土木学会論文報告集
第175号・1970年3月

はりに作用する荷重の統計的な扱いについて

ON THE STATISTICAL PROPERTY OF STATICALLY DISTRIBUTED RANDOM LOAD ACTING ON A BEAM

中　川　建　治*
By Kenji Nakagawa

要　旨　ランダム外力を平均値と分散値という統計量で表現すると，外力の局部的な乱れは，統計量という名のもとに包含され，平均化されてしまう。統計量で表現された外力を与えられた設計者は，統計量を一定にする条件のもとに，局部的な乱れを全く任意に付加して，応答の極値を追求し，安全性を検討するべきではなかろうか。本文では，平均値と分散値が規定されている外力をはりに静的に作用させて，応答の平均値と分散値を求める方法と，極値を求める方法とを検討した。

1. まえがき

最近，ランダム過程の理論的取扱いが注目され，広く論じられている。橋梁の設計における活荷重の問題においても，確率論的取扱いは重要な問題であろう。現行の設計示方書の方針は，規定された換算等分布荷重と集中荷重とを，その影響量（たわみ，あるいは，曲げ応力度など）が最大になるように，任意に配列させることである。この荷重規定は，スパンの長さに応じて荷重強度をてい減させているとはいえ，本来の車両配列の乱れをそのまま考慮するものではない。極値応答に対する安全性の観点に立って任意に荷重を断続させることと，車両配列の乱れを考慮することとは，根本的に異なっている。

本文は，現行示方書の設計方針とは異なり，確率論的考察によって荷重を配列させることを論じたものである。荷重の大きさを意味する荷重平均値と，車両の乱れを意味する荷重の分散値とを一定とする条件下で，その荷重による影響値の極値，平均値，あるいは，分散値がどのようになるかという問題を研究した。

元来，車両配列は，時間的にも空間的にもランダムである。このような乱れた外力を表現する方法として，たとえば，交通量観測によって「単位時間当りの荷重平均値と分散値，あるいは，単位長さ当りの平均値と分散値」という量で表現する方法がある。しかし，この平均値と分散値という統計量は，局部的な乱れを統計という名のもとに平均化して，おおい隠している。乱れを分散値という情報量のみで与えられた設計者は，与えられた荷重平均値と分散値を一定とする限界内で，考え得る最大の影響量を計算して設計するべきであろう。したがって，荷重平均値と分散値を一定とする限界内で全く任意な荷重配列を想定し，影響値を極値（最大値と最小値）にするような荷重配列を求め，極値を計算することは，有意義なことであろう。

2. k 個の単位荷重が作用する場合

影響関数 $G(x, \xi)$ の既知の任意のはりの任意の区間に載荷した k 個の単位荷重によるたわみ，あるいは，曲げモーメントなどの影響値の平均値，分散値，および，極値について考察しよう。本文では，所定の区間に k 個の荷重が載荷するという確率については言及しない。あくまでも，k 個の荷重が載荷したという条件下で論じていることに留意されたい。

区間と荷重について，つぎのような仮定を設ける。あるいは，実際問題として厳し過ぎる仮定であるかもわからないが，このような問題の基礎的な考察においては許されよう。

1）荷重載荷の対象とする区間長を L として，n 等分して $L=na$ とする。細分割された区間（長さ a）には順次番号をつける（$1, 2 \cdots n$）。

2）単位荷重の重量はすべて一定で，1個当りの大きさを q とする。荷重占有長さを a とする。荷重載荷様式は，細分区間に1対1で配列し，2区間にわたって配列することも，1区間に2個以上重複して配列することも，ないものとする。

3）n 個の区間に k 個載荷するという条件のもとに，k 個の荷重は一様な確率で n 区間に配列するものとする。すなわち，特定の1区間に載荷する確率は，一様に

* 正会員　工修　山口大学助教授　工学部土木工学教室

k/n であるとする。

さて，荷重によるたわみ，あるいは，曲げモーメントなどの影響関数 $G(x,\xi)$ を各区間の代表値で表わして，$G_i(i=1, 2\cdots n)$ とする。k 個の荷重に対して k 個の確率変数 $X_i(i=1, 2\cdots k)$ を対応させ，第 i 番目の荷重が区間 j に載荷しているならば，$X_i=G_j$ とする。ここに，単位荷重はそれぞれ区別可能で，$1\cdot 2\cdot\cdots k$ までの番号が符してあるものとする。したがって，荷重がどのように配列するか（X_i がどのような値をとるか）というすべての組合せは，

$$ {}_nP_k=n(n-1)\cdots(n-k+1) \quad\cdots\cdots(2.1) $$

となることは明らかである。

k 個の荷重による全影響値を Y_k とすれば，

$$ Y_k=\sum_{i=1}^{k} qX_i \quad\cdots\cdots(2.2) $$

$$ P(X_i=G_j)=\frac{k}{n} \quad\cdots\cdots(2.3) $$

となる。本文では，Y_k の平均値，分散値，および，極値を論ずるのである。記述を簡素化するために，以下の表記法を採用する。

$$ \left.\begin{array}{l} F=\int_0^L G(x,\xi)dx, \quad F_n=\sum_1^n G_i \\ S=\int_0^L G^2(x,\xi)dx, \quad S_n=\sum_1^n G_i^2 \\ \sum^{X_i};\ X_i \text{ のとり得る値 } G_j \text{ についてのすべての場合の和，したがって，} \\ \sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}\cdot 1={}_nP_k \end{array}\right\} \cdots (2.4) $$

（1） 平 均 値

Y_k の平均値 $\overline{Y}_k$ は，Y_k のあらゆる場合の和 U_{1k} を k 個の相異なる荷重を n 個の区間に載荷する組合せ数 ${}_nP_k$ で割ることによって得られる。

$$ \left.\begin{array}{l} \overline{Y}_k=\frac{1}{{}_nP_k}q\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}(X_1+X_2+\cdots+X_k) \\ \quad=\frac{qU_{1,k}}{{}_nP_k} \\ U_{1,k}=\sum^{X_1}\sum^{X_2}\cdots\sum^{X_k}(X_1+X_2+\cdots+X_k) \end{array}\right\} \cdots\cdots (2.5) $$

ここで，$U_{1,k}$ は

$$ U_{1,k}=k(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)F_n \cdots\cdots(2.6) $$

となることを，数学的帰納法で証明しよう。

【証 明】

$k=1$ では $U_{1,1}=F_n$ となって成立する。

$k=k$ で式 (2.6) が成立すると仮定する。$k=k+1$ とすると，

$$ \begin{aligned} U_{1,k+1}&=\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}\{\sum^{X_{k+1}}(X_1+\cdots+X_k)+\sum^{X_{k+1}}X_{k+1}\} \\ &=\sum^{X_{k+1}}U_{1,k}+\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}\{F_n-(X_1+X_2+\cdots+X_k)\} \\ &=(n-k)U_{1,k}+\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_R}F_n-U_{1,k} \\ &=(n-k-1)U_{1,k}+n(n-1)\cdots(n-k+1)F_n \\ &=(k+1)(n-1)\cdots(n-k-1)F_n \end{aligned} $$

となって，式 (2.6) が $k+1$ で成立することがわかる。したがって，式 (2.6) は証明された（証明終り）。

以上の関係より

$$ \overline{Y}_k=q\frac{k}{n}F_n \quad\cdots\cdots(2.7) $$

という簡単な関係式を得る。

（2） 分 散 値

Y_k の分散値 V_k は，

$$ \begin{aligned} V_k&=\frac{1}{{}_nP_k}\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}(Y_k-\overline{Y}_k)^2 \\ &=\frac{1}{{}_nP_k}\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}\{Y_k^2-(\overline{Y}_k)^2\} \\ &=\frac{q^2}{{}_nP_k}U_{2,k}-(\overline{Y}_k)^2 \quad\cdots\cdots(2.8) \end{aligned} $$

$$ U_{2,k}=\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_k}(X_1+X_2+\cdots+X_k)^2 \quad\cdots\cdots(2.9) $$

として得られる。ここで $U_{2,k}$ は

$$ \begin{aligned} U_{2,k}&=k(n-2)\cdots(n-k)S_n \\ &\quad+k(k-1)(n-2)\cdots(n-k+1)F_n^2 \\ &\qquad\cdots\cdots(2.10) \end{aligned} $$

として与えられるが，この関係を数学的帰納法で証明しよう。

【証 明】

$k=1$ で式(2.10)は，$U_{2,1}=S_n$ となって成立する。

$k=r$ として

$$ \begin{aligned} U_{2,r}&=r\frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}S_n+r(r-1) \\ &\quad\cdot\frac{(n-2)!}{(n-r)}F_n^2 \quad\cdots\cdots(2.10)' \end{aligned} $$

が成立すると仮定する。

$k=r+1$ とすると，

$$ \begin{aligned} U_{2,r+1}&=\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_{r+1}}(X_1+\cdots+X_{r+1})^2 \\ &=\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_{r+1}}(X_1+\cdots+X_r)^2 \\ &\quad+2\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_{r+1}}(X_1+\cdots+X_r)X_{r+1} \\ &\quad+\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_{r+1}}X^2_{r+1} \\ &=\sum^{X_{r+1}}U_{2,r}+2\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_r}(X_1+\cdots+X_r) \\ &\quad\cdot\{F-(X_1+\cdots+X_r)\} \\ &\quad+\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_r}\{S_n-(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_r^2)\} \\ &=(n-r)U_{2,r}+2F_nU_{1r}-2U_{2,r} \\ &\quad+n(n-1)\cdots(n-r+1)S_n \\ &\quad-\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_r}(X_1^2+\cdots+X_r^2) \quad\cdots\cdots(2.11) \end{aligned} $$

ここで，式 (2.11) の $\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_r}(X_1^2+\cdots+X_r^2)$ は，式

(2.5)における $U_{1,k}$ において，$X_i \to X_i^2$ としただけのものであるから，$U_{1,k}$ における F_n を S_n とすれば与えられる。したがって，

$$\sum^{X_1}\cdots\sum^{X_r}(X_1^2+X_2^2+\cdots+X_r^2)$$
$$=r(n-1)\cdots(n-r+1)S_n$$

となる。結局，つぎのようにして，$k=r+1$ で式(2.10)が成立することを知る。

$$U_{2,r+1}=(n-r-2)U_{2,r}+2F_nU_{1,r}$$
$$+(n-1)(n-2)\cdots(n-r)S_n$$
$$=(r+1)\frac{(n-2)!}{(n-r-2)!}S_n+(r+1)r$$
$$\cdot\frac{(n-2)!}{(n-r-1)!}F_n^2$$ （証明終り）。

以上の関係より V_k を求めると，つぎのようになる。

$$V_k=\frac{k(n-k)}{n(n-1)}q^2S_n+\frac{k(k-1)}{n(n-1)}q^2F_n^2-\frac{k^2}{n^2}q^2F_n^2$$
$$=q^2\frac{k(n-k)}{n(n-1)}\left(S_n-\frac{1}{n}F_n^2\right)\cdots\cdots\cdots\cdots(2.12)$$

（3） 荷重の平均値と分散値による表示

荷重は，大きさ q の単位荷重であるから，区間全体にわたる荷重平均値 m_q と分散値 V_q は，つぎのようにして与えられる。

$$\left.\begin{aligned} m_q&=\frac{k}{n}q\\ V_q&=\frac{k(n-k)}{n^2}q^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.13)$$

本文の研究は「荷重の平均値と分散値 m_q, V_q を一定値とした場合の影響値の平均値，分散値，極値を研究する」ということであるから，Y_k の平均値と分散値を m_q, V_q で表現すると，式(2.7)，式(2.12)，式(2.13)より

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}_k&=m_qF_n\\ V_k&=V_q\frac{n}{n-1}\left(S_n-\frac{1}{n}F_n^2\right)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.14)$$

となる。さらに，妥当な表現法でないかもわからないが，影響関数 G_i の平均値 m_G と分散値 σ_G^2 とを，つぎのように定義すると，$\overline{Y}_k$, V_k は式(2.16)のようになる。

$$\left.\begin{aligned} m_G&=\frac{1}{n}\sum_1^n G_i\\ \sigma_G^2&=\frac{1}{n}\sum_1^n(G_i-m_G)^2=\frac{1}{n}\left(S_n-\frac{1}{n}F_n^2\right)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.15)$$

$$\left.\begin{aligned} \overline{Y}_k&=n\cdot m_qm_G\\ V_k&=\frac{n^2}{n-1}V_q\sigma_G^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2.16)$$

（4） 極　　値

k 個の単位荷重が載荷するという条件がついているので，極値については言及するまでもない。

影響関数 $G_i(i=1, 2,\cdots n)$ を大きさの順に，大きなものから並べ変えたものを，改めて $g_i(i=1, 2,\cdots n)$ とすると，Y_k の極値はつぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} &\text{極大値}\quad Y_{k,\max}=q\sum_1^k g_i\\ &\text{極小値}\quad Y_{k,\min}=q\sum_0^{k-1} g_{n-i}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(2.17)$$

3. 荷重の大きさも任意に変化する場合

荷重の大きさに関する以外の仮定については，前節の仮定をそのまま採用する。荷重の大きさは，相互に独立でありながら，同一の分布にしたがって，ランダムに変化するものとする。分布関数 $P(x)$ については言及しない。それぞれの荷重の平均値と分散値とを q_0, σ_q^2 とする。すなわち，

$$\left.\begin{aligned} q_0&=E(q_i)=\int q_idP(q)\\ \sigma_q^2&=\int(q_i-q_0)^2dP(q)\\ E(q_iq_j)&=q_0^2,\ (i\neq j)\\ E(q_i^2)&=q_0^2+\sigma_q^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.1)$$

とする。式(3.1)は個々の荷重に関する平均値と分散値であるが，区間全体 L にわたる荷重平均 m_q と分散値 V_q は，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned} m_q&=\frac{1}{n}\sum_1^k q_i=\frac{k}{n}q_0\\ V_q&=\frac{1}{n}\sum_1^k(q_i-m_q)^2\\ &=(\sigma_q^2+q_0^2)\frac{k}{n}-\frac{k^2}{n^2}q_0^2\\ &=\frac{k}{n}\sigma_q^2+\frac{k(n-k)}{n^2}q_0^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3.2)$$

逆に，個々の荷重の平均値と分散値とを区間全体に対するもので表現すると，

$$\left.\begin{aligned} q_0&=\frac{n}{k}m_q\\ \sigma_q^2&=\frac{n}{k}\left\{V_q-\frac{n(n-k)}{k^2}m_q^2\right\}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(3.3)$$

を得る。以下において，荷重の分布関数 $P(x)$ と q の最大値，最小値は不問にして，あらかじめ与えられた統計的パラメーター n, k, m_q, V_q のもとに，Y_k を極値にすることを考察しよう。

（1） 平均値と分散値

k 個の荷重 $q_i(i=1, 2,\cdots k)$ による影響値 Y_k は，

$$Y_k=q_1X_1+q_2X_2+\cdots+q_kX_k \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.4)$$

であるが，ここでは改めて確率変数 X_i' を定義する。$X_i'(i=1, 2\cdots n)$ は，n 個のうち k 個はそれぞれ相異なる G_j をとり，他の $n-k$ 個は0となる確率変数とする。これより，荷重も $n-k$ 個増加させることにより，Y_k は

$$Y_k=q_1X_1'+q_2X_2'+\cdots+q_nX_n' \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(3.5)$$

となる。式(3.4)と式(3.5)とは実質的には等しいものであって，Y_k のすべての場合の和 $U_{1,k}$ と自乗和 $U_{2,k}$ とは，式(2.6)と式(2.10)より

$$U_{1,k}=\sum_1^{X_1'}\cdots\sum^{X_n'}(q_1X_1'+\cdots+q_nX_n')$$
$$=k(n-1)\cdots(n-k+1)\sum_1^n q_iG_i$$
$$U_{2,k}=\sum^{X_1'}\cdots\sum^{X_n'}(q_1X_1'+\cdots+q_nX_n')^2$$
$$=k(n-2)\cdots(n-k)\sum_1^n q_i^2G_i^2$$
$$+k(k-1)(n-2)\cdots(n-k+1)\left\{\sum_1^n q_iG_i\right\}^2$$

となる。荷重 q_i は，それぞれ，独立に変化する確率変数であるから，E_q を $q_1,\cdots q_n$ に関する平均値をとる演算子とすると，式(3.1)の条件より，

$$E_q(U_{1,k})=q_0k(n-1)\cdots(n-k+1)F_n\cdots\cdots(3.6)$$
$$\begin{aligned}E_q(U_{2,k})&=(q_0^2+\sigma_q^2)k(n-2)\cdots(n-k)S_n\\&\quad+q_0^2k(k-1)(n-2)\cdots(n-k+1)F_n^2\\&\quad+\sigma_q^2k(k-1)(n-2)\cdots(n-k+1)S_n\\&=\sigma_q^2k(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)S_n\\&\quad+q_0^2k(n-2)\cdots(n-k)S_n\\&\quad+q_0^2k(k-1)(n-2)\cdots(n-k+1)F_n^2\end{aligned}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.7)$$

を得る。したがって，k 個のランダム荷重が一様分布する場合の Y_k の平均値と分散値とは，つぎのようになる。

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}_k&=\frac{1}{{}_nP_k}E_q(U_{1,k})=\frac{k}{n}q_0F_n\\V_k&=\frac{1}{{}_nP_k}E_q(U_{2,k})-(\overline{Y})^2\\&=\frac{k}{n}\sigma_q^2S_n+\frac{k(n-k)}{n(n-1)}q_0^2\left(S_n-\frac{1}{n}F_n^2\right)\end{aligned}\right\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.8)$$

式(3.2)における m_q, V_q で表現すると，

$$\left.\begin{aligned}\overline{Y}_k&=m_qm_Gn\\V_k&=\left\{V_q-\frac{n(n-k)}{k^2}m_q^2\right\}S_n\\&\quad+\frac{n^2(n-k)}{k(n-1)}m_q\sigma_G^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(3.8)$$

を得る。

(2) 極　　値

区間全体としての荷重平均値と分散値 m_q, V_q とを考慮せずに，k 個の荷重 $q_i(i=1, 2\cdots k)$ による極値を求めるならば，式(2.17)に対応する関係

$$\left.\begin{aligned}Y_{k\max}&=q_{\max}\sum_1^k g_i\\Y_{k\min}&=q_{\min}\sum_1^k g_i\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.9)$$

を得る。しかるに，本文では，m_q, V_q を一定とした状態で Y_k の極値を求めることを目的としているので式(3.9)の関係は採用し得ない。

すなわち，式(3.2)に示した m_q, V_q を一定にしたままで，

$$Y_k=q_1g_1+q_2g_2+\cdots+q_kg_k\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.10)$$

を極値にする必要がある。

この問題はラグランジェの未定係数法によって解決される。パラメーター λ_1, λ_2 を用い，条件式

$$\left.\begin{aligned}m_q&=\frac{1}{n}(q_1+q_2+\cdots+q_k)\\V_q+m_q^2&=\frac{1}{n}(q_1^2+\cdots+q_k^2)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(3.2)'$$

のもとに式(3.10)の Y_k を極値にするには，つぎのようになる。

$$Y_k=\sum_1^k q_ig_i+\lambda_1\left(m_q-\frac{1}{n}\sum^k q_i\right)$$
$$+\lambda_2\left(V_q+m_q^2-\frac{1}{n}\sum^k q_i^2\right)$$
$$\frac{\partial Y_k}{\partial q_i}=g_i-\frac{1}{n}\lambda_1-2\lambda_2\frac{q_i}{n}=0$$
$$\therefore\quad q_i=\frac{1}{2\lambda_2}(ng_i-\lambda_1)\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3.11)$$

式(3.11)を式(3.2)′へ代入して，λ_1, λ_2 を求める。

$$\left.\begin{aligned}\lambda_2&=\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sum_1^k g_i^2-\frac{1}{k}\left(\sum_1^k g_i\right)^2}{\frac{1}{n}V_q-\frac{n-k}{nk}m_q^2}}\\\lambda_1&=\frac{n}{k}\sum_1^k g_i-\frac{2nm_q}{k}\lambda_2\\q_i&=\frac{ng_i-\lambda_1}{2\lambda_2}\\Y_{k\,\substack{\max\\\min}}&=\frac{1}{2\lambda_2}\left\{n\sum_1^k g_i^2-\lambda_1\sum_1^k g_i\right\}\end{aligned}\right\}\cdots(3.12)$$

ここに求められた λ_2 の複号±のうち，正号は $Y_{k\max}$ を，負号は $Y_{k\min}$ を与える。$g_i(i=1, 2,\cdots k)$ は G_i を大きさの順に並べ変えたものであることは前述した。Y_k を極値にする q_i の変化は，式(3.12)で求められたが，この q_i の生起確率は未定である。これは q_i の分布関数が具体的に与えられないと求め得ない。

4. 荷重が連続的に変化する場合

荷重占有幅 a に対して区間 L が大きくなり，$n\gg1'$ と同時に k も増加して，k/n が一定となる場合には，荷重

配列は巨視的には連続関数 $q(x)$ $(0 \leqq x \leqq L)$ とみなし得よう。

このように，荷重 $q(x)$ が全区間 L にわたる平均値 m_q と分散値 V_q とが一定という付帯条件のもとに，任意に変化した場合の影響値 Y の極値を求める問題は，不連続の場合のラグランジェの未定係数法に対応して，連続であるから変分法によって解決される。

$$\left.\begin{aligned} m_q &= \frac{1}{L}\int_0^L q(x)dx \\ V_q &= \frac{1}{L}\int_0^L \{q(x)-m_q\}^2 dx \\ &= \frac{1}{L}\int_0^L q^2(x)dx - m_q^2 \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4.1)$$

$$Y=\int_0^L G(x)g(x)dx \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4.2)$$

ここで，影響関数 $G(x,\xi)$ の ξ は任意で，演算には直接関与しないので，省略して $G(x)$ と略記する。

拘束条件式 (4.1) のもとに式 (4.2) の Y を極値にする関数 $q(x)$ は，パラメーター λ_1, λ_2 とともにオイラーの微分方程式

$$\frac{d}{dq}\left[G(x)q(x)+\frac{\lambda_1}{L}q(x) + \frac{\lambda_2}{L}\{q(x)-m_q\}^2\right]=0 \cdots\cdots\cdots\cdots(4.3)$$

の解として得られる。

式 (4.1) と式 (4.3) より，

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -\int_0^L G(x)dx \\ \lambda_2 &= \pm\frac{1}{2\sqrt{V_g}}\left[L\int_0^L G^2(x)dx - \left\{\int_0^L G(x)dx\right\}^2\right]^{1/2} \\ q(x) &= m_q \pm \sqrt{\frac{V_q}{L\int_0^L G^2(\xi)d\xi - \left\{\int_0^L G(\xi)d\xi\right\}^2}} \cdot\left\{\int_0^L G(\xi)d\xi - LG(x)\right\} \\ Y &= m_g\int_0^L G(\xi)d\xi \mp \sqrt{V_q\left[L\int_0^L G^2(\xi)d\xi - \left\{\int_0^L G(\xi)d\xi\right\}^2\right]} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4.4)$$

以上の結果を式 (2.4) の F, S をもって略記すると，つぎのようになる。$Y_{\max}$ を与える $q(x)_{\max}$ と $Y_{\max}$ は，

$$\left.\begin{aligned} q(x)_{\max} &= m_q - \sqrt{\frac{V_q}{LS-F^2}}\{F-LG(x)\} \\ Y_{\max} &= m_qF + \sqrt{V_q(LS-F^2)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4.5)$$

であり，$Y_{\min}$ を与える $q(x)_{\min}$ と $Y_{\min}$ は，

$$\left.\begin{aligned} q(x)_{\min} &= m_q + \sqrt{\frac{V_q}{LS-F^2}}\{F-LG(x)\} \\ Y_{\min} &= m_qF - \sqrt{V_q(LS-F^2)} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(4.6)$$

となる。

5. 不連続荷重と連続荷重の相互関係

不連続荷重に対する結果と連続荷重に対する結果との関係には，級数和と積分との関係に対応したものがあることが予測される。

ランダムな単位荷重に対する極値の関係式(3.12)において，$k=n$ とすると，

$$\sum_1^n q_i = \sum_1^n G_i$$

であって，

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{n\sum_1^n G_i^2 - \left(\sum_1^n G_i\right)^2}{V_q}} \\ \lambda_1 &= \sum_1^n G_i - 2m_q\lambda_2 \\ q_i &= \frac{nG_i-\lambda_1}{2\lambda_2} = m_q \mp \sqrt{\frac{V_q}{n\sum G_i^2-(\sum G_i)^2}} \cdot\left\{\sum_1^n G_i - nG_i\right\} \\ Y_{k\,\substack{\max\\ \min}} &= m_q\sum_1^n G_i \pm \sqrt{V_q\left[n\sum_1^n G_i^2 - \left(\sum_1^n G_i\right)^2\right]} \end{aligned}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots(5.1)$$

を得る。さらに，$n\to\infty$ とすれば，級数和が積分に対応することから，不連続荷重の場合で $n\to\infty$ として，載荷個数 k も $k=n\to\infty$ とした場合の式 (5.1) は，連続荷重による結果の式 (4.5) と式 (4.6) とは，本質的には同等なものとなることがわかる。

連続荷重の場合の Y の分散値については言及しない。不連続の場合の分散を与える式 (3.8) の極限 $n=k\to\infty$ を求める方法では，連続不連続を問わず，式 (3.2)，あるいは，式 (4.1) を満足するすべての関数を，一様分布という名のもとに荷重関数として採用することになって，不合理になる。実際に式 (3.8) で $n=k\to\infty$ とすれば，不合理な関係が生ずることは明白である。連続な場合の Y の分散値は，少なくとも $q(x)$ の分布関数 $P(x)$ が与えられていないと求め得ない。

本文で導いたものは，影響関数の既知なる構造物に平均値と分散値を m_q, V_q として与えられているランダム荷重が作用した場合の影響値の統計量を得る方法である。しからば，正値の m_q, V_q を任意に決定すれば，この解が得られようか。解は形式的には得られても，場合によっては $q(x)<0$ となって現実的でないものとなる。連続荷重の場合の式 (4.4) より

$$q(x)=m_q\pm\sqrt{\frac{V_q}{LS-F^2}}\{F-LG(x)\}$$

$$Y=m_qF\mp\sqrt{V_q(LS-F^2)}$$

を得る。$S, F, G(x)$ は構造物の形状によって決定するものであり，

$$LS-F^2=L\int_0^L\left[G(x)-\frac{1}{L}\int_0^L G(\xi)\,d\xi\right]^2dx\geqq 0$$

であるから，$\sqrt{(LS-F^2)}$ は虚数とはならない。しかし，$F-LG(x)$ は $0\leqq x\leqq L$ において正負の符号をとる可能性がある。よって，$q(x)\geqq 0$ という条件は

$$m_q\geqq\sqrt{\frac{V_q}{LS-F^2}}\,|F-LG(x)|_{\max}\quad\cdots\cdots\cdots(5.2)$$

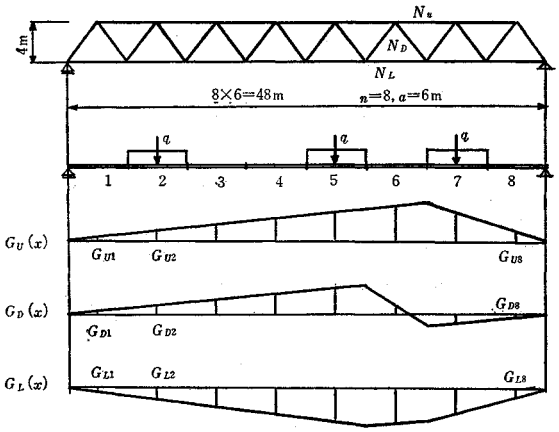
である。条件式(5.2)を満足しないような m_q, V_q，すなわち，平均値が小さく分散値が大きい場合には，極値を与える荷重は部分的に負になるが，これは連続荷重とみなし得ない場合なのである。平均値が小さく分散値が大きいということは，不連続荷重で載荷個数 k が小さい場合に相当するのである。荷重が連続関数とみなし得るということは，$k\gg 1$ であって，必然的に V_q が小さくなる。

6. 計 算 例

図—1 に示すワーレン トラスを対象にして，簡単な計算例を示そう。実際の橋梁と荷重とを引用したものではないから，実用的なものではないが，導いた諸関係式がどのような結果を与えるかを考察するには十分であろう。

(1) 不連続荷重の場合

単位荷重の占有長さを 6 m として，載荷台数は 3 台とする。平均値 q_0 と分散値 σ_q^2 は式(6.1)に示す値とする。トラスの格間長と a が一致するので，荷重は集中



図—1

表—1 影 響 関 数

i	G_{Ui}	G_{Ui}^2	G_{Di}	G_{Di}^2	D_{Li}	G_{Li}^2
1	−0.1875	0.0352	−0.07813	0.00610	0.23438	0.05493
2	−0.5625	0.3164	−0.23438	0.05493	0.70313	0.49439
3	−0.9375	0.8789	−0.39063	0.15259	1.17188	1.37329
4	−1.3125	1.7227	−0.54688	0.29908	1.64063	2.69165
5	−1.6875	2.8477	−0.70313	0.49439	2.10938	4.44976
6	−2.0625	4.2539	−0.23438	0.05493	2.20313	4.85386
7	−1.6875	2.8477	0.23438	0.05493	1.54688	2.39282
8	−0.5625	0.3164	0.07813	0.00610	0.51563	0.26587
Σ	−9.0000	13.2189	−1.8750	1.12305	10.1250	16.5766

表—2 $k=3$ とした場合の平均値と分散値

	N_U	N_D	N_L
F_n	− 9.0000	−1.8750	10.1250
S_n	13.2189	11.2305	16.5766
$\bar{Y}_k$	−20.2500	4.2187	22.7813
V_k	49.5871	107.8460	92.2230
$\sqrt{V_k}/\bar{Y}_k$	0.348	2.480	0.4190

表—3 G_i の大きい方から 3 個載荷 ($k=3$)による極値

	N_U		N_D		N_L	
載荷区間	① ② ⑧		① ⑦ ⑧		④ ⑤ ⑥	
Σg_i	−1.3125		0.234375		5.95313	
Σg_i^2	0.6680		0.06713		11.9953	
λ_2	0.226143	−0.226143	0.171822	−0.171822	2.11735	−2.11735
λ_1	−6.21372	−0.78628	−1.43514	2.68686	−9.5332	41.2832
$Y^{\max}_{\min}$	−6.21622	−9.53381	2.54147	2.6984	36.062	35.375
q_1	10.422	1.5780	2.359	9.637	5.3506	6.6493
q_2	3.789	8.221	9.632	2.363	6.2361	5.7638
q_3	3.789	8.221	5.999	5.999	6.4132	5.5867
Σq_i	18.000	18.000	17.999	17.999	17.999	17.998

荷重として格間中央に作用するものとして，影響関数 G_i を図—1 に示したような値とする。

$$\left.\begin{array}{ll} q_0=6\text{ t}, & n=8 \\ \sigma_q^2=6, & k=3 \\ a=6\text{ m} & \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.1)$$

図中に示した N_U, N_D, N_L を計算しよう。影響値 $G_{U1}-G_{U8}$, $G_{D1}\sim G_{D8}$, $G_{L1}\sim G_{L8}$ を表—1 に示す。区間全体としての荷重平均値と分散値 m_q, V_q は，式(6.1)と式(3.2)とより

$$\left.\begin{array}{l} m_q=2.25\text{ t} \\ V_q=11.8125 \end{array}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6.2)$$

となる。式(3.8)に基づいて $\bar{Y}_k, V_k$ を求めるために，表—1 に続いて表—2 を作成した。$\sqrt{V_k}/\bar{Y}_k$ を変動係数と称しているが，斜材の部材力は平均値は小さいが，変動係数は大きいことがわかる。

3 個のランダム荷重が配列して，スパン全体に関する荷重平均値と分散値が式(6.2)と拘束された場合，各部材力にはどのような極値が現われるであろうか。3 個の荷重 q_1, q_2, q_3 はどのようになるであろうか。これは式(3.12)より得られるが，最大値を求めるためには，G_i

表—4　G_i の小さい方から3個載荷の極値

	N_U		N_D		N_L	
載荷区間	⑤ ⑥ ⑦		③ ④ ⑤		① ② ⑧	
Σg_i	−5.4375		−1.640625		1.453125	
Σg_i^2	9.9493		2.691654		0.81519	
λ_2	0.235625	−0.235625	0.170105	−0.170105	0.259104	−0.259104
λ_1	−17.3292	−11.6708	−0.64163	−2.3337	0.70575	6.98425
$Y^{\max}_{\min}$	−31.139	−34.217	−8.695	−10.992	10.4374	7.0001
q_1	8.121	3.879	9.674	2.326	2.1406	9.8595
q_2	1.758	10.242	6.000	6.000	9.3770	2.6230
q_3	8.121	3.879	2.326	9.674	6.4824	5.5175
Σq_i	18.000	18.000	18.000	18.000	18.000	18.000

表—5　最大値と最小値

		N_U		N_D		N_L	
	区間	最大	最小	最大	最小	最大	最小
q_i（各区間の荷重）	1	10.422 t	0	9.637 t	0	0	9.860 t
	2	3.789	0	0	0	0	2.623
	3	0	0	0	2.326 t	0	0
	4	0	0	0	6.000	5.351 t	0
	5	0	3.879 t	0	9.674	6.236	0
	6	0	10.242	0	0	6.413	0
	7	0	3.879	2.363	0	0	0
	8	3.789	0	5.999	0	0	5.517
Y		−6.216 t	−34.217 t	2.698 t	−10.992 t	36.062 t	7.000 t
$\overline{Y}_k$		−20.250 t		4.219 t		22.781 t	
V_k		49.587		107.846		92.223	
$\sqrt{V_k}/\overline{Y}_k$		0.348		2.480		0.419	
$Y/\overline{Y}_k$		0.3070	1.6897	0.6395	−2.6054	1.5830	0.3073

の大きい方から順に3個を採用して，g_1, g_2, g_3 とし，極大値と極小値を求めて極大値を採る。最小値を求めるには，G_i の小さい方から3個を採用して g_1, g_2, g_3 とし，2個の極値の極小値の方を採る。式 (3.12) に対応する諸々の値を，**表—1** より求め計算し，**表—3** と**表—4** とに掲げた。表中の Σq_i 項は，3個の荷重の総和であり，荷重個々の平均値が式 (6.1) で仮定した 6 t になり，スパン全体では式 (6.2) を満足することを示している。

表—5 は，N_U, N_D, N_L の極値と平均値に関する最終結果をまとめたものである。それぞれを極値にする荷重3個の載荷位置も大きさも，すべて異なっていることがわかる。斜材の部材力の分散値と変動係数とが大きいことが注目されよう。

(2) 連続荷重の場合

連続荷重関数を $q(x)$ とする。平均値と分散値 m_q, V_q は式 (4.1) で与えられているものとして，N_U, N_D, N_L の極値とその場合の荷重関数 $q(x)_{\max}$, $q(x)_{\min}$ を求めよう。解は式 (4.5)，式 (4.6) で得られているので，**図—1** と**表—1** とをもとにして計算した結果を，順次，**表—6** に掲げる。

表—6　連続荷重の場合の極値

	N_U	N_D	N_L
F	−45	−3.281	60.750
S	62.016	7.422	101.109
$\sqrt{LS-F^2}$	30.852	18.587	34.098
$Y_{\max}=$ (t)	$-45\,m_q$ $+30.85\sqrt{V_q}$	$-3.281\,m_q$ $+18.59\sqrt{V_q}$	$60.75\,m_q$ $+34.10\sqrt{V_q}$
$Y_{\min}=$ (t)	$-45\,m_q$ $-30.85\sqrt{V_q}$	$-3.281\,m_q$ $-18.59\sqrt{V_q}$	$60.75\,m_q$ $-34.10\sqrt{V_q}$

表—7　$V_q=0.25$, $m_q=2$ とした極値

	N_U	N_D	N_L
$Y_{\max}$	−74.574	2.723	138.549
$\overline{Y}$	−90.000	−6.562	121.500
$Y_{\min}$	−105.426	−15.846	104.451
$Y_{\max}/\overline{Y}$	0.8286	−0.4150	1.1403
$Y_{\min}/\overline{Y}$	1.1714	2.4150	0.8597

ここで，$m_q=2$ t, $V_q=0.25$ として**表—6** へ代入すれば，**表—7** を得る。この場合の荷重関数は式 (6.3) のようになる。$G_U(x)$, $G_D(x)$, $G_L(x)$ は**図—1** の影響関数である。

$$\left.\begin{aligned} q_U(x)^{\max}_{\min} &= 2\pm\frac{1}{124.03}\{45+48\,G_U(x)\} \\ q_D(x)^{\max}_{\min} &= 2\mp\frac{1}{37.17}\{45+48\,G_D(x)\} \\ q_L(x)^{\max}_{\min} &= 2\mp\frac{1}{68.20}\{45-48\,G_L(x)\} \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(6.3)$$

結果より当然予想されることであるが，斜材の極値に大きな変化が現われることがわかる。

計算式は多少繁雑であるが，この計算例に示したように，影響関数をもとにして数表化しながら計算すれば，割合に整然とした演算過程となろう。

7. むすび

本文で導き得た諸関係式は，「外力の平均値と分散値 m_q, V_q を一定値とする」という前提条件に基づきながら，平均値と分散値が m_q, V_q となる現象の生起確率を論じたものではない。さらに，上記の条件のもとに予想される極値を求めながら，その極値の生起確率に言及したものでもない。応答の平均値と分散値を求め得たのは，一様分布を仮定したためにほかならない。現象の生起確率を求めるには，載荷個数 k の分布関数 $P(k)$ や，単位荷重の大きさに関する分布関数が必要である。確率現象とみなし得るランダム荷重の配列やその応答値を論ずるには，各過程で確率論的考察を施すべきであろう。このような観点から，本文はまだ不備なものである。しかし，「影響関数の正（負）の部分に等分布荷重を満載して極値応答を求める」という現行示方書の方針に対し

て，さらに，「m_q, V_q を一定値とする」という付帯条件を付けたらどのような極値を得るかという問題を解き得たことは，構造物の設計に対して，なんらかの参考にはなるものと思う。本文でははりを対象として論じたが，ランダム荷重が作用する構造物で影響関数の既知なる構造物の応答計算には，そのまま応用し得よう。

このような問題に関心を持たれている方から，有意義なご討議やご指導を戴けたら幸である。この研究において終始適切なご指導を賜った名古屋大学の成岡教授には，心から深甚な感謝の意を表したい。

(1969.7・1・受付)