

相関解析手法による構造物の振動解析

AN APPLICATION OF CORRELATION TECHNIQUES TO THE DYNAMIC MEASUREMENTS OF STRUCTURES

島 田 静 雄*

By Shizuo Shimada

1. はじめに

橋梁などを始めとして、建築物やダムなどの構造物の振動性状を知るための実験の多くは、構造物の固有振動数や減衰率などを求めることに重要な意味を持っている。従来、この種の実験は、加速度計、速度計などのピックアップで計測された振動記録をオシログラフに描かせ、波形の最高値の読取り、振動数の読取りなどを行っていた。

振動の記録を分析すれば、たとえばスペクトル分析などを行えば有意義な解析結果が得られる、ということは以前から知られていただけで、とうてい実用になる手法ではなかった。その理由は、数値計算の労力が大きくて、つぎからつぎに得られる振動記録を処理するのに適さなかったからである。

しかしながら、ここ数年の電子技術（エレクトロニクス）の急速な発展と、電子計算機の普及とによって、従来は実用上不可能と考えていたデータ処理方法も可能となって来た。それと同時に、全く新しい解析方法も開発されるようになった。相関解析もこの新しい解析方法の 1 種であってこのような背景をもとに、構造物の振動解析の研究も新しい段階を迎えることになった。

振動解析には高額な設備投資が必要である。相関解析を行なうには、それに適した計測システムが必要であるが、概して電子機器は高価である。そのため、解析に関する研究も思うにまかせなかったのであるが、最近では便利で使いやすい電子機器が豊富に出まわるようになり、経済的な面においても手の届く範囲になって来た。

筆者は、数年前から計測法および解析方法に関して研究するとともに、設備の充実を計画して来た。最近になって、曲がりになりにも測定から解析に至る一連のシステムが軌道に乗るようになり、いくつかの橋梁の振動実

験も処理して来た。この報文は、相関解析手法を応用した振動解析の具体的な事例を紹介し、解析における実践的な問題点のいくつかを論じてみたいと思い、まとめたものである。

2. 相関解析の具体的な応用例

説明の都合上、相関解析を応用した橋梁の振動解析の実例をまず始めに示すことにする。橋梁の場合、従来通り、固有振動数と減衰率とが知れば振動実験の目的がほぼ達せられるから、相関解析の応用としては最も簡単な部類に属している。

振動の測定はきわめて簡単である。適当な感度の加速度計、もしくは速度計を使い、橋梁の振動をテープレコーダに記録する。記録の長さは約 30 秒もあれば十分であり、加振は適当で良い。ということは、橋梁上を車両が進行している状態でも良い。得られる振動記録は従来の概念からすれば、乱雑な波形であるが、相関解析に使用するには乱雑な波形であるほど、良いデータとなる。

テープレコーダに記録された振動記録は、いわゆるアナログ量である。これを実験室に持ち帰り、もう一度再現させる。テープレコーダは早まわして現象を早くもできるし、1 秒を 1 分間に引伸ばして再現させることもできる。これをいったんディジタル プリントを通して一定時間間隔の波高値として数値化させる。このデータを I.B.M. カードに穿孔させ、東大の計算センターに送って自己相関関数およびパワー スペクトル 関数を数値計算し、これをグラフに描いてデータの処理は終る（図-1）。

得られた自己相関関数のグラフから、そのまま橋梁の固有振動数と減衰率とを求めることができる。自己相関関数は、その性質が単位の衝撃を構造物に作用させた時の応答に近似するからである。また、自己相関関数のフーリエ解析で得られるパワー スペクトル 関数より、

* 正会員 工博 名古屋大学助教授 工学部土木工学科

吊橋やアーチ橋などでは1次振動数とともに2次振動数も正確に計算できることがわかる(図-2~図-7)。

固有振動数と減衰率とを求めるだけならば、従来のような解析方法でも不可能ではないのであるが、ちょうど橋梁上に通行車両がなく、適当な加振設備によって自由振動を起振させる必要があった。このような注意のもとに実験を行なっても、得られた波形が乱雑であれば失敗である。大橋梁は起振に困ると、通行する車両を途絶さ

せるという処置は供用さたれている橋梁の調査には適さない。

相関解析を前提とする場合には、測定時のこのような考慮はいっさい必要としない。構造物が振動しなければ困るから、適当に通行車両があった方がよい。大橋梁の場合には、基礎の地盤自身の常時微動しているし、普通わずかの運動をしているから、これを測定すればすむ。しかし計測機器は感度の高いものが必要となるのはやむを得ない。計測機器に関する問題点は5.において触れることにし、次に相関解析されたデータを判断するのに必要な数学的な概念について簡単に説明する。

3. 相関分析の数学的手法

相関関数について説明した参考書は少なくないから、ここでは相関関数を利用する立場で、必要最小限の数学的手法を述べることにしたい。

時間的に変動する2つの記録 $k(t)$, $g(t)$ があって、互いに何かの関連を持つことを数量的に与えたい。これを相関係数という数理統計的な概念で与えるのである。係数が1(もしくは-1)のときには全く相似な現象であり、係数が0であるときに無関係な現象であると判断しようとするのである。基本的な表現式は、2つの波形の積の値の時間平均値を求めることで与えられる。

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T k(t)g(t)dt \dots (1)$$

$k(t)$ と $g(t)$ とが全く相似であると

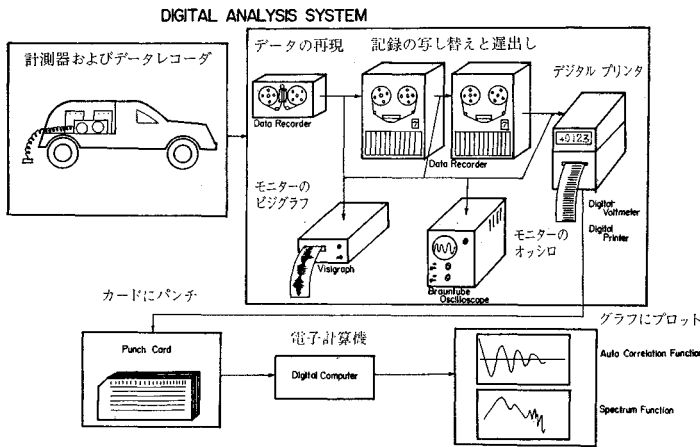


図-1

東名高速道路浜名湖橋
2径間連続箱桁
支間中央
速度計記録

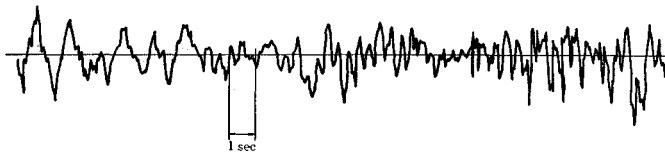


図-2 東名高速道路浜名湖橋振動記録の一例

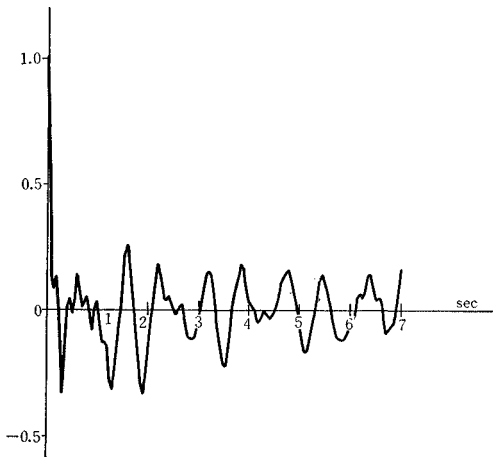


図-3 浜名湖橋振動記録の自己相関関数

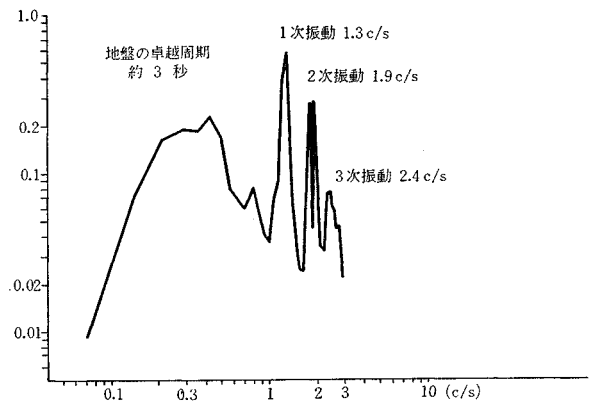


図-4 浜名湖橋振動測定のスเปクトル

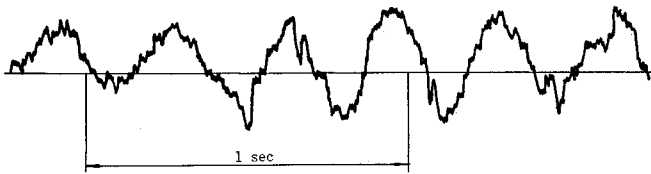


図-5 パイプ アーチ橋の振動記録の一例

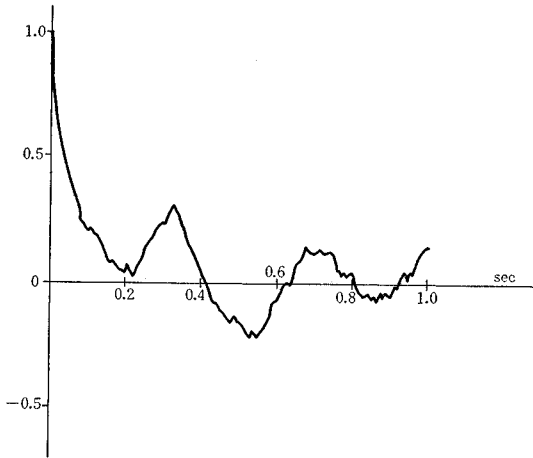


図-6 パイプ アーチ橋振動の自己相関関数

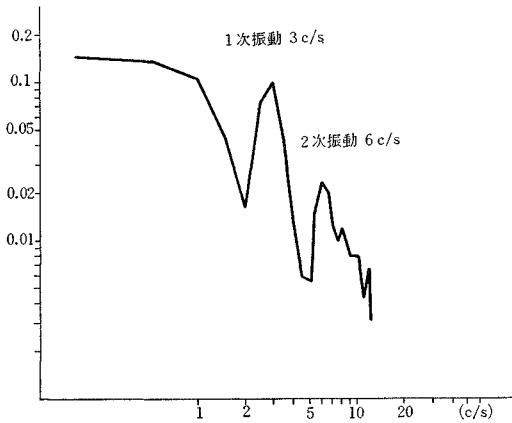


図-7 パイプ アーチ橋のスペクトル

きに $A=1$ となるためには $k(t), g(t)$ それぞれの自乗平均値のルートで除す必要があるが、概念的には式 (1) の考え方で良い。この式において、もし $g(t)$ の方に正弦関数を代入した形を考えて見よう。

$$A = \frac{1}{T} \int_0^T k(t) \sin \omega t \, dt \dots\dots\dots (2)$$

これはごく普通にでて来るフーリエ積分の形であって、 A はフーリエ係数の意味を持っている。 A を求める解析はフーリエ解析であるが、考えようによっては、 $k(t)$ が $\sin \omega t$ とどの程度の関連を持つかの相関解析である。相関の相手の関数の選び方によって種々の解析手段があるが、良く使われるのは同じ関数 $k(t)$ で、時間

差 τ だけずれた波形 $k(t+\tau)$ との相関を求めた値である (図-8)。

$$C(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T k(t)k(t+\tau)dt \dots (3)$$

$C(\tau)$ のことを自己相関関数といい、時間差 τ だけの関数で与えられる。この自己相関関数がどのような力学的意味を持つかを簡単に説明することはむずかしいが、要するに元の波形 $k(t)$ の形では判然としない周期性とランダム性が直観的にわかる。また、元の波形のフーリエ解析は著しく困難であるが、自己相関関数の余弦変換から、エネルギー スペクトル関数が容易に計算できることである。パワー (エネルギー) スペクトル関数の式は、

$$p(f) = 2 \int_0^{\infty} C(\tau) \cos 2\pi f \tau \, d\tau \dots\dots\dots (4)$$

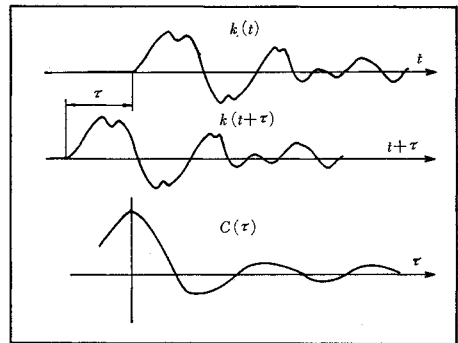


図-8

さて、構造物の振動を解析したいのであるが、その前に、構造物の振動系としての性質とは何かを吟味しなくてはならない。普通は第1次の固有振動の振動数と、減衰率とが与えられれば十分であるとされている。これは、その構造物を減衰のある一質点の振動系とおきかえて考えることを意味している。この場合の基本式は、

$$\ddot{Y} + 2h\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = X \dots\dots\dots (5)$$

いま、 $t=0$ において、微小な短時間に、ディラックのデルタの関数で与えられるような単位の衝撃が作用したとして、

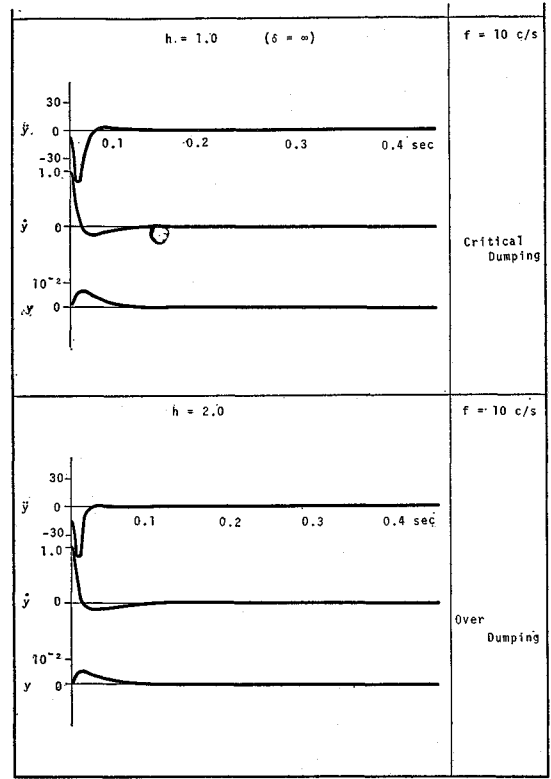
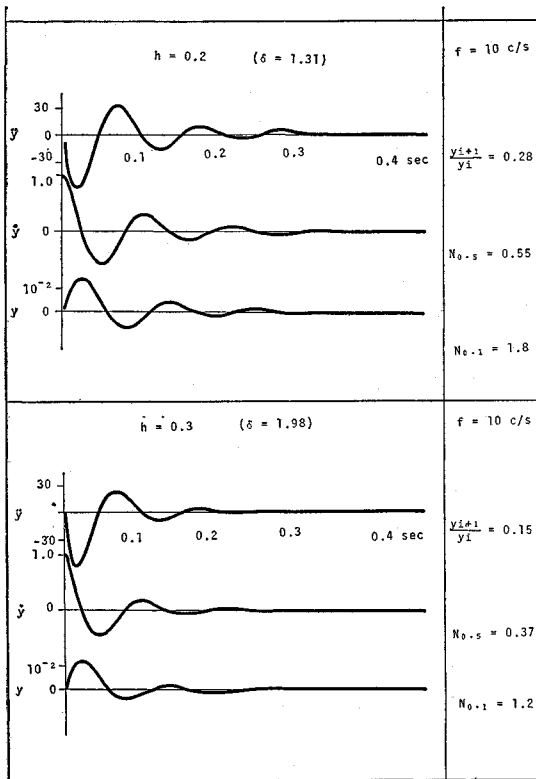
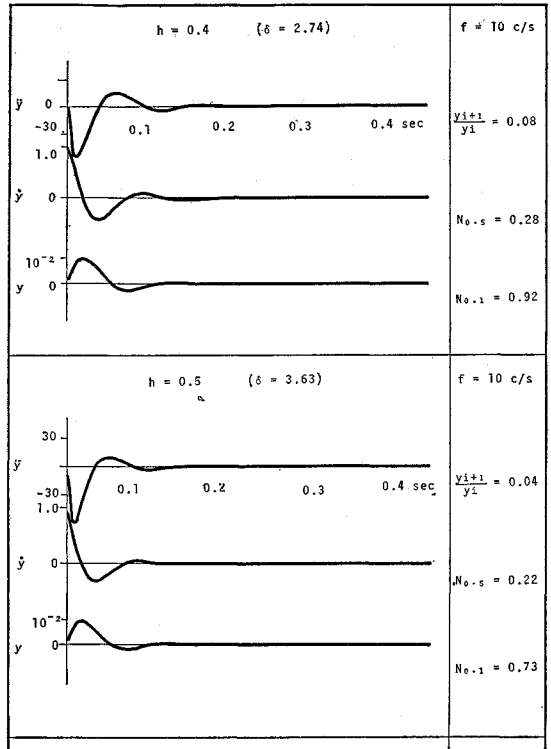
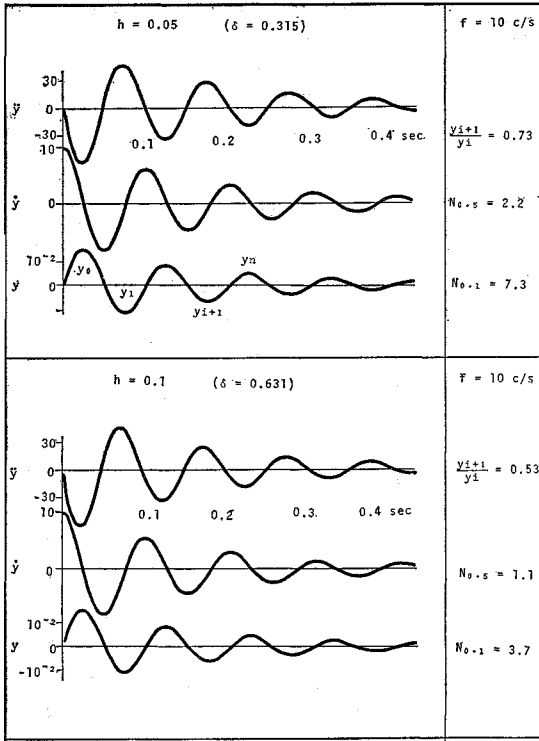
$$X = 1 \times \delta(t) \dots\dots\dots (6)$$

の強制力が加わり、そのときの応答が、

$$\left. \begin{aligned} Y &= k(t-0) = Ae^{-\lambda t} e^{i(\omega t + \beta)} \\ \omega &= \omega_0 \sqrt{1-h^2} \\ \lambda &= h\omega_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

と書くことにしよう。そのグラフを図-9に示しておく。すると、任意の外力 $X(t)$ が作用したときの強制振動解は、つぎの畳込み積分で与えられる。

$$Y(t) = \int_{-\infty}^t X(\tau)k(t-\tau)d\tau \dots\dots\dots (8)$$



式 (8) の力学的意味は、過去に与えられたすべての原因の重ね合わせが現在の運動を定めることである。あまり古い過去は現在まで影響がない。その性質は応答関数 $k(t)$ の性質だけに関係している。式 (8) は、数学的には全く同義のつぎの形で書ける。

$$Y(t) = \int_0^{\infty} k(\tau) X(t-\tau) d\tau \dots\dots\dots(9)$$

さて、構造物の振動の測定は、 $Y(t)$ (もしくは速度、加速度などでも) が記録され、その値からいわば $k(t)$ の形を定めるわけである。もし外力 $X(t)$ の形が乱雑であれば、 $Y(t)$ の記録が乱雑になるから、振動実験は $X(t)$ のきれいな形の場合だけに限られていた。すなわち、単発的なパルス状の衝撃、もしくは正弦波状の外力を起振機などで起こさせた。

ところで、式 (9) の自己相関関数を求めると、その形はつぎのようにも書ける。

$$C_{YY}(\tau) \propto \int_{-\infty}^{\infty} C_{kk}(t) C_{XX}(\tau-t) dt \dots\dots\dots(10)$$

ただし、 C_{YY} 、 C_{kk} 、 C_{XX} は、それぞれ $Y(t)$ 、 $k(t)$ 、 $X(t)$ の自己相関関数であるとする。 C_{YY} は実際に測定されたデータから計算できるものであるが、 C_{kk} 、 C_{XX} は不明である。しかし、もし入力的外力 $X(t)$ が乱雑な外力であればあるほど、 C_{YY} と C_{kk} は近似して来る。いいかえれば、乱雑な振動記録であるほど、構造物の特性を知るのに適していることになる。つまりこの性質を応用して構造物の振動解析を行なうわけである。

測定値を解析するには、理論的にきれいな形のデータを数多く作っておき、これとの比較によって最も近似の良いものを探すが実用的となる。まず式 (5) の減衰のある一質点振動系の場合には、 $k(t)$ の自己相関関数が、

$$C_{kk}(\tau) = \left[\cos \omega\tau + \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega\tau \right] e^{-\lambda\tau}, (\tau > 0) \dots\dots\dots(11)$$

の形で与えられる。ただし、 $C(0)=1$ となるように係数を定めてある。この関数の形は、 $\tau=0$ の付近の位相角を別にすれば、もとの単位衝撃応答関数 $k(t)$ と相似である。

ところで、構造物の振動測定は変位の測定よりも、むしろ速度や加速度で測定されることが多い。この意味で応答関数 $k(t)$ の t に関する1階微分および2階微分の曲線について自己相関関数を計算して比較するのも良い。その形は、同じく $\tau=0$ において $C=1$ となるように係数を定めた形では、

$$C_{\dot{k}\dot{k}}(\tau) = \left[\cos \omega\tau - \frac{\lambda}{\omega} \sin \omega\tau \right] e^{-\lambda\tau}, (\tau > 0) \dots\dots\dots(12)$$

$$C_{\ddot{k}\ddot{k}}(\tau) = \left[\cos \omega\tau - \frac{\lambda}{\omega} \cdot \frac{3\lambda^2 - \omega^2}{5\lambda^2 + \omega^2} \sin \omega\tau \right] e^{-\lambda\tau}, (\tau > 0) \dots\dots\dots(13)$$

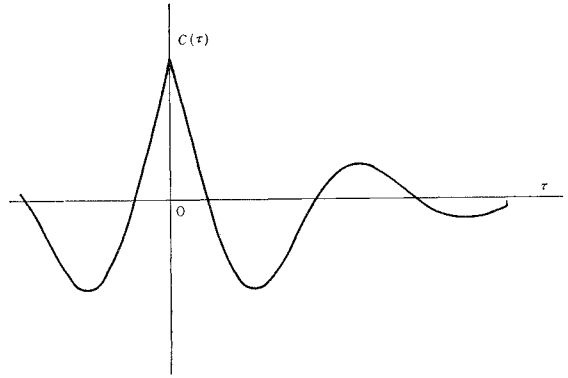


図-10

この自己相関関数は $\tau=0$ における微係数が負になるので、相関関数のグラフは、 $\tau=0$ において、鋭角の山を示すことになる (図-10)。

さて、自己相関関数を求めれば、構造物の振動の性質がある程度わかるが、スペクトルを計算すればさらに良くわかる。というのは、データの解析には必ず雑音をひろうから、測定値からの自己相関関数には雑音が入っていて、これを分離するにはスペクトル分布を計算するのが次善の方策になるからである。

まず、式 (11)、(12)、(13) の自己相関関数のグラフから、式 (4) によってパワー スペクトル関数を求めるとどうなるかを示すと、これらはそれぞれつぎのように得られる。

$$P_k = \frac{4h}{\omega_0} \cdot \frac{1}{(1-x^2)^2 + 4h^2x^2} = \frac{4h}{\omega_0} S_1^2(x) \dots\dots(14)$$

$$P_{\dot{k}} = \frac{4h}{\omega_0} \cdot \frac{x^2}{(1-x^2)^2 + 4h^2x^2} = \frac{4h}{\omega_0} S_2^2(x) \dots\dots(15)$$

$$P_{\ddot{k}} = \frac{4h}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1+4h^2} \cdot \frac{1+4h^2x^2}{(1-x^2)^2 + 4h^2x^2} = \frac{4h}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1+4h^2} \cdot S_6^2(x) \dots\dots\dots(16)$$

ただし、

$$x = 2\pi f / \omega_0 \dots\dots\dots(17)$$

さて、式 (14)、(15)、(16) は一質点系の非減衰時の固有振動数 $\omega_0/2\pi$ で周波数 f を除した無次元のパラメータ x の関数になっている。したがって、 x 軸および P 軸をそれぞれ両対数軸に取ってグラフを描けば、減衰定数 h の等しい振動系は相似のグラフになる。いいかえれば、式 (14)、(15)、(16) で示される $S_1(x)$ 、 $S_2(x)$ 、 $S_6(x)$ のグラフ (もしくはその2乗の値) を作っておき、測定されたデータの相関分析でパワー スペクトルを計算し、比較すれば良いことになる。

$S_1(x)$ 、 $S_2(x)$ 、 $S_6(x)$ のグラフは、図-16~25 に示しておいた。実は、この関数は、パワー スペクトルの計算で始めて得られるものではなく、式 (5) において、外力が正弦波形で出力が同じく正弦波であるときの

応答倍率を計算することが得られるものである。すなわち外力として

$$X=1 \times e^{i2\pi f t} \dots \dots \dots (18)$$

のとき、応答が、

$$Y = \frac{1}{\omega_0^2} S_1(x) e^{i2\pi f t + i\beta} \dots \dots \dots (19)$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{\omega_0} S_2(x) e^{i2\pi f t + i\beta} \dots \dots \dots (20)$$

の形になる場合の特性曲線に等しい。 $S_0(x)$ は強制振動が質点に直接作用しない場合の加速度応答に根拠を持つ関数である。これは後の節でまた説明する。

さて、この節の総論としていえることは、構造物の振動の測定が行なわれ、その記録をまず自己相関関数に現わせれば、それだけで大体の振動の性質がわかり、さらにパワー スペクトルを求めれば、これがその構造物の応答特性になるということである。

4. 数値計算における問題点

構造物の振動記録を相関分析する場合の具体的な数値計算は、できるだけ少ない労力で精度の上がるものが望ましい。しかし、この計算は真値があってそれを追究するという種類のものではない。確率論的に構造物の振動の性質が導きだせればそれでよしとするわけである。そのためには、測定の記録を取る段階から考えなければならない。

まず、振動の記録の長さをいくら取れば良いかである。これは、その構造物の減衰率と密接に関係する。式(7)の単位衝撃応答 $k(t)$ において、 $k(t) \approx 0$ とおけるのに最少限 T_1 秒かかるとすれば、自己相関関数の時間差を最大この T_1 秒に取る必要がある。とすれば、減衰率の低い橋梁などの構造物は長くなり、地盤のような場合には短くて良い。しかし、減衰率の低い構造物では、自己相関関数を求めれば、固有振動数と減衰率を求めることができ、パワー スペクトルまで計算する必要もないことが多い。経験的な値として、この時間 T_1 は 3~6 秒に選んでいる。

データの全長は T_1 の 5~10 倍以上が良いが、実用的には約 30 秒を目安としている。すなわち、振動記録の場合、30 秒単位でテープに記録する。

つぎに、一定の時間間隔でデータを読取るが、その時間間隔 Δt は 1/200~1/100 秒程度である。構造物の振動数は早いもので大体 50 ヘルツ程度であるから、その 2~4 倍の 100~200 分の 1 秒程度でサンプルすることを考える。すなわち、30 秒のデータは、総数約 3 000~6 000 個のデジタル値として計算されることになる。

このように計算の処理方法を限定しているのは、つぎからつぎに測定されるデータを同一のデジタル計算の

プログラムで流し、多くの資料を得るためである。計算のプロセスがいずれが最善であるかの結論はまだ出ていない。

数値計算において、データのサンプル方法の選定も問題であるが、データそのものの測定方法にも問題点が多い。経験的には加速度記録よりも速度記録の方が高周波分が少なくサンプルに適している。加速度計は音声周波数をより強く感受するので、得られた記録からいったん帯域フィルターを通し、高周波分を除くことも良い方法である。また、加速度記録を積分して速度記録に直してサンプルするのも良い方法である。この方法には振動台の入力に加速度記録を入れて運転させ、速度型のピックアップで振動を取り直すことも行なわれる。

現場において測定されたデータを研究室に持帰って再現する際、計測器の発生する種々の雑音も問題である。これは、測定の際にいったんダミーを接続して、系全体の雑音特性をスペクトルに取り、測定データのスペクトルから引くことで処理される。

このように、数値計算には測定のシステム全体の総合された特性が反映するので、相関分析の判断は多分に経験的な知識が必要とされると思われ今後この種の知識の蓄積に努力する予定である。

5. 計測設備とその問題点

現在のエレクトロニクス時代においては、技術的な意味で考えた理想や夢は、費用と時間さえかければ実現できる時代になった。またその費用も経済的に手の届く範囲に近づいているし、時間も短縮されている。たとえば電子計算機も 10 年前に話に聞く程度で、その恩恵に浴することはできなかったが、もはや卓上の事務器になるのも近くなっている。

このような背景であるから、計測技術についても、10 年前の知識は常識としては古いし、同じように見える測定機器も、内容的には全く変革していることが多い。進歩が早いのもよし悪しであって、高価な電子機器が、2~3 年で旧式化してしまうのはやり切れない。大学においては耐用年数を比較的長く見積るから、購入計画を失敗すると仕末に困る。このため、計測機器の計画は十分に仕様を吟味して全体として一貫した方針を持たせることが必要となるのである。

一つの理想の形として考えられる計測および解析のシステムを、図-11 のブロック図で示すことにしよう。このデータ処理のシステムはいくつかの点で特徴がある。

(i) 測定点はストレインメータの測定器とスイッチングユニットを基本に考えたこと。

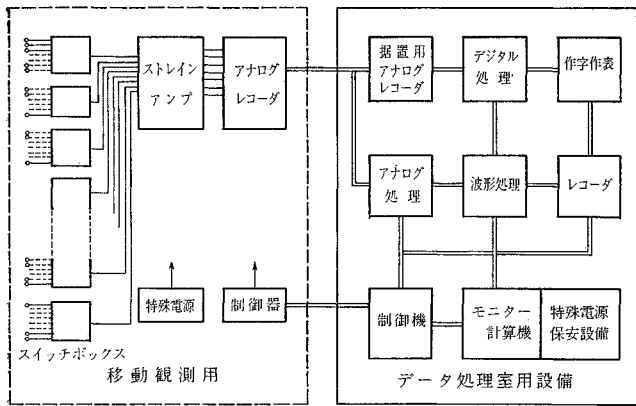


図-11 ストレインメータのデータ処理システム

- (ii) データはいったんデータレコーダに記録させることを考えたこと。
- (iii) 応力測定は通常野外に出ることを考えていること。そのため、データ処理は研究室に帰ってから行なうこと。
- (iv) データ処理にはアナログ処理とデジタル処理とがほぼ同価値に考慮されなければならないこと。などである。

このデータ処理システムを具体的に実現させるには、種々の吟味が必要である。たとえば、データの受け渡しの際の入出力インピーダンスの整合とか、コネクタの仕様の統一などがあるが、さらに重要なことはシステム全体の機能に合った仕様を定めることである。たとえば、ストレインメータの計測システムについて説明しよう。

まず、普通には抵抗線ひずみゲージを使用するストレインメータには、静的測定用と動的測定用と2つの区別があるが、静的、動的の区別で2種の計測器を使用することは不都合である。すなわち、ストレインメータは静的にも動的にも使用できるものでなければならない。この目的には、通常は動的のストレインアンプが使われる。また、多くの測定点を同時に計測するには、測点数とほぼ同数のアンプが必要である。ところで、測点数の増加とともに、ブリッジに加える交流の搬送波の干渉などが問題となって来る。

筆者の研究室では、このような点を考慮して、ブリッジ電源を3Vの電池電源とした12成分のストレインアンプを試作したし、また静的測定、動的測定の両方に使用できるスイッチングユニットも試作した。このようなストレインアンプが可能となったのは、ひとえにトランジスタ化された最近の電子技術の恩恵であって、真空管を基調にして考えられた従来のストレインメータでは実用にならなかったことである。

全部が電池で作動するストレインアンプは、結果と

して著しく低雑音であり、また交流搬送波の干渉の影響がないためバランスが取りやすく、測定用に改造した自動車に載せてどこにでも移動ができる機動性も発揮できることになった(図-1)。

振動測定には従来必ずオシログラフが使用された。ところが、計測用のデータレコーダの進歩によって、オシログラフは必ずしも必需品ではなくなった。振動現象をいったんテープレコーダに記録しておけば、任意に再現できるから、再現するときにグラフを描けば良いからである。実はデータレコーダの開発もここ数年の進歩であって、

つい最近まではカーブリーダーの要求が真剣に考えられていた。これは、いったんオシログラフで描かれたグラフから、再び電気的信号として現象を再現させることであって、データ処理としては全くの二度手間になる。これがデータレコーダの進歩によってカーブリーダーの要求は消滅してしまった。

データレコーダも、記録した現象を早出ししたり、または遅く再現することができるようになったのも最近であり、同時に数成分の記録が可能になったのも同じく古い話ではない。

グラフの読取りおよび数値化、得られた数値の種々の計算、計算されたグラフを再び図表化させる、という一連のデータ処理は、アナログ計算とデジタル計算とが密接に結びつかなければならない。この意味で電子計算機が実験室の設備となるのは時間の問題であると考えられる。

このように、データ処理に高度の電子機器を投入するとなると、振動測定や応力測定はこのような設備を持つ特定の研究機関に集中せざるを得なくなると思われる。もし、一通りの設備を揃えらるとなると現状では数千万円の投資が必要になるであろうし、これらの機器の維持運転の技術者を養成することも重要な課題になるであろう。

6. 構造物の耐震設計における応用

構造物の耐震設計の考え方には種々の方法があるが、その問題点は2つある。その1つは地盤を含めて、構造物をどのような振動系と考えるかということと、もう1つは、強制振動の外力である地震力をどのように与えるかである。この2つが与えられれば、強制振動を受ける振動系の応答は計算できるからである。

まず地震力の考え方であるが、金井博士の研究に多くの示唆を受けることができる。それによると、地表の影

響を受けない地震動の波形のスペクトル（フーリエスペクトルであって、エネルギー スペクトルではない）は、その速度スペクトルがほぼ一定になるというものである。その強さは、地震の規模をマグニチュード M で与え、震央から観測点までの距離 x km との関数で次式である。

$$V = 10^{0.61M - 1.73 \log x - 0.67} \text{ (cm/sec)} \dots\dots\dots (21)$$

ただし、 $\log x$ は常用対数である。振幅および加速度はそれぞれ周期 T の関数となり ($2\pi/T$) を V に乗ずるか、もしくは除するかして得られる。

ところで、速度スペクトルが一定である、といってもその限度があって、その帯域は周期にして、

$$0.1 \sim 0.2 < T < T_m \dots\dots\dots (22)$$

の範囲であるとされている。 T_m は振動の振幅 D が最大になる所の周期であって、マグニチュードが大きいほど大きい。その関係式は、

$$\log T_m = 0.39 M - 1.70 \dots\dots\dots (23)$$

すなわち、周期 $T_m = 1$ 秒で振幅の最大となるような地震の規模はマグニチュードにして $M = 4.4$ である。

以上の性質を速度スペクトルの上下限を規定するのに使うと便利であろう。周期 $0.1 \sim 0.2$ 秒、周波数にして $5 \sim 10$ (c/s) 以上の範囲では加速度に上限があることを意味している。いままでの地震の経験では地表で $0.3 \sim 0.5 g$ にも達することがあると知られているが、これは後で説明する地盤の卓越周期の増幅作用が入っているものと考えられる。したがって、地層の影響を除けば、 $T = 0.3$ 秒で $0.25 g$ が加速度の最大と考えて速度スペクトルの帯域を考えれば良いであろう。

ついで、地盤の特性であるが、地盤は一質点の振動系とほぼ似たような特性を持つことを、やはり金井博士が指摘している。地盤の増幅作用はその卓越周期を T_0 とすると、

$$G(T) = \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right\}^2 + \left\{\frac{0.2}{\sqrt{T_0}} \left(\frac{T}{T_0}\right)\right\}^2}} \dots\dots\dots (24)$$

この式は、減衰のある一質点振動系の速度応答関数 $S_1(x)$ と全く同義であって、減衰定数 h を

$$h = \frac{0.1}{\sqrt{T_0}} \dots\dots\dots (25)$$

と置いたものに等しい。

地盤の性質が、このように減衰のある一質点振動系と置くことが可能ならば、地盤の振動測定結果を相関解析して卓越周期 T_0 および地盤の減衰率を決定することが重要な意義を持つ。実際に建物の基礎杭の杭打ち工事の際に振動を記録した例からは、このような一質点系の特性が得られている（図-12、図-13）。

地震の記録そのままを外力として構造物に作用させればどうなるかの研究は主として Housner に負うが、彼

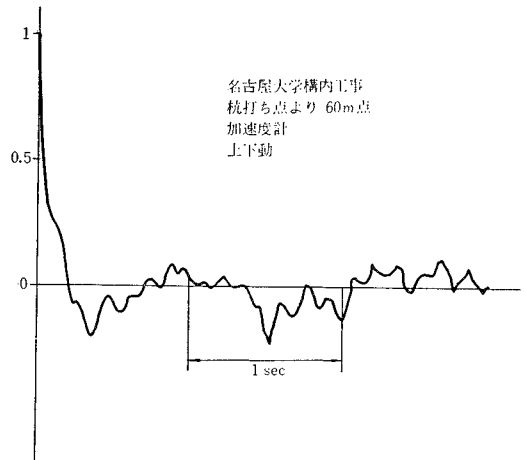


図-12 杭打ちによる地盤振動の自己相関関数

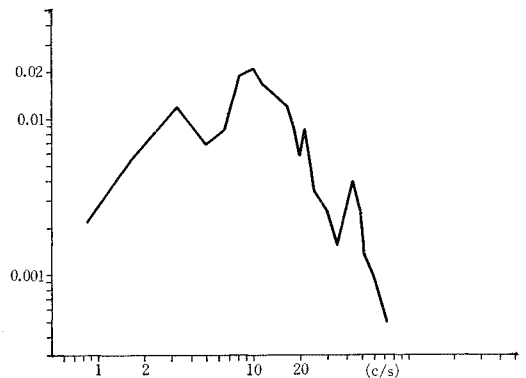


図-13 地盤振動のスペクトル

の研究は、構造物を減衰のある一質点系式 (5) に考え、アナログ計算機でシミュレートさせた振動系で応答の特性を観察したのである。彼が得た重要な結論は、速度記録の最大値は、系の減衰定数 h が一定であればその共振周波数にほぼ無関係に一定となるというものである。

Housner の行なったアナログ実験は、相関解析の立場でいえばつぎのようになる。地震波形を入力波形として速度応答の波形を得るという演算は、系の単位衝撃応答関数 $\dot{k}(t)$ と、地震波形 $X(t)$ との相関計算式 (8) となる。すなわち、出力は相関関数にほかならない。出力の最大値は、いわば最も相関の強い値である。さて、地震波形にはあらゆる種類の周波数を含むと考えると、ある特定の周波数（これは系の固有振動数にほぼ等しい）と、 $\dot{k}(t)$ との相関値が最大になった考えることができる。これは $\dot{k}(t)$ のパワー スペクトルの計算式 (4) を演算しているのとほぼ等しい。すなわち、応答の最大値が系の固有振動数にかかわらず一定であるということは、作用させた地震波の加速度スペクトルが周波数に比例するというを意味している。つまり地震波の速度スペクトルが一定であるということを実証することにな

る。

Housner の与えた速度応答スペクトル一定の結論は、まわりくどいが、結果的に金井博士の与えた式 (21) の妥当性を間接的に証明することになっている。

さて、地震波動を強制力として与えることができればつぎに構造物の振動特性を定めなければならない。構造物を第 1 近似として減衰のある一質点系と考えて良いことは、実用性の立場から考えてほぼ妥当であるが、どのような機構の振動系であるかを知るのは、実際構造物による測定に待つほかはない。その前に、一質点の振動系の強制振動における応答特性を資料として求めておくのが便利である。これは、振動の基本式 (5) において、強制力が、

$$X = e^{i\omega t} \dots\dots\dots (26)$$

であるとき、そのときの応答が、

$$Y = Ae^{i\omega t + i\beta} \dots\dots\dots (27)$$

の形で与えられるから、 ω を変化させたときに A がどのように変化するかの特性を計算しておくが便利である。式 (27) の A を計算すると、その形はつぎのように得られる。

$$A = \frac{1}{\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + 4h^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \dots\dots (28)$$

ここで、右辺の式には、強制力の角速度 ω と、系の非減衰時振動の角速度 ω_0 と、減衰定数 h とで与えられる項がでて来る。そこで、式 (28) の右辺を、 $S_1(x, h)$ という関数で表現して、

$$A = \frac{1}{\omega_0^2} S_1(x, h) \dots\dots\dots (29)$$

$$\begin{cases} S_1(x, h) = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4h^2 x^2}} \\ x = \omega/\omega_0 \end{cases}$$

とおくことにする。 h をパラメーターに含む x の関数 $S_1(x)$ を定めておくと、ある周波数の加速度入力に対する系の変位応答が容易に計算できる。

さて、実際問題として、強制振動の特性を知りたい場合は、強制力として加速度一定のスペクトルを示す外力だけでなく、速度スペクトルが平坦な特性を持つ外力もあるし、また系の応答としても変位応答だけでなく速度応答や加速度応答のスペクトルも欲しいことが多い。このように入力の外力のスペクトルの型と、応答のスペクトルの型との組み合わせは 9 種類あるが、応答関数の種類は 5 種類である (図-14)。

式 (5) の強制振動の基本式は、片持ばり状の振子に対しては、質点に外力が作用する場合の式を与えるが、建物の強制振動は、下の基礎が揺れるという強制振動である。この場合の基本式は、

$$\ddot{Y} + 2h\omega_0(\dot{Y} - \dot{Y}_0) + \omega_0^2(Y - Y_0) = 0 \dots\dots\dots (30)$$

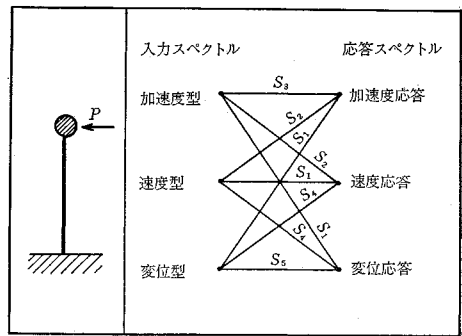


図-14

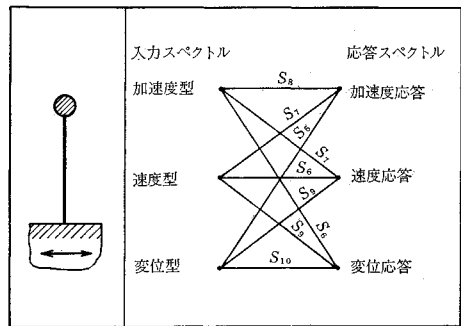


図-15

であって、基礎の変位 Y_0 が振動するわけである。前の場合と同じく、基礎の振動の性質と応答との関連は特性関数 $S_0 \sim S_{10}$ で与えることができる (図-15)。 $S_1 \sim S_{10}$ をグラフに描いたものを 図-16~図-25 に示す。

いままでの整理された概念を使用すれば、地震時に構造物がどのような応答を示すかを簡単に定めることができる。その計算例を示す。

a) 地震の規模の推定

まず、式 (21) において地震動は速度スペクトル一定型の入力であると仮定し、 $M=7$ 、震央からの距離を 10 km とする。地震動の速度スペクトルの範囲は 0.35~7 c/s の間で平坦であるとする、その値は、

$$V = 1.39 \text{ cm/sec}$$

と得られる。

b) 地盤の特性の推定

地盤を仮に卓越周期 0.3 秒、減衰定数を $h=0.2$ と仮定する。地盤の増幅作用は、

$$\dot{Y} = S_1(x)$$

である。

c) 構造物の特性の推定

構造物の固有振動数を 5 c/s、減衰を $h=0.3$ と仮定する。

いま、構造物の加速度応答を知りたいとする。基礎の入力スペクトルを速度型で与え、構造物の加速度応答を

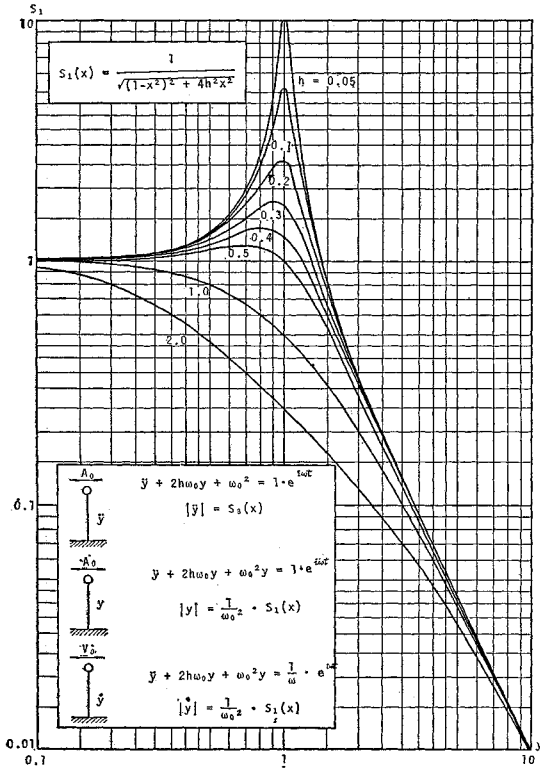


図-16

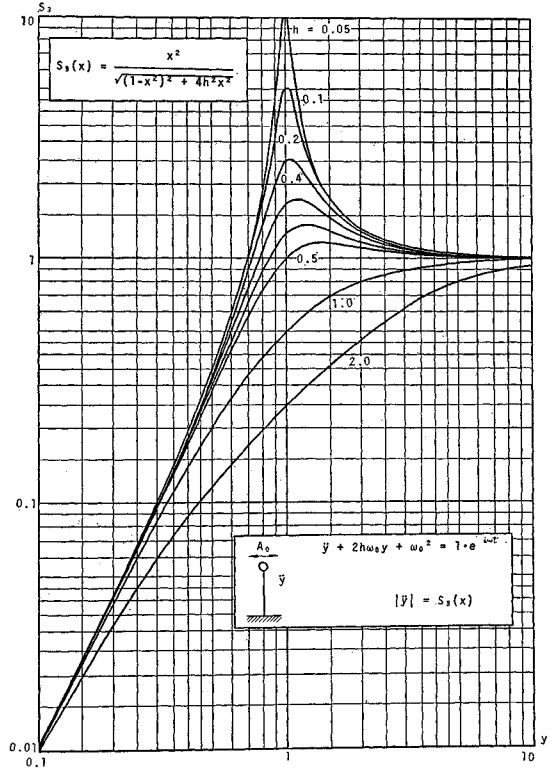


図-18

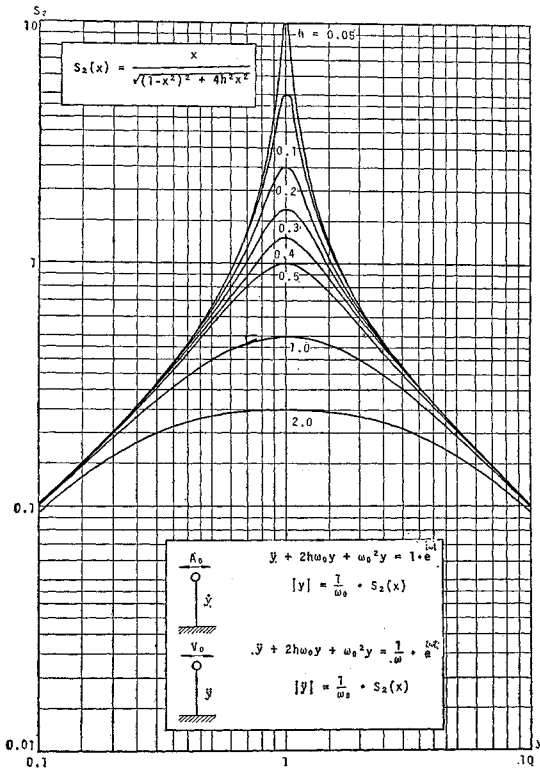


図-17

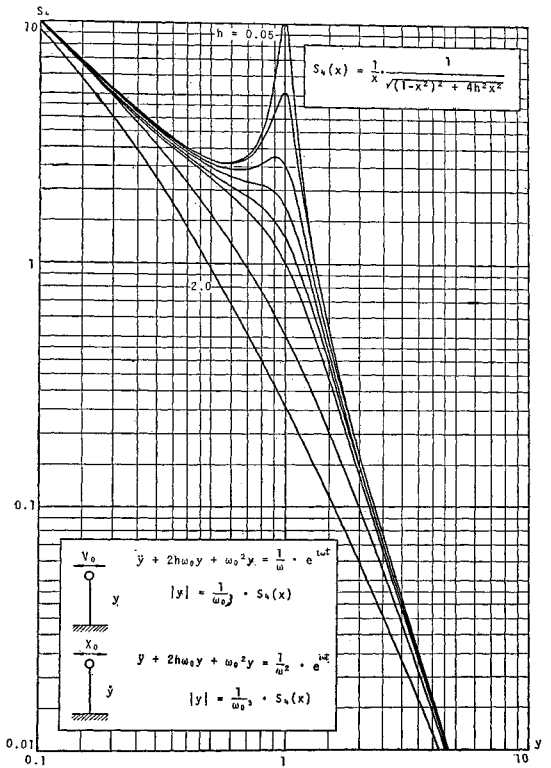


図-19

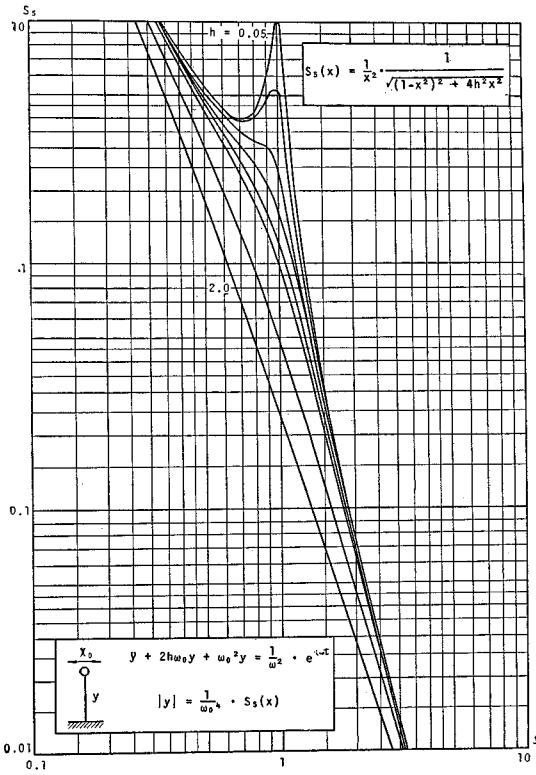


図-20

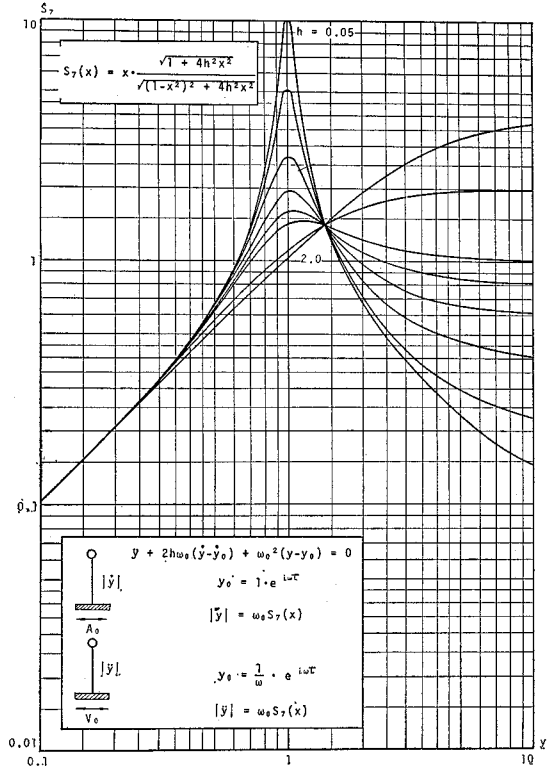


図-22

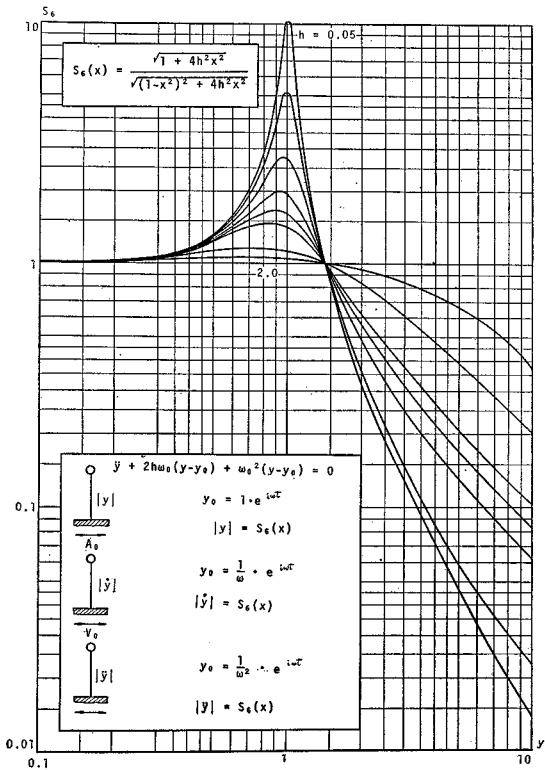


図-21

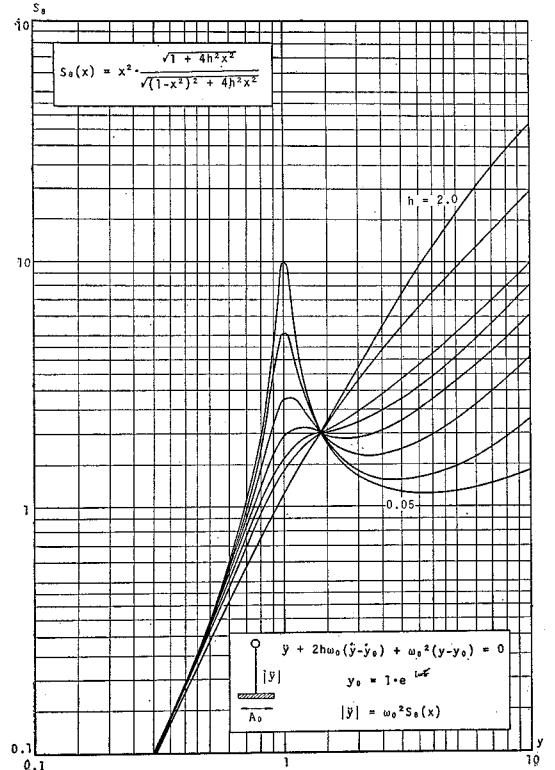


図-23

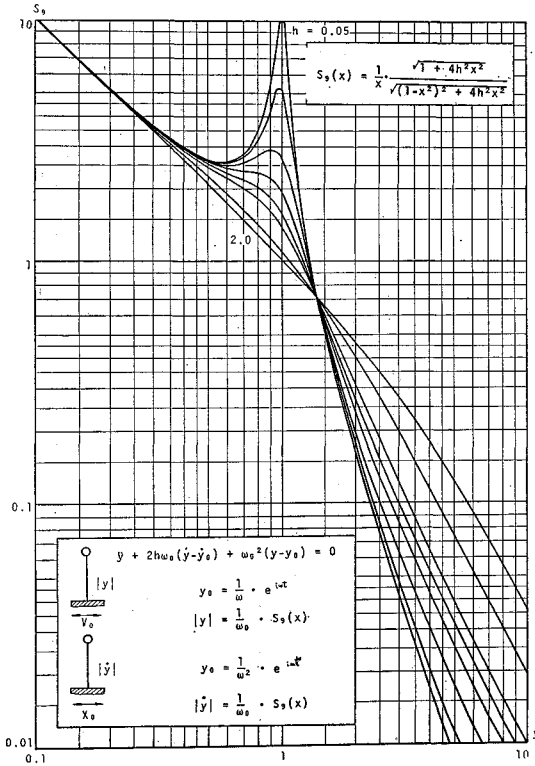


図-24

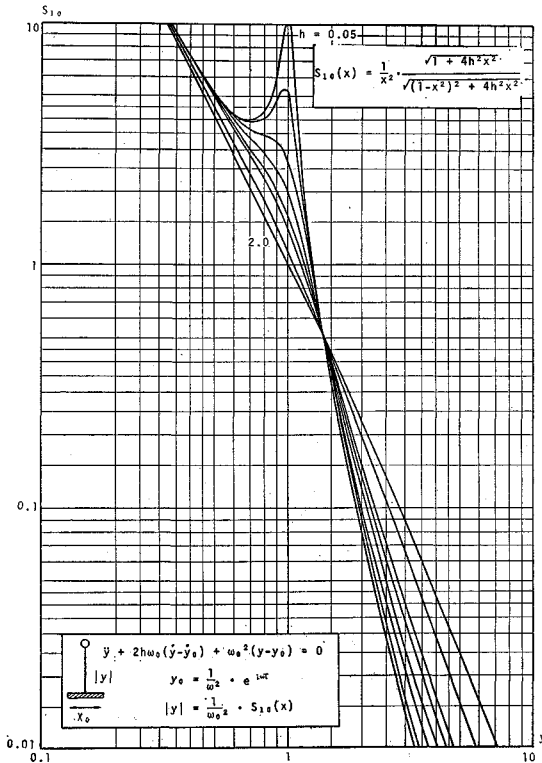


図-25

求めるときの関係式は、 $S_1(x)$ を使用する。すると、総合された特性は、

$$A = (V \times S_1(x)) \times \omega_0 S_7(x)$$

である。これを図式に示す。まず両対数の方眼紙上に、横軸に 7 c/s までの間を水平軸とし、これを、

$$A_0 = V \times \omega_0 = 1.39 \times (5 \times 2 \pi) = 58.6 \text{ cm/sec}^2$$

の値であるとする。つぎに、地盤の特性 $S_1(x)$ のグラフで、 $h=0.2$ の曲線を、縦軸を $f=3.3 \text{ c/s}$ に合わせ、横軸を基準軸に合わせて描く。これで地盤の特性が与えられる。さらに $S_7(x)$ のグラフで $h=0.3$ のものを、縦軸は $f=5 \text{ c/s}$ に合わせ、横軸は基準軸に合わせて描く。 S_1, S_2 のグラフを、図上で足し合わせる（対数目盛であるから掛算になる）。得られた合成の曲線は、構造的加速度応答のフーリエスペクトルをあらわす。これによると、構造物の最大加速度応答は、共振点において 200 ガル に達する、と得られる（図-26）。

同様の計算を、霞ヶ関ビルをモデルとして計算したグラフを図-27, 28に示す。この計算は $M=7, X=10 \text{ km}$ 、地盤の早越周期 $T=2 \text{ 秒}$ 、地盤の減衰定数 $h=0.07$ 、構造物の共振周波数 4 c/s 、減衰定数 $h=0.05$ で求めたものである。構造物の加速度応答の最大値は約 11 ガル

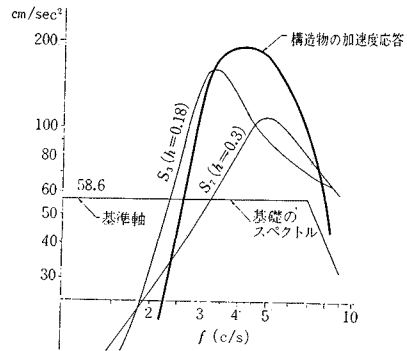


図-26

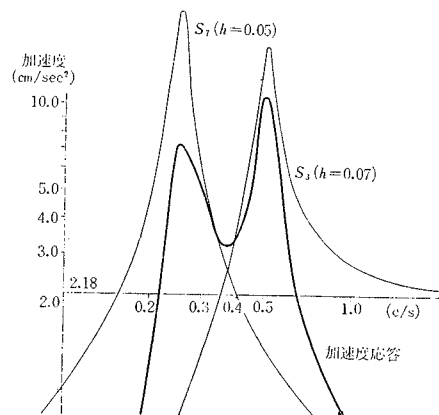


図-27 構造物の加速度応答

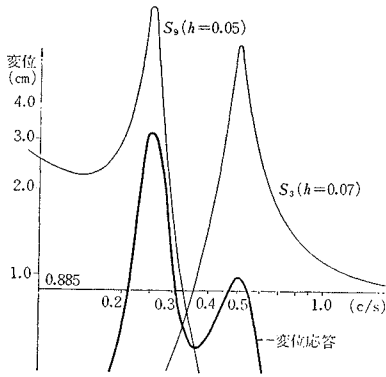


図-28 構造物の変位応答

に対して変位の最大値は片振幅 3 cm と得られる。

7. あとがき

筆者は構造物の応力測定方法について主として研究して来た。測定には多額の設備を必要とするので、設備の充実に長い時日を要した。昭和 42, 43 年兩年度に、文部省科学研究費補助金を「ランダムな振動記録の解析に関する研究」という課題で得たことを記して感謝の意を表わしたい。測定および解析のシステムが軌道に乗るようになったのは最近のことであって、まだ橋梁においては数橋の実測、地盤振動の解析も 2~3 例に過ぎない。したがって、解析結果から有為な結論を導きだせる資料に乏しく、本報文では相関解析の応用性だけの説明となった。今後実測データの集積を待って具体的な報告をする予定である。

本報文の資料作製には多くの研究協力者が参加した。久野和久、南川洋士雄、駒田広也の諸君には資料整理および電算等に多大の協力を頂いた。この他にも名をあげれば尽きないが、深く感謝の意を表わしたい。

8. 結 語

相関解析手法の応用により、構造物ならびに地盤を一質点系とみなして固有振動数ならびに減衰係数を測定で求める可能性を示した。2, 3 の実測結果からこの仮定は実用上十分利用できることが確かめられた。地盤および構造物をそれぞれ 1 質点系と考え全体を 2 質点系と考える場合の特性は、1 質点系の特性の測定結果をもとにして重ね合わせて得られる、という可能性を示した。

記 号

A	定数もしくは関数値
$C(\tau), C_{XX}, C_{YY}$	自己相関関数
f	振動の周波数 (c/s)
h	減衰定数
$k(t)$	時間の関数, 単位衝撃応答 ($t > 0$)
$g(t)$	時間の関数
M	マグニチュード
$S(x, h), S_i(x)$	周波数応答特性曲線
$p(f)$	f の関数, パワー スペクトル
t, τ	時間 (変数)
T	一定の時間間隔, 周期
x	距離, もしくはパラメーター ω/ω_0
$X, X(t)$	強制力
$Y, Y(t)$	変位の応答
V	速度
ω	振動の角速度
ω_0	非減衰振動の角速度
λ	減衰のパラメーター
β	位相角

参 考 文 献

- 1) 磯部 孝編：「相関関数およびスペクトル」, 東京大学出版会, 昭和 43 年.
- 2) 金井 清：「地震動, 地盤の特性」, 日本鋼構造協会, 構造物の動的解析研修会テキスト No. 1, 昭和 40 年.
(1969.5.14・受付)