) はつぎのようになる。

$$u(x, s) = [v^{(i)} \ \theta^{(i)} \ v^{(j)} \ \theta^{(j)}] \cdot \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} + v_p(x, s) \dots\dots\dots(17)'$$

面外曲げ変形の場合にひずみを曲率変化によって、また応力を曲げモーメントならびにねじれモーメントによって代表させることにする。

要素内のひずみ-変位関係は、

$$\{\rho\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_s \\ 2\rho_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v'' \\ -u'' \\ -2v' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(19)$$

齊次境界時のひずみは $v_p(x, s)$ によってつぎのように表わされる。

$$\{\rho_p\} \equiv \begin{Bmatrix} \rho_{x,p} \\ \rho_{s,p} \\ 2\rho_{zs,p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -v_p'' \\ -v_p'' \\ -2v_p' \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(20)$$

要素内の応力-ひずみ関係は、

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_s \\ M_{zs} \end{Bmatrix} = \frac{Et_{ij}^3}{12(1-\nu^2)} [D] \cdot \{\rho\} \dots\dots\dots(21)$$

齊次境界時の応力は同様に、

$$\begin{Bmatrix} M_{x,p} \\ M_{s,p} \\ M_{zs,p} \end{Bmatrix} = \frac{Et_{ij}^3}{12(1-\nu^2)} [D'] \cdot \{\rho_p\} \dots\dots\dots(22)$$

式 (21) に式 (19) の $\{\rho\}$ を代入し、さらに式 (17)' の表現を利用すれば、つぎの式を得る。

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_s \\ M_{zs} \end{Bmatrix} = D_{ij} [D] \cdot \begin{Bmatrix} [R_1] \\ [R_2] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} r_i'' \\ r_j'' \end{Bmatrix} + [R_2] \begin{Bmatrix} r_i' \\ r_j' \end{Bmatrix} \\ + [R_3] \begin{Bmatrix} r_i \\ r_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_{x,p} \\ M_{s,p} \\ M_{zs,p} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(23)$$

ただし、

$$D_{ij} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

$$[R_1] \equiv \begin{bmatrix} -v^{(i)} & -\theta^{(i)} & -v^{(j)} & -\theta^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[R_2] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2\dot{v}^{(i)} & -2\dot{\theta}^{(i)} & -2\dot{v}^{(j)} & -2\dot{\theta}^{(j)} \end{bmatrix}$$

$$[R_3] \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\ddot{v}^{(i)} & -\ddot{\theta}^{(i)} & -\ddot{v}^{(j)} & -\ddot{\theta}^{(j)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

さて面外力に対する平衡方程式は¹⁶⁾、

$$M_x'' + 2M'_{zs} + M''_s + \bar{p}_n = 0$$

である。変分原理 (ガラーキン法)^{注)} によって式 (17)' の試験関数 $v^{(i)}$, $\theta^{(i)}$, $v^{(j)}$, $\theta^{(j)}$ を用いてつぎの式を導くことができる。

$$\int (M_x'' - 2M'_{zs} + M''_s + \bar{p}_n) v^{(l)} ds = 0 \quad (l=i, j) \dots\dots\dots(24. a)$$

$$\int (M_x'' + 2M'_{zs} + M''_s + \bar{p}_n) \theta^{(l)} ds = 0 \quad (l=i, j) \dots\dots\dots(24. b)$$

式 (24) 中の $\partial^2/\partial s^2$ 項および $\partial/\partial s$ 項を部分積分して、

$$\int (M_x'' v^{(l)} - 2M'_{zs} \dot{v}^{(l)} + M_s \ddot{v}^{(l)} + \bar{p}_n v^{(l)}) ds \\ + \{(2M'_{zs} + M''_s) v^{(l)} - M_s \dot{v}^{(l)}\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} = 0 \quad (l=i, j)$$

$$\int (M_x'' \theta^{(l)} - 2M'_{zs} \dot{\theta}^{(l)} + M_s \ddot{\theta}^{(l)} + \bar{p}_n \theta^{(l)}) ds$$

††† 長方形要素に三次多項式の形の変位関数を用いて適合性を充足している例は文献 14), 15) に見られるのみである。

注) 45 ページの脚注と同じ

$$+ \{(2M'_{zs} + M'_s)\theta^{(l)} - M_s\dot{\theta}^{(l)}\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} = 0 \quad (l=i, j)$$

$v^{(l)}$ および $\theta^{(l)}$ ($l=i, j$) の定義によって (式 (18) 参照), 上式はつぎのようになる。

$l=i$ のとき

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s^{(i)}(z) &\equiv -\bar{Q}_s(z, 0) \\ &= -\int (M_z''v^{(i)} - 2M'_{zs}\dot{v}^{(i)} + M_s\ddot{v}^{(i)} + \bar{p}_n v^{(i)}) ds \\ &\dots\dots\dots(25. a) \end{aligned}$$

$$M_s^{(i)}(z) \equiv M_s(z, 0)$$

$$= -\int (M_z''\theta^{(i)} - 2M'_{zs}\dot{\theta}^{(i)} + M_s\ddot{\theta}^{(i)} + \bar{p}_n\theta^{(i)}) ds \dots\dots\dots(25. b)$$

$l=j$ のとき

式 (25. a) から,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s^{(i)}(z) &= D_{ij} \left[\left(\int v^{(i)}v^{(i)} ds \right) v_i^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(i)}v^{(i)} ds \right) \theta_i^{\text{IV}} + \left(\int v^{(j)}v^{(i)} ds \right) v_j^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(j)}v^{(i)} ds \right) \theta_j^{\text{IV}} \right. \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(i)}v^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(i)}\dot{v}^{(i)} ds + \nu \int v^{(i)}\ddot{v}^{(i)} ds \right\} v_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(i)}v^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(i)}\dot{v}^{(i)} ds \right. \\ &+ \left. \nu \int \theta^{(i)}\ddot{v}^{(i)} ds \right\} \theta_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(j)}v^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)}\dot{v}^{(i)} ds + \nu \int v^{(j)}\ddot{v}^{(i)} ds \right\} v_j'' \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(j)}v^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)}\dot{v}^{(i)} ds + \nu \int \theta^{(j)}\ddot{v}^{(i)} ds \right\} \theta_j'' + \left(\int \ddot{v}^{(i)}\ddot{v}^{(i)} ds \right) v_i + \left(\int \ddot{\theta}^{(i)}\ddot{v}^{(i)} ds \right) \theta_i \\ &+ \left(\int \ddot{v}^{(j)}v^{(i)} ds \right) v_j + \left(\int \ddot{\theta}^{(j)}\ddot{v}^{(i)} ds \right) \theta_j \Big] - \int (M''_{z, p}v^{(i)} - 2M'_{zs, p}\dot{v}^{(i)} + M_s\ddot{v}^{(i)} + \bar{p}_n v^{(i)}) ds \\ &\dots\dots\dots(26. a) \end{aligned}$$

式 (25. b) から,

$$\begin{aligned} M_s^{(i)}(z) &= D_{ij} \left[\left(\int v^{(i)}\theta^{(i)} ds \right) v_i^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(i)}\theta^{(i)} ds \right) \theta_i^{\text{IV}} + \left(\int v^{(j)}\theta^{(i)} ds \right) v_j^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(j)}\theta^{(i)} ds \right) \theta_j^{\text{IV}} \right. \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(i)}\theta^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(i)}\dot{\theta}^{(i)} ds + \nu \int v^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right\} v_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(i)}\theta^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(i)}\dot{\theta}^{(i)} ds \right. \\ &+ \left. \nu \int \theta^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right\} \theta_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(j)}\theta^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)}\dot{\theta}^{(i)} ds + \nu \int u^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right\} v_j'' \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(j)}\theta^{(i)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)}\dot{\theta}^{(i)} ds + \nu \int \theta^{(j)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right\} \theta_j'' + \left(\int \ddot{v}^{(i)}\theta^{(i)} ds \right) v_i + \left(\int \ddot{\theta}^{(i)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right) \theta_i \\ &+ \left(\int \ddot{v}^{(j)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right) v_j + \left(\int \ddot{\theta}^{(j)}\ddot{\theta}^{(i)} ds \right) \theta_j \Big] - \int (M''_{z, p}\theta^{(i)} - 2M'_{zs, p}\dot{\theta}^{(i)} + M_s\ddot{\theta}^{(i)} + \bar{p}_n\theta^{(i)}) ds \\ &\dots\dots\dots(26. b) \end{aligned}$$

式 (25. c) から,

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s^{(j)}(z) &= D_{ij} \left[\left(\int v^{(i)}v^{(j)} ds \right) v_i^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(i)}v^{(j)} ds \right) \theta_i^{\text{IV}} + \left(\int v^{(j)}v^{(j)} ds \right) v_j^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(j)}v^{(j)} ds \right) \theta_j^{\text{IV}} \right. \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(i)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(i)}\dot{v}^{(j)} ds + \nu \int v^{(i)}\ddot{v}^{(j)} ds \right\} v_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(i)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(i)}\dot{v}^{(j)} ds \right. \\ &+ \left. \nu \int \theta^{(i)}\ddot{v}^{(j)} ds \right\} \theta_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(j)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)}\dot{v}^{(j)} ds + \nu \int v^{(j)}\ddot{v}^{(j)} ds \right\} v_j'' \\ &+ \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(j)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)}\dot{v}^{(j)} ds + \nu \int \theta^{(j)}\ddot{v}^{(j)} ds \right\} \theta_j'' + \left(\int \ddot{v}^{(i)}\ddot{v}^{(j)} ds \right) v_i + \left(\int \ddot{\theta}^{(i)}\ddot{v}^{(j)} ds \right) \theta_i \\ &+ \left(\int \ddot{v}^{(j)}\ddot{v}^{(j)} ds \right) v_j + \left(\int \ddot{\theta}^{(j)}\ddot{v}^{(j)} ds \right) \theta_j \Big] - \int (M''_{z, p}v^{(j)} - 2M'_{zs, p}\dot{v}^{(j)} + M_s\ddot{v}^{(j)} + \bar{p}_n v^{(j)}) ds \\ &\dots\dots\dots(26. c) \end{aligned}$$

式 (25. d) から,

$$M_s^{(j)}(z) = D_{ij} \left[\left(\int v^{(i)}\theta^{(j)} ds \right) v_i^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(i)}\theta^{(j)} ds \right) \theta_i^{\text{IV}} + \left(\int v^{(j)}\theta^{(j)} ds \right) v_j^{\text{IV}} + \left(\int \theta^{(j)}\theta^{(j)} ds \right) \theta_j^{\text{IV}} \right.$$

$$\bar{Q}_s^{(j)}(z) \equiv \bar{Q}_s(z, b_{ij})$$

$$= -\int (M_z''v^{(j)} - 2M'_{zs}\dot{v}^{(j)} + M_s\ddot{v}^{(j)} + \bar{p}_n v^{(j)}) ds \dots\dots\dots(25. c)$$

$$M_s^{(j)}(z) \equiv -M_s^{(j)}(z, b_{ij})$$

$$= -\int (M_z''\theta^{(j)} - 2M'_{zs}\dot{\theta}^{(j)} + M_s\ddot{\theta}^{(j)} + \bar{p}_n\theta^{(j)}) ds \dots\dots\dots(25. d)$$

ただし, \bar{Q}_s は等価せん断力¹⁶⁾であり次式で表わされる。

$$\bar{Q}_s = M'_s + 2M'_{zs}$$

式 (25) の各式の M_z , M_s , M_{zs} に式 (23) の表現を代入することによって, 整理するとつぎの式を得る。すなわち,

$$\begin{aligned}
 & + \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(i)} \theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds + \nu \int v^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right\} v_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(i)} \theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(i)} \dot{\theta}^{(j)} ds \right. \\
 & + \nu \int \theta^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \left. \right\} \theta_i'' + \left\{ \nu \int \ddot{v}^{(j)} \theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)} \dot{\theta}^{(j)} ds + \nu \int v^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right\} v_j'' \\
 & + \left\{ \nu \int \ddot{\theta}^{(j)} \theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)} \dot{\theta}^{(j)} ds + \nu \int \theta^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right\} \theta_j'' + \left(\int \ddot{v}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right) v_i + \left(\int \ddot{\theta}^{(i)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right) \theta_i \\
 & + \left(\int \ddot{v}^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right) v_j + \left(\int \ddot{\theta}^{(j)} \ddot{\theta}^{(j)} ds \right) \theta_j - \int (M''_{z, \rho} \theta^{(j)} - 2 M'_{zs, \rho} \dot{\theta}^{(j)} + M_{s, \rho} \ddot{\theta}^{(j)} + \bar{p}_n \theta^{(j)}) ds
 \end{aligned}$$

.....(26. d)

式 (26. a) の最後の積分項は部分積分によってつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 & - \int (M''_{z, \rho} + 2 M'_{zs, \rho} + M''_{s, \rho} + \bar{p}_n) v^{(i)} ds \\
 & + \{ 2 M'_{zs, \rho} + M''_{s, \rho} \} v^{(i)} - M_s \dot{v}^{(i)} \Big|_0^{b_{ij}}
 \end{aligned}$$

$M_{z, \rho}$, $M_{s, \rho}$ および $M_{zs, \rho}$ は式 (22) によって表現されるもので、もともと各次元境界時の特解から導かれたものであるからつぎの式が成立する。

$$M''_{z, \rho} + 2 M'_{zs, \rho} + M''_{s, \rho} + \bar{p}_n = 0$$

したがって、式 (26. a), (26. b), (26. c), (26. d) の各式における最後の積分項は、それぞれつぎのようになる。

$$\bar{Q}_{s, \rho}^{(i)}(z) \equiv -\bar{Q}_{s, \rho}(z, 0) \dots\dots\dots(27. a)$$

$$M_s^{(i)}(z) \equiv M_{s, \rho}(z, 0) \dots\dots\dots(27. b)$$

$$\bar{Q}_{s, \rho}^{(j)}(z) \equiv \bar{Q}_{s, \rho}(z, b_{ij}) \dots\dots\dots(27. c)$$

$$M_s^{(j)}(z) \equiv -M_{s, \rho}(z, b_{ij}) \dots\dots\dots(27. d)$$

式 (26. a), (26. b), (26. c), (26. d) の各式を書き換えて、マトリックス表示すればつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{s, \rho}^{(i)}(z) \\ M_s^{(i)}(z) \\ \bar{Q}_{s, \rho}^{(j)}(z) \\ M_s^{(j)}(z) \end{Bmatrix} &= [R^{(ij)}] \begin{Bmatrix} v_i^{IV}(z) \\ \theta_i^{IV}(z) \\ v_j^{IV}(z) \\ \theta_j^{IV}(z) \end{Bmatrix} + [S^{(ij)}] \begin{Bmatrix} v_i''(z) \\ \theta_i''(z) \\ v_j''(z) \\ \theta_j''(z) \end{Bmatrix} \\
 &+ [T^{(ij)}] \begin{Bmatrix} v_i(z) \\ \theta_i(z) \\ v_j(z) \\ \theta_j(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{s, \rho}^{(i)}(z) \\ M_s^{(i)}(z) \\ \bar{Q}_{s, \rho}^{(j)}(z) \\ M_s^{(j)}(z) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(28)
 \end{aligned}$$

ここで、マトリックス $[R^{(ij)}]$, $[S^{(ij)}]$, $[T^{(ij)}]$ は一種の剛性を表わすものである。式 (28) は書き換えて、

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} M^{(i)}(z) \\ M^{(j)}(z) \end{Bmatrix} &= \left[[R^{(ij)}] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 + [S^{(ij)}] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 &+ [T^{(ij)}] \cdot \left. \begin{Bmatrix} r_i(z) \\ r_j(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} M_p^{(i)}(z) \\ M_p^{(j)}(z) \end{Bmatrix} \right] \dots\dots\dots(28)'
 \end{aligned}$$

以上の結果から、節線 ii' および jj' における外力と変位の関係は、式 (14)' および式 (28)' の両式をまとめてつぎのように表現される。

$$\begin{Bmatrix} N^{(i)}(z) \\ M^{(i)}(z) \\ N^{(j)}(z) \\ M^{(j)}(z) \end{Bmatrix} = [\tilde{K}] \begin{Bmatrix} \delta_i(z) \\ r_i(z) \\ \delta_j(z) \\ r_j(z) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_p^{(i)}(z) \\ M_p^{(i)}(z) \\ N_p^{(j)}(z) \\ M_p^{(j)}(z) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(29)$$

$N_p^{(i)}(z)$ 及び $M_p^{(i)}(z)$ は ii' 節線に作用し、 $N_p^{(j)}(z)$

および $M_p^{(j)}(z)$ は jj' 節線に作用する等価節線荷重と考えることによってつぎの式を得ることができる。

$$\begin{Bmatrix} \tilde{N}^{(i)}(z) \\ \tilde{M}^{(i)}(z) \\ \tilde{N}^{(j)}(z) \\ \tilde{M}^{(j)}(z) \end{Bmatrix} = [\tilde{K}] \begin{Bmatrix} \delta_i(z) \\ r_i(z) \\ \delta_j(z) \\ r_j(z) \end{Bmatrix} \dots\dots\dots(30)$$

上式において、

$$\begin{aligned}
 [\tilde{K}] &= \left[[\tilde{K}_1] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^4 \quad [\tilde{K}_2] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 \right. \\
 &+ \left. [\tilde{K}_3] \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) + [\tilde{K}_4] \right] \dots\dots\dots(31)
 \end{aligned}$$

は一種の剛性マトリックスである。マトリックス $[\tilde{K}_1]$, $[\tilde{K}_2]$, $[\tilde{K}_3]$ ならびに $[\tilde{K}_4]$ を表—1, 2, 3 および 4 に示す。 $[\tilde{K}_3]$ は非対称マトリックスとなる。

ここで誘導した剛性マトリックスは、要素内で等方性・等厚という仮定の上に乗って求めたものである。一般に異方性・変厚要素の場合も同様の手順によって剛性マトリックスを得ることができる。たとえば、直交異方性材料に対しては、式 (7) および式 (21) の代りに、

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_s \\ N_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_z & K_v & 0 \\ K_v & K_s & 0 \\ 0 & 0 & K_{zs} \end{bmatrix} \cdot \{ \epsilon \} \dots\dots\dots(7)'$$

$$\begin{Bmatrix} M_z \\ M_s \\ M_{zs} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_z & D_v & 0 \\ D_v & D_s & 0 \\ 0 & 0 & D_{zs} \end{bmatrix} \cdot \{ \rho \} \dots\dots\dots(21)'$$

を用いればよい。

(3) 座標変換マトリックス

2.(2) で誘導した節線上の外力-変位関係式 (30) は要素 ij の局所座標系に対するものであるから、構造物全体を扱うには基準座標系に対する外力-変位関係式を求める必要がある。座標変換によって、たとえば節線 ii' では、

$$\begin{aligned}
 \{ F_z^{(i)} \ F_x^{(i)} \ F_y^{(i)} \ M^{(i)} \}^T \\
 = [L] \cdot \{ \tilde{N}_{zs}^{(i)} \ \tilde{N}_s^{(i)} \ \tilde{Q}_s^{(i)} \ \tilde{M}_s^{(i)} \} \\
 \{ W_i \ U_i \ V_i \ \theta_i \}^T = [L] \cdot \{ w_i \ u_i \ v_i \ \theta_i \}
 \end{aligned}$$

のように表わされる。ここで、 $F_z^{(i)}$, $F_x^{(i)}$, $F_y^{(i)}$ ならびに $M^{(i)}$ は基準座標系に対する節線 ii' 上の外力である。

したがって、基準座標系に対する剛性マトリックスは

表-1 K_1 マトリックス

$$[K_1] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & D_{ij} \left(\frac{13}{35} \right) b_{ij} & D_{ij} \left(\frac{11}{210} \right) b_{ij}^2 & 0 & 0 & D_{ij} \left(\frac{9}{70} \right) b_{ij} & D_{ij} \left(-\frac{13}{420} \right) b_{ij}^2 & \\ & & D_{ij} \left(\frac{1}{105} \right) b_{ij}^3 & 0 & 0 & D_{ij} \left(\frac{13}{420} \right) b_{ij}^2 & D_{ij} \left(-\frac{1}{140} \right) b_{ij}^3 & \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & 0 & 0 & 0 & \\ \text{Sym.} & & & & & D_{ij} \left(\frac{13}{35} \right) b_{ij} & D_{ij} \left(-\frac{11}{210} \right) b_{ij}^2 & \\ & & & & & & D_{ij} \left(\frac{1}{105} \right) b_{ij}^3 & \end{pmatrix}$$

表-2 K_2 マトリックス

$$[K_2] = \begin{pmatrix} K_{ij} \left(-\frac{1}{3} \right) b_{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1}{6} \right) b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{ij} \left(\frac{1-\nu}{6} \right) b_{ij} & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1-\nu}{12} \right) b_{ij} & 0 & 0 \\ & & D_{ij} \left(-\frac{12}{5} \right) \frac{1}{b_{ij}} & D_{ij} \left(-\nu - \frac{1}{5} \right) & 0 & 0 & D_{ij} \left(\frac{12}{5} \right) \frac{1}{b_{ij}} & D_{ij} \left(-\frac{1}{5} \right) \\ & & & D_{ij} \left(-\frac{4}{15} \right) b_{ij} & 0 & 0 & D_{ij} \left(-\frac{1}{5} \right) & D_{ij} \left(\frac{1}{15} \right) b_{ij} \\ & & & & K_{ij} \left(-\frac{1}{3} \right) b_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & K_{ij} \left(-\frac{1-\nu}{6} \right) b_{ij} & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & D_{ij} \left(-\frac{12}{5} \right) \frac{1}{b_{ij}} & D_{ij} \left(\nu + \frac{1}{5} \right) \\ & & & & & & & D_{ij} \left(-\frac{4}{15} \right) b_{ij} \end{pmatrix}$$

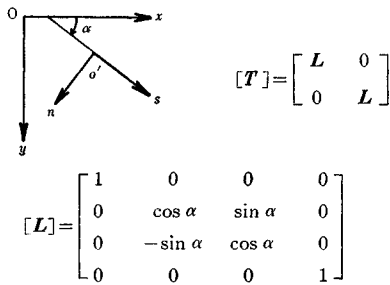
表-3 K_3 マトリックス

$$[K_3] = \begin{pmatrix} 0 & K_{ij} \left(\frac{-1+3\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1+\nu}{4} \right) & 0 & 0 \\ K_{ij} \left(\frac{1-3\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1+\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{ij} \left(\frac{1+\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(\frac{1-3\nu}{4} \right) & 0 & 0 \\ K_{ij} \left(\frac{1+\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(\frac{-1+3\nu}{4} \right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

表-4 K_4 マトリックス

$$[K_4] = \begin{pmatrix} K_{ij} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ & K_{ij} \left(\frac{1}{b_{ij}} \right) & 0 & 0 & 0 & K_{ij} \left(-\frac{1}{b_{ij}} \right) & 0 & 0 \\ & & D_{ij} \left(\frac{12}{b_{ij}^3} \right) & D_{ij} \left(\frac{6}{b_{ij}^3} \right) & 0 & 0 & D_{ij} \left(-\frac{12}{b_{ij}^3} \right) & D_{ij} \left(\frac{6}{b_{ij}^3} \right) \\ & & & D_{ij} \left(\frac{4}{b_{ij}} \right) & 0 & 0 & D_{ij} \left(-\frac{6}{b_{ij}^3} \right) & D_{ij} \left(\frac{2}{b_{ij}} \right) \\ & & & & K_{ij} \left(\frac{1-\nu}{2} \right) \frac{1}{b_{ij}} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & K_{ij} \left(\frac{1}{b_{ij}} \right) & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & & & & D_{ij} \left(\frac{12}{b_{ij}^3} \right) & D_{ij} \left(-\frac{6}{b_{ij}^3} \right) \\ & & & & & & & D_{ij} \left(\frac{4}{b_{ij}} \right) \end{pmatrix}$$

表-5 座標変換マトリックス



つぎのようにして得られる。

$$[K] = [T]^T [\tilde{K}] [T] \dots\dots\dots (32)$$

この場合、 $[T]$ は座標変換マトリックスであり、表-5に示す。

(4) 指定された境界条件を有する要素の取扱い

ここでは代表的な境界条件のみ示すが、ここに示した場合以外の境界条件も同じような考え方で処理できる。

a) 面内変形に対する境界条件

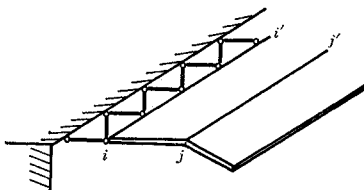
① 一端が完全に拘束されている場合 (図-2 (a)) : この境界条件はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} w(x, 0) &= 0 \\ u(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

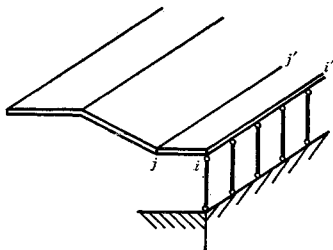
この場合の変位関数の選定には式 (33) の条件が考慮されなければならない。式 (3)' を参照して、

$$\left. \begin{aligned} w(x, s) &= w^{(j)}(s)w_j(x) + w_p^{rr}(x, s) \\ u(x, s) &= u^{(j)}(s)u_j(x) + u_p^{rr}(x, s) \end{aligned} \right\} \dots (34)$$

ここで、 $w_p^{rr}(x, s)$ および $u_p^{rr}(x, s)$ は節線 ii' および jj' が斉次境界(完全拘束端)なるときの荷重 \bar{p}_z, \bar{p}_s による変位の厳密解あるいは近似解である (図-1 (b) 参照)。



(a) $w=0, u=0$



(b) $N_{zs}=0, N_s=0$

図-2 面内変形に対する境界条件

以下 2.(2) と同様にして剛性マトリックス表現式を誘導する。

ひずみ-変位関係ならびに応力-ひずみ関係 (式 (5)~(8)) によって、要素内の応力は、

$$\begin{Bmatrix} N_z \\ N_s \\ N_{zs} \end{Bmatrix} = K_{ij} [D] \begin{Bmatrix} w^{(j)} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & u^{(j)} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j' \\ u_j' \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dot{u}^{(j)} \\ w^{(j)} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j \\ u_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{zs,p}^{rr} \\ N_{s,p}^{rr} \\ N_{ss,p}^{rr} \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (35)$$

ただし、

$$\begin{Bmatrix} N_{zs,p}^{rr} \\ N_{s,p}^{rr} \\ N_{ss,p}^{rr} \end{Bmatrix} = K_{ij} [D] \begin{Bmatrix} w_p^{rr'} \\ u_p^{rr'} \\ w_p^{rr'} + u_p^{rr'} \end{Bmatrix}$$

変分原理 (ガラーキソ法) から式 (34) の試験関数 $w^{(j)}$ および $u^{(j)}$ を用いてつぎの式を導くことができる。

$$\int (N_z' + N_{zs} + \bar{p}_z) w^{(j)} ds = 0 \dots\dots\dots (36. a)$$

$$\int (N_{zs}' + N_s + \bar{p}_s) u^{(j)} ds = 0 \dots\dots\dots (36. b)$$

部分積分を利用して上式はつぎようになる。

$$N_{zs}^{(j)}(x) = -K_{ij} \left[\left(\int w^{(j)} w^{(j)} ds \right) w_j'' + \left(\nu \int \dot{u}^{(j)} w^{(j)} ds - \frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds \right) u_j' + \left(-\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} \dot{w}^{(j)} ds \right) w_j \right] + N_{zs,p}^{rr(j)}(x) \dots\dots\dots (37. a)$$

$$N_s^{(j)}(x) = -K_{ij} \left[\left(\frac{1-\nu}{2} \int u^{(j)} u^{(j)} ds \right) u_j'' + \left(\frac{1-\nu}{2} \int \dot{w}^{(j)} u^{(j)} ds - \nu \int w^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds \right) w_j' + \left(-\nu \int \dot{u}^{(j)} \dot{u}^{(j)} ds \right) u_j \right] + N_{s,p}^{rr(j)}(x) \dots\dots\dots (37. b)$$

式 (37.a) および式 (37.b) は節線 jj' における外力と変位の関係を示す式であり、式 (12.a) および式 (12.b) の中で $w_i=0$ および $u_i=0$ と置いた式と一致する ($N_{zs,p}^{rr} \equiv N_{zs,p}, N_{s,p}^{rr} \equiv N_{s,p}$)。したがってこの場合には、等価節線荷重として節線 jj' の $N_{zs,p}^{rr}$ および $N_{s,p}^{rr}$ のみを考え、2.(2) において一般的に求めた剛性マトリックス表現式 (14) あるいは式 (14)' の中で、 $w_i=0$ および $u_i=0$ あるいは $\delta_i=0$ と置き、 $N_{zs}^{(i)}$ および $N_s^{(i)}$ に相当する行を削除すればよい。

② 一端が拘束なしの場合 (図-2 (b)) : この境界条件はつぎようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_{zs}(x, 0) &= K_{ij} \frac{1-\nu}{2} \{ w(x, 0) + u'(x, 0) \} = 0 \\ N_s(x, 0) &= K_{ij} u(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

この場合変位関数の選定に際し、式 (38) の条件を厳密に充足しかつ後の取り扱いに便利であるような関数形を見出すのは困難である。そこで式 (38) の条件は力学的境界条件であるということ考慮しつぎのように変位を選定する。

$$\left. \begin{aligned} w(x, s) &= w^{(i)}(s)w_i(x) \\ &\quad + w^{(j)}(s)w_j(x) + w_p^{f'r}(x, s) \\ u(x, s) &= u^{(i)}(s)u_i(x) + u^{(j)}(s)u_j(x) \\ &\quad + u_p^{f'r}(x, s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(39)$$

ここで、 $w_p^{f'r}(x, s)$ および $u_p^{f'r}(x, s)$ は節線 ii' が自由境界（拘束なし）でかつ節線 jj' が齊次境界なるときの荷重 \bar{p}_z, \bar{p}_s による変位の厳密解あるいは近似解である。

以下 2.(2) と全く同様にして、変分原理（リッツ法）によって次式を得ることができる。

$$0 = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + \{N_{zs, \rho}^{f'r}(x, s)w^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots(40. a)$$

$$0 = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + \{N_{s, \rho}^{f'r}(x, s)u^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots(40. b)$$

$$N_{zs}^{(j)}(x) = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + \{N_{zs, \rho}^{f'r}(x, s)w^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots(40. c)$$

$$N_s^{(j)}(x) = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + \{N_{s, \rho}^{f'r}(x, s)u^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots(40. d)$$

ここで、 $N_{z, \rho}^{f'r}, N_{s, \rho}^{f'r}$ および $N_{zs, \rho}^{f'r}$ は節線 ii' 自由境界および節線 jj' 拘束境界時の応力を表わし、次式から決定される。

$$\left\{ \begin{matrix} N_{z, \rho}^{f'r} \\ N_{s, \rho}^{f'r} \\ N_{zs, \rho}^{f'r} \end{matrix} \right\} = K_{ij} [D] \left\{ \begin{matrix} w_p^{f'r'} \\ u_p^{f'r'} \\ w_p^{f'r'} + u_p^{f'r'} \end{matrix} \right\} \dots\dots(41)$$

したがって、 $w_p^{f'r}$ および $u_p^{f'r}$ の定義によって、

$$\left. \begin{aligned} N_{zs, \rho}^{f'r(i)}(x) &\equiv -N_{zs, \rho}^{f'r}(x, 0) = 0 \\ N_{s, \rho}^{f'r(i)}(x) &\equiv -N_{s, \rho}^{f'r}(x, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(42. a)$$

式 (42. a) を考慮すれば、式 (40) の各式はつぎのようになる。

$$0 = -K_{ij}[\dots\dots\dots] \dots\dots(43. a)$$

$$0 = -K_{ij}[\dots\dots\dots] \dots\dots(43. b)$$

$$N_{zs}^{(j)}(x) = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + N_{zs, \rho}^{f'r(j)}(x) \dots\dots\dots(43. c)$$

$$N_s^{(j)}(x) = -K_{ij}[\dots\dots\dots] + N_{s, \rho}^{f'r(j)}(x) \dots\dots\dots(43. d)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} N_{zs, \rho}^{f'r(j)}(x) &\equiv N_{zs, \rho}^{f'r}(x, b_{ij}) \\ N_{s, \rho}^{f'r(j)}(x) &\equiv N_{s, \rho}^{f'r}(x, b_{ij}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(42. b)$$

以上の式 (40) ならびに式 (43) の各式中における

[.....] はそれぞれ 2.(2) の式 (12) で対応する各項に等しい。したがってこの場合には、等価節線荷重として節線 jj' の $N_{zs, \rho}^{f'r(j)}$ および $N_{s, \rho}^{f'r(j)}$ のみを考え、2.(2) において求めた式 (14) あるいは式 (14)' において $N_{zs}^{(i)}=0$ および $N_s^{(i)}=0$ と置けばよい（境界条件式 (38)）。

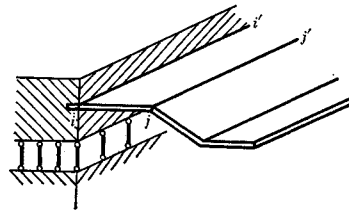
また節線 ii' に外荷重 $\bar{N}_{zs}^{(i)}$ ならびに $\bar{N}_s^{(i)}$ が作用する場合には、すなわち、

$$\left. \begin{aligned} -N_{zs}(x, 0) &= \bar{N}_{zs}^{(i)} \\ -N_s(x, 0) &= \bar{N}_s^{(i)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(38)'$$

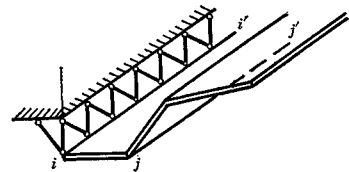
の境界条件の場合には、式 (14) あるいは式 (14)' において $N_{zs}^{(i)} = \bar{N}_{zs}^{(i)}$ および $N_s^{(i)} = \bar{N}_s^{(i)}$ と置く以外は式 (38) の場合と同じである。

b) 面外曲げ変形に対する境界条件

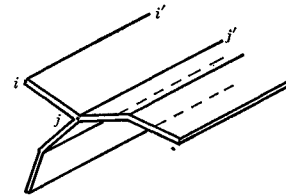
① 一端が固定端の場合（図-3 (a)）：この境界条件



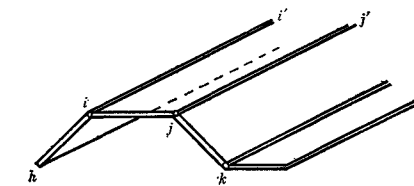
(a) $v=0, \theta=0$



(b) $v=0, M_s=0$



(c) $M_s=0, Q_s=0$



(d) $M_s=0, \theta_{ij} = \theta_{ih}, \theta_{jk} = \theta_{jk}$

図-3 面外曲げ変形に対する境界条件

はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} v(x, 0) &= 0 \\ v'(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(44)$$

この場合変位関数の選定に式(44)の条件を考慮して、

$$\begin{aligned} v(x, s) &= v^{(j)}(s)v_j(x) + \theta^{(j)}(s)\theta_j(x) \\ \bar{Q}_s^{(j)}(x) &= D_{ij} \left[\left(\int v^{(j)}v^{(j)} ds \right) v_j'' + \left(\int \theta^{(j)}v^{(j)} ds \right) \theta_j'' + \left\{ \nu \int \bar{v}^{(j)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)}\dot{v}^{(j)} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \int v^{(j)}\bar{v}^{(j)} ds \right\} v_j'' + \left\{ \nu \int \bar{\theta}^{(j)}v^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)}\dot{v}^{(j)} ds + \int \theta^{(j)}\bar{v}^{(j)} ds \right\} \theta_j'' \right. \\ &\quad \left. + \left(\int \bar{v}^{(j)}\bar{v}^{(j)} ds \right) v_j + \left(\int \bar{\theta}^{(j)}\bar{v}^{(j)} ds \right) \theta_j \right] + \bar{Q}_{s,p}^{rr(j)} \dots\dots\dots(46. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_s^{(j)}(x) &= D_{ij} \left[\left(\int v^{(j)}\theta^{(j)} ds \right) v_j'' + \left(\int \theta^{(j)}\theta^{(j)} ds \right) \theta_j'' + \left\{ \nu \int \bar{v}^{(j)}\theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{v}^{(j)}\dot{\theta}^{(j)} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \int v^{(j)}\bar{\theta}^{(j)} ds \right\} v_j'' + \left\{ \nu \int \bar{\theta}^{(j)}\theta^{(j)} ds - (1-\nu) \int \dot{\theta}^{(j)}\dot{\theta}^{(j)} ds + \nu \int \theta^{(j)}\bar{\theta}^{(j)} ds \right\} \theta_j'' \right. \\ &\quad \left. + \left(\int \bar{v}^{(j)}\bar{\theta}^{(j)} ds \right) v_j + \left(\int \bar{\theta}^{(j)}\bar{\theta}^{(j)} ds \right) \theta_j + M_{s,p}^{rr(j)} \right] \dots\dots\dots(46. b) \end{aligned}$$

式(46.a)と式(46.b)は、式(26.c)および式(26.d)の両式中で $v_i=0$ ならびに $\theta_i=0$ と置いた式に一致する ($\bar{Q}_{s,p}^{rr} \equiv \bar{Q}_{s,p}$, $M_{s,p}^{rr} \equiv M_{s,p}$)。したがってこの場合には、等価節線荷重として節線 jj' の $\bar{Q}_{s,p}^{rr(j)}$ および $M_{s,p}^{rr(j)}$ のみを考え、2.(2)の剛性マトリックス表現式(28)あるいは式(28)'において $v_i=0$ および $\theta_i=0$ あるいは $r_i=0$ と置き、 $\bar{Q}_s^{(i)}$ および $M_s^{(i)}$ に相当する行を削除すればよい。

② 一端が単純支持端の場合(図-3(b)): この境界条件はつぎのようになる。

$$v(x, 0) = 0 \dots\dots\dots(47. a)$$

$$M_s(x, 0) = -D_{ij} \{ v''(x, 0) + \nu v''(x, 0) \} = 0 \dots\dots\dots(47. b)$$

式(47.a)は幾何学的条件であり、式(47.b)は力学的条件であるということ considering、つぎのように変位関数を選定する。

$$\begin{aligned} v(x, s) &= \theta^{(i)}(s)\theta_i(x) + v^{(j)}(s)v_j(x) \\ &\quad + \theta^{(j)}(s)\theta_j(x) + v_p^{sr}(x, s) \dots\dots\dots(48) \end{aligned}$$

ここで、 $v_p^{sr}(x, s)$ は節線 ii' が単純支持端でかつ節線 jj' が固定端なるときの荷重 \bar{P}_n によるたわみ変位の厳密解あるいは近似解である。

以下2.(2)と全く同様に変分原理(リッツ法)によって次式を導くことができる。

$$\begin{aligned} 0 &= D_{ij} [\dots\dots\dots] \\ &\quad + \{ \bar{Q}_{s,p}^{sr}(x, s)\theta^{(i)}(s) - M_{s,p}^{sr}(x, s)\dot{\theta}^{(i)}(s) \} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots\dots(49. a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Q}_s^{(j)}(x) &= D_{ij} [\dots\dots\dots] \\ &\quad + \{ \bar{Q}_{s,p}^{sr}(x, s)v^{(j)}(s) - M_{s,p}^{sr}(x, s)\dot{v}^{(j)}(s) \} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots\dots(49. b) \end{aligned}$$

$$M_s^{(j)}(x) = D_{ij} [\dots\dots\dots]$$

$$+ v_p^{sr}(x, s) \dots\dots\dots(45)$$

ここで、 $v_p^{sr}(x, s)$ は節線 ii' および jj' が齊次境界(固定端)なるときの荷重 \bar{P}_n によるたわみ変位の厳密解あるいは近似解である。

以下2.(2)と全く同様に変分原理(ガラーキン法)から次式を導くことができる。

$$\begin{aligned} &+ \{ \bar{Q}_{s,p}^{sr}(x, s)\theta^{(j)}(s) - M_{s,p}^{sr}(x, s)\dot{\theta}^{(j)}(s) \} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots\dots(49. c) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{aligned} M_{z,p}^{sr} \\ M_{s,p}^{sr} \\ M_{zs,p}^{sr} \end{aligned} \right\} &= D_{ij} [D] \left\{ \begin{aligned} -v_p^{sr''} \\ -v_p^{sr''} \\ -2v_p^{sr'} \end{aligned} \right\} \\ \bar{Q}_{s,p}^{sr} &= M_{s,p}^{sr} + 2M_{zs,p}^{sr} \end{aligned}$$

したがって、 v_p^{sr} の定義によって、

$$M_{s,p}^{sr(j)}(x) \equiv M_{s,p}^{sr}(x, 0) = 0 \dots\dots\dots(50. a)$$

式(50.a)を考慮すれば、式(49)の各式はつぎのようになる。

$$0 = D_{ij} [\dots\dots\dots] \dots\dots\dots(51. a)$$

$$\bar{Q}_s^{(j)}(x) = D_{ij} [\dots\dots\dots] + Q_{s,p}^{sr(j)}(x) \dots\dots\dots(51. b)$$

$$M_s^{(j)}(x) = D_{ij} [\dots\dots\dots] + M_{s,p}^{sr(j)}(x) \dots\dots\dots(51. c)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{s,p}^{sr(j)}(x) &\equiv \bar{Q}_{s,p}^{sr}(x, b_{ij}) \\ M_{s,p}^{sr(j)}(x) &\equiv M_{s,p}^{sr}(x, b_{ij}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(50. b)$$

以上の式(49)ならびに式(51)の各式中における[.....]はそれぞれ2.(2)の式(26)で対応する各項に等しい。したがってこの場合には、等価節線荷重として節線 jj' の $\bar{Q}_{s,p}^{sr(j)}$ および $M_{s,p}^{sr(j)}$ のみを考え、2.(2)の式(28)あるいは式(28)'の中で $v_i=0$ および $M_s^{(i)}=0$ と置き、かつ $\bar{Q}_s^{(i)}$ に相当する行を削除すればよい。

また節線 ii' に外荷重 $\bar{M}_s^{(i)}$ が作用する場合には、 $M_s(x, 0) = \bar{M}_s^{(i)} \dots\dots\dots(47. b)'$ 式(28)あるいは式(28)'において $M_s^{(i)} = \bar{M}_s^{(i)}$ と置く以外は式(47.a)の場合と同じである。

③ 一端が自由端の場合 (図-3 (c))：この境界条件はつぎようになる。

$$M_s(z, 0) = -D_{ij}\{v^{**}(z, 0) + \nu v''(z, 0)\} = 0 \quad \dots\dots\dots(52. a)$$

$$\bar{Q}_s(z, 0) = -D_{ij}\{v^{**}(z, 0) + (2-\nu)v''(z, 0)\} = 0 \quad \dots\dots(52. b)$$

式 (52) の条件は力学的条件であることを考慮し、つぎのように変位関数を選定する。

$$v(z, s) = v^{(i)}(s)v_i(z) + v^{(j)}(s)v_j(z) + \theta^{(i)}(s)\theta_i(z) + \theta^{(j)}(s)\theta_j(z) + v_p^{fr}(z, s) \quad \dots\dots\dots(53)$$

ここで、 $v_p^{fr}(z, s)$ は節線 ii' が自由支持端でかつ節線 jj' が固定端であるときの荷重 \bar{P}_n によるたわみ変位の厳密解あるいは近似解である。

以下 2.(2) と全く同様に変分原理 (リッツ法) によって次式を導くことができる。

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, s)v^{(i)}(s) - M_{s,p}^{fr}(z, s)\dot{v}^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots(54. a)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, s)\theta^{(i)}(s) - M_{s,p}^{fr}(z, s)\dot{\theta}^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots(54. b)$$

$$\bar{Q}_s^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, s)v^{(j)}(s) - M_{s,p}^{fr}(z, s)\dot{v}^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots(54. c)$$

$$M_s^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, s)\theta^{(j)}(s) - M_{s,p}^{fr}(z, s)\dot{\theta}^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots(54. d)$$

ただし、

$$\begin{Bmatrix} M_{z,p}^{fr} \\ M_{s,p}^{fr} \\ M_{zs,p}^{fr} \end{Bmatrix} = D_{ij}[\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} -v_p^{fr} \\ -v_p^{fr} \\ -2v_p^{fr} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{s,p}^{fr} = M_{s,p}^{fr} + 2M_{zs,p}^{fr}$$

したがって、 v_p^{fr} の定義によって、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{s,p}^{fr(i)}(z) &\equiv -\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, 0) = 0 \\ M_{s,p}^{fr(i)}(z) &\equiv M_{s,p}^{fr}(z, 0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(55. a)$$

式 (55.a) を考慮すれば、式 (54) の各式はつぎのようになる。

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] \quad \dots\dots\dots(56. a)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] \quad \dots\dots\dots(56. b)$$

$$\bar{Q}_s^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \bar{Q}_{s,p}^{fr(j)}(z) \quad \dots\dots\dots(56. c)$$

$$M_s^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + M_s^{fr(j)}(z) \quad \dots\dots\dots(56. d)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} \bar{Q}_{s,p}^{fr(j)}(z) &\equiv -\bar{Q}_{s,p}^{fr}(z, b_{ij}) \\ M_{s,p}^{fr(j)}(z) &\equiv M_{s,p}^{fr}(z, b_{ij}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(55. b)$$

以上の式 (54) ならびに式 (56) の各式中における [.....] はそれぞれ 2.(2) の式 (26) で対応する各項に等しい。したがってこの場合には、等価節線荷重として節線 jj' の $\bar{Q}_{s,p}^{fr(j)}$ および $M_{s,p}^{fr(j)}$ のみ考え、2.(2) の式 (28) あるいは式 (28)' において $\bar{Q}_s^{(i)} = 0$ および $M_s^{(i)} = 0$ と置けばよい。

また節線 ii' に外荷重 $\bar{Q}_s^{(i)}$ および $\bar{M}_s^{(i)}$ が作用する場合には、

$$\left. \begin{aligned} -\bar{Q}_s(z, 0) &= \bar{Q}_s^{(i)} \\ M_s(z, 0) &= \bar{M}_s^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(52)'$$

式 (28) あるいは式 (28)' において $\bar{Q}_s^{(i)} = \bar{Q}_s^{(i)}$ および $M_s^{(i)} = \bar{M}_s^{(i)}$ と置く以外は式 (52) の場合と同じである。

④ いわゆるヒンジ結合折板構造の場合 (図-3 (d))：この境界上では s 方向の曲げモーメントが伝達されず、かつ s 方向の傾きは隣合う要素間で不連続になる。すなわち、つぎに示すような条件が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} M(z, 0) &= -D_{ij}\{v^{**}(z, 0) + \nu v''(z, 0)\} = 0 \\ M(z, 0) &= -D_{ij}\{v^{**}(z, b_{ij}) + \nu v''(z, b_{ij})\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(57)$$

また要素 ij の節線 ii' および jj' における s 方向の傾きを θ_{ij} , θ_{ji} のように表わせば、

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ij}(z) &\asymp \theta_{ih}(z) \\ \theta_{ji}(z) &\asymp \theta_{jk}(z) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots(58)$$

式 (57) および式 (58) の条件を考慮し、つぎのようなたわみ変位関数を選定する。

$$v(z, s) = v^{(i)}(s)v_i(z) + \theta^{(i)}(s)\theta_{ij}(z) + v^{(j)}(s)v_j(z) + \theta^{(j)}(s)\theta_{ji}(z) + v_p^{ss}(z, s) \quad \dots\dots\dots(59)$$

ここで、 $v_p^{ss}(z, s)$ は節線 ii' および jj' が単純支持端なるときの荷重 \bar{P}_n によるたわみ変位の厳密解あるいは近似解である。

2.(2) の場合と全く同様にして、変分原理 (リッツ法) によってつぎの式を導くことができる。

$$\bar{Q}_s^{(i)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{ss}(z, s)v^{(i)}(s) - M_{s,p}^{ss}(z, s)\dot{v}^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots\dots(60. a)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{ss}(z, s)\theta^{(i)}(s) - M_{s,p}^{ss}(z, s)\dot{\theta}^{(i)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots\dots(60. b)$$

$$\bar{Q}^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{ss}(z, s)v^{(j)}(s) - M_{s,p}^{ss}(z, s)\dot{v}^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \quad \dots\dots\dots(60. c)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \{\bar{Q}_{s,p}^{ss}(z, s)\theta^{(j)}(s) - M_{s,p}^{ss}(z, s)\dot{\theta}^{(j)}(s)\} \Big|_{s=0}^{s=b_{ij}} \dots\dots(60. d)$$

ただし,

$$\begin{Bmatrix} M_{z,p}^{ss} \\ M_{s,p}^{ss} \\ M_{zs,p}^{ss} \end{Bmatrix} = D_{ij}[\mathbf{D}] \begin{Bmatrix} -v_p^{ss''} \\ -v_p^{ss''} \\ -2v_p^{ss''} \end{Bmatrix}$$

$$\bar{Q}_{s,p}^{ss} = M_{s,p}^{ss} + 2M_{zs,p}^{ss}$$

したがって, v_p^{ss} の定義によって,

$$\left. \begin{aligned} M_{s,p}^{ss(ij)}(z) \equiv M_{s,p}^{ss}(z, 0) = 0 \\ M_{s,p}^{ss(ji)}(z) \equiv M_{s,p}^{ss}(z, b_{ij}) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(61)$$

式(61)を考慮すれば, 式(60)の各式はつぎのようになる。

$$\bar{Q}_s^{(i)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \bar{Q}_{s,p}^{ss(i)}(z) \dots\dots(62. a)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] \dots\dots(62. b)$$

$$\bar{Q}_s^{(j)}(z) = D_{ij}[\dots\dots\dots] + \bar{Q}_{s,p}^{ss(j)}(z) \dots\dots(62. c)$$

$$0 = D_{ij}[\dots\dots\dots] \dots\dots(62. d)$$

以上の式(60)および式(62)の各式中における[... ..]はそれぞれ2.(2)の式(26)で対応する各項に等しい。したがってこの場合には, 等価節線荷重として節線 ii' および jj' の $\bar{Q}_{s,p}^{ss(i)}$ および $\bar{Q}_{s,p}^{ss(j)}$ のみ考え, 2.(2)の式(28)あるいは式(28)'において $\theta_i = \theta_{ij}$, $\theta_j = \theta_{ji}$ ならびに $M_s^{(i)} = 0$, $M_s^{(j)} = 0$ と置けばよい。

3. 応用例一薄肉箱型はり

2.(2)で誘導した剛性マトリックス表現の結果は常微分方程式となり, これを解くことによって未知変位が決定される。いま簡単な応用例として, 薄肉箱型はりに鉛直荷重の作用する場合を採り, 実際の解法を示す。

(1) 解析例

図-4に示すような箱型はりを解析する。はりの端にはダイヤフラムがあり, ダイヤフラムはそれ自身の面内変形に対し剛性 ∞ , 面外変形に対し剛性0と仮定する。さらにはり端には支承があり, x 軸および y 軸方向の変位が拘束されている。

この場合, はりの端での境界条件はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} z=0 \text{ において } U=0 \text{ および } V=0 \\ N_z=0 \text{ および } M_z=0 \\ z=l \text{ において } U=0 \text{ および } V=0 \\ N_z=0 \text{ および } M_z=0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(63)$$

また, フランジとウェブを構成する各平板は互いに隣接

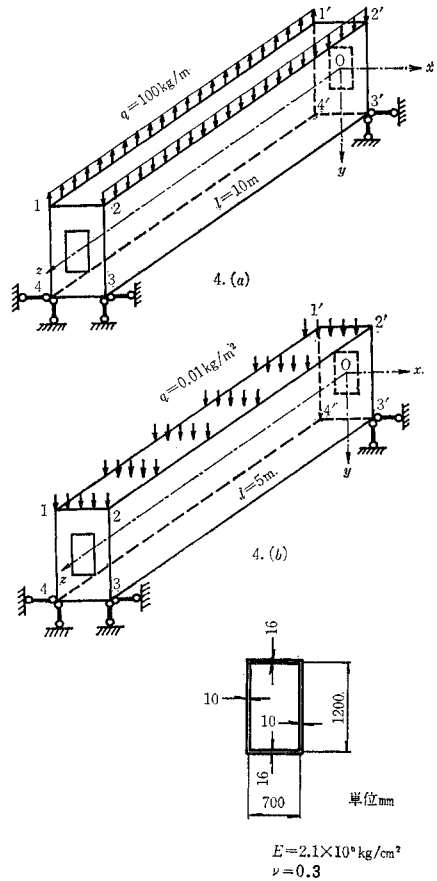


図-4 箱型はり解析例

しているので2.(4)を考慮する必要はない。

最も簡単には, フランジおよびウェブを構成する各平板を一要素と考えればよい。すると, はりは4有限要素から成ることになり, 各稜線は要素の節線となる。各節線上の点を図-4のように1, 2, 3, 4と名づける。

上の境界条件は, したがって, つぎのように書くことができる。すなわち,

$$\left. \begin{aligned} U_i(0)=0, V_i(0)=0, \theta_i(0)=0 \\ U_i(l)=0, V_i(l)=0, \theta_i(l)=0 \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots(64. a)$$

$$\left. \begin{aligned} W_i'(0)=0, U_i''(0)=0, V_i''(0)=0, \theta_i''(0)=0 \\ W_i'(l)=0, U_i''(l)=0, V_i''(l)=0, \theta_i''(l)=0 \end{aligned} \right\} (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots(64. b)$$

境界条件の性質から, つぎのように節線上の点の変位を表わすのが便利である。

$$W_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} W_i^{(m)} \cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots(65. a)$$

$$U_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} U_i^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2, 3, 4) \dots\dots(65. b)$$

$$V_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} V_i^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots(65. c)$$

$$\theta_i(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \theta_i^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots(65. d)$$

節線 1-1' および 2-2' 上に作用する節線荷重を同様に、

$$F_y^{(i)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} F_{y,i}^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(66. a)$$

$$M^{(i)}(z) = \sum_{m=1}^{\infty} M_i^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad (i=1, 2) \quad \dots\dots\dots(66. b)$$

と表わす。

以上のように表現された各節線上の点の変位と荷重は、全体の剛性マトリックス $[K_{SUM}]$ によって結びつけられる(表一6)。この常微分方程式を $W_i^{(m)}$, $U_i^{(m)}$, $V_i^{(m)}$, $\theta_i^{(m)}$ ($i=1, 2, 3, 4$; $m=1, 2, \dots$) を未知数とする連立一次方程式に帰着し、 $W_i^{(m)}$, $U_i^{(m)}$, $V_i^{(m)}$, $\theta_i^{(m)}$ を求めれば未知変位 $W_i(z)$, $U_i(z)$, $V_i(z)$, $\theta_i(z)$ は決定される。常微分方程式を連立一次方程式に変換するには、この場合ガラーキン法を用いた。

表一6 構造全体の外力-変位関係式

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sum_m F_{y1}^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m M_1^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ 0 \\ 0 \\ \sum_m F_{y2}^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m M_2^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = [K_{SUM}] \begin{pmatrix} \sum_m W_1^{(m)} \cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m U_1^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m V_1^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m \theta_1^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m W_2^{(m)} \cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m U_2^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m V_2^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m \theta_2^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m W_3^{(m)} \cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m U_3^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m V_3^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m \theta_3^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m W_4^{(m)} \cos\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m U_4^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m V_4^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \\ \sum_m \theta_4^{(m)} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \end{pmatrix}$	
---	--

(2) 計算結果と検討

a) 上フランジの辺上に等分布荷重が逆対称に作用す

る場合(図一4(a))

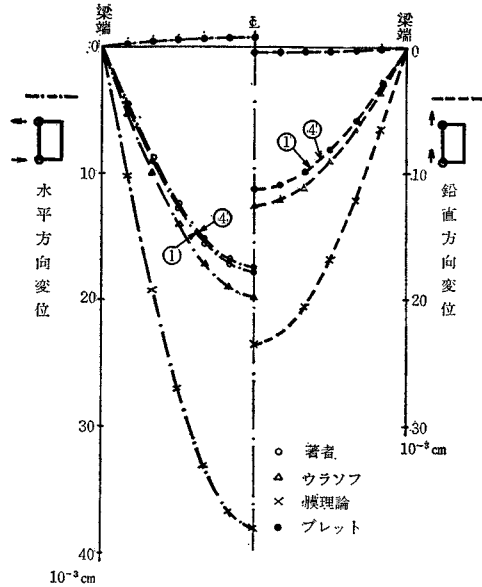
この場合節線荷重はつぎのようになる。

$$F_y^{(1)}(z) = -\frac{4q}{\pi} \sum_{m=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{m} \sin\left(\frac{m\pi z}{l}\right) \quad \dots\dots\dots(67. a)$$

$$F_y^{(2)}(z) = -F_z^{(1)}(z) \quad \dots\dots\dots(67. b)$$

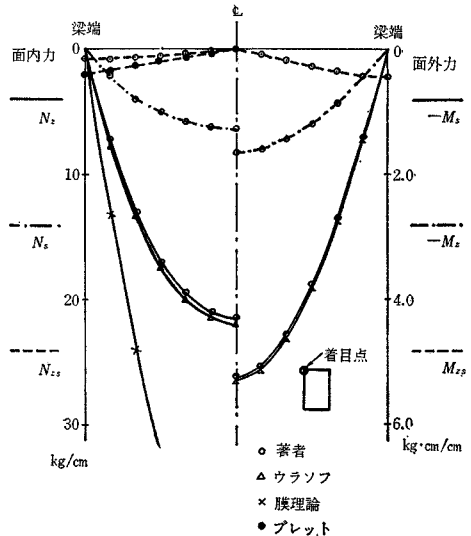
ここで、 q は荷重強度を表わす。

計算結果を図一5および図一6に示す。図一5においては、節線 1-1' および 4-4' 上の点の変位量(左半分



図一5 計算例 a) 変位量

註1: 面内力のグラフで、 N_x は著者以外は無視。
 N_x はプレートでは無視。
註2: 面外力のグラフで、 M_x, M_{xz} は著者のみ考慮。
面外力のすべてを膜理論
ならびにプレートでは無視。



図一6 計算例 a) 面内力および面外力

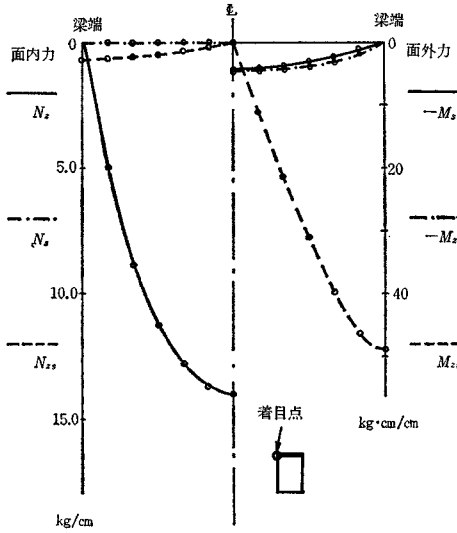


図-7 計算例 a) コンクリート床版の場合

には水平方向変位、右半分には鉛直方向変位)をそれぞれ①および④として示している。水平方向変位は通常のねじりによって生ずるもの(プレットのせん断流理論¹⁷⁾による計算結果を図中に示してある)とは全く正反対であり、①と④では大きさがほぼ等しく方向は逆である。これは断面輪郭形状変化の影響が、断面形状を保持したねじりの影響よりも卓越することを表わしている。載荷辺上の変位①は非載荷辺上の変位④よりもいくぶん大きい。

図-6 においては、上フランジ板の 1-1' 辺における力学量(左半分は面内力、右半分には面外力)を示したが、図中これらの絶対量を比較するために、符号が正になるように統一してある。面内力では N_z (そり力) が他のものにくらべて大きい、その 1/3 程度の大きさで N_s (輪郭線方向垂直応力) が存在する。面外力では M_s (輪郭線方向曲げモーメント) が他のものにくらべて大きい、やはりその 1/3 程度の M_z (はり軸方向曲げモーメント) が存在する。

図-5 および 図-6 ともに比較のためウラソフ理論¹⁷⁾による結果ならびに膜理論¹¹⁾による結果をあげてある。本例のような寸法比を有する箱型はりでは、著者らの理論による結果とウラソフ理論による結果とは近い値を示している。しかしながら、平板の面外曲げ作用をより厳密に考慮しているので変位量は前者によるものが後者によるものより小さく出ている。またウラソフの理論では計算不可能な N_s ならびに M_z , M_{zs} の大きさを知ることが可能である。この場合、膜理論による結果は、変位および面内力に対し過大評価となり、面外力に対し過少¹¹⁾ ウラソフの理論で、平板の曲げ剛性を無視して誘導したもの。

評価となる。

ここで、面内応力と曲げ応力との比較を行なう。 N_z および M_s ともに支間中央で最大値を示すが、それによる応力はそれぞれつぎのようになる。

$$\sigma_1 = \frac{21.4}{1.6} = 13.4 \text{ kg/cm}^2 \text{ 最大面内応力}$$

$$\sigma^2 = \frac{6 \times 5.24}{1.6^2} = 12.3 \text{ kg/cm}^2 \text{ 最大曲げ応力}$$

この両者の比較によって面外曲げ応力がかなり大きいことがわかる。

いずれにしてもこのような場合には、平板の面内作用ばかりでなく面外曲げ作用の影響を考慮する必要があると思われる。

上に述べたのと同じ寸法を有する箱型はりにおいて、上フランジをコンクリート床版^{注)}(厚さ 16 cm, ヤング率 $2.1 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$, ポアソン比 0.15)で置き換えた合成箱型はりの結果を図-7 に示す。この場合ねじりモーメント M_{zs} が卓越し、かつ M_z も M_s と同程度になる。この結果は鋼製フランジ板の場合に対する 図-6 の結果とはかなり様相の異なるものである。

b) 上フランジに等分布荷重が満載している場合(図-4 (b))

この場合、等価節線荷重はつぎのようになる¹⁸⁾。

$$F_z^{(1)}(z) = \frac{8 l q}{\pi^2} \sum_{m=1,3,\dots} \frac{1}{m^2} \cdot \frac{\tanh^2 \alpha_m}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \cdot \sin\left(\frac{m \pi z}{l}\right) \dots\dots\dots (68. a)$$

$$M^{(1)}(z) = \frac{4 l^2 q}{\pi^3} \sum_{m=1,3,\dots} -\frac{1}{m^3} \cdot \frac{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m + 1)}{\alpha_m - \tanh \alpha_m (\alpha_m \tanh \alpha_m - 1)} \cdot \sin\left(\frac{m \pi z}{l}\right) \dots\dots\dots (68. b)$$

$$F_y^{(2)}(z) = F_y^{(1)}(z) \dots\dots\dots (68. c)$$

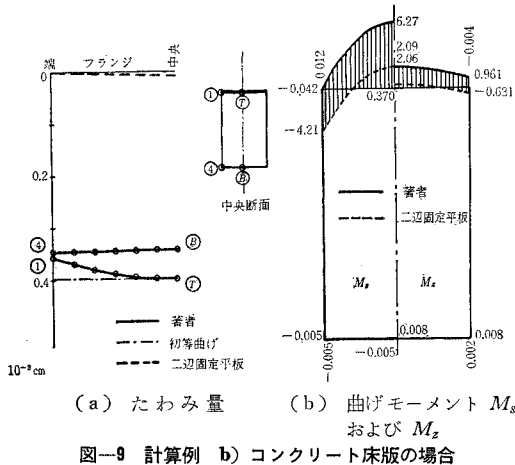
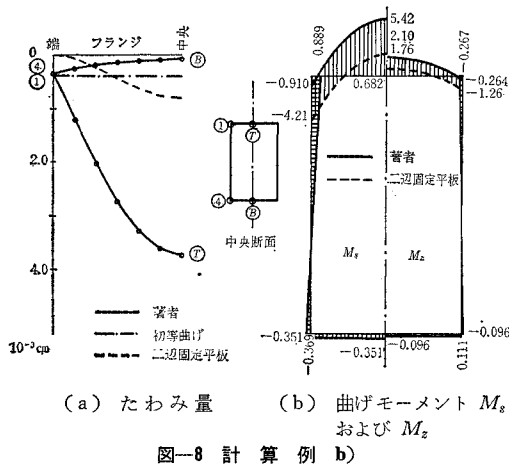
$$M^{(2)}(z) = -M^{(1)}(z) \dots\dots\dots (68. d)$$

ここで、 q は荷重強度を表わす。上式は、フランジ板が 1-1' 辺および 2-2' 辺で固定かつ他の二辺で単純支持された条件のもとに等分布荷重 q を受けたとき、1-1' 辺および 2-2' 辺に生ずる等価せん断力ならびに曲げモーメントである。

上フランジ板の解は、節線荷重 (68) を用いた剛性マトリックス表現式(表-6)の解と二辺固定平板の解との重ね合せにより得られる。

計算結果を図-8 (a), (b) に示す。図-8 は支間中央断面における上下フランジのたわみ量(図-8 (a))と輪郭線上の曲げモーメント M_s および M_z (図-8 (b))

注) 面内剛性は鋼製フランジとほぼ等しくなる。



を表わしている。参考のため断面輪郭形状不変を前提とする初等はり理論(せん断変形考慮)によるたわみをあげている。荷重を直接受けている上フランジ板に面外曲げの影響が大きく出ている。

また 3.(2) a) の場合と同様に合成箱型はりについても図-9 (a), (b) にその結果を示す。面外曲げ剛性の大きいコンクリート床版を用いているので、断面変形の影響が少なく、初等はり理論に近いたわみ量を示し、また面外力を床版で受持つ割合が高い。床版はウェブとの接合線上でヒンジ結合されているような様相を示している。

この解析例についていえば(図-4 (b)), はりの高さ h と支間長 l の比が $125/500 \approx 1/4$ であるような寸法比のものであり、このような構造物は折板構造理論の適用範囲外にあるものである。

(3) 付 言

以上 3.(2) a) ならびに b) の例からわかるように、本解析法によれば、薄肉箱型はりを構成する平板の面内・面外に対する変形ならびに応力を実情に沿った形でそ

の数値を評価できる。

また本法は、3.(2) a) のように隣合う稜線上に逆対称荷重の作用する場合は、曲げねじり理論を一般化したウラソフの閉断面ビーム・シェルの理論をさらに拡張したものに相当しており、すなわち特別な場合としてウラソフの理論を含んでいる。

このような箱型はりの断面輪郭形状変化にともなう中間ダイアフラム配置の問題あるいは鋼床版構造のような異方性平板要素の問題などに関してもある程度の結果を得ているが、別の機会に発表したいと思う。

4. 結 言

以上において薄肉平板構造物の各構成要素が面内変形ならびに面外曲げ変形を受ける場合に対する一般的な解析理論を誘導し、かつ薄肉箱型はりの立体的解析への応用を示した。平板の面内・面外の両変形作用を実情に沿って評価できること、また複雑な断面形状を有する構造物の場合にも開断面・閉断面を問わず境界条件の相違を考慮すれば、あるいは異方性・変厚材料の場合も剛性マトリックスの変化を考慮すれば一貫して組織的に取り扱えることなどによって、この方法はこの種問題の解析に対して一般性をもったものの手掛りを着けると考えられる。

なお本論文はウラソフの折板構造理論を発展させたものである。その際有限要素法の考え方に基づいて、1) 構成要素の面内・面外の変形作用を扱い、2) 解析を組織化し、3) 重ね合せの原理を有効な手段として用いているなどの点を特徴と見てほしい。

参 考 文 献

- 1) 奥村敏恵・坂井藤一：有限要素法と折板構造の関連について、日本鋼構造協会マトリックス構造解析シンポジウム論文集，5月，1969，pp. 255~263.
- 2) マーチン，H.C. 著，吉識雅夫監訳：マトリックス法による構造力学の解法，培風館，1967，pp. 95~110.
- 3) 犬井鉄郎：偏微分方程式とその応用，コロナ社，1957，pp. 270.
- 4) 山本善之・一色 浩・谷田雅春：解析解と有限要素法，前出のシンポジウム論文集，pp. 48~60.
- 5) Zienkiewicz, O.C. and Cheng, Y.K.: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics", McGraw Hill, 1967, pp. 98.
- 6) 山崎徳也・彦坂 照：板たわみ角法による立体斜板構造の解析，第14回橋梁・構造工学研究発表会，12月，1967，pp. 159~169.
- 7) Vlasov, V.Z.: "Thin-walled Elastic Beams", Publ. for the National Science Foundation", 1961, 邦訳，奥村敏恵他：薄肉弾性ばりの理論，技報堂，1967，第4章.
- 8) Kollbrunner, C.F. and Hajdin, N.: "Dünnwandige Stäbe mit ihren Ebenen deformierbaren Querschnitten; Theorie der Faltwerke nach der Verschiebungsmethode", Institut für bauwissenschaft-

- liche Forschung, Januar, 1968.
- 9) 奥村敏恵・鈴木康弘・山下清明：折板構造の基本方程式とその逆台形桁への応用，第14回橋梁・構造工学研究発表会，12月，1967，pp. 81~97.
 - 10) たとえば，
Timoshenko, S. and Goodier, J.N. : "Theory of Elasticity", McGraw Hill, 1951, pp. 22.
 - 11) Washizu, K. : "Variational Methods in Elasticity and Plasticity" Pergamon Press, 1968, pp. 229.
 - 12) Becker, M. : "The Principles and Applications of Variational Methods", The M.I.T. Press, 1964, pp. 10~11.
 - 13) Gallagher, R.H. : "The Status and Outlook for Finite Element Analysis", Japan-U.S. Seminar on Matrix Methods of Structural Analysis and Design, 東京, August, 1969, pp. 4.
 - 14) Greene, B.E. : "Stiffness Matrix for Bending of a Rectangular Plate Element with Initial Membrane Stresses", Structural Analysis Research Memorandum No. 45, The Boeing Company, August, 1962 (日本鋼構造協会 STAN 資料).
 - 15) Hansteen, H. : "Finite Element Displacement Analysis of Plate Bending Based on Rectangular Elements", International Symposium, The Use of Electronics Digital Computers in Structural Engineering, University of Newcastle upon Tyne, 1966, なお本文献は下記の論文から引用させて載いた。
梶田建夫・成岡昌夫：変断面長方形板の曲げ，および振動に対する有限要素法の応用，土木学会論文報告集，161号，1月，1969，pp. 13~20.
 - 16) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. : "Theory of Plates and Shells" McGraw Hill, 1959, 第4章.
 - 17) 林 毅編：軽構造の理論とその応用，日本科学技術連盟，1966，上巻 pp. 96~98.
 - 18) 文献 16) と同じ，pp. 185.

(1969.10.13・受付)