

2 ヒンジ アーチの塑性崩壊荷重の算定について

STUDY ON CALCULATION OF PLASTIC COLLAPSE LOAD OF TWO-HINGED ARCH

前田 幸雄*・藤本 一男**
By Yukio Maeda and Kazuo Fujimoto

論値との比較検討を行なったものである。

1. まえがき

アーチの塑性解析に関する研究は、軸方向力と曲げモーメントを同時に考慮した降伏条件式を E.T. Onat と W. Prager¹⁾ が導いて以来、塑性崩壊荷重の算定についての種々の研究がなされてきた。とくにわが国では、福本・吉田²⁾ による変動くり返し荷重によるアーチの崩壊についての研究、横尾・山肩^{3),4)} の円弧アーチのせり高による崩壊荷重の挙動に関する研究、また、山崎・石川⁵⁾ の弾塑性解析と変形量の算定についてなど、多くの注目すべき論文が発表された。

しかし、これらの論文はいずれも特殊な場合の研究であり、一般に任意の載荷条件、また任意の形状のアーチの崩壊荷重の算定についてはほとんど試みられていない。著者らはこれまで、この種の問題についての研究を発表^{6),7),8),9)} してきたが、ここでは一般的に応用できる算定法を示すために、降伏条件と上界定理を用いて、任意形状、任意載荷条件における塑性崩壊荷重の算定法を明らかにした。

さらに、荷重の増加に伴いアーチの断面が降伏して塑性ヒンジが発生すると変位の増加が急速に進み、崩壊時（崩壊機構となる時点）においては、アーチの変形が無視できないほど大きくなり、崩壊荷重に影響するであろうと考えられる。すなわち、変形を全く無視した単純弾塑性理論による崩壊荷重は過大に評価されていると考えられる。このことについて Stevens^{10),11)} は曲げモーメントのみを考慮して、変形による塑性崩壊荷重の低下についての研究を発表しているが、著者らは曲げモーメントと軸方向力を同時に考慮して、変形による崩壊荷重の低下について検討するための手法を明らかにした。

さらに、箱型断面の2ヒンジ円弧アーチの模型による塑性崩壊実験を行ない、塑性崩壊までの挙動を調べて理

2. 仮定および降伏条件式

以下の解析に用いた仮定はつぎのようである。

- (1) 材料は完全弾塑性体で、理想化された応力-ひずみ曲線を持つものとし、ひずみ硬化は考慮しない。
- (2) アーチに作用する力は、曲げモーメントと軸方向力のみを考慮し、せん断力の影響は無視する。
- (3) 降伏条件式による相関曲線は直線で近似する¹⁾。
- (4) 崩壊機構が完成するまで不安定現象は生じないものとする。

以上の仮定によって、曲げモーメントと軸方向力を合成しても、単純な引張の降伏理論によって論ずることができる。

また、塑性ヒンジ点における降伏条件式は一般に図-1に示すように、

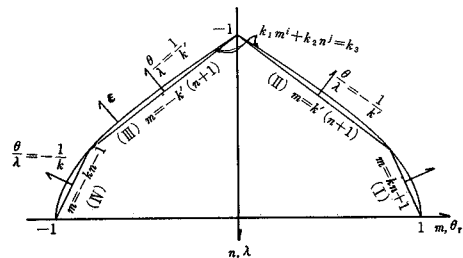


図-1 $m-n$ 相関曲線

$$k_1 m^i + k_2 n^j = 1 \dots \dots \dots (2.1)$$

によって表わすことができる。ここで、

$$m = \frac{M}{M_p} \dots \dots (2.2) \quad n = \frac{N}{N_p} \dots \dots (2.3)$$

k_1, k_2, k_3, i, j = 断面形状および軸方向力、曲げモーメントの符号によって決まる定数、 M = 塑性ヒンジ点における曲げモーメント、 N = 塑性ヒンジ点における軸方

* 正会員 工博 大阪大学教授 工学部土木工学科
** 正会員 工修 大阪大学研究生 工学部土木工学科

向力, M_p =軸方向力のない場合の降伏モーメント, N_p =曲げモーメントのない場合の降伏軸方向力。

I型または箱型断面の場合については,

中立軸がフランジ内にある場合

$$|m| = k_1(1-n) \dots\dots\dots(2.4)$$

中立軸がウェブ内にある場合

$$|m| = 1 - k_2 n^2 \dots\dots\dots(2.5)$$

ここで,

$$k_1 = \frac{\{d/d_w + 1\} \{A_f/A_w + 1\}}{\{d/d_w + 1\} \{A_f/A_w\} + 1} \dots\dots\dots(2.6)$$

$$k_2 = \frac{\{A_f/A_w + 1\}^2}{\{d/d_w + 1\} \{A_f/A_w\} + 1} \dots\dots\dots(2.7)$$

A_f, A_w =それぞれフランジおよびウェブ断面積, d_w =ウェブ高, d =断面の高さ, を表わす。

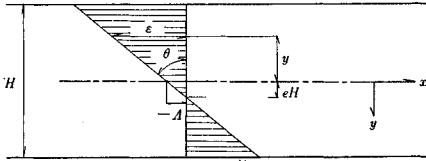


図-2 塑性ヒンジ点のひずみ分布

塑性ヒンジ点におけるひずみ状態は図-2のように表わされる。図において, θ は回転角, A は軸方向力による縮み量, e は中立軸の位置を表わすパラメーターである。ここで縮み量 A を無次元化して

$$\lambda = \frac{N_p}{M_p} A \dots\dots\dots(2.8)$$

を定義し, θ, λ をそれぞれ, m, n に重ね合わせると図-1に示すように, $m-n$ 相関曲線とひずみベクトル ϵ は直交することが容易に証明される。

3. 2 ヒンジ アーチの塑性崩壊荷重の算定

以下, 塑性崩壊荷重を求めるのに上界定理を用いる。

2 ヒンジ アーチの崩壊機構は図-3に示すような形で一般に表わすことができる。①, ② はそれぞれ塑性ヒンジの位置である。

(1) 境界条件, 内力仕事および外力仕事

図-3 において崩壊機構が形成されるために満足され

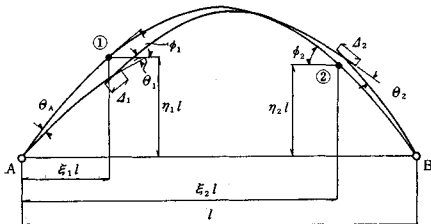


図-3 2 ヒンジ アーチの崩壊機構

なければならない条件は, A, B 点において変位が 0 であるという境界条件と ①, ② 点において降伏条件式を満足することである。

B 点の仮想の水平変位を \bar{u}_B , 垂直変位を \bar{v}_B とすると, これらの変位を支配する要因として, A 点の回転量による変位 $\bar{u}_{\theta A}, \bar{v}_{\theta A}$, ① 点の回転量による変位 $\bar{u}_{\theta 1}, \bar{v}_{\theta 1}$, ① 点の縮み量による変位 $\bar{u}_{d_1}, \bar{v}_{d_1}$, ② 点の回転量による変位 $\bar{u}_{\theta 2}, \bar{v}_{\theta 2}$, ② 点の縮み量による変位, $\bar{u}_{d_2}, \bar{v}_{d_2}$ が考えられる。そこで

$$\bar{u}_B = \bar{u}_{\theta A} + \bar{u}_{\theta 1} + \bar{u}_{d_1} + \bar{u}_{\theta 2} + \bar{u}_{d_2} = 0 \dots\dots(3.1 a)$$

$$\bar{v}_B = \bar{v}_{\theta A} + \bar{v}_{\theta 1} + \bar{v}_{d_1} + \bar{v}_{\theta 2} + \bar{v}_{d_2} = 0 \dots\dots(3.2 a)$$

したがって

$$\bar{u}_B = \theta_1 \eta_1 l - d_1 \cos \phi_1 - \theta_2 \eta_2 l - d_2 \cos \phi_2 = 0 \dots\dots(3.1 b)$$

$$\bar{v}_B = \theta_A l - \theta_1 (1 - \xi_1) l + d_1 \sin \phi_1 + \theta_2 (1 - \xi_2) l + d_2 \sin \phi_2 = 0 \dots\dots(3.2 b)$$

ここで断面形状とスパン長 l による無次元パラメータ $-h$ を定義する。すなわち

$$h = \frac{M_p}{l N_p} \dots\dots\dots(3.3)$$

しかる時は, 回転量 θ_1, θ_2 と縮み量 d_1, d_2 はそれぞれ

$$\theta_1 = \theta_1 \quad \theta_2 = -\theta_2 \dots\dots\dots(3.4)$$

$$d_1 = -d_1 = -\frac{M_p}{N_p} \lambda_1 = -lh \lambda_1 = kh \theta_1 l \dots\dots(3.5)$$

$$d_2 = -d_2 = -\frac{M_p}{N_p} \lambda_2 = -lh \lambda_2 = -kh \theta_2 l \dots\dots\dots(3.6)$$

式 (3.5), (3.6) の最後の項はひずみベクトルと $m-n$ 相関曲線の直交条件から得られる。 k は降伏条件式の勾配を示す。

以上の関係式から $\frac{\theta_1}{\theta_2}$ は

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = -\frac{\eta_2 + kh \cos \phi_2}{\eta_1 - kh \cos \phi_1} = \mu \dots\dots\dots(3.7)$$

A 点の回転量 θ_A は

$$\theta_A = \{(1 - \xi_1 - kh \sin \phi_1) \mu + (1 - \xi_2 + kh \sin \phi_2)\} \theta_2 = \nu \theta_2 \dots\dots\dots(3.8)$$

ここで kh を含む項はすべて軸方向力による影響を示している。

つぎに塑性ヒンジ点における内力仕事 W_i は

$$W_i = M_p (m \theta + n \lambda) \dots\dots\dots(3.9)$$

外力仕事について考えると, ある外力によってなされる仕事は, 仮想変位とその点の外力の積によって表わすことができる。外力を P_i , 仮想変位を δ_i とすると外力仕事 W_e は

$$W_e = \sum_i P_i \delta_i \dots\dots\dots(3.10)$$

ここで \sum_i は載荷点における外力仕事の総和を表わす。

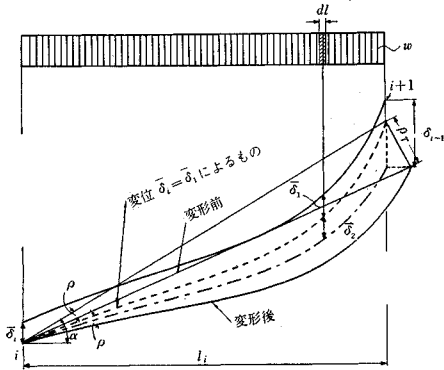


図-4

したがって、単一集中荷重の時は、

$$W_e = P \bar{\delta} \dots \dots \dots (3.11)$$

等分布荷重の時は 図-4 から明らかなように、

$$\begin{aligned} W_e &= w \int_0^{l_i} \bar{\delta} dl = w \int_0^{l_i} (\delta_1 + \delta_2) dl \\ &= w \int_0^{l_i} (\delta_i + r \rho \cos \alpha) dl \\ &= w \int_0^{l_i} (\delta_i + \rho l) dl = w l_i \left(\delta_i + \frac{1}{2} \rho l_i \right) \end{aligned} \dots \dots \dots (3.12)$$

ここで、 l_i = 水平距離、 w = 荷重強度、 ρ = 回転量、 $\bar{\delta}_i$ = i 点の垂直変位で $\bar{\delta}_i = \delta_i$ 、 δ_2 = 回転 ρ による垂直変位、 $\alpha = i$ 点と $i+1$ 点を結んだ直線と水平とのなす角、 $r = i$ と $i+1$ 点を結んだ線上の距離、である。

(2) 変形を考慮しない塑性崩壊荷重の上界値を与える式

図-1 において直線で近似した降伏条件式を2つの塑性ヒンジがそれぞれ領域 (I), (IV) で満足すると仮定すると内力仕事の和は式 (3.9) より

$$\begin{aligned} W_i &= M_p(m_1 \theta_1 + n_1 \lambda_1) + M_p(m_2 \theta_2 + n_2 \lambda_2) \\ &= M_p(m_1 - k n_1) \theta_1 + M_p(m_2 + k n_2) \theta_2 \\ &= M_p(\mu - 1) \theta_2 \dots \dots \dots (3.13) \end{aligned}$$

以下、上界値を示す式を求めるが、 f_k は無次元化した崩壊荷重の上界値を表す。

a) 単一集中荷重の場合 (図-5)

①点の仮想変位 $\bar{\delta}_1$:

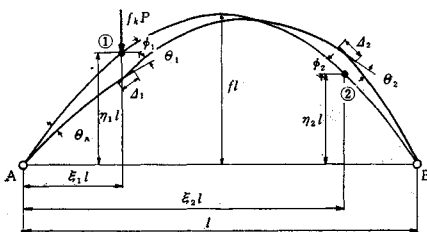


図-5 単一集中荷重による崩壊機構

$$\bar{\delta}_1 = \theta_A \xi_1 l + \frac{1}{2} D_1 \sin \phi_1 \dots \dots \dots (3.14)$$

したがって

$$W_e = f_k P \bar{\delta}_1 = f_k P \left(\theta_A \xi_1 l + \frac{1}{2} D_1 \sin \phi_1 \right) = W_i \dots \dots \dots (3.15)$$

これより $f_k P$ は、

$$f_k P = (\mu - 1) \left[\nu \xi_1 + \frac{kh}{2} \sin \phi_1 \right]^{-1} \frac{M_p}{l} \dots \dots \dots (3.16)$$

b) 等分布荷重の場合 (図-6)

図のようにA端から任意点 nl まで等分布荷重 $f_k w$ が載荷された場合はつぎのように3つに分けて考えることができる。

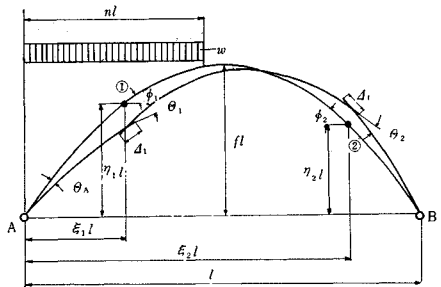


図-6 等分布荷重による崩壊機構

(i) $n < \xi$

$$W_e = \frac{1}{2} \theta_A (nl)^2 f_k w \dots \dots \dots (3.17)$$

(ii) $\xi_1 \leq n < \xi_2$

$$\begin{aligned} W_e &= \left\{ \frac{1}{2} \theta_A (nl)^2 + D_1 \sin \phi_1 (n - \xi_1) l \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \theta_1 (n - \xi_2)^2 l^2 \right\} f_k w \dots \dots \dots (3.18) \end{aligned}$$

(iii) $\xi_2 \leq n \leq 1$

$$\begin{aligned} W_e &= \left\{ \frac{1}{2} \theta_A (nl)^2 + D_1 \sin \phi_1 (n - \xi_1) l \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \theta_1 (n - \xi_2)^2 l^2 + D_2 \sin \phi_2 (n - \xi_2) l \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \theta_2 (n - \xi_2)^2 l^2 \right\} f_k w \dots \dots \dots (3.19) \end{aligned}$$

それぞれ $W_e = W_i$ において $f_k w$ について解くと

(i) $n < \xi_1$

$$f_k w = (\mu - 1) \cdot \left[\frac{1}{2} \nu n^2 \right]^{-1} \frac{M_p}{l^2} \dots \dots \dots (3.20)$$

(ii) $\xi_1 \leq n < \xi_2$

$$\begin{aligned} f_k w &= (\mu - 1) \cdot \left[\frac{1}{2} \nu n^2 + \left\{ kh \sin \phi_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (n - \xi_1) \right\} (n - \xi_1) \mu \right]^{-1} \frac{M_p}{l^2} \dots \dots \dots (3.21) \end{aligned}$$

(iii) $\xi_2 \leq n \leq 1$

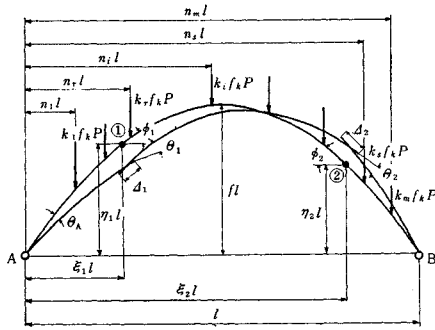


図-7 任意集中荷重による崩壊機構

$$f_k w = (\mu - 1) \cdot \left[\frac{1}{2} \nu n^2 + \left\{ kh \sin \phi_1 - \frac{1}{2} (n - \xi_1) \right\} (n - \xi_1) \mu - \left\{ \frac{1}{2} (n - \xi_2) + kh \sin \phi_2 \right\} \right]^{-1} \frac{M_p}{l^2} \dots (3.22)$$

c) 任意の集中荷重 $k_1 f_k P \dots k_m f_k P$ の場合 (図-7) 式 (3.10) より外力仕事 W_e は

$$W_e = \left\{ \theta_A \sum_{i=1}^m k_i n_i l - \theta_1 \sum_{i=r}^m k_i (n_i - \xi_1) l + D_1 \sin \phi_1 \sum_{i=r}^m k_i + \theta_2 \sum_{i=s}^m k_i (n_i - \xi_2) l + D_2 \sin \phi_2 \sum_{i=s}^m k_i \right\} f_{RP} \dots (3.23)$$

したがって

$$f_k P = (\mu - 1) \cdot \left[\nu \sum_{i=1}^m k_i n_i - \mu \sum_{i=r}^m \{ k_i (n_i - \xi_1) + k_i kh \sin \phi_1 \} - \sum_{i=s}^m \{ k_i (n_i - \xi_2) + k_i kh \sin \phi_2 \} \right]^{-1} \dots (3.24)$$

d) 全載等分布荷重 w と任意の集中荷重 $f_k P$ が同時に載荷された場合 (図-8)

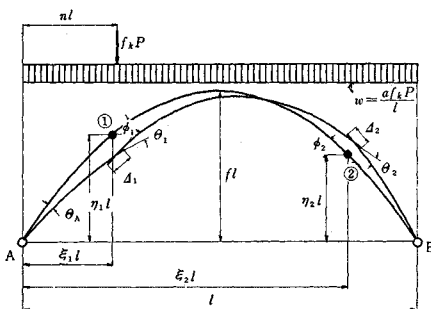


図-8 全載等分布荷重+集中荷重による崩壊機構

等分布荷重による外力仕事を W_{e1} とすると、

$$W_{e1} = \left\{ \frac{1}{2} \theta_A l^2 - \frac{1}{2} \theta_1 (1 - \xi_1)^2 l^2 + D_1 \sin \phi_1 (1 - \xi_1) l + \frac{1}{2} \theta_2 (1 - \xi_2)^2 l^2 + D_2 \sin \phi_2 (1 - \xi_2) l \right\}$$

$$\times \frac{af_k P}{l} \dots (3.25)$$

集中荷重による外力仕事を W_{e2} とすると

(i) $n < \xi_1$
 $W_{e2} = f_k P \theta_A n l \dots (3.26)$

(ii) $\xi_1 \leq n < \xi_2$
 $W_{e2} = \{ \theta_A n l + D_1 \sin \phi_1 - \theta_1 (n - \xi_1) l \} f_k P \dots (3.27)$

(iii) $\xi_2 \leq n \leq l$
 $W_{e2} = \{ \theta_A n l + D_1 \sin \phi_1 - \theta_1 (n - \xi_1) l + \theta_2 (n - \xi_2) l + D_2 \sin \phi_2 \} f_k P \dots (3.28)$

$W_e = W_{e1} + W_{e2} = W_i$ より

$$f_k P = (\mu - 1) \cdot \left[a \left(\frac{1}{2} \nu - \mu \left\{ \frac{1}{2} (1 - \xi_1) - kh \sin \phi_1 \right\} (1 - \xi_1) - \left\{ \frac{1}{2} (1 - \xi_2) + kh \sin \phi_2 \right\} (1 - \xi_2) \right) + \nu n \right]^{-1} \frac{M_p}{l} \dots (3.29)$$

以下同様にして $f_k P$ を求めることができる。

以上4つの場合について崩壊荷重の上界値を求める式を示したが、他のいかなる載荷条件でも同様の手法によって上界値を与える式を算定することができる。

いままで述べた式はアーチの形状については何も触れていない。しかし、両端がヒンジである構造物であるならばいかなる形状でも応用できる。すなわち、2つの独立変数 ξ_1, ξ_2 と2つの従属変数 η_1, η_2 の関係式をアーチの形状によって与えればよい。また、 $\eta_1 = \eta_2 = H$ とすれば2ヒンジ門型ラーメンになる。ここで、 H はラーメンの高さである。

つぎに 図-9 (a) に示すような対称的な崩壊機構が考えられる。これは、図-9 (b) と (c) を組み合わせたもの

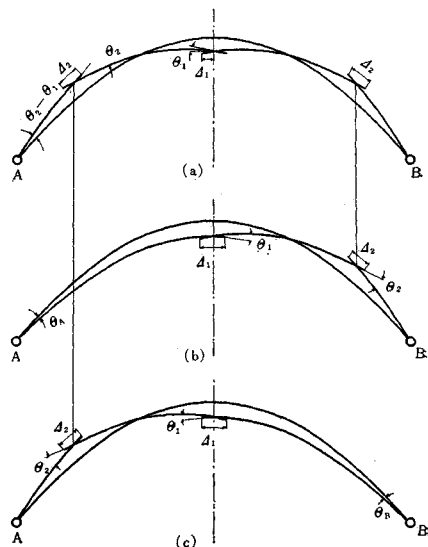
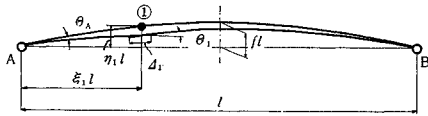


図-9 対称崩壊機構と非対称崩壊機構



図一10 一つの塑性ヒンジによる崩壊機構

であって $\xi_1=0.5$ としたものと全く一致する。すなわち、非対称崩壊機構の特殊な場合であることが明らかである。

図一10 に示すように、非常にせり高の低い偏平なアーチの場合、塑性ヒンジが一つだけで崩壊機構となる。そこで、一つの塑性ヒンジだけで機構になるためには、B 点の仮想変位 \bar{u}_B, \bar{v}_B が 0 であるという境界条件から、

$$\bar{u}_B = \theta_1 \eta_1 l - \Delta_1 \cos \phi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.30)$$

$$\bar{v}_B = \theta_A l - \theta_1 (1 - \xi_1) l + \Delta_1 \sin \phi_1 = 0 \quad \dots\dots\dots (3.31)$$

したがって、

$$\eta_1 = kh \cos \phi_1 \quad \dots\dots\dots (3.32)$$

$$\theta_A = (1 - \xi_1 - kh \sin \phi_1) \theta_1 \quad \dots\dots\dots (3.33)$$

式 (3.32), (3.33) の関係式を用いて計算した崩壊荷重が、前述の 2 つの塑性ヒンジによって機構になるとして得られた崩壊荷重より大きい場合は、一つの塑性ヒンジで崩壊機構となる。そして、この限界は $\eta_1 = kh \cos \phi_1$ である。 $\eta_1 = 0$ の場合は両端ヒンジの直線ばりとなる。しかし、通常のせり高のアーチでは計算する必要はない。

(3) 変形を考慮しない塑性崩壊荷重の形状と載荷条件による特性

崩壊荷重を求めるには上界定理により、最小の上界値を求めなければならない。いままで述べた式は任意に塑性ヒンジの位置を仮定しているので 2 つの塑性ヒンジの位置を示す独立変数 ξ_1, ξ_2 が未知である。そこで、 $\partial f_k / \partial \xi_1 = 0, \partial f_k / \partial \xi_2 = 0$ を満足するように ξ_1, ξ_2 を定めればよいが、非常に複雑となるので試索的に求めるほうが容易である。

一つの塑性ヒンジの位置が明らかな場合には最小値を求めることはさらに容易になる。

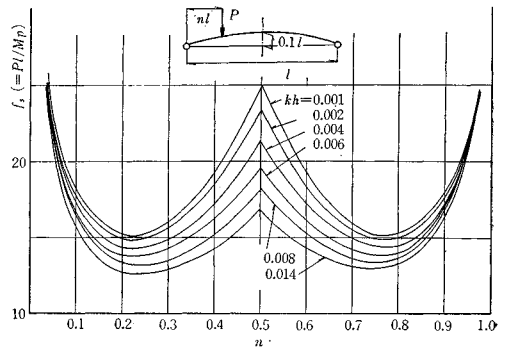
また、上述の式は塑性ヒンジが図一1の領域(I), (IV)で降伏条件式を満足すると仮定しているが、せり高の低い偏平なアーチや、軸方向力のきわめて大きい載荷条件の場合は、領域(II), (III)にあるので kh を $k'h$ に置き換えて崩壊荷重を比較し、小さい方を崩壊荷重としなければならない。

試索的計算法は、一方の独立変数を固定し、他方を変化させて f_k を求め、つぎに固定した変数を少しずつ同じく他方を変化させて f_k を求める方法をくり返すことによって最小の崩壊荷重を求める。

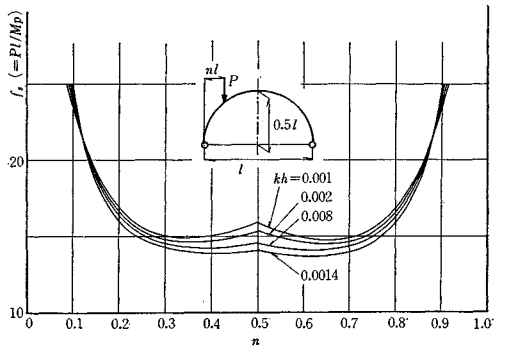
いままで述べた上界定理によって得られた崩壊荷重の載荷条件、せり高、形状、断面形状による特性をグラフ

によって示す。

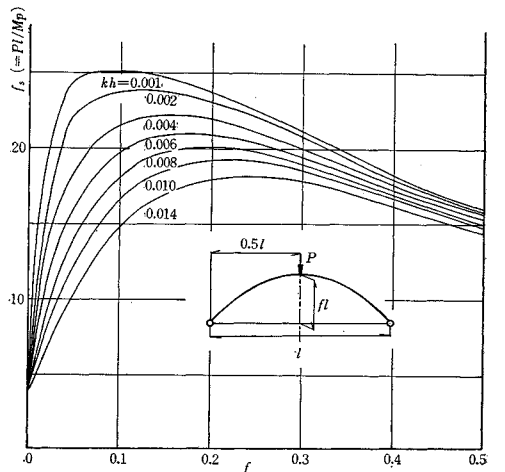
図一11~20 においてパラメーター h は式 (3.3) で $h = M_p / l N_p = Z / l A$ によって定義され断面形状によって決まる。ここで、 Z = 塑性断面係数、 A = 断面積、 l = スパン長。また、 k は $m-n$ 相関曲線を直線で近似したときの直線の勾配を表わし、断面形状と $m-n$ 相関曲線の領域によって決まる定数である。 f_s は無次元化した崩壊荷重である。 f はせり高を表わすパラメーターである。



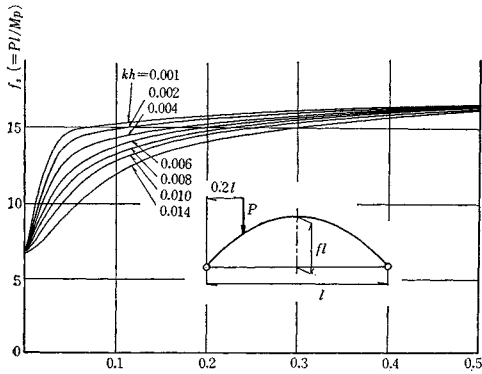
図一11 単一集中荷重による $n-f_s$ 曲線 ($f=0.1$)



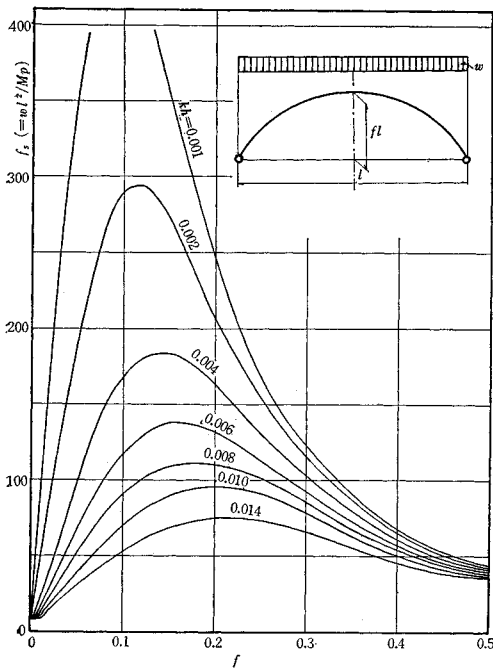
図一12 単一集中荷重による $n-f_s$ 曲線 ($f=0.5$)



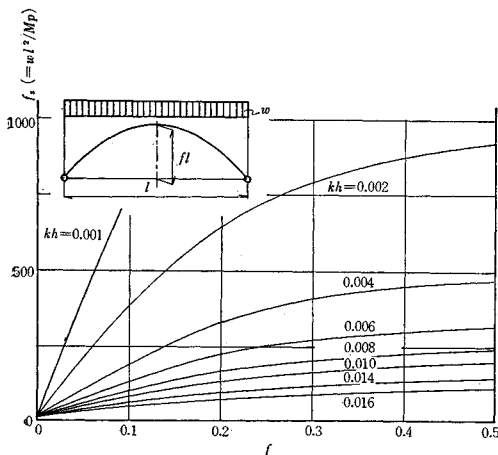
図一13 中央集中荷重による $f-f_s$ 曲線



図一14 0.2l 点集中荷重による $f-f_c$ 曲線



図一15 全載等分布荷重による $f-f_c$ 曲線 (円弧)



図一16 全載等分布荷重による $f-f_c$ 曲線 (放物線)

図一11, 図一12は円弧アーチの任意の点に単一集中荷重が作用したとき, その位置による崩壊荷重の特性をそれぞれ示している。せり高の低い場合は軸方向力による影響を表わす h の影響が大きく, 高い場合は h の影響が小さい。また, 約 $1/4l$ 点において崩壊荷重は最小になることがわかる。

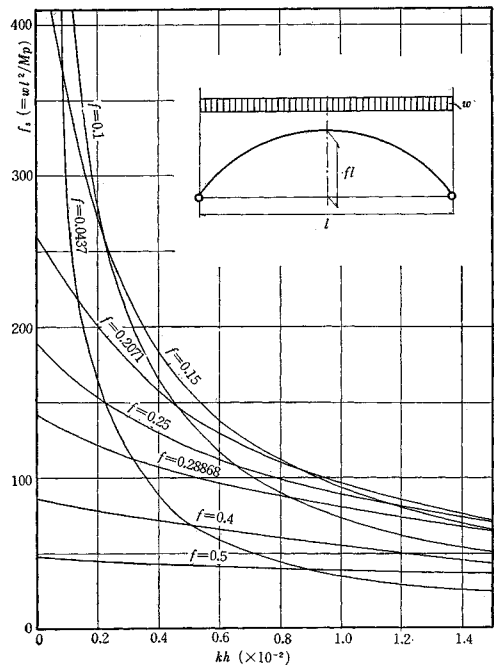
図一13は円弧アーチに単一集中荷重がスパン中央に載荷されたとき, せり高によって崩壊荷重がいかなる特性を示すかを表わした。一般に $0.1 \sim 0.25l$ のせり高で崩壊荷重は最大値を示す。

図一14は円弧アーチに単一集中荷重が $0.2l$ 点に載荷されたときで, この場合はせり高が大きくなると崩壊荷重も大きくなる。

図一15は円弧アーチに等分布荷重がスパンの全体に載荷されたときで, 中央に単一集中荷重が載荷されたときと同様に $0.1 \sim 0.25$ の範囲で崩壊荷重は最大値を示す。

図一16は放物線アーチにスパン全体に等分布荷重が載荷された場合の崩壊荷重の特性を示した。この場合は軸方向力のみによって崩壊する。したがって塑性ヒンジはどの位置に取っても崩壊荷重は一定である。また, せり高が大きいくほど崩壊荷重は大きく軸力の影響も大きくなる。

図一17, 図一18はそれぞれ円弧アーチと放物線アーチの全載等分布荷重の場合, パラメーター h による崩壊荷重の特性を示した。一般に h が小さくなると崩壊荷重は大きくなるが, 円弧アーチと放物線アーチでは全く



図一17 全載等分布荷重による $kh-f_c$ 曲線 (円弧)

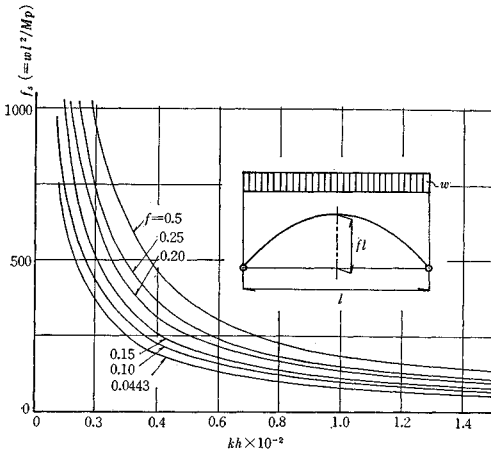


図-18 全載等分布荷重による $kh-f_s$ 曲線 (放物線)

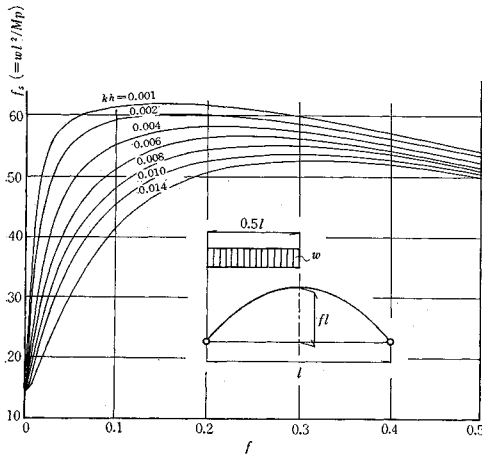


図-19 半載等分布荷重による $f-f_s$ 曲線 (円弧)

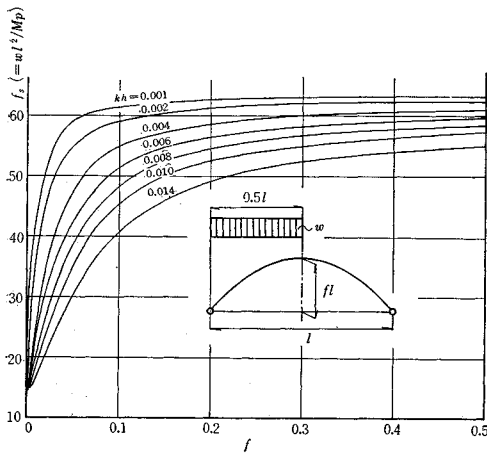


図-20 半載等分布荷重による $f-f_s$ 曲線 (放物線)

異なる傾向を示す。これは放物線アーチの場合、全載等分布荷重のときは曲げモーメントが作用しないためである。

図-19, 図-20 はそれぞれ円弧アーチと放物線アーチのスパンの半分に等分布荷重が載荷された場合である。円弧アーチの場合は、せり高のある値によって崩壊荷重が最大値を示すが、放物線アーチの場合は、せり高が大きくなるほど崩壊荷重は大きくなる。

以上のグラフで、 $f=0$ は両端ヒンジの直線ばりを示す。

(4) 変形の影響による塑性崩壊荷重の低下

いままで述べた単純塑性理論による崩壊荷重は変形の影響は全く無視している。しかしながら、当然予想されるように、荷重の増加に伴って塑性ヒンジが形成されれば変位の増加は急速に進み、第2塑性ヒンジ形成時(塑性崩壊時)の変位は無視できないと考えられる。そこで、アーチの変形に伴って低下すると予想される塑性崩壊荷重の算定法を述べるとつぎのごとくである。

a) 2 ヒンジ アーチの変位

変位を求めるに際して、単純塑性理論による近似解法を用いれば、比較的容易になる。また、計算にはアーチの幾何学的な形状の変化はないものと仮定する。

塑性ヒンジ発生点を降伏条件式を満足する摩擦ヒンジと考え、他の部分は弾性体として変位を算定する。そこで図-21 に示したように以下の3段階に分けて考える。

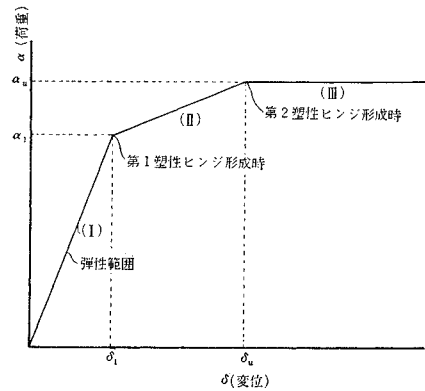


図-21 単純塑性理論による荷重-変位曲線

(I) 弾性範囲, (II) 第1塑性ヒンジ形成時, (III) 第2塑性ヒンジ形成時(崩壊時)。

2 ヒンジ アーチの場合、以上の3段階について、静定基本形として第1塑性ヒンジ点で完全ヒンジを持つ3ヒンジアーチを考えることによってそれぞれの段階における変位はつぎのごとく算定することができる。

一般に任意点 m での変位は、せん断力の影響を無視すると、図-22 より、

$$\left. \begin{aligned} u_m &= u_m^M + u_m^N \\ v_m &= v_m^M + v_m^N \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.34)$$

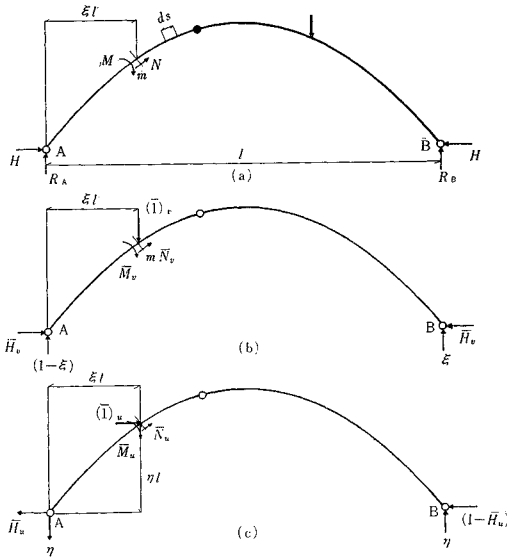


図-22

$$\left. \begin{aligned} u_m^M &= \int \frac{M\bar{M}_u}{EI} ds & u_m^N &= \int \frac{N\bar{N}_u}{EA} ds \\ v_m^M &= \int \frac{M\bar{M}_v}{EI} ds & v_m^N &= \int \frac{N\bar{N}_v}{EA} ds \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.35)$$

ここで、 u_m =水平変位、 v_m =垂直変位、 u_m^M =曲げモーメントによる水平変位、 v_m^M =曲げモーメントによる垂直変位、 u_m^N =軸方向力による水平変位、 v_m^N =軸方向力による垂直変位、 M =作用モーメント、 N =作用軸方向力、 \bar{M}_u =仮想単位荷重 $(\bar{1})_u$ による曲げモーメント、 \bar{M}_v = $(\bar{1})_v$ による曲げモーメント、 \bar{N}_u = $(\bar{1})_u$ による軸方向力、 \bar{N}_v = $(\bar{1})_v$ による軸方向力、 EI =曲げ剛性、 EA =伸び剛性、を表す。

また、積分はアーチの軸線に沿って行なう。

式(3.35)の積分を行なうと、一般に変位を表わす式は、

$$\left. \begin{aligned} u_m^M &= \frac{l^3}{EI} [Q_1L + Q_2H + Q_3L\bar{H}_u + Q_4H\bar{H}_u] \\ u_m^N &= \frac{l}{EA} [Q_1'L + Q_2'H + Q_3'L\bar{H}_u + Q_4'H\bar{H}_u] \\ v_m^M &= \frac{l^3}{EI} [R_1L + R_2H + R_3L\bar{H}_v + R_4H\bar{H}_v] \\ v_m^N &= \frac{l}{EA} [R_1'L + R_2'H + R_3'L\bar{H}_v + R_4'H\bar{H}_v] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.36)$$

となる。ここで、 Q, Q', R, R' などの係数はアーチの形状、載荷条件、変位を求める位置による関数である。 L は荷重一般を表わし、 \bar{H} は静定基本形の水平反力である。

弾性範囲においては、式(3.36)は静定基本形として、一端ローラーのアーチでも成立するはずである。したが

って、式(3.36)の第3,第4項の和が0でなくてはならない。かつ、一般に $Q_3 = -R_3, Q_4 = -R_4, Q_3' = -R_3', Q_4' = -R_4'$ となり、これらの項は変位を求める位置には無関係になる。

そこで、

$$\begin{aligned} & \frac{l^3}{EI} \{Q_3L\bar{H}_u + Q_4H\bar{H}_u\} \\ & + \frac{l}{EA} \{Q_3'L\bar{H}_u + Q_4'H\bar{H}_u\} \\ & = \frac{l^3}{EI} \{R_3L\bar{H}_v + R_4H\bar{H}_v\} \\ & + \frac{l}{EA} \{R_3'L\bar{H}_v + R_4'H\bar{H}_v\} = 0 \dots(3.37) \end{aligned}$$

したがってこの関係から

$$H = - \frac{Q_3 + Q_3' \frac{I}{l^2 A}}{Q_4 + Q_4' \frac{I}{l^2 A}} \cdot L = - \frac{R_3 + R_3' \frac{I}{l^2 A}}{R_4 + R_4' \frac{I}{l^2 A}} \cdot L \dots\dots\dots(3.38)$$

式(3.38)はすなわち、弾性方程式による不静定反力 H を求めたことになる。

第1塑性ヒンジ形成時の変位は弾性範囲の最終状態であり、塑性ヒンジ点において降伏条件式を満足するような曲げモーメントと軸方向力を与える荷重と水平反力を求めて、式(3.36)によって得られる。第2塑性ヒンジ形成時の変位は、第1塑性ヒンジ点で降伏条件式を満足する摩擦ヒンジを持つ3ヒンジアーチの最終状態であり、2つの塑性ヒンジが、それぞれ降伏条件式を満足する荷重と水平反力を求めて、式(3.36)によって得られる。

b) 変形を考慮した塑性崩壊荷重

変形を考慮した塑性崩壊荷重は、上界定理によって得られる塑性ヒンジの位置の変位を考えることによって算定できる。

① 第1塑性ヒンジ形成時の荷重と変位：荷重の増加に伴って、第1塑性ヒンジ形成点では、まず、アーチリブ断面の外縁が降伏し、ついで降伏域が中立軸に向かって進む。変位を求めるときに、重要な要素となる水平反力は、弾性範囲であれば、式(3.38)によって求めたものとしてもよいが、降伏域が進んだ場合や、変形が影響する場合には必ずしも式(3.38)で求めたものとはならないと考えられる。そこで、第1塑性ヒンジにおいて降伏条件式を満足するような水平反力を試的に求める。

以下、無次元化した荷重を α 、無次元化した水平反力を $\alpha \cdot \beta$ 、曲げモーメントと軸方向力を式(2.2),(2.3)のように m, n で表わす。以下、 β を水平反力係数と呼ぶ。

変形を考慮しない場合、塑性ヒンジ点における曲げモーメントおよび軸方向力は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= g_1(\xi_1, \eta_1, \alpha, \beta) \\ n_1 &= g_1'(\xi_1, \eta_1, \alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.39 a)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= g_2(\xi_2, \eta_2, \alpha, \beta) \\ n_2 &= g_2'(\xi_2, \eta_2, \alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.40 a)$$

ここで、 g_1, g_1', g_2, g_2' はアーチの形状と載荷条件によって定まる関数を表わす。

また、第1 塑性ヒンジ形成点の垂直および水平変位を v_1, u_1 、また第2 塑性ヒンジ点では v_2, u_2 とすると変形によって式 (3.39 a), (3.40 a) はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= g_1(\xi_1 - u_1, \eta_1 - v_1, \alpha, \beta) \\ n_1 &= g_1'(\xi_1 - u_1, \eta_1 - v_1, \alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.39 b)$$

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= g_2(\xi_2 - u_2, \eta_2 - v_2, \alpha, \beta) \\ n_2 &= g_2'(\xi_2 - u_2, \eta_2 - v_2, \alpha, \beta) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.40 b)$$

となる。

まず、荷重と変位の関係が図-21 の領域 (I) にあると仮定し、式 (3.38) によって β の第1 近似値 β_1 を求め、変位 u_1, v_1 を算定すると、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= e_1 \alpha \\ v_1 &= e_2 \alpha \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.41)$$

となる。ここで、 e_1, e_2 は式 (3.36) によって決まる荷重-変位曲線の弾性範囲での勾配である。

(第1 段階)

ある断面で塑性ヒンジが形成されるためには、式 (2.1) に示す降伏条件式を満足しなければならない。そこで、式 (2.1)、式 (3.39 b)、式 (3.41) より α のみの方程式を得る。これを解いて第1 塑性ヒンジ形成時の荷重の第1 近似値 α_1 とする。 α_1 を用いて式 (3.41) より変位の第1 近似値 $u_{1,1}, v_{1,1}$ を求める。 $\beta_1, \alpha_1, u_{1,1}, v_{1,1}$ を用いて曲げモーメントの第1 近似値 $m_{1,1}$ を得ることができる。

(第2 段階)

$u_{1,1}, v_{1,1}$ を式 (3.39 b) に代入し、式 (2.1) を用いて α, β を含む一つの式が得られる。また $m_{1,1} = m_1$ として α, β を含む他の式が得られる。この2つの式から α, β の第2 近似値 α_2, β_2 が求まる。 α_2, β_2 によって変位および曲げモーメントの第2 近似値 $u_{1,2}, v_{1,2}, m_{1,2}$ が得られる。

(第3 段階)

$u_{1,2}, v_{1,2}, m_{1,2}$ および式 (2.1) によって第2 段階と全く同じ手法により第3 近似値 $\alpha_3, \beta_3, u_{1,3}, v_{1,3}, m_{1,3}$ を求める。

以上の段階をくり返すことによって $\alpha, \beta, u_1, v_1, m_1$ は一定値に収束する。

同様にしてもう一方の塑性ヒンジ点で α を求めて、小さい方の α を与える位置が第1 塑性ヒンジの形成点であり、収束値が第1 塑性ヒンジ形成時の荷重、変位、水平反力係数である。

一般に、弾性方程式で得られるアーチ リブ断面の外縁の応力が最大になる点で第1 塑性ヒンジが形成されるとは限らない。すなわち、変形の影響によって第1 塑性ヒンジが形成されるのは他の点になることもあり得る。

② 第2 塑性ヒンジ形成時 (崩壊時) の荷重と変位：アーチが変形しても第2 塑性ヒンジが形成され、崩壊機構となるためには、塑性ヒンジ点において、それぞれ降伏条件式を満足しなければならない。以下、崩壊時の荷重、変位、水平反力係数などに添字 u をつけて表わす。

それぞれの塑性ヒンジ点における曲げモーメントと軸方向力を、 $[m_1]_u, [n_1]_u, [m_2]_u, [n_2]_u$ とすると、変形を考慮しない場合

$$\left. \begin{aligned} [m_1]_u &= g_1(\xi_1, \eta_1, [\alpha]_u, [\beta]_u) \\ [n_1]_u &= g_1'(\xi_1, \eta_1, [\alpha]_u, [\beta]_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.42 a)$$

$$\left. \begin{aligned} [m_2]_u &= g_2(\xi_2, \eta_2, [\alpha]_u, [\beta]_u) \\ [n_2]_u &= g_2'(\xi_2, \eta_2, [\alpha]_u, [\beta]_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.43 a)$$

変形の影響によって

$$\left. \begin{aligned} [m_1]_u &= g_1(\xi_1 - [u_1]_u, \eta_1 - [v_1]_u, [\alpha]_u, [\beta]_u) \\ [n_1]_u &= g_1'(\xi_1 - [u_1]_u, \eta_1 - [v_1]_u, [\alpha]_u, [\beta]_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.42 b)$$

$$\left. \begin{aligned} [m_2]_u &= g_2(\xi_2 - [u_2]_u, \eta_2 - [v_2]_u, [\alpha]_u, [\beta]_u) \\ [n_2]_u &= g_2'(\xi_2 - [u_2]_u, \eta_2 - [v_2]_u, [\alpha]_u, [\beta]_u) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.43 b)$$

となる。

(第1 段階)

変形を考慮しない場合、式 (3.42 a), (3.43 a) と式 (2.1) によって、それぞれの降伏条件式を満足させると、未知量 $[\alpha]_u, [\beta]_u$ を得る。これは下界定理による方法であって、得られた $[\alpha]_u$ は上界定理によって得られた崩壊荷重と全く一致する。こうして得られた $[\alpha]_u, [\beta]_u$ を第1 近似値 $[\alpha_1]_u, [\beta_1]_u$ とする。 $[\alpha_1]_u, [\beta_1]_u$ によって式 (3.36) から変位の第1 近似値 $[u_{1,1}]_u, [u_{2,1}]_u, [v_{1,1}]_u, [v_{2,1}]_u$ を求める。

(第2 段階)

それぞれの変位の第1 近似値を式 (3.42 b), (3.43 b) に代入し、降伏条件式、式 (2.1) を満足するような $[\alpha]_u, [\beta]_u$ を求めて、これを第2 近似値 $[\alpha_2]_u, [\beta_2]_u$ とする。 $[\alpha_2]_u, [\beta_2]_u$ によって変位の第2 近似値 $[u_{1,2}]_u, [u_{2,2}]_u, [v_{1,2}]_u, [v_{2,2}]_u$ を式 (3.36) によって求める。

(第3 段階)

それぞれの変位の第2 近似値を式 (3.42 b), (3.43 b) に代入して、第2 段階と全く同様にして $[\alpha]_u, [\beta]_u$ の第3 近似値を求める。

以上の方法をくり返すことによって変形を考慮した塑性崩壊荷重、水平反力係数、変位が一定値に収束し、その収束値として得られる。

結局、第1 塑性ヒンジ形成時の荷重と変位は、その点

で降伏条件と荷重と変形の平衡状態を試索的に求めて得られる荷重と変位であり，第2塑性ヒンジ形成時の荷重と変位は，それぞれの塑性ヒンジ点で，同時に降伏条件と荷重と変形が平衡状態になるように試索的に荷重と変位を求めたものである。

α が収束しないということは，降伏条件を満足するような荷重と変形の平衡状態がないことを示す。

③ 計算例：後述の実験に用いた箱型断面2ヒンジ鋼円弧アーチの模型を例にして具体的な計算例を示す(試験体記号 A-4)。

図-23 のように等分布荷重がA端から nl まで載荷された場合には変位を与える式は以下のとおりである。

式(3.36)において， $L=wl$ となり， Q, Q', R, R' はそれぞれ以下に示すようになる。

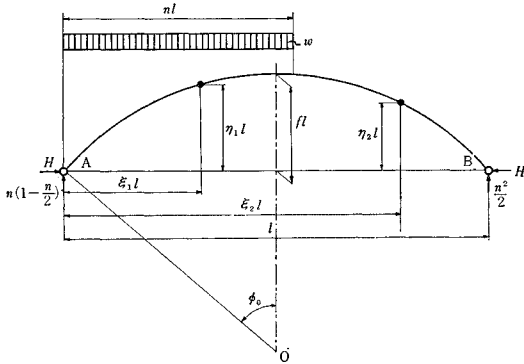


図-23

$\xi \leq n$ のとき

$$Q_1 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[\frac{\eta + \kappa}{2} K_1 - n \left(1 - \frac{n}{2} \right) (\eta + \kappa) K_2 - \left(\eta n + \frac{\eta + \kappa}{2} \right) N_1 + n \left(\kappa + \eta + \frac{\eta n}{2} \right) N_2 - \frac{\eta + \kappa}{2} n^2 N_3 + \frac{\eta}{2} N_4 + \frac{\eta}{32} (2\kappa + \phi_0) (5 - 12n + 12n^2) + \eta \frac{\kappa^2 \phi_0}{8} (3 - 4n + 4n^2) + \frac{\eta}{3} \kappa^3 + \frac{n^2}{2} \kappa^2 + \frac{n^2}{4} \kappa \phi_0 + \frac{\eta^2 n}{2} \left(1 - \frac{n}{2} \right) + \frac{n^2}{6} - \frac{\xi^3}{6} - \frac{n^2}{4} \right] \quad (3.44)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[K_1 - K_2 - \kappa (\eta + 2\kappa) K_3 + \frac{3}{2} \kappa^2 \phi_0 + \frac{1}{8} \phi_0 + \frac{1}{4} \kappa - 2\kappa (1 - \xi) - \frac{\eta}{2} (1 - 2\xi) \right] \quad (3.45)$$

$$R_1 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[K_1 \left(n - \frac{n^2}{2} + \frac{\xi}{2} \right) - \xi \left(\frac{1}{2} + n \right) N_1 + n \xi \left(1 + \frac{n}{2} \right) N_2 - n \xi \left(1 - \frac{n}{2} \right) K_2 - \frac{n^2}{2} \xi N_3 \right]$$

$$+ \frac{\xi}{2} N_4 + n \left(1 - \frac{n}{2} - \xi + n \xi \right) \left(\frac{3}{4} \kappa + \frac{3}{8} \phi_0 + \frac{\kappa^2}{2} \phi_0 \right) - (1 - \xi) \left(\frac{5}{16} \kappa + \frac{5}{32} \phi_0 + \frac{3}{8} \kappa^2 \phi_0 + \frac{\kappa^3}{3} \right) \quad (3.46)$$

$$R_2 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[\kappa K_2 - \xi \kappa K_3 - \frac{\xi}{2} (1 - \xi) + \kappa^2 + \frac{\kappa \phi_0}{2} \right] \quad (3.47)$$

$$Q_1' = \frac{\sin \phi_0}{2} \left[-n \eta (N_3 - 4N_2 + 4N_1) + \eta (N_2 - 4N_1 + 4N_4) + \eta n (1 - n) \times \left(\kappa - \frac{\phi_0}{2} - 2\kappa^2 \phi_0 \right) + \eta \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{1}{4} \phi_0 + \kappa^2 \phi_0 + \frac{3}{8} \kappa^3 \right) + n^2 - \frac{2n^3}{3} - n \xi (1 - \xi) + \frac{n^2}{2} \xi (1 - \xi) + \frac{\xi^2}{2} - \frac{2}{3} \xi^3 \right] \quad (3.48)$$

$$Q_2' = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[4a (K_1 - K_2) + b K_3 + a \left(\kappa + \frac{\phi_0}{2} - 2\kappa^2 \phi_0 \right) - b \phi_0 \right] \quad (3.49)$$

$$R_1' = \frac{\sin \phi_0}{2} \left[n \left(1 - \frac{n}{2} \right) (K_3 - 4K_2 + 4K_1) - \xi n (N_3 - 4N_2 + 4N_1) + \xi (N_2 - 4N_1 + 4N_4) - (K_2 - 4K_1 + 4K_4) - n \left(1 - \frac{n}{2} + \xi - \xi n \right) \left(\kappa - \frac{\phi_0}{2} - 2\kappa \phi_0 \right) - (1 - \xi) \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{\phi_0}{4} + \kappa^2 \phi_0 + \frac{8}{3} \kappa^3 \right) \right] \quad (3.50)$$

$$R_2' = \frac{1}{2 \sin \phi_0} [2a \xi (1 - \xi)] \quad (3.51)$$

$\xi \leq n$ のとき

$$Q_1 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[-\eta n N_1 + \frac{\eta n^2}{2} N_2 + \frac{\eta}{2} N_4 + \frac{\eta + \kappa}{2} n^2 (K_2 - K_3) + \frac{\eta}{32} (2\kappa + \phi_0) \times (5 - 12n + 12n^2) + \frac{\kappa^3 \phi_0}{8} \eta (3 - 4n + 4n^2) + \frac{1}{3} \eta \kappa^3 + \frac{n^2 \kappa^2}{2} + \frac{n^2 \kappa \phi_0}{4} - \frac{n^2}{4} + \frac{n^2 \xi}{2} - \frac{n^2 \xi^2}{4} \right] \quad (3.52)$$

$$Q_2 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[K_1 - K_2 - \kappa (2\kappa + \eta) K_3 + \frac{3\kappa^2 \phi_0}{2} + \frac{\phi_0}{8} + \frac{\kappa}{4} - 2\kappa (1 - \xi) - \frac{\eta}{2} (1 - 2\xi) \right] \quad (3.53)$$

$$R_1 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[n (1 - \xi) N_1 - \frac{n^2}{2} (1 - \xi) N_2 - \frac{n^2}{2} K_1 + \frac{n^2}{2} (1 + \xi) K_2 - \frac{n^2 \xi}{2} K_3 - \frac{1 - \xi}{2} N_4 + n \left(1 - \frac{n}{2} - \xi + n \xi \right) \left(\frac{3}{4} \kappa + \frac{3}{8} \phi_0 \right) \right]$$

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{\kappa^2 \phi_0}{2} \right) - (1-\xi) \left(\frac{5}{16} \kappa + \frac{5}{32} \phi_0 + \frac{3}{8} \kappa^2 \phi_0 \right. \\ & \left. + \frac{\kappa^3}{3} \right) \dots\dots\dots (3.54) \end{aligned}$$

$$R_2 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[\kappa K_2 - \kappa \xi K_3 - \frac{\xi}{2} (1-\xi) + \kappa^2 + \frac{\kappa \phi_0}{2} \right] \dots\dots\dots (3.55)$$

$$Q_1' = \frac{\sin \phi_0}{2} \left[-\eta n (N_3 - 4 N_2 + 4 N_1) \right. \\ \left. + \eta (N_2 - 4 N_1 + 4 N_4) + \eta n (1-n) \right. \\ \left. \times \left(\kappa - \frac{\phi_0}{2} - 2 \kappa^2 \phi_0 \right) + \eta \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{\phi_0}{4} + \kappa^2 \phi_0 \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{8}{3} \kappa^3 \right) + n^2 \xi (1-\xi) \right] \dots\dots\dots (3.56)$$

$$Q_2' = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[4 a (K_1 - K_2) + b K_3 \right. \\ \left. + a \left(\kappa + \frac{\phi_0}{2} - 2 \kappa^2 \phi_0 \right) - b \phi_0 \right] \dots\dots\dots (3.57)$$

$$R_1' = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[a \left\{ n (1-\xi) (N_3 - 4 N_2 + 4 N_1) \right. \right. \\ \left. \left. - (1-\xi) (N_2 - 4 N_1 + 4 N_4) \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{n^2}{2} (K_3 - 4 K_2 + 4 K_1) \right\} \right. \\ \left. - n \left(1 - \frac{n}{2} - \xi + \xi n \right) \left(\kappa - \frac{\phi_0}{2} - 2 \kappa^2 \phi_0 \right) \right. \\ \left. - (1-\xi) \left(\frac{\kappa}{2} + \frac{\phi_0}{4} + \kappa^2 \phi_0 + \frac{8}{3} \kappa^3 \right) \right] \dots\dots\dots (3.58)$$

$$R_2' = \sin \phi_0 \xi (1-\xi) \dots\dots\dots (3.59)$$

$Q_3, Q_4, Q_3', Q_4', R_3, R_4, R_3', R_4'$ は ξ に無関係で、

$$Q_3 = -R_3 = \frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[\frac{\kappa}{2} N_1 - \kappa n N_2 + \frac{n^2 \kappa}{2} N_3 \right. \\ \left. - \kappa \left(n - \frac{3}{8} \right) \left(\kappa + \frac{\phi_0}{2} \right) + \frac{\kappa^3 \phi_0}{4} + \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{6} \right] \dots\dots\dots (3.60)$$

$$Q_4 = -R_4 = -\frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[3 \kappa^2 \phi_0 + \frac{1}{4} \phi_0 - \frac{3}{2} \kappa \right] \dots\dots\dots (3.61)$$

$$Q_3' = -R_3' = -\frac{\sin \phi_0}{2} n^2 \left(1 - \frac{2}{3} n \right) \dots\dots\dots (3.62)$$

$$Q_4' = -R_4' = -\frac{1}{2 \sin \phi_0} \left[\sin \phi_0 \cos \phi_0 + \phi_0 \right] \dots\dots\dots (3.63)$$

ここで、

$$K_1 = -\frac{2 \xi + 3}{4} (-\xi^2 + \xi + \kappa^2)^{1/2} - \phi_\xi \cdot \frac{3 + 4 \kappa^2}{8} \dots\dots\dots (3.64)$$

$$K_2 = -(-\xi^2 + \xi + \kappa^2)^{1/2} - \frac{\phi_\xi}{2} \dots\dots\dots (3.65)$$

$$K_3 = -\phi_\xi = -\sin^{-1} \frac{1-2\xi}{(1+4\kappa^2)^{1/2}} \dots\dots\dots (3.66)$$

$$K_4 = -\frac{1}{24} (8 \xi^2 + 10 \xi + 15 + 16 \kappa^2) (-\xi^2 + \xi + \kappa^2)^{1/2} \\ - \phi_\xi \cdot \frac{5 + 12 \kappa^2}{16} \dots\dots\dots (3.67)$$

$$\kappa = \frac{1}{2} \cot \phi_0 \dots\dots\dots (3.68)$$

$$a = \sin^2 \phi_0 \dots\dots\dots (3.69)$$

$$b = \cos^2 \phi_0 \dots\dots\dots (3.70)$$

N_1, N_2, N_3, N_4 は K_1, K_2, K_3, K_4 についてそれぞれ ξ と n を入れ換えたものである。 $2\phi_0$ = 中心角。

(i) 変位を与える式；図-24 に示すように、上界定理によって得られる塑性ヒンジの位置はそれぞれ $\xi_1 =$

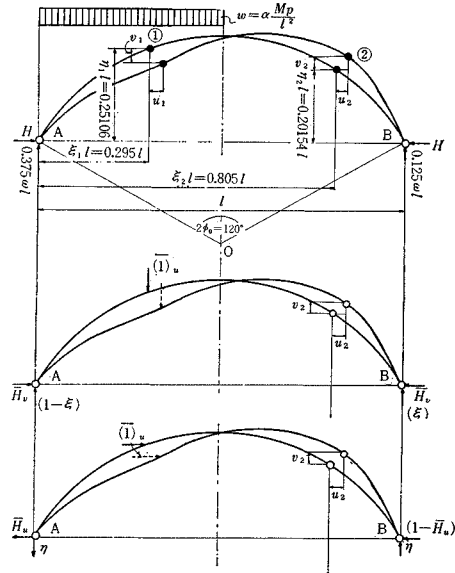


図-24

0.295, $\xi_2 = 0.805$ である。また崩壊荷重は $f_s w = 57.546 \cdot (M_p/l^2)$ である。式 (3.36) の係数を求めるために式 (3.44) ~ (3.70) に $n = 0.5, \xi_1 = 0.295, \xi_2 = 0.805, \phi_0 = 60^\circ$ を代入し、さらに $E = 2.113 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2, I = 143 \text{ cm}^4, A = 13.48 \text{ cm}^2, l = 400 \text{ cm}, w = \alpha \cdot (M_p/l^2), H = \alpha \beta \cdot (M_p/l^2), M_p = 124\,075 \text{ kg-cm}$ を用いると変位を与える式はそれぞれ

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u_1^M + u_1^N = \{-0.085926 \alpha + 0.456780 \alpha \beta \\ &+ 0.177917 \alpha \bar{H}_{1,u} - 0.865298 \alpha \beta \bar{H}_{1,u}\} l \times 10^{-2} \\ u_2 &= u_2^M + u_2^N = \{-0.063314 \alpha + 0.346384 \alpha \beta \\ &+ 0.177917 \alpha \bar{H}_{2,u} - 0.865298 \alpha \beta \bar{H}_{2,u}\} l \times 10^{-2} \\ v_1 &= v_1^M + v_1^N = \{0.099535 \alpha - 0.446284 \alpha \beta \\ &- 0.177917 \alpha \bar{H}_{1,v} + 0.865298 \alpha \beta \bar{H}_{1,v}\} l \times 10^{-2} \\ v_2 &= v_2^M + v_2^N = \{0.058982 \alpha - 0.329978 \alpha \beta \\ &- 0.177917 \alpha \bar{H}_{2,v} + 0.865298 \alpha \beta \bar{H}_{2,v}\} l \times 10^{-2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3.71)$$

となる。

また、この計算例の場合、塑性ヒンジ点の降伏条件式はそれぞれ

$$m_1 = 0.578 n_1 + 1, m_2 = -0.578 n_2 - 1 \dots (3.72)$$

パラメーター h は

$$h = \frac{M_p}{lN_p} = \frac{Z}{Al} = 0.00768 \dots (3.73)$$

式 (3.38) より水平反力係数を求めると $\beta = 0.20561$ となる。

(ii) 第1塑性ヒンジ形成時の荷重と変位; 式 (3.41) における e_1, e_2 を求めて変位を表わすと、

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= 0.79935 \alpha \times 10^{-4} l, & v_1 &= 0.77767 \alpha \times 10^{-4} l \\ u_2 &= 0.80578 \alpha \times 10^{-4} l, & v_2 &= -0.79555 \alpha \times 10^{-4} l \end{aligned} \right\} \dots (3.74)$$

(第1段階)

②点における曲げモーメントと軸方向力はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} m_2 &= 0.125 \left(1 - 0.805 - \frac{u_2}{l} \right) \alpha \\ &\quad - \left(0.201538 - \frac{v_2}{l} \right) \alpha \beta \\ n_2 &= -0.125 \alpha \sin \phi_2 - \alpha \beta \cos \phi_2 \end{aligned} \right\} \dots (3.75)$$

式 (3.72) ~ (3.75) と $\beta_1 = 0.20561$ から $\alpha_1, m_{2,1}$ を求めると

$$\alpha_1 = 51.315, m_{2,1} = -0.94574 \text{ を得る。}$$

(第2段階)

$\alpha_1 = 51.315, \beta_1 = 0.20561$ を用いて変位を求めると、

$$\left. \begin{aligned} u_{1,1} &= 0.004104 l, & u_{2,1} &= 0.004137 l \\ v_{1,1} &= 0.003992 l, & v_{2,1} &= -0.004085 l \end{aligned} \right\} (3.76)$$

式 (3.76) を式 (3.75) に代入し、式 (3.72) と $m_2 = m_{2,1} = -0.94574$ を用いると、 α_2, β_2 に関する2つの式が得られる。

$$\beta_2 = 0.112540 \times 4.77578 \frac{1}{\alpha_2} \dots (3.77)$$

$$\beta_2 = 0.116027 + 4.59714 \frac{1}{\alpha_2} \dots (3.78)$$

式 (3.77), 式 (3.78) から $\alpha_2 = 51.219, \beta_2 = 0.20578$, 式 (3.75) から $m_{2,2} = -0.94527$ をそれぞれ得る。

(第3段階)

第2段階と同様にして、第3, 第4近似値を求めると $\alpha_3 = 51.213, \beta_3 = 0.20589, \alpha_4 = 51.213, \beta_4 = 0.20590$, また変位はそれぞれ $u_{1,4} = 0.00414 l, u_{2,4} = 0.00408 l, v_{1,4} = 0.00393 l, v_{2,4} = -0.00410 l$ を得る。

①点においても同様の手順で α を求めると②点より大きい値となるので、第1塑性ヒンジは②点に生ずることがわかる。

(iii) 第2塑性ヒンジ形成時の荷重と変位; 第1塑性ヒンジ形成後は②点において摩擦ヒンジを持つ静定アーチとなる。そこで、図-24 に示すように静定基本形の水平反力 \bar{H} はそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_{1,u} &= 1 - \frac{(0.25106 - v_1/l)(0.195 - u_2/l)}{(0.20154 - v_2/l)}, \\ \bar{H}_{2,u} &= 0.805 + u_2/l \\ \bar{H}_{1,v} &= \frac{(0.295 + u_2/l)(0.195 - u_2/l)}{(0.20154 - v_2/l)}, \\ \bar{H}_{2,v} &= \frac{(0.805 + u_2/l)(0.195 - u_2/l)}{0.20154 - v_2/l} \end{aligned} \right\} \dots (3.79)$$

また、それぞれの塑性ヒンジ点の曲げモーメントと軸方向力は崩壊時において

$$\left. \begin{aligned} [m_1]_u &= 0.375(0.295 + [u_1]_u/l)[\alpha]_u \\ &\quad - (0.251055 - [v_1]_u/l)[\alpha]_u[\beta]_u \\ &\quad - 0.5(0.295 + [u_1]_u/l)^2 \dots (3.80) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [n_1]_u &= -0.375[\alpha]_u \sin \phi_1 - [\alpha]_u[\beta]_u \cos \phi_1 \\ &\quad + (0.295 + [u_1]_u/l)[\alpha]_u \sin \phi_1 \dots (3.81) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [m_2]_u &= 0.125(0.195 - [u_2]_u/l)[\alpha]_u \\ &\quad - (0.20154 - [v_2]_u/l)[\alpha]_u[\beta]_u \dots (3.82) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} [n_2]_u &= -0.125[\alpha]_u \sin \phi_2 - [\alpha]_u[\beta]_u \cos \phi_2 \\ &\quad \dots (3.83) \end{aligned} \right\}$$

となる。

以下、手順は前述の一般論で述べたので結果のみを示すと以下のとおりである。

第1近似値は変形を考慮しないときの崩壊荷重であり、 $[\alpha_1]_u = 57.546, [\beta_1]_u = 0.20194$ を得る。これは下界定理によって求めた崩壊荷重で、前述の上界定理によって求めたものと全く一致する。

$$[\alpha_2]_u = 53.058, [\beta_2]_u = 0.20069$$

$$[\alpha_3]_u = 52.985, [\beta_3]_u = 0.20117$$

$$[\alpha_4]_u = 53.031, [\beta_4]_u = 0.20119$$

$$[\alpha_5]_u = 53.040, [\beta_5]_u = 0.20119$$

変位はそれぞれ、

$$[u_{1,5}]_u = 0.004798 l, [u_{2,5}]_u = 0.005122 l,$$

$$[v_{1,5}]_u = 0.004669 l, [v_{2,5}]_u = -0.005041 l$$

となる。

以上の計算例に示したように、 α, β, u, v は一定値に収束し、この収束値が変形を考慮した崩壊荷重、水平反力係数、および変位である。ここで、 ϕ_1, ϕ_2 の変化は変形による影響がきわめて小さいので無視した。

4. 2 ヒンジ円弧アーチの塑性崩壊実験

塑性ヒンジを仮定した単純塑性理論の上界定理による崩壊荷重の算定が、果たして妥当かどうか、また、理論的に明らかにされた変形による影響が果たして実験的に正しく現われるかどうかを調べるために以下述べるような模型実験を行なった。

(1) 実験方法

a) 試験体とその種類

試験体は図-25で示したように中心角120°と60°の2種類を鋼材SS-41を用いて製作した。断面は箱型断面で、すべて溶接によって組立て、載荷点にはダイヤフラムを入れて補強し、局部座屈を防ぐように考慮した。また、焼なましによって製作上の残留応力を取り除いた。

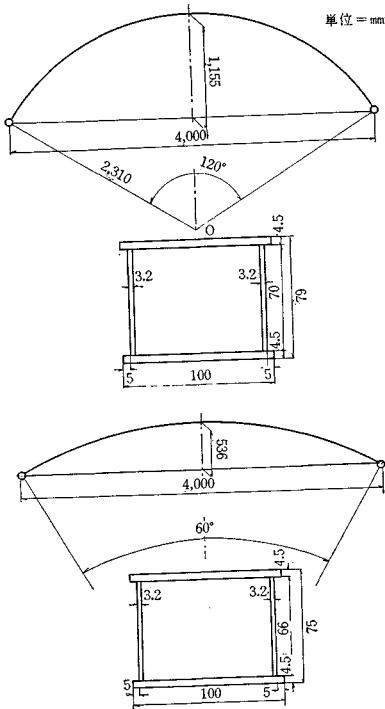


図-25 試験体

本試験に用いた鋼材(SS-41)の特性は母材の引張試験により、降伏応力 $\sigma_y=2\,997\text{ kg/cm}^2$ 、ヤング係数 $E=2\,113\times 10^6\text{ kg/cm}^2$ 、ひずみ硬化開始応力 $\sigma_{st}=3\,322\text{ kg/cm}^2$ 、降伏点ひずみ $\epsilon_y=1\,443\times 10^{-6}$ 、ひずみ硬化開始点のひずみ $\epsilon_{st}=25\,140\times 10^{-6}$ を得ている。また、断面は、フランジ=100 mm×4.5 mm×2、ウェブ=70 mm×3.2 mm×2、スパン=4 000 mm、である。

試験体の種類は以下のとおりである。

表-1

記号	中心角	せり高	載荷方法
A-1	120°	0.2887 <i>l</i>	スパン中央に集中荷重を載荷
A-2	120°	0.2887 <i>l</i>	1/4 <i>l</i> 点に集中荷重を載荷
A-3	120°	0.2887 <i>l</i>	全スパンに等分布荷重を載荷
A-4	120°	0.2887 <i>l</i>	半スパンに等分布荷重を載荷
B-1	60°	0.1340 <i>l</i>	スパン中央に集中荷重を載荷
B-2	60°	0.1340 <i>l</i>	1/4 <i>l</i> 点に集中荷重を載荷
B-3	60°	0.1340 <i>l</i>	全スパンに等分布荷重を載荷
B-4	60°	0.1340 <i>l</i>	半スパンに等分布荷重を載荷

b) 載荷方法

集中荷重はすべてオイルジャッキにより、フレームに反力を取らせて載荷した。

等分布荷重はスパンの1/10 *l* につき一つの集中荷重に置き換え、載荷に際して、(i) 各点の荷重が同じであること、(ii) 載荷点の変形に対して載荷装置が追従すること、(iii) 同時に載荷できることなどを考慮して図-26、写真-1に示したような装置を用いた。また、荷重強度は図-26に示したようにストレインゲージによって測定した。

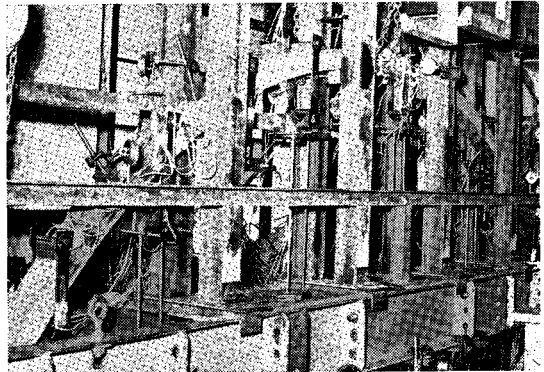


写真-1 等分布荷重の載荷状態 (A-3)

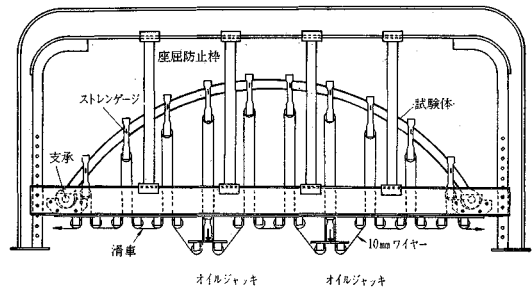


図-26 等分布荷重の載荷方法

c) 応力と変位の測定

上界定理によって得られた塑性ヒンジの発生予想点の断面とその付近の数カ所の断面にストレインゲージを貼付して、各荷重時のひずみを測定して応力を算出し、塑性ヒンジ形成状態と降伏領域の広がりを調べた。

また、変位はダイヤルゲージによって測定した。

(2) 実験結果と考察

各荷重時における第1塑性ヒンジ形成点での応力分布の状態を図-27(a), (b)に示した。図において α_n は最大荷重を示している。図-28(a), (b), (c), (d)に塑性ヒンジ点における垂直変位と荷重の関係を示した。図において、実線は変形を考慮しない場合の理論曲線であり、点線と一点鎖線は変形を考慮した場合の理論曲線、黒丸は実験値を示している。

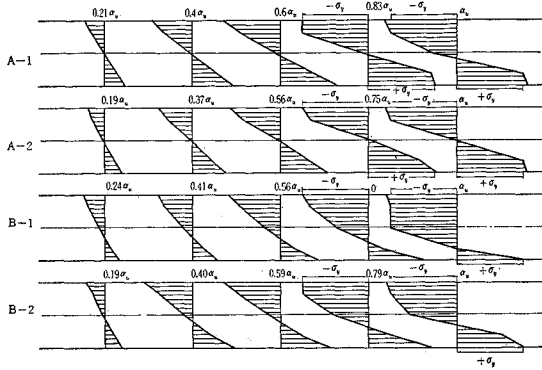


図-27(a) 塑性ヒンジ点における応力分布

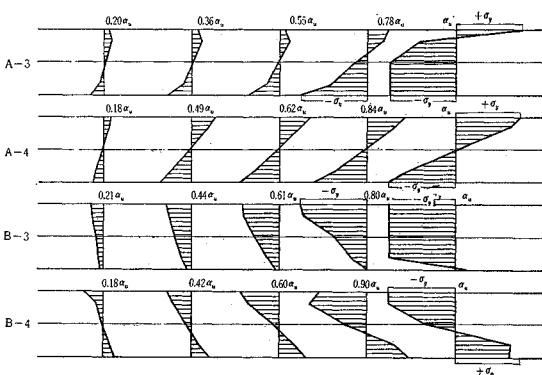


図-27(b) 塑性ヒンジ点における応力分布

また、塑性ヒンジ発生予想点付近における釁力所の断面の応力測定の結果、上界定理によって得られた塑性ヒンジの位置はほとんど実験値と一致した。

以下、実験結果を考察する。

a) 塑性ヒンジ形成点とその点の応力分布

上界定理によって得られた塑性ヒンジの位置が、実験値と一致したこと、および図-27(a), (b) に示したように全断面降伏の塑性ヒンジと考えられる応力分布状態が表われていることは、単純塑性理論が定義する塑性ヒンジを仮定することの妥当性を示しているものとする。

図-27(a) は集中荷重の場合で、塑性ヒンジ形成点の応力はひずみ硬化域にまで進んでいる。図-27(b) は等分布荷重の場合で、応力は降伏応力に達しているが、ひずみ自体はそれほど大きくない。前者の理由は集中荷重の場合には軸方向力の影響が少なく、曲げモーメントが崩壊を支配する。かつ荷重点下では曲げモーメントが急に大きくなるため大きな回転角が要求されるので、上下フランジにおいて非常に大きいひずみが生じ、ひずみ硬化域にまで達したものとする。一方、後者は等分布荷重の場合で、塑性ヒンジ点付近の曲げモーメントおよび軸方向力の大きさの差が小さいため、降伏領域が広範囲におよび、回転角は小さい、したがってひずみ自体も小さいものとする。

図-27(b) の B-3 型は軸方向力の影響がきわめて大きい場合で、崩壊時には、ほとんど全断面軸方向力によって降伏している様子が明瞭である。

b) 塑性崩壊までの過程

図-28(a), (b), (c), (d) に示したように、変位と荷重の関係は、変形を考慮した方の理論曲線の方が実験値に近く、その傾向は大体正しいと考えられる。

理論的に変位を計算すると、一般に弾性域では荷重の増加に伴って変位も増加する。しかし、荷重条件によっては弾性域で荷重の増加とともに変位が増加しても、第1塑性ヒンジが形成されることによって荷重の増加とは

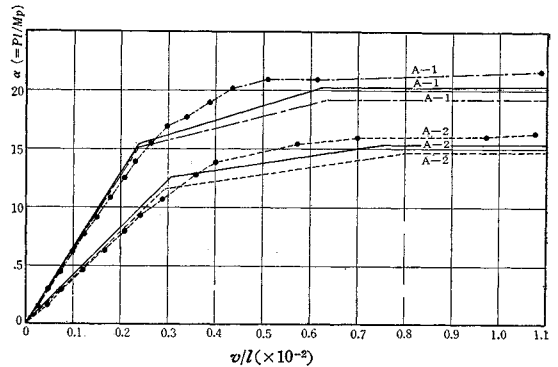


図-28(a) 荷重-変位曲線

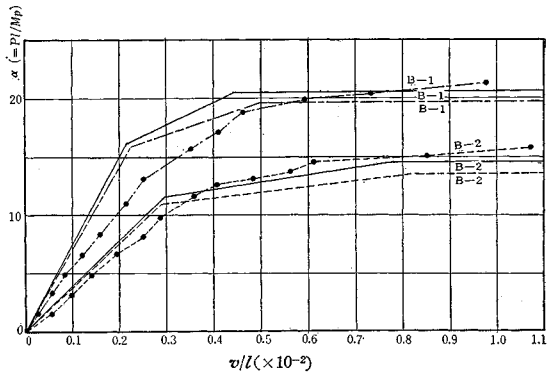


図-28(b) 荷重-変位曲線

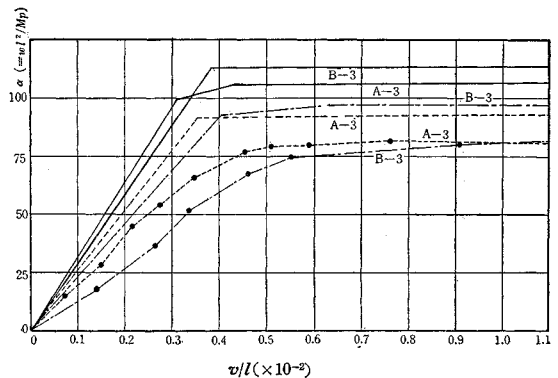
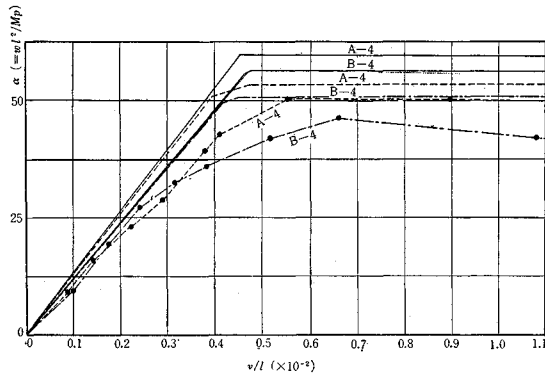
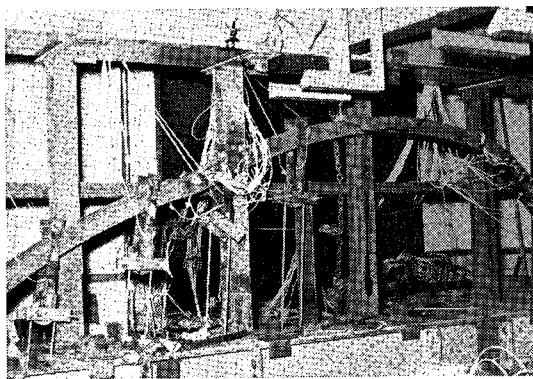


図-28(c) 荷重-変位曲線



図一28(d) 荷重-変位曲線



写真一2 塑性崩壊後の変形状態 (A-4)

逆に変位が減少することもあり得る。B-3 型の端部側の塑性ヒンジ点がこの例で、実験的にも明らかであった。

上界定理で定義した崩壊機構が正しく成立することは第2 塑性ヒンジ形成後、さらに変形させた結果、写真一2 に示したように、ほぼ予想したような機構になるように変形が進むことから明らかである。

c) 崩壊荷重

本理論は理想化した応力-ひずみ曲線を仮定しているため、ひずみ硬化の影響は考慮していない。母材の引張試験の結果、ひずみ硬化点では降伏応力の 11% も応力が増加すること、および、図一27 (a) に示したように、集中荷重の場合、ひずみ硬化域にまで応力が進んでいることは明らかに崩壊荷重を増加させた原因になっていると考えられる。図一28(a), (b) に示したように、塑性ヒンジ点の応力分布によって崩壊機構が形成されたと見なせる時点以後も、変位の増加とともに荷重が増加しているのは明らかにひずみ硬化の影響が現われたものと考えられる。

図一28(a), (b) の場合は、変形の影響による崩壊荷重の低下は比較的少なく、理論的には 5% 程度である。

図一28(c) の場合は変形による影響が最も大きい場合で理論的にも 15% 程度の崩壊荷重の低下がある。しか

し、実験値が理論値よりさらに低下しているのは、理論的に等分布荷重として計算しているが、実験上、集中荷重で置き換えた際、荷重が均一にならなかったためと、単純に塑性ヒンジ点を摩擦ヒンジと仮定して得られる変形より、降伏領域を考慮して得られる変形の方が大きくなるために、現われた現象と考えられる。

図一28(d) は理論的に変形による崩壊荷重の低下が 10% 程度の場合で、A-4 型はほとんど理論値と実験値が一致している。B-4 型で理論値より実験値が小さくなっているのは、溶接による継手が不完全な箇所があったので載荷途中でフランジが破断したためである。

また、等分布荷重が載荷された場合、一般に変位が理論値より大きいのが、これは前に述べたように塑性ヒンジ点付近の降伏領域の広がりが大きくなるために現われた現象であると考えられる。

以上の実験の結果、塑性ヒンジを仮定した単純塑性理論によって、比較的容易に大体の塑性崩壊荷重を予測することができる。しかし、載荷条件によってはひずみ硬化の影響によって崩壊荷重が増加するが、一方、変形の影響によっては崩壊荷重の低下が現われることが明らかにされた。そこで、前述のくり返し法によって、変形の影響を考慮した崩壊荷重を算定すれば、さらに正しい崩壊荷重に近づけることができる。したがって、単純塑性理論によって得られる崩壊荷重は、危険側にある変形による崩壊荷重の低下を前述の手法によって検討する必要がある。さらに、本論文では考慮しなかった塑性ヒンジ点付近の降伏領域の広がりやひずみ硬化の影響を考慮することによって、さらに精度のよい崩壊荷重の算定ができるであろう。

5. 結 論

本研究は、一般に困難とされていた複雑な載荷条件および、任意形状の両端ヒンジの 2 ヒンジ アーチの崩壊荷重の算定法を単純塑性理論によって示した。図一11~20 はその算定結果の一部を示したものであり、アーチの諸元および載荷条件による崩壊荷重の特性を表わした。

実験によると、単純塑性理論による崩壊荷重は変形による影響が考慮されていないので、載荷条件によっては崩壊荷重が過大に評価されていることがあることがわかった。したがって、単純塑性理論による崩壊荷重は変形による影響を検討する必要がある。

この検討の方法は 3. (4) で述べたが、実験的にもこの手法の妥当性が明らかとなった。

図一11~20 に示したアーチの諸元および載荷条件による崩壊荷重の特性自体は変形による影響によって大き

く変化することはないと予想されるので、崩壊荷重の概略の値を算定するのに有効であると考ええる。

本研究は、変形の影響についてはその検討の手法のみを示したものであるが、アーチの諸元をパラメーターにした変形による崩壊荷重の低下についての図表は今後研究を進めて示したいと考えている。

最後に、本研究の計算は、大阪大学大型計算機センターの NEAC-2200 を使用したことと、実験は昭和 42 年度文部省各個研究補助金によったことを付記する。

参 考 文 献

- 1) P.G. Hodge : "Plastic Analysis of Structure", Mc. Graw Hill, 1959.
- 2) 福本・吉田 : "変動くり返し荷重によるアーチの崩壊", 土木学会論文集 131 号, 1966 年 5 月
- 3) 横尾・山肩 : "アーチの終局状態に関する研究", 日本建築学会論文報告集 58・59 号, 1958 年 3 月, 6 月
- 4) 日本建築学会 : "建築構造物のリミットアナリシス", 技報堂, 1963 年
- 5) 山崎・石川 : "円弧アーチの弾塑性解析", 土木学会論文集 158 号, 1968 年 10 月
- 6) 前田 : "Ultimate Strength Analysis of Two-Hinged Braced-Rib Steel Arch Bridge", Technology Reports of Osaka University, Vol. 17, No. 763, 1967.
- 7) 奥村・前田・大久保 : "アーチの極限耐荷力に関する研究", 土木学会年次講演概要集第 II 部, 1960 年 5 月
- 8) 前田・藤本 : "アーチの塑性崩壊挙動に関する研究", 土木学会年次講演概要集第 II 部, 1967 年 5 月
- 9) 前田・藤本 : "アーチの塑性崩壊挙動に関する実験的研究" 土木学会関西支部講演概要集, 1968 年 5 月
- 10) L.K. Stevens ; "Carrying Capacity of Mild-Steel Arches", Proc. Inst. Civil. Engrs. London 6; 493~514, 1959.
- 11) C.E. Massonnet, M.A. Save; "Plastic Analysis and Design Vol. I, Beams and Frames", Blaisdell, 1965.

(1969.5.14・受付)