

円弧部材を有する平面構造物 に対するモーメント分配法

MOMENT DISTRIBUTION METHOD FOR PLANE STRUCTURES WITH CIRCULAR ARC BOW MEMBERS

山 本 宏*
By Hiroshi Yamamoto

1. ま え が き

ここに取り扱う円弧材とは、軸線が円弧をなし荷重は円弧を含む平面に直角な方向から作用するものとし、荷重のかかり方の点でアーチとは異なるものである。このような部材を有する平面構造(図-1)に対するモーメント分配法について考察しようとするのであるが、直線は円弧の特別な場合であるという考えをすることによって、直線材に対する周知のモーメント分配法はここに述べる円弧材に対する分配法の特別な場合であることを示すと同時に、直線材と円弧材との混合構造も解析可能にしようとするものである。

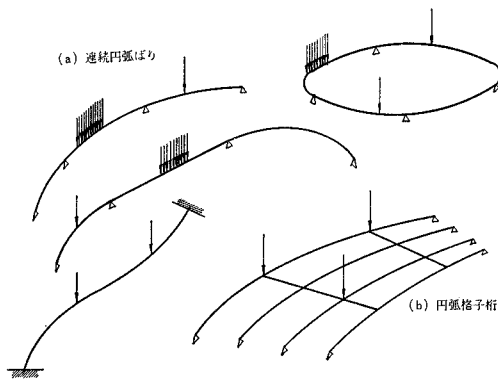


図-1

2. 円弧部材に対する変形式

円弧部材の解析に関してつぎのように定める(図-2 参照)。

(1) 円弧の中心角、半径は図-2のように、それぞれ $2\alpha, r$ で表わす。

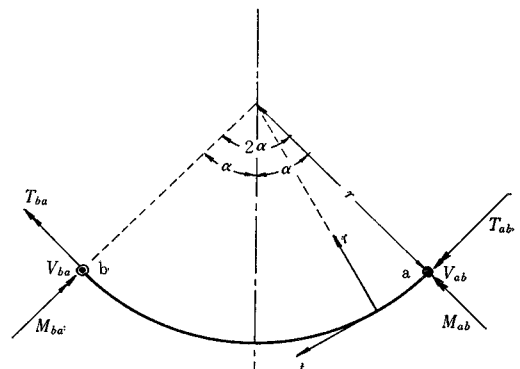


図-2

(2) 円弧上の任意点に引いた法線 (r) と接線 (t) は図示の方向を正とする。

(3) これをもとにして、 r 軸 t 軸まわりのモーメントをそれぞれ M^r, M^t と表わすが、軸を r, t の正方向にむけて時計まわりのものを正とする。

(4) 端せん力 V は、部材を r の正方向にみて考える端のせん断力が遠端を中心にして、部材を時計まわりに回転させる働きを示すものを正とする。

(5) たわみ角、ねじり角、部材角をそれぞれ θ^r, θ^t, R で表わし、モーメントと同一の符号をつける。

円弧材の端モーメントと変形の関係を Castigliano の定理を用いて求めると、直線材に対する周知のたわみ角式と同様なサフィックスのつけ方をして(図-2 参照)、

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= K[\mathfrak{A}_1\varphi_a^r + \mathfrak{A}_2\varphi_b^r - \mathfrak{B}_1\varphi_a^t - \mathfrak{B}_2\varphi_b^t + \mathfrak{C}_2\psi] + C_{ab}^r \\ M_{ba}^r &= K[\mathfrak{A}_2\varphi_a^r + \mathfrak{A}_1\varphi_b^r + \mathfrak{B}_2\varphi_a^t + \mathfrak{B}_1\varphi_b^t + \mathfrak{C}_2\psi] + C_{ba}^r \\ M_{ab}^t &= K[-\mathfrak{B}_1\varphi_a^r + \mathfrak{B}_2\varphi_b^r + \mathfrak{D}\varphi_a^t + \mathfrak{B}_3\varphi_b^t + \mathfrak{E}_2\psi] + C_{ab}^t \\ M_{ba}^t &= K[-\mathfrak{B}_2\varphi_a^r + \mathfrak{B}_1\varphi_b^r + \mathfrak{B}_3\varphi_a^t + \mathfrak{D}\varphi_b^t - \mathfrak{E}_2\psi] + C_{ba}^t \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^t &= K[-\mathfrak{B}_1\varphi_a^r + \mathfrak{B}_2\varphi_b^r + \mathfrak{D}\varphi_a^t + \mathfrak{B}_3\varphi_b^t + \mathfrak{E}_2\psi] + C_{ab}^t \\ M_{ba}^t &= K[-\mathfrak{B}_2\varphi_a^r + \mathfrak{B}_1\varphi_b^r + \mathfrak{B}_3\varphi_a^t + \mathfrak{D}\varphi_b^t - \mathfrak{E}_2\psi] + C_{ba}^t \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

* 正会員 九州工業大学助教授 開発土木工学科

$$\begin{aligned}
 V_{ab} &= V_{ba} \\
 &= -\frac{K}{2\alpha r} [\mathfrak{C}_1(\varphi_a^r + \varphi_b^r) + \mathfrak{C}_1(\varphi_a^t \\
 &\quad - \varphi_b^t) + \mathfrak{F}\psi] + C \dots\dots\dots(3)
 \end{aligned}$$

ただし、上式は部材は等断面であり、荷重による水平変位は小さく無視できるものとし、垂直変位 δ のみを考えている。また式中の諸係数は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{A}_1 &= \left[2\alpha^2 \left\{ \alpha(1+\lambda) - (1-\lambda) \frac{\sin 4\alpha}{4} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \alpha\lambda \sin^2 2\alpha \right] / A \\
 \mathfrak{A}_2 &= -[2\alpha^3(1+\lambda)\cos 2\alpha \\
 &\quad - \alpha^2(1-\lambda)\sin 2\alpha - \alpha\lambda \sin^2 2\alpha] / A \\
 \mathfrak{B}_1 &= \alpha \sin^2 \alpha [(1-3\lambda)\sin 2\alpha \\
 &\quad - 2\alpha \{(1-\lambda)\cos 2\alpha - 2\lambda\}] / A \\
 \mathfrak{B}_2 &= -\alpha(1+\lambda) [\sin 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha \\
 &\quad + 2\alpha \cdot \sin^2 \alpha - 2\alpha^2 \cdot \sin 2\alpha] / A \\
 \mathfrak{B}_3 &= \mathfrak{B}_1 \sin 2\alpha - \mathfrak{D} \cos 2\alpha + \mathfrak{C}_1 2 \sin^2 \alpha \\
 \mathfrak{C}_1 &= 2\alpha^2 \sin^2 \alpha [2\alpha(1+\lambda) + (1-\lambda)\sin 2\alpha] / A \\
 \mathfrak{C}_2 &= \frac{2\alpha^2 \sin^2 \alpha}{3} [2\alpha(1+\lambda) + (1-\lambda)\sin 2\alpha] / A \\
 \mathfrak{D} &= [\alpha^2(1+\lambda) \{ \alpha(1+3\lambda) - 2\lambda \sin 2\alpha \} \\
 &\quad - 4\alpha\lambda^2 \sin^4 \alpha - \alpha(1-\lambda) \frac{\sin 2\alpha}{4} \\
 &\quad \{ 4\alpha\lambda \cos 2\alpha - (1+3\lambda)\sin 2\alpha \}] / A \\
 \mathfrak{C}_1 &= 2\alpha^2(1+\lambda) \left[-\alpha^2(1+\lambda) + \alpha\lambda \sin 2\alpha \right. \\
 &\quad \left. + (1-\lambda) \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \right] / \lambda A \\
 \mathfrak{C}_2 &= \frac{2\alpha^2(1+\lambda)}{3} \left[-\alpha^2(1+\lambda) + \alpha\lambda \sin 2\alpha \right. \\
 &\quad \left. + (1-\lambda) \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \right] / \lambda A \\
 \mathfrak{F} &= \frac{4\alpha^3}{3} \left[\alpha^2(1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2 \frac{\sin^2 2\alpha}{4} \right] / \lambda A \\
 A &= 2[\alpha(1+\lambda) \{ \alpha^2(1+\lambda) - 2\lambda \sin^2 \alpha \} \\
 &\quad - (1-\lambda)\sin^2 \alpha \{ \alpha(1-\lambda)\cos^2 \alpha + \lambda \sin 2\alpha \}] \\
 &\quad \dots\dots\dots(4)
 \end{aligned}$$

ただし、 $\lambda = EI/GJ$ (EI : 曲げ剛度, GJ : ねじり剛度),

$$K = \frac{I}{2\alpha r}, \quad \varphi^r = 2E\theta^r, \quad \varphi^t = 2E\theta^t,$$

$$\phi = -6ER = -6E \frac{\delta_a - \delta_b}{2\alpha r}$$

であり、 C^r, C^t は荷重項であるが、

$$C = -\frac{1}{2} [(C_{ab}^r + C_{br}^r) \cot \alpha - (C_{ab}^t - C_{ba}^t)]$$

となる。

上記、式 (1), (2), (3) が円弧材に適用されるべき式であるが、式中の係数の極限值を求めると、

表-1

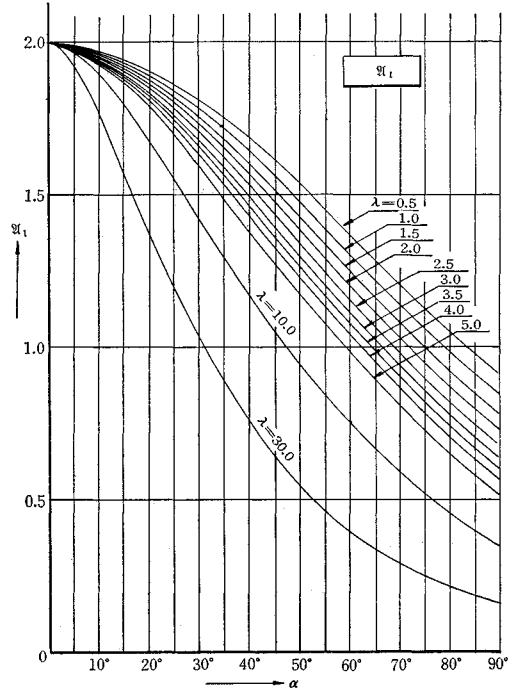
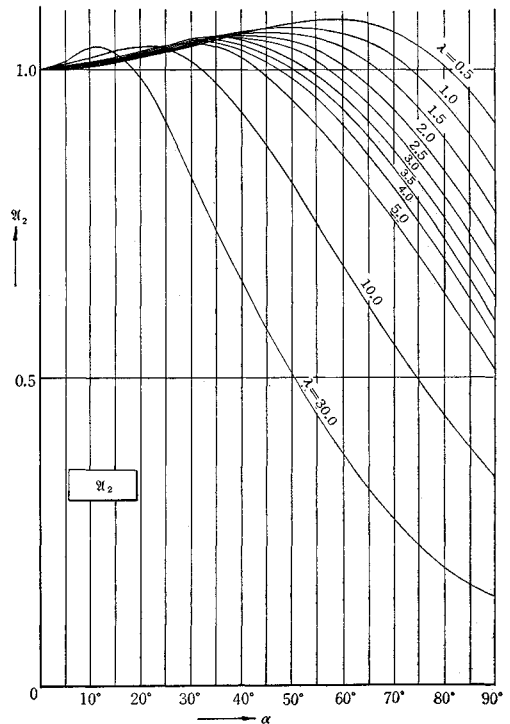


表-2



$$\left. \begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{A}_1 &= 2 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{B}_2 &= 0 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{C}_1 &= 3 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{C}_2 &= 0 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{A}_2 &= 1 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{B}_3 &= -\frac{1}{2\lambda} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{C}_2 &= 1 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{C}_3 &= 2 \\ \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{B}_1 &= 0 & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathfrak{D} &= \frac{1}{2\lambda} & \lim_{\alpha \rightarrow 0} \epsilon_1 &= 0 & & \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

となって直線材に対する周知の諸式に一致するのである。これら係数のグラフを 表-1~表-8 に示す。

これら円弧材の場合の式 (1), (2) を用いて、以下にモーメント分配法の考察を行なう。

表-3

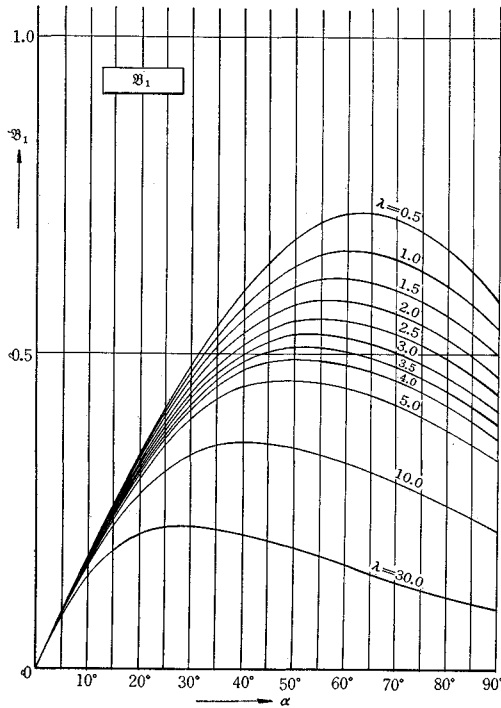


表-4

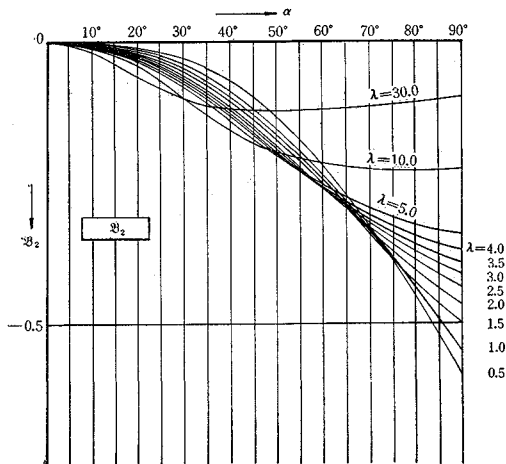


表-5

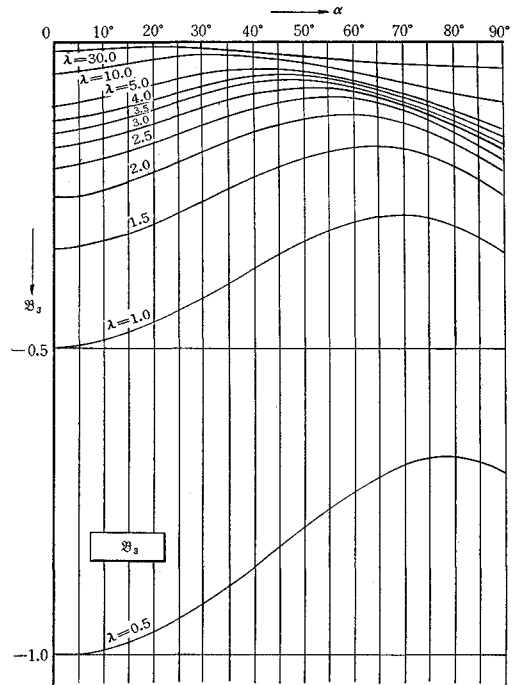


表-6

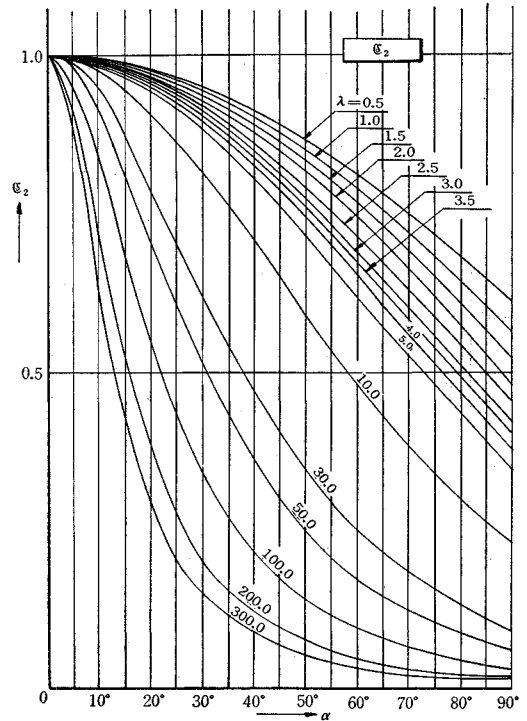


表-7

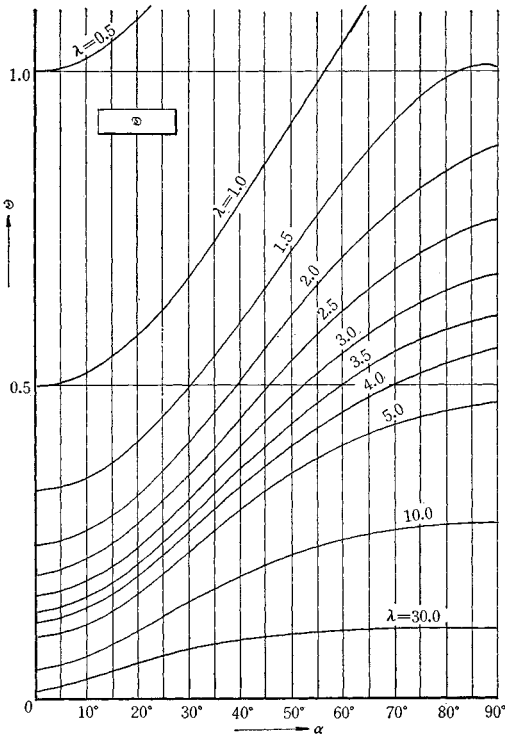
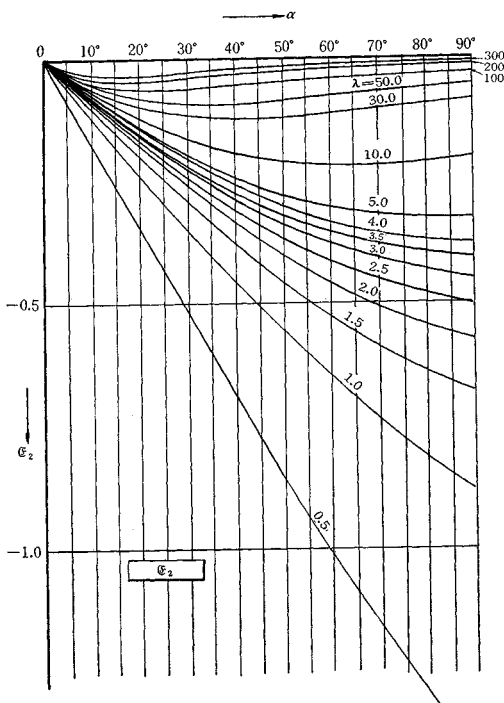


表-8



3. 曲げモーメントの分配

(1) 垂直変位が生じない場合 ($R=0$)

θ^t, δ が生じない状態を考えると式 (1), (2) より,

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= K[\mathfrak{A}_1 \varphi_a^r + \mathfrak{A}_2 \varphi_b^r] \\ M_{ab}^t &= K[-\mathfrak{B}_1 \varphi_a^r + \mathfrak{B}_2 \varphi_b^r] \\ M_{ba}^r &= K[\mathfrak{A}_2 \varphi_a^r + \mathfrak{A}_1 \varphi_b^r] \\ M_{ba}^t &= K[-\mathfrak{B}_2 \varphi_a^r + \mathfrak{B}_1 \varphi_b^r] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

a) 固定端への曲げモーメントの伝達

ab 材の一端 b を固定した場合 (図-3), a 端に加えられたモーメント M_{ab}^r と b 端に生ずるモーメント M_{ba}^r の関係は, $\varphi_b^r = 0$ を上式に用いて,

$$M_{ba}^r = \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} M_{ab}^r \dots\dots\dots (7)$$

すなわち, 「a 端に加えられたモーメントは, 固定端にその $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$ が伝達する」, ここに, $\mathfrak{A}_2/\mathfrak{A}_1$ を曲げモーメント伝達率と名づける。

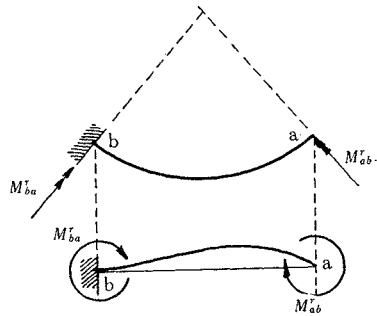


図-3

b) 分割モーメント, 分割率, 伝達率

任意の m 節点に集まる部材の他端がすべて固定で, かつ部材角が生じない場合に, m 節点に加えられたモーメント M_m^r が各部材端にどのように分割され, 分割されたモーメントが固定端にどのような割合で伝達されるかを考える。

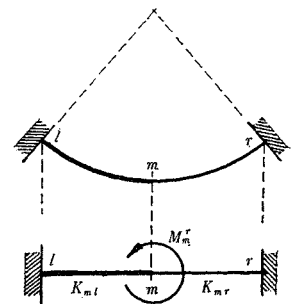


図-4

m 節点ではつぎの条件式が成立せねばならない。図

4 を参照して,

$$\begin{aligned} \Sigma M_m^r &= M_{ml}^r + M_{mr}^r \\ &= K_{ml}[\mathfrak{A}_1^{ml} \cdot \varphi_m^r] + K_{mr}[\mathfrak{A}_1^{mr} \cdot \varphi_m^r] - M_m^r \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore M_m^r = [K_{ml} \cdot \mathfrak{A}_1^{ml} + K_{mr} \cdot \mathfrak{A}_1^{mr}] \varphi_m^r \dots\dots\dots (8)$$

これより,

$$\frac{M_{ml}^r}{M_m^r} = \frac{K_{ml} \cdot \mathcal{A}_1^{ml}}{\sum K \cdot \mathcal{A}_1}, \quad \frac{M_{mr}^r}{M_m^r} = \frac{K_{mr} \cdot \mathcal{A}_1^{mr}}{\sum K \cdot \mathcal{A}_1} \dots (9)$$

ただし, 式中 \mathcal{A}_1 の肩字 ml, mr は, \mathcal{A}_1 がそれぞれ ml, mr 材のものであることを示す。ここに,

$$r_{mi}^r = \frac{K_{mi} \cdot \mathcal{A}_1^{mi}}{\sum K \cdot \mathcal{A}_1} \dots (10)$$

とすれば,

$$M_{ml}^r = r_{ml}^r \cdot M_m^r, \quad M_{mr}^r = r_{mr}^r \cdot M_m^r \dots (11)$$

これより「節点に加えられたれ曲げモーメントは, 各部材の $K\mathcal{A}_1$ に比例して分割される」ことがわかる。なお, M_{ml}^r, M_{mr}^r を分割モーメント (Distributed Moment, D.M.), r_{mi}^r を曲げモーメントに対する分割率と名付ける。式 (7) によって分割モーメントは固定端に,

$$M_{lm}^r = \left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\right)^{ml} \cdot M_{ml}^r \quad M_{rm}^r = \left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\right)^{mr} M_{mr}^r \dots (12)$$

のように伝達される。すなわち, 「伝達モーメント (carry-over moment, COM) は分割モーメントの $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1$ である」これを m 節点に加えた M_m^r をもとにして表現すれば,

$$M_{lm}^r = \left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} r^r\right)^{ml} \cdot M_m^r \quad M_{rm}^r = \left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} r^r\right)^{mr} M_m^r \dots (13)$$

ここに, $\left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} r^r\right)$ もまた伝達率と呼ぶことにする。

c) 図-5 のように一端 b がヒンジの場合には, $M_{ba}^r = 0$ より,

$$\begin{aligned} M_{ab}^r &= K \left[\mathcal{A}_1 \varphi_a^r - \frac{(\mathcal{A}_2)^2}{\mathcal{A}_1} \varphi_a^r \right] \\ &= \frac{K}{\mathcal{A}_1} (\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2) (\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2) \varphi_a^r \\ &= \frac{(\mathcal{A}_1)^2 - (\mathcal{A}_2)^2}{(\mathcal{A}_1)^2} K [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] = K' [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] \end{aligned}$$

ただし,

$$K' = \frac{(\mathcal{A}_1)^2 - (\mathcal{A}_2)^2}{(\mathcal{A}_1)^2} K \dots (14)$$

式 (14) は, 有効剛度 K' で b 端固定の場合の a 端のモーメントにほかならない。したがって一端ヒンジの場合には, K' を使えば一端固定と見なしてさしつかえない。

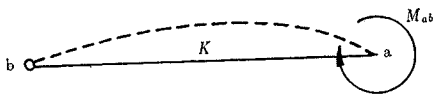


図-5

d) 対称構造に対称荷重が作用する場合

図-6 に示す対称軸を含む部材では,

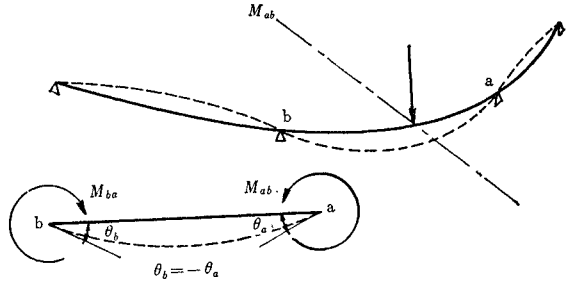


図-6

$$\begin{aligned} M_{ab}^r &= K [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r + \mathcal{A}_2 \varphi_b^r] = K [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r - \mathcal{A}_2 \varphi_a^r] \\ &= K \frac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] = K'' [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \text{ただし, } K'' = \frac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} K \\ & \dots \dots \dots (15) \end{aligned} \right\}$$

この式からわかるように, 対称構造が対称荷重をうける場合には, 有効剛度 K'' を用いれば部材の一端を固定と見なすことができる。

e) 対称構造が逆対称荷重を受ける場合

対称軸を含む部材では,

$$\begin{aligned} M_{ab}^r &= K [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r + \mathcal{A}_2 \varphi_b^r] \\ &= \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} K [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] = K''' [\mathcal{A}_1 \varphi_a^r] \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} & \text{ただし, } K''' = \frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} K \\ & \dots \dots \dots (16) \end{aligned} \right\}$$

すなわち, このような場合には, 対称軸を含む部材では有効剛度 K''' を用いれば, 部材の一端を固定と見なすことができる。

以上の円弧材に対する曲げモーメントの分配をまとめると表-9 のようになる。これらに式 (5) の $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ の極限値の考えを適用すると直線材に対するものとなる。表-9 にはこの場合についても示したが, これは周知の慣用のモーメント分配法にほかならない。すなわち, 円弧材の曲げモーメント分配法の特別な場合が, 直線材のいわゆるモーメント分配法なのである。

表-9 曲げモーメントの分配

	円 弧 材	直 線 材
伝 達 率	(i) $\mathcal{A}_2/\mathcal{A}_1$ (ii) $\frac{K_{mi} \mathcal{A}_1^{mi}}{\sum K \mathcal{A}_1} \left(\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}\right)^{mi}$	(i) $1/2$ (ii) $\frac{K_{mi}}{2 \sum K}$
分 割 率	$\frac{K_{mi} \mathcal{A}_1^{mi}}{\sum K \mathcal{A}_1}$	$\frac{K}{\sum K}$
一端ヒンジ材の有効剛度	$\frac{(\mathcal{A}_1)^2 - (\mathcal{A}_2)^2}{(\mathcal{A}_1)^2} K$	$\frac{3}{4} K$
対称構造が対称荷重をうける場合の有効剛度	$\frac{\mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} K$	$\frac{1}{2} K$
対称構造が逆対称荷重をうける場合の有効剛度	$\frac{\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1} K$	$\frac{3}{2} K$

f) ねじりモーメントについて

曲げモーメントは以上の a)~e) によって分配すればよい。すなわち、節点に拘束曲げモーメントを働かせて $\theta^r=0$ に拘束し、拘束曲げモーメントと等しい大きさの曲げモーメントを逆向きに働かせてこれを打ち消す。この操作を各節点で行ない拘束・解除をくり返してつりあい状態を見出すのである。このように曲げモーメントの分配を行なうと、一方においてねじりモーメントを生ずる。このねじりモーメントは拘束曲げモーメントの解除によって誘発されるもので、曲げモーメントとの関連を有する。この誘発ねじりモーメントについて考察するとつぎのようである。ただし、この場合は $\theta^t=0$ の状態で考えていることに注意。

a) 図-4 で m 節点に M_m^r が加えられると各部材の m 端にねじりモーメントが誘発される。

式 (8) より $\varphi_m^r = \frac{M_m^r}{\sum K \mathfrak{A}_1}$ これを式 (6) に代入して、

$$\left. \begin{aligned} M_{mi}^t &= K_{mi}[-\mathfrak{B}_1^{mi} \cdot \varphi_m^r] \\ &= -\frac{K_{mi} \mathfrak{B}_1^{mi}}{\sum K \cdot \mathfrak{A}_1} M_m^r = \kappa_{mi}^t M_m^r \\ M_{mr}^t &= K_{mr}[\mathfrak{B}_1^{mr} \cdot \varphi_m^r] \\ &= \frac{K_{mr} \mathfrak{B}_1^{mr}}{\sum K \cdot \mathfrak{A}_1} M_m^r = \kappa_{mr}^t M_m^r \end{aligned} \right\} \dots\dots(17)$$

ただし、

$$\kappa_{mi}^t = \pm \frac{K_{mi} \mathfrak{B}_1^{mi}}{\sum K \mathfrak{A}_1} \dots\dots(18)$$

κ_{mi}^t をねじりモーメント誘発率と名づけるが、節点の右側で正、左側では負号をとる。

b) 部材の一端を固定した場合 (図-3 参照)

M_{ab}^t と M_{ba}^t の関係は、

表-10 誘発ねじりモーメントの分配

固定端への伝達	$\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1$
ヒンジ端への伝達	$\frac{\mathfrak{A}_2 + \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1 + \mathfrak{B}_1}$ $1 + \frac{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1}$
ねじりモーメント誘発率	$\pm \frac{K_{mi} \mathfrak{B}_1^{mi}}{\sum K \mathfrak{A}_1}$ (負号は左側) ヒンジ端の誘発率 (a) 右端ヒンジ $-\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1$ (b) 左端ヒンジ $\mathfrak{B}_1/\mathfrak{A}_1$
伝達率	(i) $\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1$ (ii) $\pm \frac{K_{mi} \mathfrak{B}_1^{mi}}{\sum K \mathfrak{A}_1} \left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\right)^{mi}$ (iii) ヒンジ端からの伝達 $\pm \frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_1}$ (負号は右端ヒンジ)
一端ヒンジ材の有効剛度	$\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1}\right] K$
対称構造が対称荷重をうける場合の有効剛度	$\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1}\right] K$
対称構造が逆対称荷重をうける場合の有効剛度	$\left[1 - \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1}\right] K$

$$M_{ab}^t = K[-\mathfrak{B}_1 \varphi_a^r], M_{ba}^t = K[-\mathfrak{B}_2 \varphi_a^r] \text{ より}$$

$$M_{ba}^t = \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1} M_{ab}^t \dots\dots(19)$$

これより、「a 端のねじりモーメントは、その $\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1$ が固定端に伝達する」ことになる。式 (19) より、

$$\left. \begin{aligned} M_{Im}^t &= \left(\frac{\mathfrak{B}_2 \kappa^t}{\mathfrak{B}_1}\right)^{mi} \cdot M_{rm}^t, M_{rm}^t = \left(\frac{\mathfrak{B}_2 \kappa^t}{\mathfrak{B}_1}\right)^{mr} \cdot M_m^r \\ &\dots\dots\dots(20) \end{aligned} \right\}$$

とかくこともできる。すなわち、 m 節点に加えられる M_m^r によって固定端には式 (20) のようなねじりモーメントが誘発されるわけである。

その他の場合についても同様の検討を加えると、結局表-10 に示す結果を得ることができる。

(2) 垂直変位が生ずる場合

a) 垂直変位 (部材角) が既知の場合

材端の垂直変位が既知の場合には、部材角による固定端モーメントが判明すれば、3. (1) の方法で解くことができる。先の式 (1), (2) より固定端モーメントはつぎのように求められる。

(i) 両端固定の場合

$$M_{ab}^t = M_{ba}^r = K \mathfrak{C}_2 \psi \quad M_{ab}^t = -M_{ba}^t = K \mathfrak{C}_2 \psi \dots\dots(21)$$

(ii) a 端ヒンジの場合

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= 0 \quad M_{ba}^r = \frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} [\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2] \psi \\ M_{ab}^t &= \frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} \left[\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2} + \mathfrak{B}_1 \right] \psi \\ M_{ba}^t &= -\frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} \left[\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} - \mathfrak{B}_2 \right] \psi \end{aligned} \right\} \dots(22)$$

(iii) b 端ヒンジの場合

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= \frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} [\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2] \psi \quad M_{ba}^r = 0 \\ M_{ab}^t &= \frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} \left[\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_2} - \mathfrak{B}_2 \right] \psi \\ M_{ba}^t &= -\frac{K \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{A}_1} \left[\frac{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_2} + \mathfrak{B}_1 \right] \psi \end{aligned} \right\} \dots(23)$$

b) 垂直変位が未知の場合

後述する (5. 連続円弧ばりの解例参照)。

4. ねじりモーメントの分配

ねじりモーメントの分配は、 θ^t を拘束・解除することによってねじりモーメントのバランス状態を見出すことになる。先の曲げモーメントの分配で考えた θ^r を θ^t でおきかえて同様の考えをすればよいが、これに伴って誘発される曲げモーメントも 3. と同様にして求めることができる。

(1) 垂直変位を生じない場合 (R=0)

この場合は式 (1), (2) より

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= K[-\mathfrak{B}_1\varphi_a^t - \mathfrak{B}_2\varphi_b^t] \\ M_{ab}^t &= K[\mathfrak{D}\varphi_a^t + \mathfrak{B}_3\varphi_b^t] \\ M_{ba}^r &= K[\mathfrak{B}_2\varphi_a^t + \mathfrak{B}_1\varphi_b^t] \\ M_{ba}^t &= K[\mathfrak{B}_3\varphi_a^t + \mathfrak{D}\varphi_b^t] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(24)$$

の諸式によって検討すればよい。3.で曲げモーメントの分配に対する考察を行なったが、これと同様の方法でねじりモーメントの分配法を取り扱うとつぎの表-11の結果を得ることができる。この場合も表-11に式(5)の極限值を用いと直線材に対するものとなる。

表-11 ねじりモーメントの分配

	ねじりモーメント	誘発曲げモーメント
	$\mathfrak{B}_3/\mathfrak{D}$	$-\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1$
ヒンジ端への伝達	0	$\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}} \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}$ $1 - \frac{\mathfrak{B}_2 \mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}}$
分割率と誘発率	$\frac{K m_i \mathfrak{D}^{m_i}}{\Sigma K \mathfrak{D}}$	$\pm \frac{K m_i \mathfrak{B}_1^{m_i}}{\Sigma K \mathfrak{D}}$ (負号は左側) ヒンジ端の誘発率 $\pm \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{D}}$ (負号は右端ヒンジ)
伝達率	(i) $\mathfrak{B}_3/\mathfrak{D}$ (ii) $\frac{K m_i \mathfrak{D}^{m_i}}{\Sigma K \mathfrak{D}} \left(\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right)^{m_i}$	(i) $-\mathfrak{B}_2/\mathfrak{B}_1$ (ii) $\pm \frac{K m_i \mathfrak{B}_1^{m_i}}{\Sigma K \mathfrak{D}} \left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\right)^{m_i}$ (iii) ヒンジ端からの伝達 $\pm \frac{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{D} \mathfrak{B}_1}$ (負号は左端ヒンジ)
一端ヒンジ材の有効剛度	$\left[1 - \left(\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right)^2\right]K$	$\left[1 - \left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\right)\left(\frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right)\right]K$
対称構造が対称荷重をうける場合の有効剛度	$\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right]K$	$\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\right]K$
対称構造が逆対称荷重をうける場合の有効剛度	$\left[1 - \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right]K$	$\left[1 - \frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1}\right]K$

(2) 垂直変位が生ずる場合

垂直変位が未知の場合は 3.(2) b) とともに 5. で述べることとし、ここには垂直変位が既知の場合を取り扱う。垂直変位(部材角)による固定端モーメントは式(1), (2)より、

a) 両端固定の場合

$$M_{ab}^r = M_{ba}^r = K\mathfrak{C}_2\phi, M_{ab}^t = -M_{ba}^t = K\mathfrak{C}_2\phi \dots(25)$$

b) a 端ヒンジの場合 (図-7 (a) 参照)

$$M_{ab}^t = 0 \text{ より } \varphi_a^t = -\frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\phi$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= K\left[\mathfrak{C}_2 + \frac{\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\right]\phi, M_{ba}^t = -K\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right]\mathfrak{C}_2\phi \\ M_{ba}^r &= K\left[\mathfrak{C}_2 - \frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\right]\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(26)$$

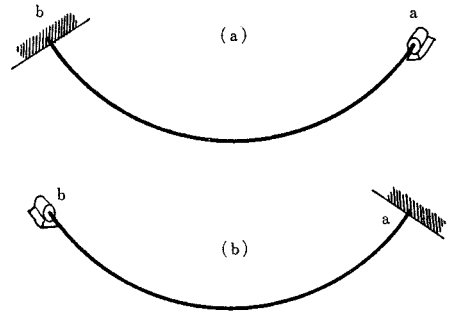


図-7

e) b 端ヒンジの場合 (図-7 (b) 参照)

$$M_{ba}^t = 0 \text{ より } \varphi_b^t = \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\phi$$

したがって、

$$\left. \begin{aligned} M_{ab}^r &= K\left[\mathfrak{C}_2 - \frac{\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\right]\phi, M_{ab}^t = K\left[1 + \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{D}}\right]\mathfrak{C}_2\phi \\ M_{ba}^r &= K\left[\mathfrak{C}_2 + \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{D}}\right]\phi \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(27)$$

5. 連続円弧ばりのモーメント分配法による解例

(1) 図-8 の連続円弧ばりを解く。

ただし、

(a) 支点沈下はない。

(b) 2, 3 支点では、 θ^r は生ずるが θ^t は生じないものとする。

(c) 両部材は等質等断面で、 $\lambda=1$ とする。

予備計算

(i) $2\alpha=40^\circ, \lambda=1$ に対して

$$\mathfrak{B}_1=1.905 \quad \mathfrak{B}_3=0.332$$

$$\mathfrak{B}_2=1.022 \quad \mathfrak{B}_4=-0.011$$

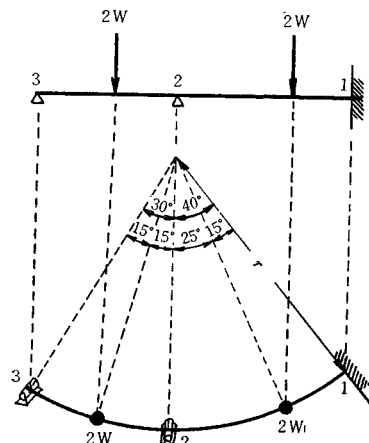


図-8

$2\alpha = 30^\circ, \lambda = 1$ に対して
 $\mathfrak{A}_1 = 1.946 \quad \mathfrak{B}_1 = 0.255$
 $\mathfrak{A}_2 = 1.013 \quad \mathfrak{B}_2 = -0.005$

(ii) 部材剛度

$K_{12} = \frac{I}{40^\circ \cdot r} = 1.432 \frac{I}{r}, \quad K_{23} = \frac{I}{30^\circ \cdot r} = 1.910 \frac{I}{r}$

ただし、2-3 部材の 3 端はヒンジであるから有効剛度を用いる。

$\left[1 - \frac{(\mathfrak{A}_2)^2}{(\mathfrak{A}_1)^2} \right] K_{23} = 1.392 \frac{I}{r}$
 ……曲げモーメントに対して

$\left[1 + \frac{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1} \right] K_{23} = 1.891 \frac{I}{r}$
 ……ねじりモーメントに対して

(iii) 分割率と伝達率

$r_{21}^r = \frac{1.432 \times 1.905}{1.432 \times 1.905 + 1.392 \times 1.946} = 0.502$

$r_{23}^r = \frac{1.392 \times 1.946}{1.432 \times 1.905 + 1.392 \times 1.946} = 0.498$

$\left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} \right)^{12} = 0.537 \quad \left(\frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} \right)^{23} = 0.521$

(iv) 誘発ねじりモーメントに関するもの

$\kappa_{12}^t = \frac{1.432 \times 1.905}{1.432 \times 1.905 + 1.392 \times 1.946} = 0.088$

$\kappa_{23}^t = \frac{-1.891 \times 0.255}{1.432 \times 1.905 + 1.392 \times 1.946} = -0.089,$

$\kappa_{32}^t = \frac{0.255}{1.946} = 0.131$

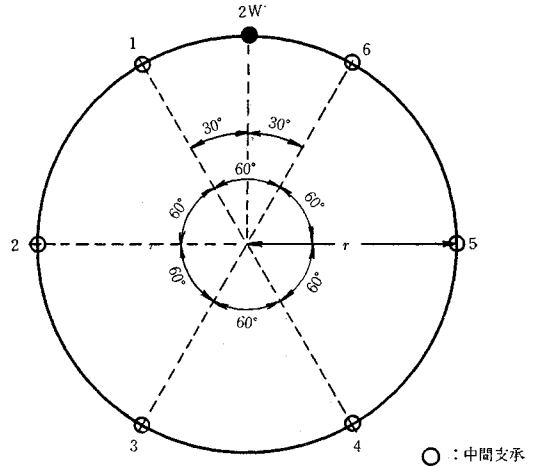


図-10

$\left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1} \right)^{12} = -0.033, \quad \left(\frac{\mathfrak{B}_2}{\mathfrak{B}_1} \right)^{23} = -0.020,$

$\left(\frac{\mathfrak{A}_2 \mathfrak{B}_2}{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1} \right)^{32} = 0.507$

モーメント計算は図-9 に示す通りである。ここにねじりモーメントの計算では、曲げモーメントのバランス操作によって生ずる誘発ねじりモーメント (Induced moment=IM) を各節点のつりあい曲げモーメントをもとにして、式 (17), (20) によって計算する。

(2) 図-10 の円環をとく。ただしこの場合も 5.(1) と同じ仮定を設ける。

構造および荷重に対称性があるので左半分の部分で考えると 図-11 に示す結果を得る。

(a)

M' なお、 $2\alpha = 60^\circ, \lambda = 1$ に対して、

$\mathfrak{A}_1 = 1.794, \quad \mathfrak{A}_2 = 1.044,$

$\mathfrak{B}_1 = 0.469, \quad \mathfrak{B}_2 = -0.036$

である。

(3) 図-12 の 3 スパン連続円弧ばりをとりあげが、

(a)

(a) 支点沈下はない。

(b)

(b) 全部材は等質等断面とし $\lambda = 1$ である。

M'

(c) 支点 1 は $\theta^i = 0$ に支持され、支点 2, 3 は θ^r, θ^t がともに生ずるいわゆる球支承とし、支点 4 は固定とする。

この構造では、2, 3 で M^r と M^t がバランスする必要がある。そこでまず $\theta^i = 0$ の状態で θ^r を解除することによって M^r をバラ

	3	2	1
	0.521 →	0.498 ← 0.502 →	0.537 →
FFM	-0.627	0.627 -0.127	0.210
COM		0.327	
DM	0.627	-0.412 -0.415	-0.223
FM	0	0.542 -0.542	-0.013

	3	2	i
	0.131 ← 0.507 →	-0.020 ← -0.089 → 0.088	-0.033 →
Unbalanced M^r	-0.627	0.954 -0.127	
FEM M^t	-0.133	-0.133 -0.001	0.029
IM	0.037 ← 0.073 →	-0.072 → 0.002	
FM	-0.014	-0.062 -0.073	0.031

図-9 (Coef. Wr)

ンスし、この時の θ^r を拘束してつぎに θ^f を解除して M^r のバランスを行なう。こうして M^r と M^f のバランスを交互に行なって両者が同時にバランスする状態を現出させるのであるが、 M^r と M^f のバランスで、そ

れぞれ誘発ねじりモーメントと誘発曲げモーメントが生ずるので、これを加味してつぎの段階のバランスを行なう。その要領を 図-13 に示す。

ただし、 $2\alpha=50^\circ$, $\lambda=1$ に対して、

$$\mathfrak{A}_1=1.854 \quad \mathfrak{B}_1=0.404 \quad \mathfrak{B}_3=-0.442$$

$$\mathfrak{A}_2=1.033 \quad \mathfrak{B}_2=-0.021 \quad \mathfrak{D}=0.621$$

$2\alpha=40^\circ$, $\lambda=1$ に対して、

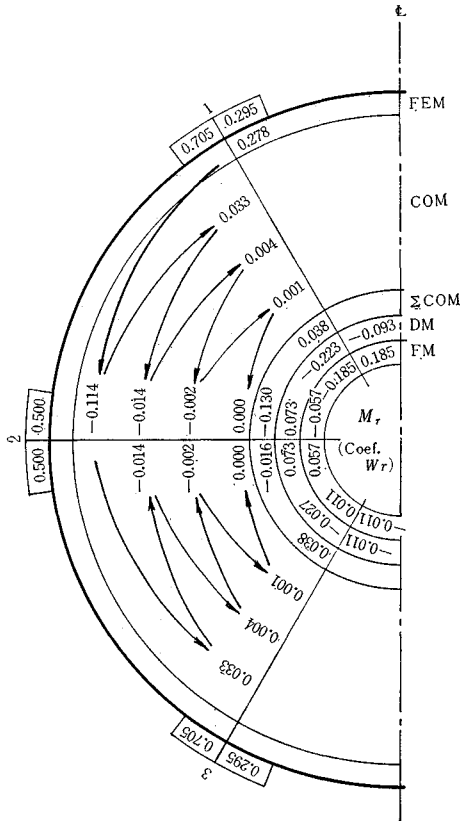


図-11 (a)

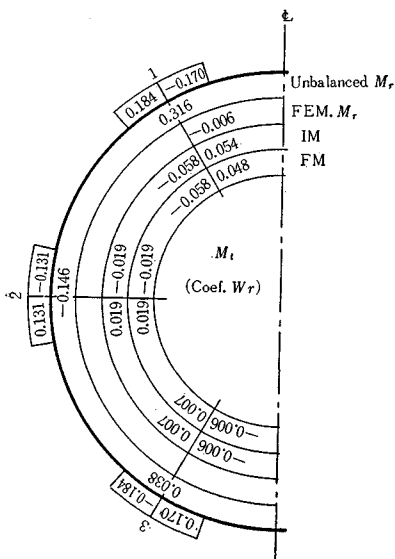


図-11 (b)

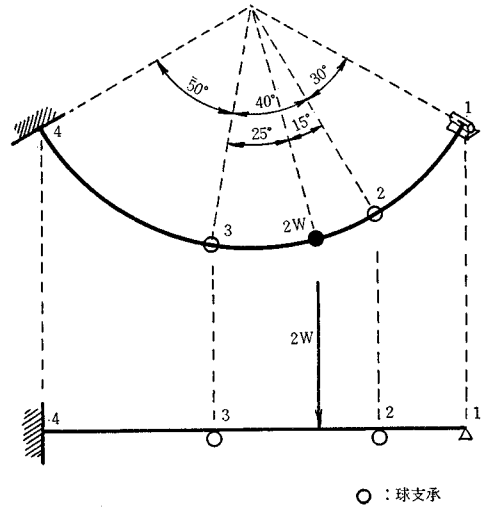


図-12

	4	3	2	1
	0.557	-0.300 0.308	0.301	-0.254 0.260
	-0.052	0.438 0.562	0.269	0.702 0.498
	-0.052	-0.095 0.098	-0.429	-0.087 0.089
	-0.712	0.462 0.538	-0.354	0.443 0.557
FEM (M^r)		-0.127	0.210	
COM		-0.056	0.055	
		-0.015	-0.005	
		-0.001	0.000	
Σ COM		-0.072	0.060	
DM	0.048	0.087	0.112	-0.136 -0.134
FEM (M^f)		-0.001	0.029	
IM	0.001	-0.019	0.020	0.023 -0.024 -0.012
COM		0.010	0.004	
		0.001	0.000	
Σ COM		0.011	0.004	
DM	0.004	-0.005	-0.006	-0.014 -0.018 0.016
IM	0.000	0.003	-0.003	0.008 -0.008 0.000
Final M^r	0.048	0.090	-0.090	0.142 -0.142 0.000
Final M^f	0.005	-0.024	0.142	0.042 -0.042 0.004

(Coef. W_r)

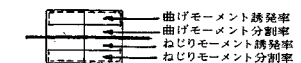


図-13

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_1 &= 1.905 & \mathfrak{B}_1 &= 0.332 & \mathfrak{B}_3 &= -0.462 \\ \mathfrak{A}_2 &= 1.022 & \mathfrak{B}_2 &= -0.011 & \mathfrak{D} &= 0.579 \\ 2\alpha &= 30^\circ, \lambda = 1 \text{ に対して,} \\ \mathfrak{A}_1 &= 1.946 & \mathfrak{B}_1 &= 0.255 & \mathfrak{B}_3 &= -0.478 \\ \mathfrak{A}_2 &= 1.013 & \mathfrak{B}_2 &= -0.005 & \mathfrak{D} &= 0.545 \end{aligned}$$

である。

(4) 図-14 は断面の異なる2本の部材をb点で剛結して作ったはりである。これが荷重を受ける場合はb節点は垂直変位を生じ部材角が現われる。しかもこの部材角は未知である。このような場合は、直線ばりの同じような場合に用いられる方法を使用するの一法である。すなわち、(1) 部材角が生じないようにb点を支持し、バランス操作をほどこしてb支点の反力を求める。(2) つぎにb点に垂直変位 δ を与え、この変位が狂わぬように拘束する。拘束モーメントには δ が ϕ という形で含まれる。バランス操作を行なってこの拘束に作用する反力を求める。(3) 考えている構造ではb点には反力は生じない。この条件より ϕ の値を求める。

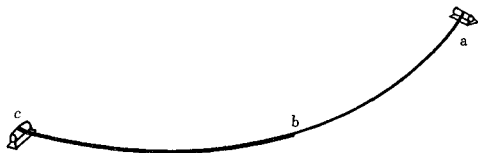


図-14

以上 2,3 の解例をあげたが、同様の考えによって図-15 (a) のはりを解くことができることも容易に推定できよう。また先に述べたように円弧材の諸値は式 (5) によって直線材に対するものとなるので、円弧材と直線材の併用になる 図-15 (b) のような構造に対しては、直線材の部分には式 (5) を適用して計算をすすめればよい。

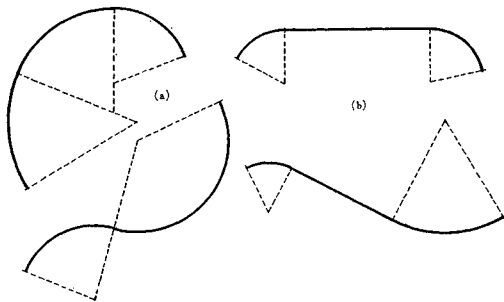


図-15

6. 円弧格子桁のモーメント分配法による解析

円弧格子桁とは 図-16 に示すような数本の 円弧材で

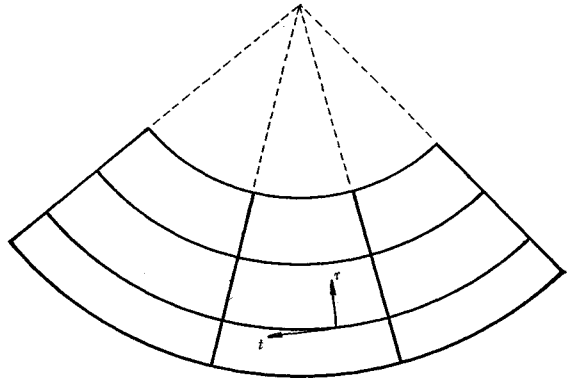


図-16

作られる主桁群とそれを相互に結合する直線材による横桁群によって作られる格子状の構造物とする。この構造をモーメント分配法で解く場合には、伝達モーメントは主桁と横桁の2方向を考えねばならず、周囲の節点へ伝達するモーメントとそれから逆に反射してくるモーメントがあって計算中混乱におちいることがある。これをさけるために、ここではつぎのように取り扱う。

- (1) 格子桁を横桁が円弧材によって結合されたものと考え、
- (2) 一つの横桁に属する節点をバランスする。
- (3) これによって、モーメントは円弧材を通じて他の横桁へ伝達せしめられる。

このようにすれば、伝達方向が横桁方向または主桁方向のいずれかに決まってしまうので、多方向への伝達からくる混乱がなくなってしまう。この操作をくり返して最終的なつりあい状態を現出しようとするのであるが、ここで行なう基本的なバランス操作の考え方はつぎのようである。

- (1) 節点の回転をすべて拘束し垂直変位のみを許す。この場合の拘束モーメントを求め、これを出発点とする。
- (2) (1) では部材の端せん力はバランスしているが、モーメントがバランスしていない。したがって、(1) の状態に垂直変位を拘束し、回転の拘束を解除してモーメントをバランスする(モーメントの分配)。これは先に述べた 3. および 4. のように行なえばよい。
- (3) (2) では、モーメントはバランスするが、端せん力のバランスがこわれる。したがって、(2) の状態に回転を拘束し垂直変位に対する拘束を解除して端せん力のバランスを図る(端せん力分配)。
- (4) 以上をくり返して、端せん力とモーメントが同時にバランスする状態を見出す。

モーメントはつりあいモーメントと等大反対のモーメントを加えることによってバランスを図るが、端せん

力は各節点における部材の端せん力のつりあい量と等大反対の力を加え、上記のように垂直変位を許してバランスする。しかしこの場合の垂直変位量は未知である。先の 5.(4) の解例の考えによれば未知の垂直変位が多数ある場合には、未知数の数だけの連立方程式を解かねばならなくなる。格子の場合には、一般に未知数の数が多いので多元連立方程式を解く必要が生ずる。この手間をさけるために、ここでは部材のばね定数を使用することとする。これは、ある節点に作用する力は、その節点を単位の大きさだけ垂直に変位させた時の各部材端に生ずるせん断力、いかえれば部材のばね定数に比例して分配されるという考えによっている。この意味で直線材と円弧材の支持条件によるばね定数を求めるとつぎのようである。

(1) 直線材

a) 両端が回転しないように拘束されている場合 (図-17 参照)

図-17 は、ab 材の両端の回転を拘束し、a 端に V_{ab} の力を作用させて δ_a の垂直変位を生ぜしめたものである。この場合の V_{ab} と δ_a の関係は、

$$V_{ab} = \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^3} \delta_a$$

これより a 端が b 端に対して単位の大きさだけ垂直変位するに要する力—ばね定数は、

$$\frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^3} \equiv t_1 \dots \dots \dots (28)$$

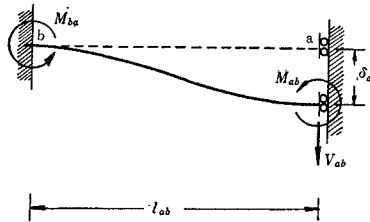


図-17

b) 一端ヒンジの場合 (図-18 参照)

$$V_{ab} = \frac{3EI_{ab}}{l_{ab}^3} \delta_a \text{ より } \frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{3EI_{ab}}{l_{ab}^3} \equiv t_2 \dots \dots (29)$$

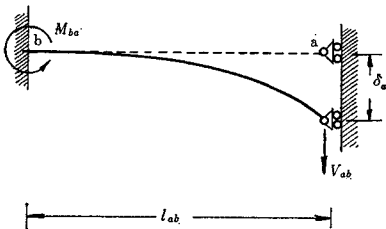


図-18

c) 一端が弾性支持される場合 (図-19 参照)

図-19 は両端を回転に対して拘束、a 端に V_{ab} を作

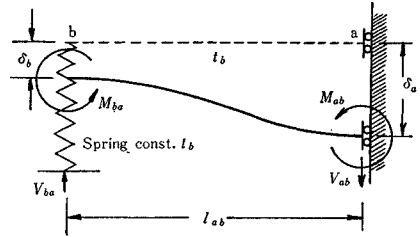


図-19

用させた場合であるが、b 端はばね定数 t_b のばねで支持されている。

$$V_{ab} \left[\frac{6E}{l_{ab}t_b} + \frac{l_{ab}^2}{2I_{ab}} \right] = \frac{6E}{l_{ab}} \delta_a \text{ より}$$

$$\frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^3} \frac{1}{1 + \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^3 \cdot t_b}} \equiv t_3 \dots \dots \dots (30)$$

この式は、

$$\lim_{t_b \rightarrow \infty} \frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{12EI_{ab}}{l_{ab}^3}$$

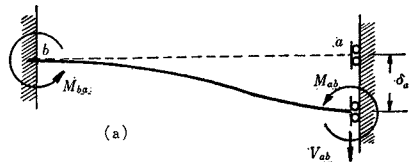
となって式 (28) に一致する。すなわち 図-17 の場合にほかならない。

(2) 円弧材

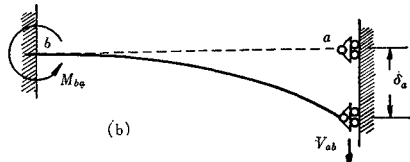
a) 両端が回転しないように拘束される場合 (図-20 (a) 参照)

$$\frac{\alpha r}{K_{ab} \mathcal{G}_2 ab} V_{ab} = \frac{6E}{2\alpha r} \delta_a \text{ より}$$

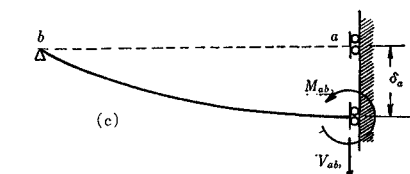
$$\frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{12EI_{ab}}{(2\alpha r)^3} \mathcal{G}_2 ab \equiv t_4 \dots \dots \dots (31)$$



(a)



(b)



(c)

図-20 中心角 2α 、半径 r

b) r 軸まわりの回転に対して一端がヒンジの場合 図-20 (b), (c) いずれの場合も、

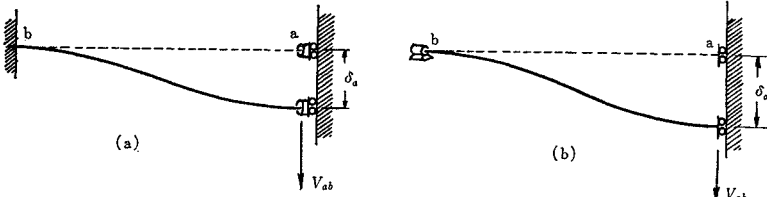


図-21 中心角 2α 、半径 r

$$\frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{6EI_{ab}}{(2\alpha r)^3} \mathfrak{C}_2^{ab} \left[1 - \frac{\mathfrak{M}_1^{ab}}{\mathfrak{M}_1^{ab}} \right] = t_s \dots\dots (32)$$

c) t 軸まわりの回転に対して一端がヒンジの場合
 図-21 (a), (b) いずれの場合も

$$\frac{V_{ab}}{\delta_a} = \frac{6EI_{ab}}{(2\alpha r)^3} \frac{\mathfrak{S}^{ab} \mathfrak{D}^{ab} - \mathfrak{C}_1^{ab} \cdot \mathfrak{C}_2^{ab}}{\mathfrak{D}^{ab}} = t_s \dots (33)$$

式 (31), (32), (33) は、いずれもその極限值をとれば対応する直線材のばね定数に一致する。分配操作の考え方と要領はつぎの解例によって直接示すことにする。

図-22 の格子桁は、

- (1) 支点沈下は生じない。
- (2) 全部材とも同一断面を有し、 $\lambda=2$ である。
- (3) 節点 2 に単位荷重が作用する。

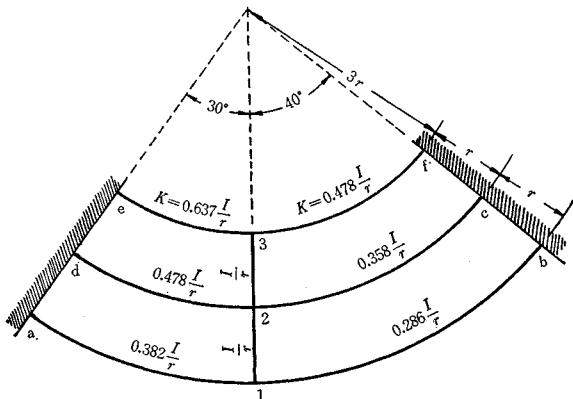


図-22

a) ばね定数

先にかかげた式によってつぎのように求めることができる。ただし、サフィックスの第 1 次の n は式 (28)~(33) の t のサフィックスであり、第 2 次の ij は部材を表わすが i で考えている材端を示す。たとえば 23 のサフィックスは 2-3 部材の 2 端のばね定数である。

$$t_{4,1a} = 0.055 \frac{12EI}{r^3}, t_{4,3e} = 0.253 \frac{12EI}{r^3}, t_{3,23} = 0.264 \frac{12EI}{r^3}$$

$$t_{4,1b} = 0.023 \frac{12EI}{r^3}, t_{4,3f} = 0.105 \frac{12EI}{r^3}, t_{3,32} = 0.182 \frac{12EI}{r^3}$$

$$t_{4,2d} = 0.107 \frac{12EI}{r^3}, t_{3,12} = 0.293 \frac{12EI}{r^3}$$

$$t_{4,2c} = 0.044 \frac{12EI}{r^3}, t_{3,21} = 0.072 \frac{12EI}{r^3}$$

b) 各節点に作用する荷重は部材のばね定数に比例して分配される。

① 節点 1 に単位荷重が作用する場合：分配率を β とし、サフィックスで部材を表わすが第 1 サフィックスで考えている材端を示す。節点 1

に作用する荷重は材端 1-a, 1-b, 1-2 にそれぞればね定数に比例してつぎの割合で分配される。

$$\beta_{1a} = \frac{0.055}{0.055 + 0.023 + 0.293} = 0.148$$

$$\beta_{12} = \frac{0.293}{0.055 + 0.023 + 0.293} = 0.790$$

$$\beta_{1b} = \frac{0.023}{0.055 + 0.023 + 0.293} = 0.062$$

部材の他端にはこれと等大反対の端せん力が生ずる。たとえば、材端 2-1 には 0.790 と等大反対の端せん力が生ずるが、この時の部材 1-2 の 2 端を支持するばねは材端 2c, 2d, 23 に関するものである。したがって、このばねに対応する材端 2c, 2d, 23 にはつぎの割合で端せん力が生ずることになる。

$$\beta_{2c} = \frac{0.044}{0.044 + 0.107 + 0.264} = 0.106$$

$$\beta_{23} = \frac{0.264}{0.044 + 0.107 + 0.264} = 0.636$$

$$\beta_{2d} = \frac{0.107}{0.044 + 0.107 + 0.264} = 0.258$$

節点 3 でも同様に考えて、

$$\beta_{3e} = \frac{0.253}{0.253 + 0.105} = 0.706$$

$$\beta_{3f} = \frac{0.105}{0.253 + 0.105} = 0.294$$

② 節点 2 に単位荷重が作用する場合：①と同様に考えて、

$$\beta_{21} = 0.148 \quad \beta_{2c} = 0.542 \quad \beta_{1a} = 0.706 \quad \beta_{3e} = 0.706$$

$$\beta_{23} = 0.542 \quad \beta_{2d} = 0.220 \quad \beta_{1b} = 0.294 \quad \beta_{3f} = 0.294$$

③ 節点 3 に単位荷重が作用する場合：

$$\beta_{32} = 0.337 \quad \beta_{3f} = 0.194 \quad \beta_{2d} = 0.480 \quad \beta_{1a} = 0.706$$

$$\beta_{3e} = 0.469 \quad \beta_{2c} = 0.197 \quad \beta_{21} = 0.323 \quad \beta_{1b} = 0.294$$

各節点に単位荷重が作用した場合の端せん力を以上の β を用いて求めたのが 図-23 である。

c) 固定端モーメント

図-23 の端せん力を用いてこれに対応する固定モーメントを求めることができる。図-24 の FEM の欄にその値を示す。

d) モーメントの分配

c)より求められる不つりあいモーメントを先に示した方法で分配する。図-24 がそれである。

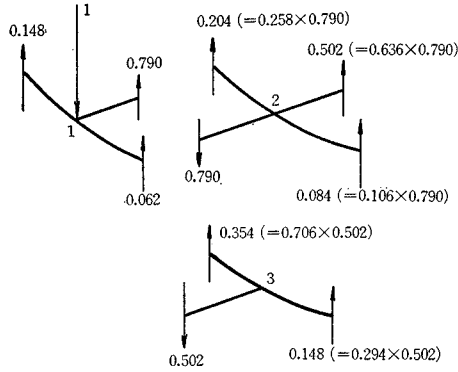


図-23 (a) 節点1 載荷の場合

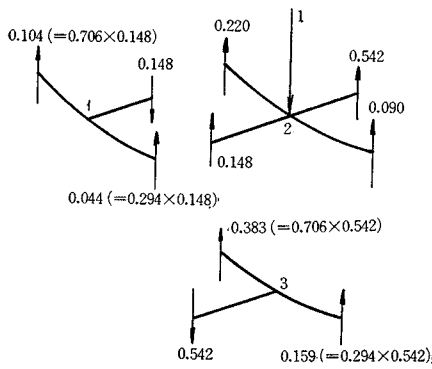


図-23 (b) 節点2 載荷の場合

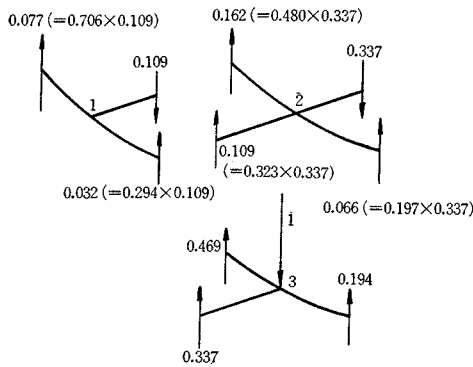


図-23 (c) 節点3 載荷の場合

	M_{1a}	M_{1b}	M_{1c}	M_{2a}	M_{2b}	M_{2c}	M_{3a}	M_{3b}	M_{3c}
M^r	DF	0.484	0.352	0.164	0.119	0.441	0.321	0.119	0.105
	IF	-0.044	0.042			-0.028	0.027		-0.068
M^l	DF	0.051	0.043	0.907	0.470	0.033	0.027	0.470	0.853
	IF	-0.063	0.061			-0.057	0.055		-0.067
M^c	FEM	-0.193	0.108			-0.214	0.117		-0.278
	COM			-0.011	-0.016			-0.014	-0.011
	Σ COM			-0.015	-0.017			-0.014	-0.015
	DM	0.049	0.034	0.017	0.015	0.056	0.042	0.015	0.015
M^d	FEM	0.028	0.025	0.395	0.395	0.031	0.028	0.251	0.251
	IM	-0.006	0.006			-0.007	0.007		-0.009
	COM			-0.002	-0.002			-0.002	-0.002
	Σ COM			-0.010	-0.010			-0.008	-0.008
M^e	DM	-0.017	-0.014	-0.311	-0.214	-0.015	-0.012	-0.214	-0.189
	IM	-0.015	-0.014			0.013	-0.012		0.015
	DM	-0.001				-0.001			-0.001
	Final M^r	-0.130	0.128	0.002	-0.002	-0.146	0.147	0.001	0.000
Final M^l	0.005	0.018	-0.023	0.026	0.009	0.023	-0.058	0.014	

図-24 (a) 節点1 に単位荷重が作用する場合

	M_{1a}	M_{1b}	M_{1c}	M_{2a}	M_{2b}	M_{2c}	M_{3a}	M_{3b}	M_{3c}
M^r	FEM	-0.136	0.077			-0.230	0.126		-0.301
	COM			-0.012	-0.012			-0.015	-0.012
	Σ COM			-0.015	-0.013			-0.015	-0.015
	DM	0.037	0.025	0.012	0.015	0.050	0.042	0.015	0.015
M^l	FEM	0.020	0.018	-0.074	-0.074	0.034	0.030	0.271	0.271
	IM	-0.005	0.005			-0.007	0.007		-0.010
	COM			-0.004	-0.004			-0.015	-0.015
	Σ COM			-0.037	0.033			-0.135	-0.037
M^d	DM	0.004	0.003	0.066	-0.075	-0.005	-0.004	-0.075	-0.271
	IM	-0.003	0.003			0.004	-0.004		0.022
	DM								-0.001
	Final M^r	-0.102	0.105	-0.003	0.002	-0.166	0.164	0.000	0.000
Final M^l	0.019	0.026	-0.045	-0.116	0.022	0.033	0.061	-0.037	

図-24 (b) 節点2 に単位荷重が作用する場合

e) 端せん力のつりあい量
 d) の操作ではモーメントはバランスするが、垂直変位を拘束しているためにこの拘束に反力が生ずる。図-25に示すのがこれである。すなわち各節点の端せん力は反力が生じた状態でバランスしているわけである。いわばこの反力は端せん力のつりあい量を表わしている。
 さて、先に述べたところにしたがえば、モーメントと端せん力の2種類のバランスを交互に行なって、これらが同時にバランスする状態を現出する操作が以後続くことになるが、これはつぎのようにして簡略化することが

できる。すなわち以上の計算で、
 (i) 節点に作用する力が与えられると、
 (ii) それに対するモーメントのバランスを行なった結果、端モーメントが判明し、
 (iii) さらに (ii) の操作による節点の つりあい力が求まった。
 ここで (i) と (iii) の関係(図-25 参照) を用いると、(ii) の計算をいちいち行なわなくても、一連の端せん力のバランス操作でつりあい量をバランスするため節点に加えねばならない力の総和を求めることができ

		M_{12}	M_{13}	M_{14}	M_{21}	M_{24}	M_{25}	M_{26}	M_{31}	M_{32}	M_{33}	M_{34}
M'	FEM	-0.101	0.056									
	COM			-0.008	-0.009				-0.018	-0.009		
	ΣCOM			-0.008	-0.009				-0.018	-0.009		
	DM	0.027	0.020	0.010	0.012	0.047	0.034	0.012	-0.018	-0.012		
M'	FEM	0.015	0.013	-0.055	-0.055	0.025	0.022		-0.168	-0.169	0.054	0.048
	IM	-0.004	0.003			-0.006	-0.006				0.012	-0.012
	COM			0.001	-0.007				0.011	0.001		
	ΣCOM			0.001	-0.007				0.011	0.001		
M'	DMi	-0.001	-0.001	-0.010	0.060	0.006	0.006	0.060	0.023	0.002	0.002	
	IM	0.001	-0.001			-0.005	0.005			-0.002	0.002	
	DM											
Final M'	-0.073	0.075	-0.002	0.002	-0.128	0.131	-0.006	0.007	-0.279	0.272		
Final M'	0.010	0.015	-0.025	0.019	0.025	0.034	-0.078	-0.106	0.044	0.062		
		M_{21}	M_{22}		M_{31}	M_{32}		M_{41}	M_{42}			
M'	FEM	-0.101	0.056		-0.170	0.092		-0.368	0.203			
	COM	0.014	0.011		0.025	0.019		0.048	0.036			
	Final	-0.087	0.067		-0.145	0.113		-0.320	0.239			
M'	FEM	-0.015	-0.013		-0.025	-0.022		-0.054	-0.048			
	COM	0.001			-0.004	-0.003		-0.002	-0.001			
	Final	-0.014	-0.013		-0.029	-0.025		-0.056	-0.050			

図-24 (c) 節点3に単位荷重が作用する場合

る。この力の総和が判明すれば (i) と (ii) との関係によって目的とするモーメントの値をただちに求めることができる。すなわち、モーメントと端せん力のバランスを交互に行なうのではなく、端せん力のバランスのみを一括して行ない、これをもとにしてモーメントを一挙に求めようとするのである。

f) つぎに、つりあい力をバランスさせるために節

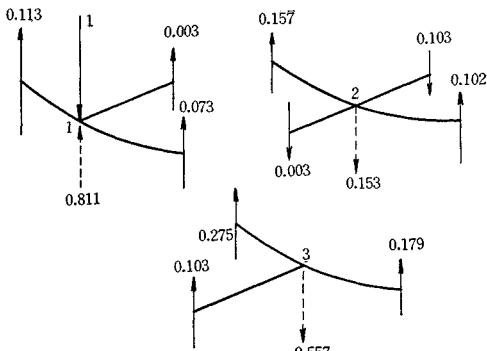


図-25 (a)

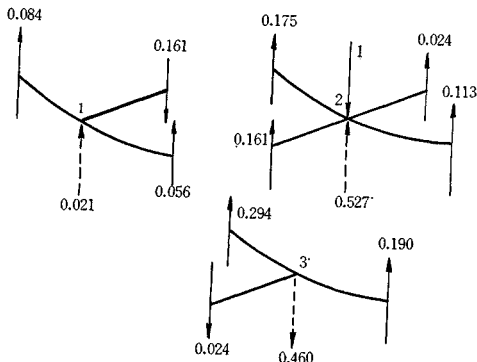


図-25 (b)

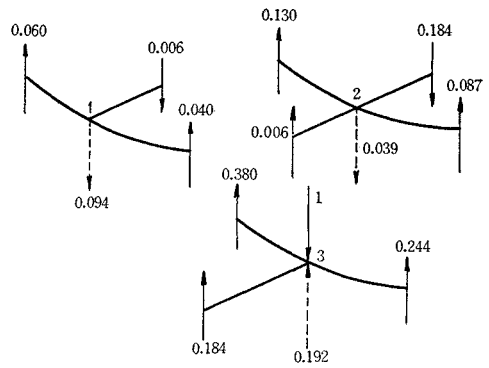


図-25 (c)

点に作用させるべき力を求める。

図-25 より節点1に荷重 P_1 を載荷した場合にはつりあい力をバランスするために、

節点1には $0.811 P_1$ (a)

節点2には $-0.153 P_1$ (b)

節点3には $-0.557 P_1$ (c)

の力を加える必要がある。ただし、下向きの力を正、上向きの力を負とする (以下同様)。

節点3に加えた $-0.557 P_1$ によって各節点にはつぎの力を加えねばならない。

節点1には $0.557 \times 0.094 P_1$ (d)

節点2には $0.557 \times 0.047 P_1$ (e)

節点3には $-0.557 \times 0.192 P_1$ (f)

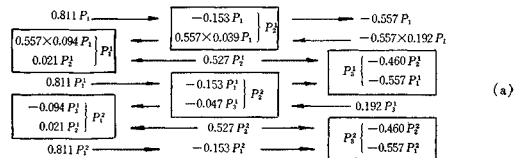
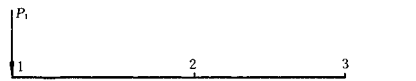
節点2には、上記の (b)+(c) = P_2 を作用させる必要があり、これによって各節点にはつぎの力を加える必要が現われる。

節点1には $0.021 P_2$ (g)

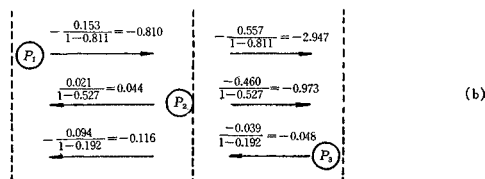
節点2には $0.527 P_2$ (h)

節点3には $-0.460 P_2$ (i)

これら一連の状態を図示すると 図-26 (a) のように



(a)



(b)

図-26

なる。しかし、ここに書かれた力はそれぞれがさらに不
つりあい力を生じて、これをバランスする力が必要にな
ることに注意しなければならない。たとえば、節点1の
 $0.811 P_1$ はこれ自体 $0.811^2 P_1, 0.811^3 P_1, 0.811^4 P_1, \dots$
という力を以後発生せしめる。ここでたとえば節点1に
加える力 P_1 によって節点2, 3に新たに必要になる力
 P_2, P_3 を、それぞれ P_1 が節点2あるいは3に伝達し
たと称し、 $P_2/P_1, P_3/P_1$ を伝達率と呼ぶことにすれば、
この場合の伝達率は無限級数で表わされることになる。
すなわち、図-26 (b) に示すのがこれである。

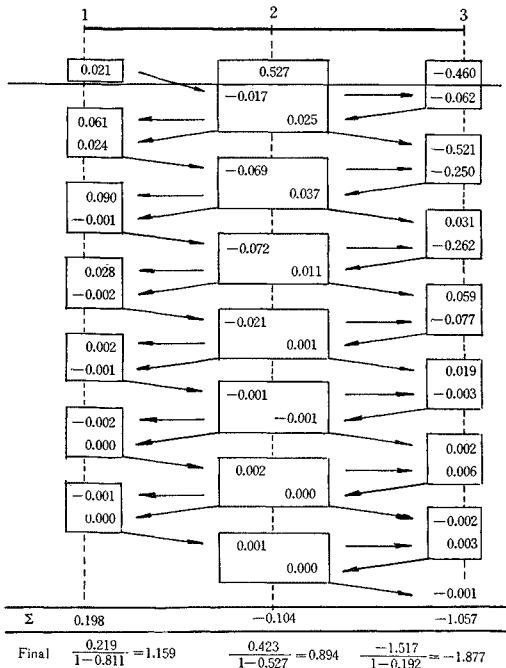


図-27

いま問題にしているのは節点2に単位荷重が作用する
場合である。図-26 (b) を用いて各節点の端せん力を
バランスするために加えられるべき力の総和を求めたの
が 図-27 である。

g) 図-24 には各節点に単位荷重が作用した場合の
モーメントが求められている。いま f) で各節点に加
えるべき力が求めたので、図-24 と図-27 を用いて、
対応するモーメントを求めることができる。たとえば、
 M_{1a}^r を例にとれば、

$$\begin{aligned} & \text{節点1の } 1.159 \text{ による} \\ & M_{1a}^r = -0.130 \times 1.159 = -0.151 \\ & \text{節点2の } 0.928 \text{ による} \\ & M_{1a}^r = -0.102 \times 0.928 = -0.094 \\ & \text{節点3の } -1.897 \text{ による} \\ & M_{1a}^r = -0.073 \times (-1.897) = 0.138 \\ & \Sigma = -0.107 \end{aligned}$$

図-28 にこれらのモーメント計算を示すが、図中
 M_1 は第一段階におけるモーメント(図-24(b)),
 M_2 は新たに加える力によるモーメント

(上記の M_{1a}^r のようにして求める)
である。目的のモーメントは $M_1 + M_2$ で与えられる。

以上の解例では横桁1本の場合のもっとも基本的な分
配の要領を示した。先にも述べたように、横桁が2本以
上の場合には、1本の横桁に属する節点をバランスし、
円弧材によって他の横桁に伝達されたモーメントと反力
を不つりあい量として、この横桁に属する節点を同様
にしてバランスする。これを順次くり返せばよい。

主桁および横桁がともに直線材で作られる格子の解析
にも、式(5)を用いることによって以上の考えが適用
できることは容易に類推することができよう。

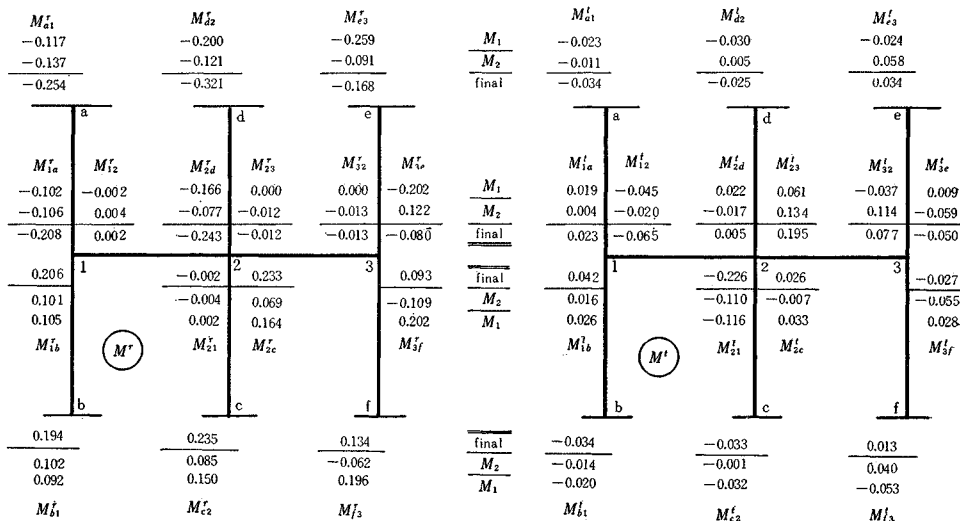


図-28

7. あ と が き

以上を要するに、円弧材で作られる構造物はいうまでもなく、円弧材と直線材の併用になる構造物の分配法による解析はここに示す方法によって可能になったのではないかと思われる。さらに、円弧材の分配法と直線材の分配法の関係も明らかにし得たのではないかと考える。

本研究は、九州大学工学部 村上 正教授のご指導をいただいた。ここに厚くお礼申し上げる次第である。

参 考 文 献

- 1) 山崎・太田：円弧部材をもつラーメンの立体解析，土木学会論文集，No. 107.
- 2) 山本：円弧部材に対するたわみ角式とそのモーメント分配法について，土木学会論文集，No. 114.

(1969.9.5 受付)
