

曲線桁橋の動的応答に関する基礎的研究*

FUNDAMENTAL STUDY ON FORCED VIBRATION
OF CURVED GIRDER BRIDGES小松 定夫**・中井 博***
By Sadao Komatsu and Hiroshi Nakai

1. ま え が き

曲線桁橋の静力学的解析は、従来の直線桁橋と比較するとかなり複雑であるけれども、数多くの研究が行なわれ、実用計算法^{1)~4)}も開発されてきている。そして、現在では、電子計算機の使用の普及によりその設計計算も比較的容易に行なえるようになってきた。

周知のとおり曲線桁橋では、水平面内の曲率の影響のために、曲げとねじりが連成する。すなわち、桁を鉛直下方にたわませただけで桁はねじれ、また逆にねじりを作用させただけでも桁はたわむのである。この現象は、直線桁橋の力学的特性と著しく相違する点である。一般に、スパンと断面が同一の直線桁橋と曲線桁橋との力学的特性を比較すると、曲線桁橋のほうがたわみやすいので、動的応答も曲線桁橋と直線桁橋には差異があるものと思われる。したがって、曲線桁橋の動的挙動を明らかにし、動的応力をも考慮に入れて、その安全性と経済性が両立しているかを調べるのが重要な課題となっている。

しかしながら、曲線桁橋の動的応答を解析した研究は、いままでのところきわめて少ないように思われる。過去の文献によると、まず円環の面外振動は A.E.H. Love⁵⁾、S. Timoshenko⁶⁾ などによって研究されている。米沢⁷⁾は、断面のそりを無視し、曲線桁橋を異方性扇版とみなして解析した。また、平井・深沢⁸⁾は、一定の移動力による曲線桁橋の動的応答を Laplace 変換を利用して解析した。さらに、C.P. Tan と S. Shore⁹⁾は、自動車の起振力は無視し得るほど小さいものとして、同じく一定の移動力が曲線桁橋上を通過する際の動的応答を Initial Condition 法を用いて解析した。そし

て、曲線桁橋の動的応答がどのようなパラメーターによって左右されるかについて若干の計算を行なった。なお、曲線桁橋の自由振動に関しては、すでに著者ら¹⁰⁾によって詳細に研究されている。

一方、過去半世紀にもわたるぼう大な直線桁橋の動的研究によると、自動車による振動は単に一定の力が移動したり、あるいは振動しながら移動する力によって解が得られるものではなく、自動車そのものも一種の振動体と考え、それと桁橋との連成振動として取り扱わなければならないことが明らかにされ、研究されてきている^{11),12)}。曲線桁橋では、直線桁と異なりたとえ荷重が偏心載荷しないときでも、上述のように曲げとねじり振動を同時に考慮しなければならないので、走行車による動的応答の解析はかなり複雑さを呈することになる。

このような観点より、C.P. Tan と S. Shore は前述の文献 9) の結果をさらに発展させ、曲線桁橋の動的応答を自動車との連成振動系として取り扱っている¹³⁾。しかし、基礎式においては、曲線桁橋の図心とせん断中心の偏倚、曲線桁橋の減衰係数、および回転慣性などの影響が無視されており、さらにねじりに関する強制項が考慮されていない。そのために、曲線桁橋と直線桁橋の動的特性を計算し、その差異を明らかにしている点では注目すべき研究であるけれども、上述のような点で厳密性が欠けているように思われる。

したがって、本文では曲線桁橋の動的挙動を解析するための基礎的な研究を行なう。解析は、まず Lagrange の運動方程式より、曲げとねじりの連成振動を考慮した基礎微分方程式を誘導する。つぎに、振動解析を行なうに当り必要である基本的な諸量、たとえば曲線桁橋の質量、剛性、減衰係数などを明らかにする。また、動的応答の基本的なものとして、1) 減衰を伴う自由振動、2) 種々な起振力による曲線桁橋の動的応答を解析する基礎式を与える。最後に、3) 走行車による曲線桁橋の動的応答を解析する基礎微分方程式を誘導する。

* 第 20 回土木学会年次学術講演会で一部発表、昭和 40 年 5 月、1-31。

** 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 大阪市立大学講師 工学部土木工学教室

なお、本文で誘導した式はすべて曲率半径を無限大とすると、ただちに直線桁橋に関する基礎式になる。また、その結果も従来より研究されてきている理論式と基本的に一致した¹²⁾。したがって、本文で誘導した基礎式は、今後曲線桁橋の動的応答を解析するために役立つものと思われる。

最後に、数値計算例として自動車1台のみが走行する際の動的応答を、代表的な曲線桁橋について計算したものを示すが、種々なパラメーターによる応答の変化や実験結果などの詳細については、別の機会にゆずることにする。

2. 基礎微分方程式

(1) 変形と断面力

図-1 は曲線桁橋の一部を取り出し、立体的に示したものである。この断面に鉛直荷重が作用するとき、断面がどのように変形するかを考えよう。一般に断面が非対称であれば、主軸二方向に変位を生じ同時にせん断中心軸まわりに回転を生じることになる¹⁰⁾。しかしながら、通常の曲線桁橋の断面形状では、水平軸と鉛直軸が主軸にほとんど一致するものと考えてよい。一方、鉛直軸まわりの曲げ剛性は、水平軸まわりの曲げ剛性と比較するとかなり大きいものである。したがって、これらの2点より水平軸方向の変位はきわめて微小なものであると思われる。そこで、本文では鉛直荷重による曲線桁橋の振動現象は、簡素化のため鉛直下方に変位する曲げ振動とねじり振動が合成されたものとして解析する。

さて、図-1 に示したように断面のせん断中心 S 上で桁軸にそって曲線座標 s を取り、この座標によって断面位置を指定する。その断面のせん断中心 S において、桁軸接線方向に x 軸、水平方向に y 軸、鉛直下方に z 軸の直交座標系を定める。いま、座標 s と時間 t の関数として与えられる鉛直荷重 $P(s, t)$ が作用すれば、桁は軸方向に w だけ変位し、同時に断面回転角 β を生じ図-2 に示すように変形することになる。したがって、桁

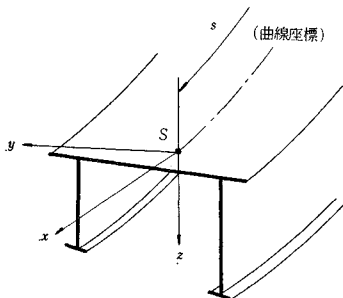


図-1 座標系

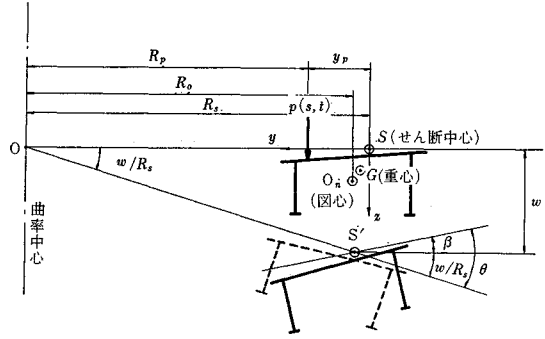


図-2 横断面の変形

のねじり角 θ はせん断中心の曲率半径を R_s とすれば、次式で与えられる。

$$\theta = \beta + \frac{w}{R_s} \dots\dots\dots (1)$$

つぎに、このような変形を生じるとき、桁に作用している断面力を考えよう。断面の図心 O_n には y 軸まわりの曲げモーメント M_y 、せん断中心 S には曲げねじりモーメント M_w 、および St. Venant のねじりモーメント T_s などが作用する。そして、これらの変形量と断面力との間には、つぎの関係式が成立する。

㊸ 曲げモーメント M_y ;

$$M_y = -E_s I_y' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\beta}{R_s} \right) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、

$$I_y' = \frac{R_0}{R_s} I_y \dots\dots\dots (3)$$

E_s : ヤング率

I_y : y 軸まわりの断面2次モーメント

R_0 : 図心の曲率半径

R_s : せん断中心の曲率半径

㊹ 曲げねじりモーメント M_w , St. Venant のねじりモーメント T_s ;

$$M_w = E_s C_w \frac{\partial^2 \theta}{\partial s^2} \dots\dots\dots (4)$$

$$T_s = G_s J \frac{\partial \theta}{\partial s} \dots\dots\dots (5)$$

ここに、 G_s : せん断弾性係数

C_w : 曲げねじり抵抗

J : ねじり抵抗

以上の断面力のほかに、せん断力 Q_z , 2次ねじりモーメント T_w も同時に作用しているが、これらは文献¹⁰⁾で詳細に述べたので省略する。

(2) 基礎運動方程式

まず、式(2), (4)~(5)中の鉛直変位 w と断面回転角 β を座標 s と時間 t の関数に変数分離する。一般に、座標関数としては自由振動時のたわみ、および断面回転

角の正規関数 $\omega_i(s), b_i(s)$ が利用できるので, w, β の一般座標はそれぞれについての時間関数を $W_i(t), B_i(t)$ と定義すれば, 次式のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} w(s, t) &= \sum_{i=1,2,3,\dots} w_i(s, t) = \sum_{i=1,2,3,\dots} \omega_i(s) W_i(t) \\ \beta(s, t) &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_i(s, t) = \sum_{i=1,2,3,\dots} b_i(s) B_i(t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(6)$$

もちろん, 式(6)の座標関数 $\omega_i(s), b_i(s)$ は曲線桁橋に課せられたすべての境界条件を満足するものとする。この条件以外に, $\omega_i(s), b_i(s)$ を総称して $\varrho_i(s)$ と書けば, $i \neq j$ のときつぎの直交条件を満足するものとする。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^L \varrho_i \varrho_j ds &= 0, & \int_0^L \varrho_i' \varrho_j' ds &= 0 \\ \int_0^L \varrho_i'' \varrho_j'' ds &= 0, & \int_0^L \varrho_i''' \varrho_j''' ds &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(7)$$

ここに, L はせん断中心軸上でとった桁の全長とする。また, 記号' は座標 s のみについて微分することを意味する。

さて, 式(6)の時間関数 $W_i(t), B_i(t)$ に関する微分方程式を Lagrange の運動方程式を用いて誘導しよう。そのために曲線桁橋断面が鉛直下方に w だけ変位し, さらに断面が角 β だけ回転したときの運動エネルギー T を式(6)と式(7)の直交条件を考慮して求めれば, つぎのように表わすことができる。

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{R_G}{R_S} \frac{r_s}{g} \left\{ A_s \left(\frac{\partial w}{\partial t} + y_G \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 + I_G \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} m \sum_{i=1,2,3,\dots} \left(A_s \dot{W}_i^2 \int_0^L \omega_i^2 ds \right. \\ &\quad \left. + 2 S_z \dot{W}_i \dot{B}_i \int_0^L \omega_i b_i ds + I_S \dot{B}_i^2 \int_0^L b_i^2 ds \right) \end{aligned} \quad (8)$$

ここに, 記号 \cdot は時間 t のみについて微分することを意味する。そして,

- r_s : 材料の密度
- g : 重力加速度
- A_s : 断面積
- $y_G = R_S - R_G$: せん断中心 S と重心 G との水平距離
- R_G : 重心の曲率半径
- $S_z = A_s y_G$: z 軸に関する断面1次モーメント
- I_G : 重心 G に関する極断面2次モーメント
- $I_S = I_G + A_s y_G^2$: せん断中心 S に関する極断面2次モーメント
- $m = \frac{R_G}{R_S} \cdot \frac{r_s}{g}$: せん断中心軸上で考えた単位体積あたりの質量

つぎに, 位置エネルギー Π を求める。位置エネルギーはひずみエネルギーとして保存されるが, このエネルギーは曲線桁の場合一般に曲げモーメント M_y , 曲げね

じりモーメント M_w , および St. Venant のねじりモーメント T_s によるものが大部分をしめ, せん断力 Q_y や2次ねじりモーメント T_w によるものは微少なものであるために省略することにする。したがって, 式(1)~(4)より Π はつぎのように書ける。

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \left(\frac{R_0}{R_S} \right)^2 \frac{M_y^2}{E_s I_y'} + \frac{M_w^2}{E_s C_w} + \frac{T_s^2}{G_s J} \right\} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ E_s I_y' \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - \frac{\beta}{R_S} \right)^2 + E_s C_w \left(\frac{\partial^2 \beta}{\partial s^2} + \frac{1}{R_S} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + G_s J \left(\frac{\partial \beta}{\partial s} + \frac{1}{R_S} \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} ds \end{aligned}$$

ここで, 再び式(6)と式(7)の直交条件を用いれば,

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3,\dots} \left[E_s I_y' \left\{ W_i^2 \int_0^L (\omega_i'')^2 - 2 W_i B_i \right. \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_0^L \frac{\omega_i b_i}{R_S} ds + B_i^2 \int_0^L \frac{b_i}{R_S} ds \right\} + E_s C_w \left\{ W_i^2 \int_0^L \left(\frac{\omega_i''}{R_S} \right)^2 ds \right. \\ &\quad \left. + 2 W_i B_i \int_0^L \frac{\omega_i b_i}{R_S} ds + B_i^2 \int_0^L (b_i'')^2 ds \right\} \\ &\quad \left. + G_s J \left\{ W_i^2 \int_0^L \left(\frac{\omega_i'}{R_S} \right)^2 ds + 2 W_i B_i \int_0^L \frac{\omega_i' b_i'}{R_S} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_i^2 \int_0^L (b_i')^2 ds \right\} \right] \dots\dots\dots(9) \end{aligned}$$

最後に, 減衰力によって消失するエネルギーを求めよう。曲線桁橋を自由振動させたときの振動波形を調べてみると他の形式の桁橋と同様, 振動振幅は対数的に減衰することが実験によっても明らかにされている。これは減衰特性が粘性減衰, すなわち変形の数に比例した減衰力が作用することを意味している。したがって, この減衰力によって消失する仕事は散逸エネルギーとして取り扱え, 減衰作用を基礎運動方程式の中に容易に加味することができる。

いま, 曲げ振動に関する減衰係数を d_w , 回転振動に関するものを d_β と定義し

$$\left. \begin{aligned} d_w &= \sum_{i=1,2,3,\dots} d_{w,i} \\ d_\beta &= \sum_{i=1,2,3,\dots} d_{\beta,i} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(10)$$

で表わす。そして, $d_{w,i}$ と $d_{\beta,i}$ は互いに独立であると仮定するならば, 散逸エネルギー D は式(8)と同様にしてつぎのように表わされる。

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} \int_0^L \frac{R_G}{R_S} \frac{r_s}{g} \left[A_s \left\{ d_w \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + d_\beta \left(y_G \frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right\} + I_G d_\beta \left(\frac{\partial \beta}{\partial t} \right)^2 \right] ds \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1,2,3,\dots} \left(A_s d_{w,i} \dot{W}_i^2 \int_0^L \omega_i^2 ds \right. \\ &\quad \left. + I_S d_{\beta,i} \dot{B}_i^2 \int_0^L b_i^2 ds \right) \dots\dots\dots(11) \end{aligned}$$

以上のエネルギー T, Π, D を Lagrange の運動方程式¹⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{W}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{W}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{W}_i} &= F_i \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{B}_i} \right) + \frac{\partial D}{\partial \dot{B}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{B}_i} &= \Gamma_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(12)$$

に代入すれば、時間関数 $W_i(t)$, $B_i(t)$ に関する連立微分方程式を得る。

ただし、 F_i , Γ_i はそれぞれせん断中心に作用する鉛直力、およびトルクを一般座標で表わしたものである。すなわち、鉛直荷重は一般にせん断中心上に作用するとはかぎらないので、その鉛直荷重をせん断中心に平行移動し、鉛直力とトルクとの2つの成分に分解して考えなければならない。したがって、図-3 に示す分布荷重 $q(s, R_p, t)$ が作用するとき、 R_p を載荷点の曲率半径とすれば、一般力 F_i , Γ_i は

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \int_0^L \int_{R_{P,IN}}^{R_{P,OT}} \left\{ \frac{R_P}{R_S} q(s, R_P, t) \omega_i(s) \right\} dR_P \cdot ds \\ \Gamma_i &= \int_0^L \int_{R_{P,IN}}^{R_{P,OT}} \left\{ \frac{R_P}{R_S} (R_P - R_S) q(s, R_P, t) b_i(s) \right\} dR_P \cdot ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(13)$$

ここに、 $R_{P,IN}$, $R_{P,OT}$ はそれぞれ載荷荷重の外縁と内縁の曲率半径とする (図-3 参照)。

以上により、時間関数 $W_i(t)$, $B_i(t)$ に関する運動方程式はつぎの連立微分方程式として与えられる。

$$\left. \begin{aligned} m A_s \ddot{W}_i \int_0^L \omega_i^2 ds + m A_s d_{w,i} \dot{W}_i \int_0^L \omega_i^2 ds \\ + \left\{ E_s I_y' \int_0^L (\omega_i'')^2 + E_s C_w \int_0^L \left(\frac{\omega_i''}{R_S} \right)^2 \right. \\ + G_s J \int_0^L \left(\frac{\omega_i'}{R_S} \right)^2 ds \Big\} W_i + m S_2 \dot{B}_i \int_0^L \omega_i b_i ds \\ + \left(-E_s I_y' \int_0^L \frac{\omega_i'' b_i}{R_S} ds + E_s C_w \int_0^L \frac{\omega_i'' b_i''}{R_S} ds \right. \\ + G_s J \int_0^L \frac{\omega_i' b_i'}{R_S} ds \Big) B_i = F_i, \\ m S_z \ddot{W}_i \int_0^L \omega_i b_i ds \\ + \left(-E_s I_y' \int_0^L \frac{\omega_i'' b_i}{R_S} ds + E_s C_w \int_0^L \frac{\omega_i'' b_i''}{R_S} ds \right. \\ + G_s J \int_0^L \frac{\omega_i' b_i'}{R_S} ds \Big) W_i + m I_s \dot{B}_i \int_0^L b_i^2 ds \\ + m I_s d_{\beta,i} \dot{B}_i \int_0^L b_i^2 ds + \left\{ E_s I_y' \int_0^L \left(\frac{b_i}{R_S} \right)^2 ds \right. \end{aligned} \right\}$$

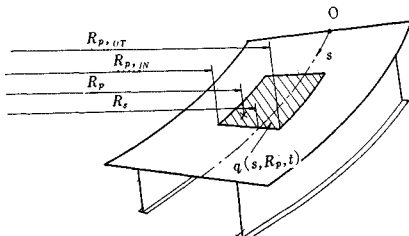


図-3 荷重 $q(s, R_p, t)$

$$+ E_s C_w \int_0^L (b_i'')^2 ds + G_s J \int_0^L (b_i')^2 ds \Big\} B_i = \Gamma_i \Big\} \dots\dots\dots(14)_{1,2}$$

3. 運動方程式の近似解法¹⁰⁾

(1) 断面定数

一般に曲線桁橋の断面は、桁高を一定とし板厚を変化させて変断面とする。変断面であることまで考慮すれば、基礎式は繁雑となり厳密解を得るのは容易ではない。

そこで、近似的な取り扱いをしよう。振動の問題は局部的な応力状態や変形状態を解析するのではなく、橋全体の動的挙動を問題とするのである。したがって、あらゆる断面定数 $Q_w(s)$ をつぎの平均公式によって橋全体にわたって均らし、 Q_w^* が全橋にわたり一定値として近似的に解析する¹⁵⁾。

$$Q_w^* = \frac{\sum_{r=1}^n l_r \bar{Q}_{w,r}}{\sum_{r=1}^n l_r} \dots\dots\dots(15)$$

ここに、

$$\bar{Q}_{w,r} = \frac{1}{L_r} \int_0^{L_r} Q_{w,r}(s_r) ds_r \dots\dots\dots(16)$$

そして、桁のスパン比を

$$l_1 = 1, \dots, l_r = L_r/L_1, \dots, l_n = L_n/L_1 \dots\dots\dots(17)$$

とする。また、図-4 は曲線桁橋の平面形状を示すものであるが、座標 s のほかにこれと同じ方向で第 r 径間の右端を原点にとった部分座標を座標 s_r とする。座標 s が指定されると、この座標 s_r も指定されたことになる。

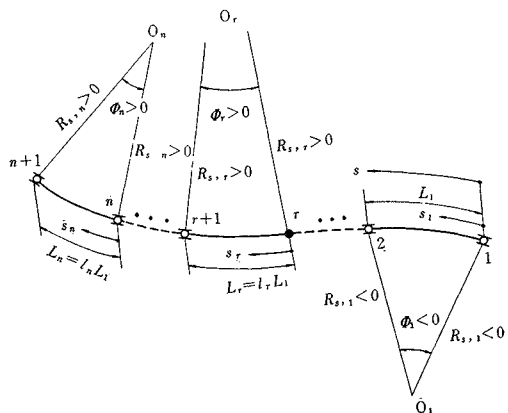


図-4 曲線桁橋の平面形状

(2) 座標関数

図-4 のような連続曲線桁橋に支点番号を順次つけたとき、座標関数 $\omega_i(s)$ に $b_i(s)$ についての境界条件を考えよう。いま、この座標関数を総称して $\Omega_i(s)$ と書け

ば、まず支間 L_r の両端 r と $r+1$ では、

$$[\varrho_{i,r}(s_r)]_{s_r=0} = [\varrho_{i,r}(s_r)]_{s_r=L_r} = 0 \dots\dots\dots(18)$$

支間 $r+1$ での連続条件として

$$\left. \begin{aligned} &[\varrho_{i,r'}(s_r)]_{s_r=L_r} = [\varrho_{i,r+1}'(s_{r+1})]_{s_{r+1}=0} \\ \text{および} \\ &[\varrho_{i,r}''(s_r)]_{s_r=L_r} = [\varrho_{i,r+1}''(s_{r+1})]_{s_{r+1}=0} \end{aligned} \right\} (19)$$

また、両端 $s_1=0$ と $s_n=L_n$ が単純支持であると末端条件として

$$[\varrho_{i,1}''(s_1)]_{s_1=0} = [\varrho_{i,n}''(s_n)]_{s_n=L_n} = 0 \dots\dots\dots(20)$$

すなわち、座標関数 ω_i, \mathfrak{b}_i に課せられた境界条件は式 (18)~(20) に示すよう全く類似したものとなるので、共通の関数

$$\omega_i(s) = \mathfrak{b}_i(s) = \varrho_i(s) \dots\dots\dots(21)$$

を近似的に使用することができる。

この座標関数 ϱ_i は、式 (7) に示した直交条件をできるだけ満足することが望ましいが、その近似解としてつぎのものを採用する。

㊸ 単純曲線桁橋 ($r=1$)

$$\left. \begin{aligned} &\varrho_{i,1} = \sin k_i s_1 \\ &k_i = i \pi / L_1 \quad (i=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ちなみにこの関数は、式 (7) の直交条件をすべて満足するので厳密解なのである。

㊹ 連続曲線桁橋 ($r=1, 2, \dots, n$)

第 r スパンの関数 $\varrho_{i,r}$ としてつぎのものを採用する。

$$\begin{aligned} \varrho_{i,r}(s_r) = &\lambda_{i,r} \left[\frac{\sin\{k_i(L_r - s_r)\}}{\sin k_i L_r} - \frac{\sinh\{k_i(L_r - s_r)\}}{\sinh k_i L_r} \right] \\ &+ \lambda_{i,r+1} \left[\frac{\sin k_i s_r}{\sin k_i L_r} - \frac{\sinh k_i s_r}{\sinh k_i L_r} \right] \dots\dots\dots(23) \\ &(i=1, 2, 3, \dots, r=1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$

ここで、 k_i 値はつぎの定数 $A_{i,r}, A_{i,r+1}, A_{i,r+2}$ に関する連立同次方程の固有値として求められるものである。

$$\begin{aligned} &A_{i,r} l_r \psi_{i,r} + A_{i,r+1} (l_r \chi_r + l_{r+1} \chi_{r+1}) \\ &+ A_{i,r+2} l_{r+1} \psi_{r+1} = 0 \dots\dots\dots(24) \\ &(r=1, 2, \dots, n-1) \end{aligned}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} K_{B,i,ww} = &\frac{E_s I_y'^*}{L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} + \frac{C_w^*}{I_y'^* L_1^2} (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi_r}{l_r} \right)^2 \mathfrak{V}_{i,r} \right. \\ &\left. + \frac{G_s J^*}{E_s I_y'^*} (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi_r}{l_r} \right)^2 d_{i,r} \right\} / \varrho_i^2(s) \\ K_{B,i,w\beta} = &K_{B,i,\beta w} = \frac{E_s I_y'^* + G_s J^*}{L_1^2} \left\{ \frac{E_s C_w^*}{(E_s I_y'^* + G_s J^*) L_1^2} (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{l_r} \right) \mathfrak{V}_{i,r} \right. \\ &\left. + (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\Phi_r}{l_r} \right) d_{i,r} \right\} / \varrho_i^2(s) \\ K_{B,i,\beta\beta} = &\frac{E_s C_w^*}{L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^4 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} + \frac{G_s J^* L_1^2}{E_s C_w^*} (k_i L_1)^2 \sum_{r=1}^n d_{i,r} + \frac{I_y'^* L_1^2}{C_w^*} \sum_{r=1}^n \left(\frac{\Phi_r}{l_r} \right)^2 \mathfrak{V}_{i,r} \right\} / \varrho_i^2(s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(30)$$

$$A_{i,1} = A_{i,n+1} = 0 \dots\dots\dots(25)$$

また、 $\psi_{i,r}, \chi_{i,r}$ は $l_r k_i L_1$ の関数で、つぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i,r} = &(\operatorname{cosec} l_r k_i L_1 - \operatorname{cosech} l_r k_i L_1) / l_r k_i L_1 \\ \chi_{i,r} = &(\operatorname{coth} l_r k_i L_1 - \cot l_r k_i L_1) / l_r k_i L_1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

式 (24) の係数行列式より固有値 $k_i L_1$ が決定すれば、これを再び式 (24) に代入して、 $A_{i,r}, A_{i,r+1}$ 間の比を決定する。すなわち、式 (23) の $\lambda_{i,r}$ 値は

$$\begin{aligned} &\lambda_{i,1} = 0, \lambda_{i,2} = 1, \dots, \lambda_{i,r} = A_{i,r} / A_{i,2}, \dots, \\ &\lambda_{i,n+1} = 0 \dots\dots\dots(27) \end{aligned}$$

と定義することにする。

(3) 実用的な運動方程式

式 (22), (23) を式 (14)_{1,2} に代入して、式 (6), (13) を考慮すれば第 i 次振動時のたわみ w_i と断面回転角 β_i に関するつぎのように簡単化された運動方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} &M_{B,i} \ddot{w}_i + D_{B,i,w} \dot{w}_i + K_{B,i,ww} w_i \\ &+ Z_{B,i} \ddot{\beta}_i + K_{B,i,\beta w} \beta_i = F_i / \varrho_i(s) \\ &Z_{B,i} \ddot{w}_i + K_{B,i,w\beta} w_i \\ &+ I_{B,i} \ddot{\beta}_i + D_{B,i,\beta} \dot{\beta}_i + K_{B,i,\beta\beta} \beta_i = \Gamma_i / \varrho_i(s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(28)$$

ここに、 $M_{B,i}, I_{B,i}, Z_{B,i}$ は次式のように定義されるものである。

$$\left. \begin{aligned} M_{B,i} = &m^* A_s^* L_1 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} / \varrho_i^2(s) \\ I_{B,i} = &m^* I_s^* L_1 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} / \varrho_i^2(s) \\ Z_{B,i} = &m^* S_z^* L_1 \sum_{r=1}^n \mathfrak{V}_{i,r} / \varrho_i^2(s) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(29)$$

すなわち、 $M_{B,i}, I_{B,i}$ はそれぞれ第 i 次振動時の曲線桁橋の有効質量および有効回転質量を意味している。また、 $Z_{B,i}$ は同じく質量の偏心による有効質量あるいは有効回転質量となる項なのである。

つぎに、 $K_{B,i,ww}, K_{B,i,\beta w}, K_{B,i,w\beta}$ および $K_{B,i,\beta\beta}$ 第 i 次振動時の換算ばね定数と定義されるべきもので、次式で求めることができる。

そして、 $K_{B,i,ww}$ はせん断中心 S を鉛直下方に単位量だけ変位せしめるに要する力を意味し、 $K_{B,i,\beta\beta}$ はせん断中心軸まわりに単位の回転を生じせしめるに要するトルクを意味する。また、 $K_{B,i,w\beta}(=K_{B,i,\beta w})$ はせん断中心を単位量変位せしめるに要するトルク（せん断中心軸まわりに単位の回転を生じるに要する力）を表わしている。なお、式 (30) 中の記号 ϕ_r は曲率半径 $R_{S,r}$ の円弧がなす中心角で、

$$\phi_r = L_r / R_{S,r} \dots\dots\dots (31)$$

で与えられ、これの符号の取り方は 図-4 に示すとおりとする。

最後に、 $D_{B,i,w}$ 、 $D_{B,i,\beta}$ は鉛直振動と回転振動の減衰係数を表わしている。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} D_{B,i,w} &= M_{B,i} d_{i,w} \\ D_{B,i,\beta} &= I_{B,G,i} d_{i,\beta} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ところで、式 (29)~(30)、(32) における $v_{i,r}$ 、 $d_{i,r}$ 値は次式によって決定できるものである。

$$\left. \begin{aligned} v_{i,r} &= \frac{1}{L_r} \int_0^{L_r} \{Q_{i,r}(s_r)\}^2 ds_r \\ d_{i,r} &= \frac{1}{k_i^2 L_r} \int_0^{L_r} \{Q_{i,r}''(s_r)\}^2 ds_r \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (33)$$

したがって、単純曲線桁橋と連続曲線桁橋の場合に分けて、 $v_{i,r}$ 、 $d_{i,r}$ 値の算定公式を示せば、以下のようである。

㊸ 単純曲線桁橋 ($r=1$)
 $v_{i,1} = d_{i,1} = 1/2 \dots\dots\dots (34)$

㊹ 連続曲線桁橋 ($r=1, 2, \dots, n$)

$$\left. \begin{aligned} v_{i,r} &= l_r \{(\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) \mu_{i,r} + \lambda_{i,r} \lambda_{i,r+1} \kappa_{i,r}\} \\ d_{i,r} &= l_r \{(\lambda_{i,r}^2 + \lambda_{i,r+1}^2) \nu_{i,r} + \lambda_{i,r} \lambda_{i,r+1} \theta_{i,r}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (35)$$

ここに、変数 $\mu_{i,r}$ 、 $\kappa_{i,r}$ 、 $\nu_{i,r}$ 、 $\theta_{i,r}$ は $l_r k_i L_1$ の関数で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mu_{i,r} &= \frac{1}{2} \{l_r k_i L_1 \psi_{i,r} (\operatorname{cosec} l_r k_i L_1 + \operatorname{cosech} l_r k_i L_1) - \chi_{i,r}\} \\ \kappa_{i,r} &= (\operatorname{cosech} l_r k_i L_1 \coth l_r k_i L_1 - \operatorname{cosec} l_r k_i L_1 \cot l_r k_i L_1) - \psi_{i,r} \\ \nu_{i,r} &= \frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2 l_r k_i L_1 + \operatorname{cosech}^2 l_r k_i L_1 - \frac{1}{l_r k_i L_1} (\coth l_r k_i L_1 + \cot l_r k_i L_1) \\ \theta_{i,r} &= \frac{1}{l_r k_i L_1} (\operatorname{cosec} l_r k_i L_1 + \operatorname{cosech} l_r k_i L_1) - (\operatorname{cosech} l_r k_i L_1 \coth l_r k_i L_1 + \operatorname{cosec} l_r k_i L_1 \cot l_r k_i L_1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (36)$$

さて、式 (28) と同じ振動をする機械系等価モデルを

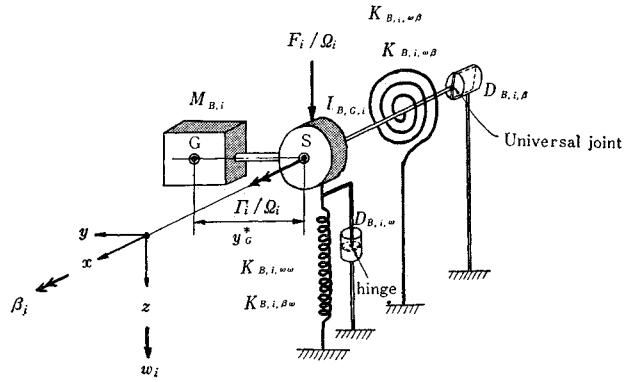


図-5 曲線桁橋の等価振動モデル

示せば、図-5 のようである。ここで、曲線桁橋の有効質量 $M_{B,i}$ は図示のように断面の重心 G に集中しているものとする。一方、せん断中心 S には重心軸まわりの有効回転質量

$$I_{B,G,i} = m^* I_G^* L_1 \sum_{r=1}^n v_{i,r} / \Omega_i^2 (s)$$

が集中しているものとする。そして、 $M_{B,i}$ と $I_{B,G,i}$ は質量も回転質量も持たない剛体より成る棒によって水平距離 y_G^* だけ偏倚して連結されていると考えることにする。これらの質量は鉛直変位に抵抗し、同時に回転にも抵抗し得るスプリング $K_{B,i,ww}$ 、 $K_{B,i,\beta\beta}$ 、および回転変位に抵抗し鉛直変位にも同時に抵抗し得るコイルスプリング $K_{B,i,\beta w}$ 、 $K_{B,i,w\beta}$ によりせん断中心 S のところで支持されていて、この振動系の平衡位置が保持されている。

外力 $F_i / \Omega_i (s)$ 、 $\Gamma_i / \Omega_i (s)$ が作用すると振動が生じるが、このとき変位の速度に比例する減衰力が生じるように鉛直振動については $D_{B,i,w}$ の減衰係数を持つダッシ

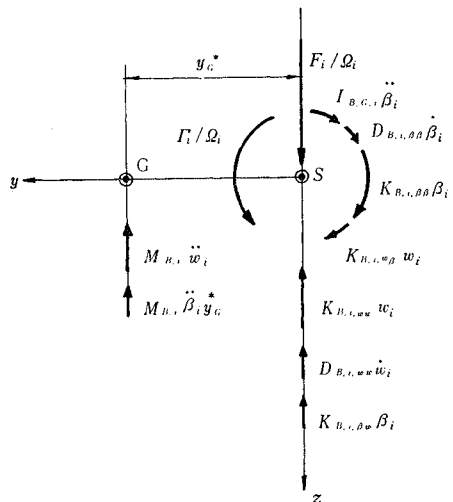


図-6 等価モデルに作用する力

ュポットを取り付け、回転振動に対しては $D_{B,i,\beta}$ の減衰係数を有するダッシュポットを図示のように付加する。このように考えると、系の振動は所要の減衰作用を受けることになる。

さて、以上のモデルに作用している力を d'alambert の原理を適用して図示すれば、図-6 のようになる。したがって、鉛直力とトルクについてのつりあい方程式を立てれば式 (28) と全く同一の運動方程式を得ることができる。そこで、曲線桁橋の動的挙動は図-5 のモデルについて解析を進めればよい。

4. 曲線桁橋の種々な振動

(1) 自由振動¹⁰⁾

曲線桁橋が自由振動する場合、強制項は、

$$\left. \begin{aligned}
 p_{i,ww} &= \frac{E_s I_y'^*}{m^* A_z^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 - (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_r}{l_r}\right)^2 A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\
 p_{i,\beta w} &= \frac{E_s I_y'^*}{m^* S_z'^* L_1^3} \left\{ (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{l_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} - \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{l_r}\right)^3 V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\
 p_{i,w\beta} &= \frac{E_s C_w^*}{m^* S_z'^* L_1^5} \left\{ (k_i L_1)^4 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{l_r}\right) V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} + \frac{L_1^2}{C_w^*} \left(-\frac{G_s J^*}{E_s} + I_y'^* \right) (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n \left(\pm \frac{\phi_r}{l_r}\right) A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\} \\
 p_{i,\beta\beta} &= \frac{E_s C_w^*}{m^* I_s^* L_1^4} \left\{ (k_i L_1)^4 + \frac{G_s J^* L_1^2}{E_s C_w^*} (k_i L_1)^2 \frac{\sum_{r=1}^n A_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} + \frac{I_y'^* L_1^2}{C_w^*} \frac{\sum_{r=1}^n \left(\frac{\phi_r}{l_r}\right)^2 V_{i,r}}{\sum_{r=1}^n V_{i,r}} \right\}
 \end{aligned} \right\} \dots (40)$$

すなわち、上式の $p_{i,ww}$, $p_{i,\beta\beta}$ はそれぞれ非連成振動時の曲げ、およびねじり振動の円振動数 (rad/sec) を表わしている。式 (38) を解けば、つぎの振動数方程式を得る。

$$\begin{vmatrix} A_z^*(p_{i,ww}^2 - p_i^2) & S_z'^*(p_{i,\beta w}^2 - p_i^2) \\ S_z'^*(p_{i,w\beta}^2 - p_i^2) & I_s^*(p_{i,\beta\beta}^2 - p_i^2) \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

この式より曲線桁橋が自由振動するときの円振動数 p_i (rad/sec) は、 i 次のモードに対して2つの連成振動数 $p_{i,I}$, $p_{i,II}$ が存在することがわかる。

$$p_{i,I \text{ or } II} = \sqrt{\frac{b_i \pm \sqrt{b_i^2 - 4ac_i}}{2a}} \dots (42)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 a &= A_z^* I_G^* \\
 b_i &= A_z^* I_s^* (p_{i,ww}^2 + p_{i,\beta\beta}^2) \\
 &\quad - S_z'^* S_z'^* (p_{i,\beta w}^2 + p_{i,w\beta}^2) \\
 c_i &= A_z^* I_s^* p_{i,ww}^2 p_{i,\beta\beta}^2 \\
 &\quad - S_z'^* S_z'^* p_{i,\beta w}^2 p_{i,w\beta}^2
 \end{aligned} \right\} \dots (43)$$

$$F_i = \Gamma_i = 0 \dots (37)$$

であるので、容易に振動数方程式を誘導することができる。

まず、簡単化のため減衰作用がないものとする。そして、自由振動を鉛直下向にたわむ曲げ振動と回転振動とに分離するために、式 (14)₂ の両辺を R_S で割り式 (14)₁ との差をとれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 A_z^*(\dot{w}_i + p_{i,ww} w_i) + S_z'^*(\ddot{\beta}_i + p_{i,\beta w} \dot{\beta}_i) &= 0 \\
 S_z'^*(\dot{w}_i + p_{i,w\beta} w_i) + I_s^*(\ddot{\beta}_i + p_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_i) &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots (38)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 A_z &= A_s - S_z / R_S \\
 S_z' &= S_z - I_S / R_S
 \end{aligned} \right\} \dots (39)$$

であり、平均値 A_z^* , $S_z'^*$ は式 (15)~(17) より求める。

また、

厳密に言えば、曲線桁橋の断面は一般に非対称断面なので、自由振動するとき水平方向の曲げ振動も連成するために振動数方程式はもう少し複雑となる。これについては文献 10) で詳細に論じたので省略するけれども、その研究で水平方向の曲げ振動の連成作用を無視すれば、本文の結果と全く一致する。

ところで、減衰を考慮した場合の基礎式は式 (29)~(30) または式 (40) の記号を用いれば、つぎのように簡単化することができる。

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{w}_i + \tilde{d}_{i,ww} \dot{w}_i + \tilde{p}_{i,ww} w_i - \tilde{d}_{i,\beta w} \dot{\beta}_i \\
 - \tilde{p}_{i,\beta w} \beta_i &= 0 \\
 \ddot{\beta}_i + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_i + \tilde{p}_{i,\beta\beta} \beta_i - \tilde{d}_{i,w\beta} \dot{w}_i \\
 + \tilde{p}_{i,w\beta} w_i &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{p}_{i,ww} &= \frac{I_{B,i} K_{B,i,ww} - Z_{B,i} K_{B,i,w\beta}}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\
 &= \frac{A_z^* I_s^* p_{i,ww}^2 - S_z'^* S_z'^* p_{i,w\beta}^2}{A^* I_G^*}
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{P}_{i,\beta w}^2 &= \frac{Z_{B,i}K_{B,i,\beta\beta} - I_{B,i}K_{B,i,\beta w}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\
 &= \frac{S_z^* I_S^* (p_{i,\beta\beta}^2 - p_{i,\beta w}^2)}{A_s^* I_G^*} \\
 \tilde{P}_{i,w\beta}^2 &= \frac{M_{B,i}K_{B,i,w\beta} - Z_{B,i}K_{B,i,ww}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\
 &= \frac{A_z^* S_z^* (p_{i,w\beta}^2 - p_{i,ww}^2)}{A_s^* I_G^*} \\
 \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 &= \frac{M_{B,i}K_{B,i,\beta\beta} - Z_{B,i}K_{B,i,\beta w}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\
 &= \frac{A_z^* I_S^* p_{i,\beta\beta}^2 - S_z^* S_z^* p_{i,\beta w}^2}{A_s^* I_G^*}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(45)_{1,2}$$

および

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{d}_{i,ww} &= \frac{I_{B,i}D_{B,i,w}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} = \frac{I_S^*}{I_G^*} d_{i,w} \\
 \tilde{d}_{i,\beta w} &= \frac{Z_{B,i}D_{B,i,\beta}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} = \frac{S_z^* I_S^*}{A_s^* I_G^*} d_{i,\beta} \\
 \tilde{d}_{i,w\beta} &= \frac{Z_{B,i}D_{B,i,w}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} = \frac{S_z^*}{I_G^*} d_{i,w} \\
 \tilde{d}_{i,\beta\beta} &= \frac{M_{B,i}D_{B,i,\beta}}{M_{B,i}I_{B,i} - Z_{B,i}^2} = \frac{I_S^*}{I_G^*} d_{i,\beta}
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(46)_{1,2}$$

さて、式 (44) を解くために、

$$w_i = \bar{w}_i e^{it}, \quad \beta_i = \bar{b}_i e^{it}$$

とおき、これを式 (44) に代入すれば、 \bar{w}_i, \bar{b}_i に関してつぎの連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 (\bar{i}^2 + \tilde{d}_{i,ww}\bar{i} + \tilde{P}_{i,ww}^2)\bar{w}_i - (\tilde{d}_{i,\beta w}\bar{i} + \tilde{P}_{i,\beta w}^2)\bar{b}_i &= 0 \\
 -(\tilde{d}_{i,w\beta}\bar{i} - \tilde{P}_{i,w\beta}^2)\bar{w}_i + (\bar{i}^2 + d_{i,\beta\beta}\bar{i} + \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2)\bar{b}_i &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(47)$$

i 次振動時の鉛直曲げと回転振動との振幅 \bar{w}_i, \bar{b}_i がともに 0 とならないためには、 \bar{i} に関して 4 次の特性方程式が得られる。

$$(\bar{i}^2 + \tilde{d}_{i,ww}\bar{i} + \tilde{P}_{i,ww}^2)(\bar{i}^2 + \tilde{d}_{i,\beta\beta}\bar{i} + \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2) - (\tilde{d}_{i,w\beta}\bar{i} + \tilde{P}_{i,w\beta}^2)(\tilde{d}_{i,\beta w}\bar{i} - \tilde{P}_{i,\beta w}^2) = 0$$

この特性方程式の根は、 $\bar{i} = \sqrt{-1}$ と書けば、減衰が小さいとき振動が生じるので

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{i}_{1,2} &= -d_{i,1} \pm i p_{i,1}' \\
 \bar{i}_{3,4} &= -d_{i,2} \pm i p_{i,2}'
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(48)$$

と置くことができる。したがって、式 (44) の解はつぎのように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 w_i &= e^{-d_{i,1}t} (A_i \sin p_{i,1}'t + B_i \cos p_{i,1}'t) \\
 &\quad + e^{-d_{i,2}t} (C_i \sin p_{i,2}'t + D_i \cos p_{i,2}'t) \\
 \beta_i &= e^{-d_{i,1}t} (E_i \sin p_{i,1}'t + F_i \cos p_{i,1}'t) \\
 &\quad + e^{-d_{i,2}t} (G_i \sin p_{i,2}'t + H_i \cos p_{i,2}'t)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(49)$$

ここに、8 つの積分定数 $A_i \sim H_i$ は \bar{i} の解 (48) を式 (47) に代入したとき、振幅 \bar{w}_i と \bar{b}_i との間で決まる 4 つの関係と、つぎの 4 つの初期条件

$$w_i(0), \dot{w}_i(0), \beta_i(0), \dot{\beta}_i(0)$$

から決定できるものである。

したがって、減衰を考えた場合の固有振動数 $f_{i,1}'(\text{or } \Pi)$ (cycle/sec) は、次式で求められる。

$$f_{i,1}'(\text{or } \Pi) = \frac{p_{i,1}'(\text{or } \Pi)}{2\pi} \dots\dots\dots(50)_1$$

しかしながら、減衰が固有振動数におよぼす影響は一般に小さいので、実際には式 (42) の解を用いてもあまり差異はないと思われる。すなわち、

$$f_{i,1}(\text{or } \Pi) = \frac{p_{i,1}(\text{or } \Pi)}{2\pi} \dots\dots\dots(50)_2$$

いずれにしても曲線桁橋では、曲げ振動とねじり振動が著しく連成して、 i 次のモードについて 2 つの振動数が存在することになる。そして、非連成振動数 $p_{i,ww}, p_{i,\beta\beta}$ と連成振動数 $p_{i,1}, p_{i,\Pi}$ との関係は、つぎのようになる。

$$p_{i,1} < p_{i,ww} < p_{i,\beta\beta} < p_{i,\Pi} \dots\dots\dots(51)$$

しかしながら、一般に振動数 $p_{i,1}$ のときの自由振動は曲げ振動が卓越し、振動数 $p_{i,\Pi}$ のときはねじり振動が卓越する。これを明確にするには、式 (47) において減衰項を無視し、 $f = ip_{i,1}$ 、または $\bar{i} = ip_{i,\Pi}$ を代入すれば、振幅比 $\bar{w}_{i,1}/\bar{b}_{i,1}$ 、または $\bar{w}_{i,\Pi}/\bar{b}_{i,\Pi}$ がわかり、けた断面がどのような振動パターンで変形するかがわかるので容易に判定できるのである¹⁰⁾。

さて減衰特性そのものの性格は、構造減衰や材料の内部摩擦などの複雑な要素が組み合わされたものであるので、理論的にまだ完全に解明されていない問題である。しかし、工学的には種々な橋梁についての減衰特性は、対数減衰率として評価されており、その取る範囲はほぼわかっている¹⁰⁾。そこで、以下では振動実験によって $p_{i,1}'$ あるいは $p_{i,\Pi}'$ の円振動数を持つ自由振動波形が得られており、この記録からそれぞれについての対数減衰率 $\mathfrak{D}_{i,1}, \mathfrak{D}_{i,\Pi}$ を読み取り決定するか、一般の橋梁について測定された資料によって推定できるとしよう。このような場合の減衰係数 $d_{i,1}, d_{i,\Pi}$ はつぎのようにして求められる。

$$d_{i,1}(\text{or } \Pi) = \frac{\mathfrak{D}_{i,1}(\text{or } \Pi) p_{i,1}'(\text{or } \Pi)}{\pi} \dots\dots\dots(52)_1$$

この値を式 (49) に代入し、さらに式 (44) に代入すれば、4 つの減衰係数 $\tilde{d}_{i,ww}, \tilde{d}_{i,\beta\beta}, \tilde{d}_{i,w\beta}, \tilde{d}_{i,\beta w}$ に関する 4 つの方程式が得られるので、これを連立させて解けばよい。

しかしながら、前述のように一般に $p_{i,1}' \neq p_{i,1}, p_{i,\Pi}' \neq p_{i,\Pi}$ と考えることができ、 $p_{i,1}$ は曲げ振動が支配的で、 $p_{i,\Pi}$ はねじり振動が支配的な円振動数であるので、近似的に対数減衰率 $\mathfrak{D}_{i,1}, \mathfrak{D}_{i,\Pi}$ を採用すると、 $d_{w,i}, d_{\beta,i}$ 値は簡単に次式で推定することができる。

$$\left. \begin{aligned} d_{i,w} &= \frac{\mathcal{D}_{i,1} p_{i,1}}{\pi} = 2 \mathcal{D}_{i,1} f_{i,1} \\ d_{i,\beta} &= \frac{\mathcal{D}_{i,2} p_{i,2}}{\pi} = 2 \mathcal{D}_{i,2} f_{i,2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(52)_2$$

この値を式 (46)_{1,2} に代入すれば、 $\tilde{d}_{i,ww}$, $\tilde{d}_{i,\beta w}$, $\tilde{d}_{i,w\beta}$, $\tilde{d}_{i,\beta\beta}$ の近似値が求められたことになる。

(2) 強制振動

強制振動についての微分方程式は、式 (44) の右辺に強制項を付加すればよい。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w}_i + \tilde{d}_{i,ww} \dot{w}_i + \tilde{\gamma}_{i,ww} w_i - \tilde{d}_{i,\beta w} \dot{\beta}_i - \tilde{\gamma}_{i,\beta w} \beta_i &= \hat{f}_i \\ \ddot{\beta}_i + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_i + \tilde{\gamma}_{i,\beta\beta} \beta_i - \tilde{d}_{i,w\beta} \dot{w}_i + \tilde{\gamma}_{i,w\beta} w_i &= \hat{r}_i \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(53)$$

ここに、強制項 \hat{f}_i , \hat{r}_i は、

$$\left. \begin{aligned} \hat{f}_i &= \frac{I_{B,i} F_i / \Omega_i(s) - Z_{B,i} \Gamma_i / \Omega_i(s)}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\ &= \frac{\Omega_i^2(s)}{m^* L_i \sum_{r=1}^n \gamma_{i,r}} \frac{I_S^* F_i / \Omega_i(s) - S_z^* \Gamma_i / \Omega_i(s)}{A_s^* I_G^*} \\ \hat{r}_i &= \frac{M_{B,i} \Gamma_i / \Omega_i(s) - Z_{B,i} F_i / \Omega_i(s)}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} \\ &= \frac{\Omega_i^2(s)}{m^* L_i \sum_{r=1}^n \gamma_{i,r}} \frac{A_s^* \Gamma_i / \Omega_i(s) - S_z^* F_i / \Omega_i(s)}{A_s^* I_G^*} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(54)_{1,2}$$

したがって、式 (53) は w_i , β_i に関する連立定微分方程式なので、式 (54)_{1,2} の中の一般力 F_i , Γ_i が与えられれば容易に解き得るものである。

そこで、2, 3 の代表的な強制振動についての一般力を示せば、以下のようである。

㊸ 突然作用する一定力

曲線桁橋右端から $s=c$ だけ離れた断面上の曲率中心より半径 R_P の点上に、一定な鉛直力 P_0 がある時刻 $t=t_0$ に突然作用する場合をまず考えよう。集中力 P_0 は、Dirac の Delta function で表わされるものであるので、一般力 F_i , Γ_i は式 (13) からただちにつきのように書くことができる。

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{R_P}{R_S} P_0 [\mathcal{Q}_i(s)]_{s=c} U(t-t_0) \\ \Gamma_i &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \gamma_P [\mathcal{Q}_i(s)]_{s=c} U(t-t_0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(55)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{w}_i(\hat{\tau}) &= \frac{\hat{f}_i(\hat{\tau}) (\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,ww} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,ww}) + \hat{r}_i(\hat{\tau}) (\tilde{d}_{i,w\beta} \hat{\tau} - \tilde{\gamma}_{i,w\beta})}{(\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,ww} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,ww}) (\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,\beta\beta}) - (\tilde{d}_{i,w\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,w\beta}) (\tilde{d}_{i,\beta w} \hat{\tau} - \tilde{\gamma}_{i,\beta w})} \\ \hat{\beta}_i(\hat{\tau}) &= \frac{\hat{r}_i(\hat{\tau}) (\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,w\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,w\beta}) + \hat{f}_i(\hat{\tau}) (\tilde{d}_{i,\beta w} \hat{\tau} - \tilde{\gamma}_{i,\beta w})}{(\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,w\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,w\beta}) (\hat{\tau}^2 + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,\beta\beta}) - (\tilde{d}_{i,w\beta} \hat{\tau} + \tilde{\gamma}_{i,w\beta}) (\tilde{d}_{i,\beta w} \hat{\tau} - \tilde{\gamma}_{i,\beta w})} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(62)$$

したがって、 $w_i(t)$, $\beta_i(t)$ の解は式 (62) を逆変換すればよい。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} w_i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \hat{w}_i(\hat{\tau}) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{t\hat{\tau}} \hat{w}_i(\hat{\tau}) d\hat{\tau} \\ \beta_i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \{ \hat{\beta}_i(\hat{\tau}) \} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{t\hat{\tau}} \hat{\beta}_i(\hat{\tau}) d\hat{\tau} \end{aligned} \right\} (63)$$

ただし、 $U(t-t_0)$ は unit step function とする。

㊹ 移動しない周期力

円振動数 ω_0 で振動する集中的な周期力 $P_0 \sin \omega_0 t$ が、断面 $s=c$ の曲率中心より R_P なる点上に作用する場合を考えよう。一般力 F_i , Γ_i は式 (13) より、

$$\left. \begin{aligned} F_i &= \frac{R_P}{R_S} P_0 [\mathcal{Q}_i(s)]_{s=c} \sin \omega_0 t \\ \Gamma_i &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \gamma_P [\mathcal{Q}_i(s)]_{s=c} \sin \omega_0 t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(56)$$

ただし、 γ_P は荷重の偏心距離で

$$\gamma_P = R_S - R_P \dots\dots\dots(57)$$

とする。

㊺ 移動する周期力

上述の荷重 $P_0 \sin \omega_0 t$ が桁端 $s=0$ から、曲率半径 R_P の線上を桁軸方向に一定の速度 V_0 で移動するときには、式 (56) において、

$$c = \frac{R_S}{R_P} V_0 t \dots\dots\dots(58)$$

と置けばよい。

㊻ 移動する一定力

㊸ 項の荷重が周期力ではなく、一定の場合には式 (56) において、

$$\sin \omega_0 t = 1 \dots\dots\dots(59)$$

にとり、そして式 (58) を用いればよい。

その他の種々な荷重状態に対しても、式 (13) より容易に一般力を求めることができる。そして、上述のような簡単な場合については、解析的にその応答を容易に求めることができる。

そこで、Laplace 変換¹⁷⁾を利用して、この問題を解くことを考えよう。いま、

$$\hat{f}(\hat{\tau}) = \mathfrak{L} f(t) = \int_0^\infty e^{-\hat{\tau}t} f(t) dt \dots\dots\dots(60)$$

と書き、初期条件を、

$$\left. \begin{aligned} w_i(0) &= \dot{w}_i(0) = 0 \\ \beta_i(0) &= \dot{\beta}_i(0) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(61)$$

と仮定すれば、式 (53) を Laplace 変換したものは以下ようになる。

このような解析的方法のほか、数値積分法や、Initial condition 法などによって解を得る方法もある。

解析的方法の簡単な例として、移動しない周期力 $P_0 \sin \omega_0 t$ が断面 $s=c$ 上のせん断中心より γ_P だけ偏心して作用するとき、桁任意点におけるたわみ $w(s, t)$,

および断面回転角 $\beta(s, t)$ の定常解を求めよう。結果は式 (60)~(63) よりつぎのように書ける。

$$\left. \begin{aligned} w(s, t) &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{\sin \omega_0(t - \varphi_{i,w})}{\sqrt{a_{i,w}^2 + b_{i,w}^2}} \\ \beta(s, t) &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{\sin \omega_0(t - \varphi_{i,\beta})}{\sqrt{a_{i,\beta}^2 + b_{i,\beta}^2}} \end{aligned} \right\} \dots\dots (64)$$

したがって、せん断中心より y だけ離れた任意点のたわみ w_y は、

$$w_y = w + y \cdot \beta \dots\dots\dots (65)_1$$

によって求めることができる。

ここに、振幅を定めるパラメーター a, b は、

$$\left. \begin{aligned} a_{i,w} &= \frac{A_i C_{i,w} + B_i D_{i,w}}{C_{i,w}^2 + D_{i,w}^2} \\ b_{i,w} &= \frac{B_i C_{i,w} - A_i D_{i,w}}{C_{i,w}^2 + D_{i,w}^2} \\ a_{i,\beta} &= \frac{A_i C_{i,\beta} + B_i D_{i,\beta}}{C_{i,\beta}^2 + D_{i,\beta}^2} \\ b_{i,\beta} &= \frac{B_i C_{i,\beta} - A_i D_{i,\beta}}{C_{i,\beta}^2 + D_{i,\beta}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (66)$$

また、 φ は位相角であり、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{i,w} &= \tan^{-1}(b_{i,w}/a_{i,w}) \\ \varphi_{i,\beta} &= \tan^{-1}(b_{i,\beta}/a_{i,\beta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (67)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} A_i &= (\tilde{P}_{i,ww}^2 - \omega_0^2)(\tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 - \omega_0^2) \\ &\quad - \omega_0^2(\tilde{d}_{i,ww}\tilde{d}_{i,\beta\beta} - \tilde{d}_{i,\beta w}\tilde{d}_{i,w\beta}) + \tilde{P}_{i,\beta w}^2 \tilde{P}_{i,w\beta}^2 \\ B_i &= \omega_0\{\tilde{d}_{i,ww}(\tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 - \omega_0^2) - \tilde{d}_{i,\beta\beta}(\tilde{P}_{i,ww}^2 - \omega_0^2) \\ &\quad + \tilde{d}_{i,\beta w}\tilde{P}_{i,w\beta}^2 - \tilde{d}_{i,w\beta}\tilde{P}_{i,\beta w}^2\} \\ C_{i,w} &= qP_{0,i}(\tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 - \omega_0^2) + \tau P_{0,i}\tilde{P}_{i,\beta w}^2 \\ D_{i,w} &= \omega_0\{qP_{0,i}\tilde{d}_{i,\beta\beta} + \tau P_{0,i}\tilde{d}_{i,\beta w}\} \\ C_{i,\beta} &= \tau P_{0,i}(\tilde{P}_{i,ww}^2 - \omega_0^2) - qP_{0,i}\tilde{P}_{i,w\beta}^2 \\ D_{i,\beta} &= \omega_0\{\tau P_{0,i}\tilde{d}_{i,ww} - qP_{0,i}\tilde{d}_{i,w\beta}\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (68)$$

そして、強制力を表わす 2 つのパラメーター $qP_0, \tau P_0$ は、次式によって算定できるものである。

$$\left. \begin{aligned} qP_{0,i} &= \frac{R_P}{R_S} \cdot \frac{I_{B,i} - Z_{B,i} Y_P}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} P_0 \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \\ &= \frac{R_P}{R_S} \cdot \frac{Q_i^2(s)}{m^* L_1 \sum_{r=1}^n V_{i,r}} \frac{I_S^* - S_z^* Y_P}{A_s^* I_G^*} P_0 \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \\ \tau P_{0,i} &= \frac{R_P}{R_S} \cdot \frac{M_{B,i} Y_P - Z_{B,i}}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} P_0 \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \\ &= \frac{R_P}{R_S} \cdot \frac{Q_i^2(s)}{m^* L_1 \sum_{r=1}^n V_{i,r}} \frac{A_s^* Y_P - S_z^*}{A_s^* I_G^*} P_0 \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)_{1,2}$$

(3) 静的荷重に対する解

簡単のために、集中荷重 P_0 が $s=c$ 断面の曲率半径 R_P の点上に静的に作用するときの変形を考えよう。この場合には、式 (28) で時間関数を無視し、 $w_i(s, t) =$

$w_{st,i}(s), \beta_i(s, t) = \beta_{st,i}(s)$ と置けば、これらの変形量に関する連立方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} K_{B,i,ww} w_{st,i} + K_{B,i,\beta w} \beta_{st,i} &= \frac{R_P}{R_S} P_0 Q_i(c) \\ K_{B,i,w\beta} w_{st,i} + K_{B,i,\beta\beta} \beta_{st,i} &= \frac{R_P}{R_S} P_0 Y_P Q_i(c) \end{aligned} \right\}$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} w_{st} &= \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{st,i} \\ &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{K_{B,i,\beta\beta} - Y_P K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \cdot \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \\ \beta_{st} &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{st,i} \\ &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{Y_P K_{B,i,ww} - K_{B,i,\beta w}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \cdot \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)_1$$

また、ある断面の任意点のたわみは

$$w_{st,y} = w_{st} + y \beta_{st} \dots\dots\dots (65)_2$$

で求めることができる。そして、このときの断面力 M_y, M_w, T_s 等はそれぞれ式 (2), (4)~(5) によって決定することができる。

ところで、式 (70)₁ は式 (45)₁ と (69)₁ を用いて書き変えらるとつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} w_{st} &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{qP_{0,i} \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 + \tau P_{0,i} \tilde{P}_{i,w\beta}^2}{P_{i,ww} P_{i,\beta\beta}^2 + P_{i,\beta w} P_{i,w\beta}^2} \\ \beta_{st} &= \sum_{i=1,2,3,\dots} \frac{\tau P_{0,i} \tilde{P}_{i,w\beta}^2 - qP_{0,i} \tilde{P}_{i,w\beta}^2}{P_{i,ww} P_{i,\beta\beta}^2 + P_{i,\beta w} P_{i,w\beta}^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (70)_2$$

これは、式 (53) で時間関数を無視したものである。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} qP_{0,i} &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \left(\frac{K_{B,i,\beta\beta} - Y_P K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,ww}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{Y_P K_{B,i,ww} - K_{B,i,\beta w}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,w\beta}^2 \right) \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \\ \tau P_{0,i} &= \frac{R_P}{R_S} P_0 \left(\frac{K_{B,i,\beta\beta} - Y_P K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,w\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{Y_P K_{B,i,ww} - K_{B,i,\beta w}}{K_{B,i,ww} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 \right) \frac{Q_i(c)}{Q_i(s)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (69)_3$$

なお、式 (64) は周期力が作用する場合の解であるが、静的荷重の場合には P_0 が一定であるので、この式に式 (59) を適用し、さらに式 (68) で $\omega_0 \rightarrow 0$ とすれば式 (70)₂ と全く同一の結果が得られることはいうまでもない。

5. 走行車による曲線桁橋の動的応答

曲線桁橋の動的応答を求める重要な問題の一つとして、走行車による動的応答がある。この問題は、自動車が一種の振動体であるので、曲線桁橋との連成振動系を考えたほうが実際的である。したがって、前節のような

解析的方法では、簡単に解けない複雑な問題である。そこで、この種の複雑な現象をできるだけ簡素化して解析するために、以下のような仮定を設ける。

まず、自動車については¹²⁾

1) 質量—スプリング系の単純な1自由度系振動体と考える。

2) しかし、自動車の全質量がばね支持されているのではなく、振動に関与する質量をばね上質量とし、路面に直接支持されている質量をばね下質量とする。

3) ばね上質量の振動には、粘性減衰が伴うものとする。

4) 一方、橋面は平滑であり、その上を移動する自動車のばね下質量は、曲線桁橋の動たわみ曲線にそってなめらかに移動するものとする。

つぎに、曲線桁橋については、

1) i 次モードについては、同一モードで曲げ振動と回転振動が連成する2自由度系振動体とみなす。

2) もちろん、粘性減衰があるものとする。

3) 桁上を走行する自動車のばね下質量は、桁の有効質量、有効回転質量に影響をおよぼすものであるが、橋長が比較的大であるとし、それらの影響は小さいものとして無視する。

4) したがって、曲線桁に作用する強制力は自動車の全重量と自動車のスプリング、およびダッシュポットの伸縮に伴う付加力の3つの作用力とする。

5) なお、連続曲線桁橋の動的レスポンスは第 r 径間に着目し、このスパン上に自動車がかかる場合の式を示したが、他のスパンに自動車が載荷する場合でも式の誘導は容易である。

(1) 自動車のモデル化

自動車は実際には複雑な振動体であるけれども、図-7に示す単純な1自由度系振動体とみなす。いま、この系において z_v を鉛直下方の変位とすれば、自由振動するときの運動方程式は周知のとおりつぎようになる。

$$M_{v,u}\ddot{z}_v + D_v\dot{z}_v + K_v z_v = 0 \quad (71)$$

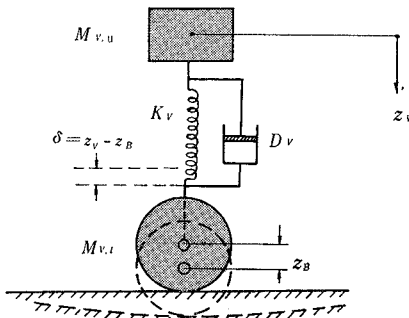


図-7 自動車の等価モデル

ここに、

$$M_v = M_{v,u} + M_{v,l} : \text{自動車の全質量} \quad (72)$$

$M_{v,u}$: ばね上質量

$M_{v,l}$: ばね下質量

K_v : ばね定数

D_v : 減衰係数

式(71)の解は、

$$z_v = e^{-n_v t} (A \sin \sqrt{p_v^2 - n_v^2} t + B \cos \sqrt{p_v^2 - n_v^2} t) \quad (73)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} p_v^2 &= K_v / M_{v,u} \\ n_v &= D_v / M_{v,u} \end{aligned} \right\} \quad (74)$$

積分定数 A, B は z_v の初期値

$$z_v(0), \dot{z}_v(0) \quad (75)$$

から決定できる。

一般に、 $p_v \gg n_v$ なので、固有振動数 f_v (cycle/sec) は、

$$f_v = p_v / 2\pi \quad (76)$$

によって求められる。しかしながら、実際に $M_{v,u}$ を直接測定して知ることは困難なので、ばね定数 K_v と固有振動数 f_v を測定して $M_{v,u}$ を逆算すればよい。また、自由振動の記録から対数減衰率 \mathcal{D}_v がわかっていると、減衰係数 $d_v = 2n_v$ は次式によって求められる。

$$d_v = D_v / M_{v,u} = \mathcal{D}_v p_v / \pi = 2 \mathcal{D}_v f_v \quad (77)$$

さて、図-7において点線で示したように、曲線桁橋が走行車によって弾性沈下したときの自動車の振動を考えよう。橋面が平滑であれば、曲線桁橋が下方に z_B だけ変位するとき、自動車のばねとダッシュポットの変位 δ は、次式で与えられる。

$$\delta = z_v - z_B \quad (78)$$

したがって、式(72)はつぎのように書き換えられる。

$$\ddot{z}_v + d_v \dot{\delta} + p_v^2 \delta = 0 \quad (79)$$

この式は、機械系でいえばカムによって振動体下端の変位 δ が与えられた1自由度系振動体の運動を表わしている。カムの形が既知ならば、式(79)は容易に解くことができる問題である。しかしながら、この場合カムに相当する曲線桁橋はもちろん振動体なので、自動車の振動は単独に解けず、桁の振動と連成した複雑な現象になることを示している。そこで、つぎに桁の振動を考えよう。

(2) 曲線桁橋と自動車の連成振動

図-8は連続曲線桁橋の第 r 径間の変形状態を示したものである。すなわち、自動車は右支点 $s_r = 0$ から $s_r = c_r$ の点に載荷しているものとする。点 j は $s_r = j_r$ だけ右支点から離れた変形を求めようとする着目点とす

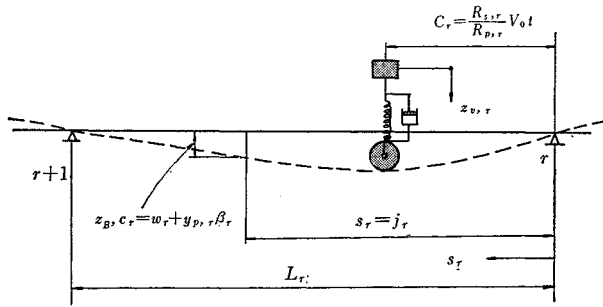


図-8 橋軸方向の変形

る。

いま、自動車がせん断中心より距離 $y_{P,r}$ だけ偏心して載荷するものとすれば、荷重点直下のたわみ $z_{B,C,r}$ は式 (6), (65)₁ を用いてつぎのように書ける。

$$z_{B,C,r} = \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,C,r}(t) + y_{P,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,C,r}(t) \\ = \sum_{i=1,2,3,\dots} W_i(t) [\varrho_{i,r}]_{s_r=C_r} \\ + y_{P,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} B_i(t) [\varrho_{i,r}]_{s_r=C_r}$$

このとき、着目点 $s_r = j_r$ のたわみ $w_{i,j_r}(t)$ および断面回転角を $\beta_{i,j_r}(t)$ と書けば、同様式 (6) を用いてつぎのように表わされる。

$$w_{i,j_r}(t) = W_i(t) [\varrho_{i,r}]_{s_r=j_r} \\ \beta_{i,j_r}(t) = B_i(t) [\varrho_{i,r}]_{s_r=j_r}$$

したがって、上の2式から時間関数 $W_i(t)$ と $B_i(t)$ を消去すれば、

$$z_{B,C,r} = \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r} \\ + y_{P,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r} \dots\dots\dots (80)$$

ここに、関数 ϑ_{i,j_r} はつぎのように置いたものである。

$$\vartheta_{i,j_r} = \frac{[\varrho_{i,r}]_{s_r=C_r}}{[\varrho_{i,r}]_{s_r=j_r}} \dots\dots\dots (81)$$

さて、自動車が曲率半径 $R_{P,r}$ の線上を一定速度 V_0 で橋軸方向に走行するときには、

$$C_r = \frac{R_{S,r}}{R_{P,r}} V_0 t \dots\dots\dots (82)$$

とおけばよい。したがって、式 (80) は式 (22), (24) の k_i 値を用いてつぎのように書ける。

$$\delta_r = z_{v,r} - \left\{ \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right. \\ \left. + y_{P,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right\} \dots\dots\dots (83)$$

ここに、

$$v_{0,i,r} = \frac{R_{S,r}}{R_{P,r}} k_i V_0 \dots\dots\dots (84)$$

つぎに、曲線桁橋に作用する強制力を求めよう。自動車のばね下質量の慣性力は路面が平滑であるとして無視すると、移動力は自動車の全重量 $M_V g$ と自動車のばねによる付加力 $K_V \delta_r$ 、およびダッシュポットによる力 $d_V \dot{\delta}_r$ の3つの力より構成されているので、鉛直強制力

P_0 はつぎのように置ける。

$$P_0 = M_V g + K_V \delta_r + d_V \dot{\delta}_r \dots\dots\dots (85)$$

これを式 (13) に代入し、式 (54) の強制項を求めれば、

$$\left. \begin{aligned} \ddot{i}_{i,r} &= q_{v,i,j_r} \left(1 + \frac{K_V}{M_V g} \delta_r + d_V \dot{\delta}_r \right) \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \\ \tau_{i,r} &= \tau_{v,i,j_r} \left(1 + \frac{K_V}{M_V g} \delta_r + d_V \dot{\delta}_r \right) \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (86)$$

ここに、 I, M, Z および K 値はすべて着目点 $s = s_r = j_r$ に関するものとすれば、

$$\left. \begin{aligned} q_{v,i,j_r} &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \frac{I_{B,i} - Z_{B,i} y_{P,r}}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} M_V g \\ &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \left(\frac{K_{B,i,\beta\beta} - y_{P,r} K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,w\beta} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,w\omega}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{y_{P,r} K_{B,i,w\omega} - K_{B,i,\beta\omega}}{K_{B,i,w\omega} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\omega}^2} \tilde{P}_{i,\beta\omega}^2 \right) M_V g \\ &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \frac{\varrho_{i,r}^2(j_r)}{m^* L_i \sum_{r=1}^n \Gamma_{i,r}} \frac{I_S^* - S_z^* y_{P,r}}{A_s^* I_G^*} M_V g \\ \tau_{v,i,j_r} &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \frac{M_{B,i} y_{P,r} - Z_{B,i}}{M_{B,i} I_{B,i} - Z_{B,i}^2} M_V g \\ &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \left(\frac{K_{B,i,\beta\beta} - y_{P,r} K_{B,i,w\beta}}{K_{B,i,w\omega} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\beta}^2} \tilde{P}_{i,w\beta}^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{y_{P,r} K_{B,i,w\omega} - K_{B,i,\beta\omega}}{K_{B,i,w\omega} K_{B,i,\beta\beta} - K_{B,i,w\omega}^2} \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 \right) M_V g \\ &= \frac{R_{P,r}}{R_{S,r}} \frac{\varrho_{i,r}^2(j_r)}{m^* L_i \sum_{r=1}^n \Gamma_{i,r}} \frac{A_s^* y_{P,r} - S_z^*}{A_s^* I_G^*} M_V g \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (87)_{1 \sim 3}$$

以上の式をまとめれば、つぎのような w, β, z, δ に関する連立微分方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \ddot{w}_{i,j_r} + \tilde{d}_{i,w\omega} \dot{w}_{i,j_r} + \tilde{P}_{i,w\omega}^2 w_{i,j_r} \\ - \tilde{d}_{i,\beta\omega} \dot{\beta}_{i,j_r} - \tilde{P}_{i,\beta\omega}^2 \beta_{i,j_r} \\ = q_{v,i,j_r} \left(1 + \frac{K_V}{M_V g} \delta_r + d_V \dot{\delta}_r \right) \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \\ \ddot{\beta}_{i,j_r} + \tilde{d}_{i,\beta\beta} \dot{\beta}_{i,j_r} + \tilde{P}_{i,\beta\beta}^2 \beta_{i,j_r} \\ - \tilde{d}_{i,w\beta} \dot{w}_{i,j_r} + \tilde{P}_{i,w\beta}^2 w_{i,j_r} \\ = \tau_{v,i,j_r} \left(1 + \frac{K_V}{M_V g} \delta_r + d_V \dot{\delta}_r \right) \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \\ (i=1, 2, 3, \dots) \\ \ddot{z}_{v,r} + d_v \dot{\delta}_r + p_v^2 \delta_r = 0 \\ \delta_r = z_{v,r} - \left\{ \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right. \\ \left. + y_{P,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,j_r} \vartheta_{i,j_r}(v_{0,i,r} t) \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (88)$$

この微分方程式は複雑であるが、初期条件

$$\left. \begin{aligned} w_{j_r}(0), \dot{w}_{j_r}(0), \beta_{j_r}(0), \dot{\beta}_{j_r}(0) \\ z_{v,r}(0), \dot{z}_{v,r}(0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (89)$$

が与えられれば、解き得るものである。そして、着目断面のせん断中心より距離 y_{j_r} だけ偏倚した任意点の動的

たわみは、次式によって求められる。

$$w_{j,r}(y_{j,r}, t) = \sum_{i=1,2,3,\dots} w_{i,j,r} + y_{j,r} \sum_{i=1,2,3,\dots} \beta_{i,j,r} \dots (90)$$

しかしながら、連立微分方程式は未知数 w, β, z および δ が複雑に連成しているため、前述の解析的方法によるのは困難である。従来より、この種の微分方程式を解く方法としては 1) デジタル計算機の助けをかりた数値積分法、(2) アナログ計算機を用いて直接解く方法があるが、今回は 1) の方法で 2, 3 の数値計算を行なう。

6. 数値計算例

連立微分方程式 (88) を式 (89) の初期条件のもとで解く数値積分法の代表的なものとしては、1) Runge-Kutta-Gill の方法、2) Newmark の β 法などがあげられるが、本文では 1) の方法によって曲線桁橋上を自動

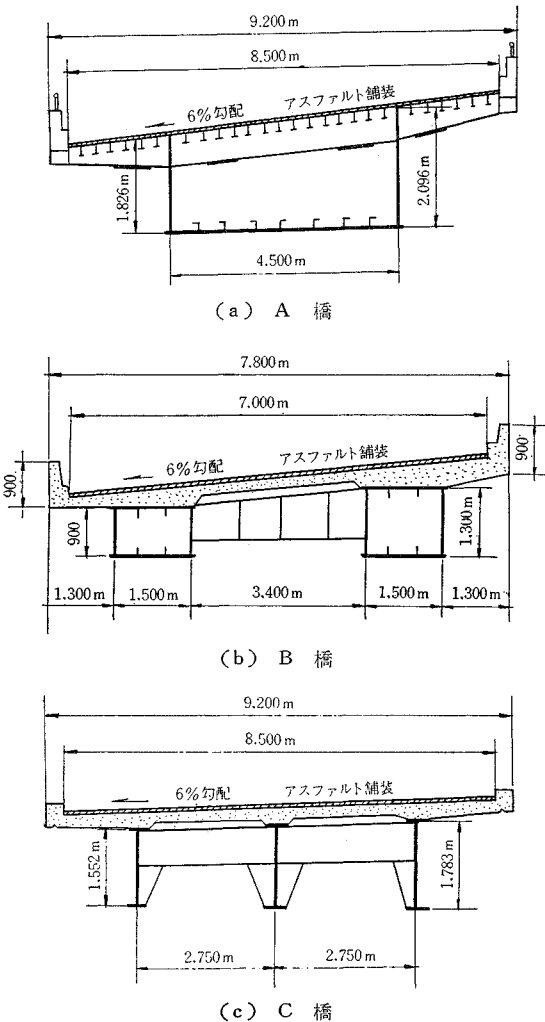


図-9 代表的な曲線桁橋断面

表-1 断面諸量

断面諸量	A 橋	B 橋*	C 橋*
L: スパン (m)	32.0	30.0	20.0
R _S : 曲率半径 (m)	50.0	40.0	50.0
A _s *: ×10 ³ (cm ²)	6.330	12.71	9.674
S _a *: ×10 ⁵ (cm ³)	1.407	5.353	4.452
I _y '*: ×10 ⁷ (cm ⁴)	1.543	1.383	1.057
I _S *: ×10 ⁸ (cm ⁴)	1.147	4.220	2.086
J*: ×10 ⁵ (cm ⁴)	273.3	99.90	2.173
C _m *: ×10 ¹⁰ (cm ⁶)	4.942	82.14	61.70

($m^* = 8.010 \times 10^{-6}$, $E_S = 2.1 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $G = 8.1 \times 10^3 \text{ kg/cm}^2$)

* 合成桁橋として断面定数を算定

車が通過する際の動的応答を、図-9 に示す 3 橋 (いずれも単純曲線桁橋) について計算しよう。表-1 にこれらの曲線桁橋の断面定数を示す。

計算は 1 次のモードのみを考慮して行なったが、表-2 に基本の固有振動数を示す。また、曲線桁橋の対数減衰率を調べた実験はほとんどないので、直線桁橋の実験データから類推して、今回は対数減衰率を 3 橋すべてに対し、

$$\mathfrak{D}_B = 0.1$$

にとって計算する。

表-2 基本固有振動数 (c/s)

橋	A	B	C
$f_{1,r}$	3.61	2.62	6.45
$f_{1,u}$	25.17	9.81	11.93

つぎに、自動車の全

表-3 自動車の振動特性

重量は 20 t とする。そして、振動特性は表-3 のように定めた。これらの値はいずれも

固有振動数: f_0 (c/s)	2.5
対数減衰率: \mathfrak{D}_V	0.2
ばね定数: K_V (t/cm)	2.5
初期変位: $z(0)$ (cm)*	1.2

* 鉛直加速度に換算すると 0.3g になる

実際的な値である¹⁸⁾。

これらの自動車が $V = 40 \text{ km/h}$ の速度で、道路中心より 3.0 m 外側 (外桁) 走行する場合と、3.0 m 内側 (内桁) 走行する場合について 3 橋の動的応答を求めたものを図-10~12 に示す。

パラメーターを種々変化させた場合の応答も同様に求められるが、動的応答を左右する重要なパラメーターは下記のものであると思われる。

(1) 曲線桁橋の固有振動数 (スパン, 曲率半径, 断面定数の関数として)

(2) 自動車の固有振動数, 対数減衰率, 初期変位, 走行速度

(3) このほかに、曲率方向の走行位置

これらのパラメーターに対する応答の定量的な解析が必要であり、現在種々なパラメーターによる影響を計算中であるので、その差異がわかり次第報告する予定である。

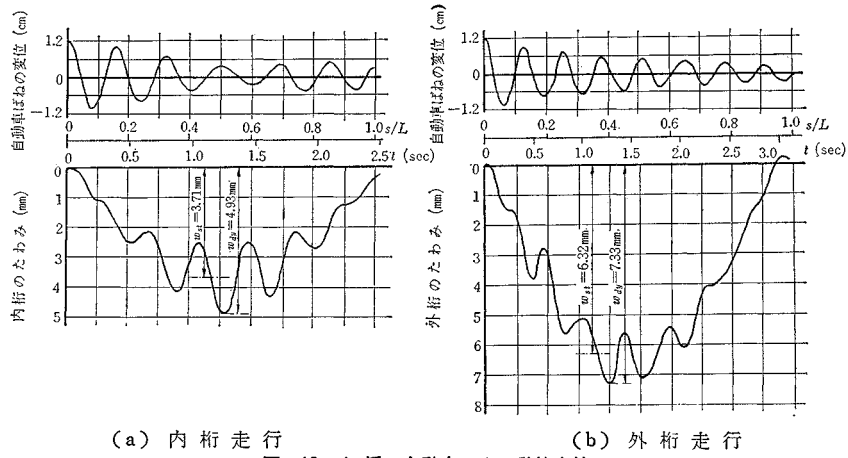


図-10 A橋の自動車による動的応答

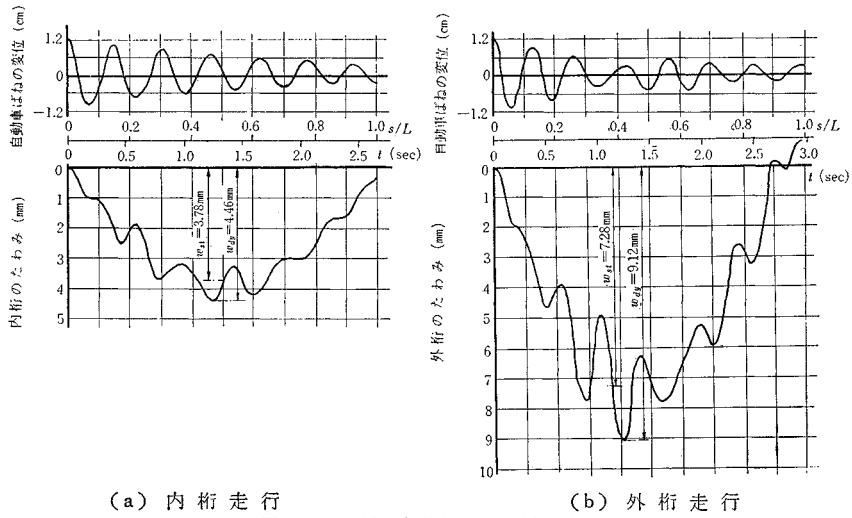


図-11 B橋の自動車による動的応答

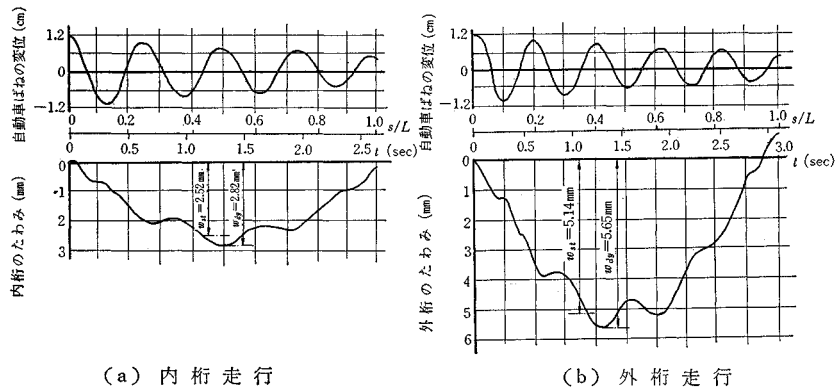


図-12 C橋の自動車による動的応答

7. 結 言

本文の目的は、曲線桁橋の動的応答を求める基礎的研究にあるので、おもに理論的解析に止めた。

解析は、Lagrange の運動方程式をもとに行なった。しかし、曲線桁橋の振動解析を行なうに当りぜひ必要な基礎的諸量、すなわち、

- 1) 曲線桁橋の有効質量
- 2) 曲線桁橋の換算ばね定数
- 3) 曲線桁橋の減衰係数

について定義し、これらを用いて曲げとねじりの連成振動を与える基礎運動方程式を与えた。

つぎに、曲線桁橋の動的応答の基本的なものとして

- 4) 減衰を伴う自由振動
- 5) 種々な起振力による強制振動

についての動的解析方法を明らかにした。

さらに、

- 6) 走行車による動的応答

を求める基礎微分方程式を与えた。最後に、走行車による単純曲線桁橋の応答性状を数値計算例によって示した。なお、種々なパラメーターによる曲線桁橋の応答の変化や、実験的研究などの詳細については別紙にゆずることとする。

最後に、本研究を遂行するに当り、大阪市立大学教授 故橋 善雄博士より賜った生前の絶大なるご支援に心より感謝の意を表するとともに、先生のご冥福をお祈り申し上げる次第である。また、数値計算は大阪市立大学工学部橋梁研究室助手 事口寿男君の協力によって得られたものであることを付記し、感謝の意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 小松定夫：曲線並列桁橋の 実用計算式，土木学会論文集 93 号，昭 38.5，pp. 1~7.
- 2) 島田静雄・倉西 茂：曲り梁の計算式，技報堂，昭 41.
- 3) 渡辺 昇：曲線げたの理論と計算，技報堂，昭 42.
- 4) 深沢泰晴：せん断中心軸の不連続性を考慮した変断面薄肉曲線桁の解析法，第 14 回橋梁・構造工学研究発表会，昭 42.12，pp. 123~138.
- 5) Love A.E.H.: Mathematical Theory of Elasticity., 4th Ed., 1927.
- 6) Timoshenko S.P.: Vibration Problem in Engineering., 3rd Ed., 1955.
- 7) Yonezawa H.: Moments and Free Vibration in Curved Girder Bridge., Proc. of A.S.C.E., EM 1, Feb. 1962, pp. 1~21.
- 8) 平井 敦・深沢泰晴：曲線橋の振動問題の解析，第 19 回土木学会年次学術講演会講演概要，昭 39.5，I-65.
- 9) Tan C.P., Shore S.: Dynamic Response of Horizontally Curved Bridge., Proce. of A.S.C.E., ST 3, March 1968, pp. 761.
- 10) 小松定夫，中井 博：曲線げた橋の自由振動に関する研究，土木学会論文集 136 号，昭 41.12.
- 11) 山田善一：橋梁の衝撃，土木構造物の振動と安全性に関する講習会，土木学会関西支部，昭 41.5.
- 12) Norris, Hansen, Holley, Biggs, Namyet, Minami: Structural Design for Dynamic Loads. 1959. Mc-Graw-Hill. Book Co.
- 13) Tan C.P., Shore S.: Response of Horizontally Cured Bridge to Moving Load., Proce. of A.S.C.E., ST 9 Sept. 1968.
- 14) Barker J.R.: Mechanical and Electrical Vibration. 1964 John-Wiley & Sons. Inc.
- 15) 小西一郎・小松定夫：ゲルパー梁の振動性状について，土木学会誌，昭 28.9，pp. 407~412.
- 16) 伊藤 学・片山恒夫：橋梁構造物の振動減衰，土木学会論文集 117 号.
- 17) Thomson W.T.: Laplace Transformation. 2nd Ed. Maruzen Asia Ed.
- 18) Harris C.M., Crede C.E.; Shock and Vibration Hand-Book Vol. 3.

(1969.5.21・受付)