

## 乱流境界層内の拡散に関する考察

——オイラー相関とラグランジュ相関の関係について——

### ON THE RELATION BETWEEN EULERIAN CORRELATION AND LAGRANGEAN CORRELATION

庄 司 光\*・山本 剛夫\*\*・石川 義紀\*\*\*  
By Hikaru Shoji, Takeo Yamamoto and Yoshinori Ishikawa

#### 1. ま え が き

G.I. Taylor<sup>1),2)</sup> によって拡散の理論の中に統計的手法が導入されて以来、拡散現象の解明に対する手段としての統計的手法が、主流の観を呈するに至った。G.I. Taylor<sup>1),2)</sup> の与えた拡散の自乗平均値は、one-particle diffusion の理論の基本をなしている。Taylor<sup>1),2)</sup> は拡散距離の自乗平均値  $\bar{Y}^2$  をつぎの式で与えた。

$$\bar{Y}^2 = \int_0^T \int_0^t 2 \bar{v}^2 \mathfrak{R}(\xi) d\xi dt$$

$\mathfrak{R}(\xi)$  は移動する粒子の速度のつくるラグランジュ相関であり、 $\bar{v}^2$  は速度の自乗平均値である。上式を実際に拡散現象の推定に直接用いることは、ラグランジュ相関の測定の困難さのため、その応用はきわめて限局されたものとなる。しかし、固定点を通る粒子の速度の相関として与えられるオイラー相関は、きわめて測定が容易なために、オイラー相関からラグランジュ相関への変換が数多く試みられてきた。

Pasquill<sup>3),4),5)</sup> は、時間軸の一次変換によりオイラー相関とラグランジュ相関とが対応するとした。また、Deissler<sup>6)</sup> は、拡散時間がきわめて短い場合については、オイラー相関とラグランジュ相関とはほとんど等しいとし、Mickelsen<sup>7)</sup> のデータを用いてこれを示している。一方、Kraichnan<sup>8)</sup> によれば、ラグランジュ速度の時間に関する変化の割合はオイラー速度の空間変化の割合から定められる。Corrsin<sup>9)</sup> は、非常に大きいレイノルズ数の領域すなわち、Kolmogoroff の局所等方性<sup>10),11)</sup> の成り立つ慣性小領域においてオイラー相関とラグランジュ相関を比較している。また Saffman<sup>12)</sup> は Kraichnan<sup>8)</sup> と同様の考え方によりオイラー相関とラグランジュ相関

とを対応させており、ラグランジュ相関はオイラーの時間空間に関する相関に粒子変位の確率密度について平均したものによって与えられるとした。また、Peskin<sup>13)</sup> も同様のことを述べている。

著者らは、ランダムワークとマルコフ連鎖を用いた Lumely<sup>14)</sup> の考え方を拡張して、オイラー相関からラグランジュ相関を推定し、さらに拡散の状態を Taylor<sup>1)</sup> の拡散式によって推定することを試み、風洞を用いて拡散の実験を行なって検討を加えた。

#### 2. 理 論

ランダムワークの理論を用いたブラウン運動の理論では、粒子が1回の移動によって右か左かへ動く確率が、1/2 に等しいときには、よく知られた二項確率分布があたえられる<sup>15)</sup>。粒子の移動の速度が一定であれば、粒子の速度の自己相関や粒子の変位に関する自己相関が得られる。しかし、これらの量は粒子の持つ量であり、その点においてやはりラグランジュ量であることがわかる。

粒子自身についての遷移確率を考えるかわりに、粒子が時間と空間とによって構成される格子点を通る際に、格子点からの指令に基づいて行動するとし、格子点の発する指令は統計的に規定された遷移確率に基づくランダムなプロセスを形成すると考える。ある時刻において、空間上に分布する指令は単純マルコフ連鎖であり、ある空間内の点において時間軸上に分布する指令もまたやはりひとつのマルコフ連鎖である。したがって、この指令の場からつくられる速度相関は、オイラー相関であり、粒子の追跡から得られる速度相関はラグランジュ相関である。粒子自身の行動も格子点の指令によって規定されるから、単純マルコフ連鎖の理論を用いることにより、オイラー相関とラグランジュ相関の関連を見出すことが可能となる。Lumely<sup>14)</sup> はこのような考え方に基づいて一次元の簡単な場合についての考察を行なってい

\* 正会員 医博 関西大学教授 工学部土木工学科

\*\* 正会員 医博 京都大学教授 工学部衛生工学科

\*\*\* 正会員 大阪府公営監視センター

るが、さらに一般的な場合についての考察を行なう。

格子点の発する指令についての遷移確率をつぎのように定める。

$p_i$  : ある空間内の格子点において速度が  $v_i$  である確率

$p_{ij}^{(n)}$  : ある格子点において速度が  $v_i$  であって、空間的に  $n$  ステップだけ離れた格子点での速度が  $v_j$  である確率

$q_i$  : ある時刻において速度が  $v_i$  である確率

$q_{ij}^{(n)}$  : ある格子点において速度が  $v_i$  であって、時間的に  $n$  ステップだけ離れた格子点での速度が  $v_j$  である確率

オイラーの自己相関を考えると、これは

$$R(\tau) = \frac{v(t)v(t+\tau)}{v^2(t)}$$

で定義される。上のごとく定めた遷移確率を用いると、速度  $v_i$  が  $k$  時間ステップ後に  $v_j$  となる確率は  $q_{ij}^{(k)}$  であるから、

$$\overline{v(t)v(t+\tau)} = \sum_i q_i (v_i \sum_j v_j q_{ij}^{(k)})$$

$$\overline{v^2(t)} = \sum_i q_i v_i^2$$

となる。ここで

$$\tau = k \Delta t_E$$

であり、 $\Delta t_E$  は仮想的な1時間ステップの長さである。

よって、オイラーの自己相関  $R(\tau)$  は

$$R(\tau) = \frac{\sum_i q_i (v_i \sum_j v_j q_{ij}^{(k)})}{\sum_i q_i v_i^2}$$

で表わされる。また、ある格子点から空間的に  $r$ 、時間的に  $\tau$  だけへだたった格子点における速度について、時間空間に関する速度相関は

$$R(r, \tau) = \frac{v(x, t)v(x+r, t+\tau)}{v^2(x, t)}$$

で定義される。初期の状態では速度が  $v_i$  であり、 $l$  空間ステップ、 $k$  時間ステップだけで離れた状態で速度が  $v_j$  となる確率は

$$\sum_m p_{im}^{(l)} q_{mj}^{(k)}$$

であたえられる。したがって、

$$\overline{v(x, t)v(x+r, t+\tau)} = \sum_i p_i q_i (v_i \sum_j v_j \sum_m p_{im}^{(l)} q_{mj}^{(k)})$$

$$\overline{v^2(x, t)} = \sum_i \sum_j p_i q_j v_j^2$$

であるから、

$$R(r, \tau) = \frac{\sum_i p_i q_i (v_i \sum_j v_j \sum_m p_{im}^{(l)} q_{mj}^{(k)})}{\sum_i \sum_j p_i q_j v_j^2} \dots (1)$$

と表わされる。ここで、

$$r = l \Delta r_E, \quad \tau = k \Delta t_E$$

であり、 $\Delta r_E$  は仮想的な1空間ステップの長さである。

また、粒子の追跡によって得られるラグランジュ速度相関は、つぎのように考えられる。粒子は初期の状態では  $v_i$  の速度を持つものとする。粒子は1回の移動によって1空間ステップと1時間ステップだけ移動するものとする。粒子は  $n$  回の移動によって  $n$  空間ステップと  $n$  時間ステップだけ移動することになる。 $n$  回の移動のあとに粒子の速度が  $v_j$  である確率は

$$\sum_m p_{im}^{(n)} q_{mj}^{(n)}$$

で表わされる。一方、ラグランジュの速度相関は、ひとつの粒子について

$$\mathfrak{R}(\xi) = \frac{v(t)v(t+\xi)}{v^2(t)}$$

で定義されるから、時間  $\xi$  を移動回数  $n$  におきかえて

$$\mathfrak{R}(n) = \frac{v(\text{initial})v(\text{after } n \text{ jumps})}{v^2}$$

で表わすことができる。よって、

$$\begin{aligned} & \overline{v(\text{initial})v(\text{after } n \text{ jumps})} \\ &= \sum_i p_i q_i v_i (\sum_j v_j \sum_m p_{im}^{(n)} q_{mj}^{(n)}) \\ & \overline{v^2} = \sum_i \sum_j p_i q_j v_j^2 \end{aligned}$$

となるので、ラグランジュの自己相関は

$$\mathfrak{R}(n) = \frac{\sum_i p_i q_i v_i (\sum_j v_j \sum_m p_{im}^{(n)} q_{mj}^{(n)})}{\sum_i \sum_j p_i q_j v_j^2} \dots (2)$$

となる。ここで  $\xi$  は

$$\xi = n \Delta t_L$$

である。 $\Delta t_L$  はラグランジュ相関における仮想的な1時間ステップであり、粒子1個について追跡した場合についてである。オイラーの時間空間に関する速度相関式(1)と式(2)とを比較すると

$$R(k=n, l=n) = \mathfrak{R}(n)$$

となり、オイラー相関とラグランジュ相関との基本的な対応が得られる。

いま、測定されたオイラー相関  $R(r, \tau)$  からいかなる手法によってラグランジュ相関が求められるか、さらに Taylor の拡散式<sup>1)</sup> によって拡散距離の自乗平均値が求められるかを考えてみる。

オイラー相関  $R(r, \tau)$  に対して

$$\tau = k \Delta t_E, \quad r = l \Delta r_E \dots (3)$$

の変換を施すと ( $\Delta t_E, \Delta r_E$  はオイラー相関における時間と空間のステップ間隔である)、

$$R(r, \tau) = R(l \Delta r_E, k \Delta t_E)$$

ここで  $k=l=n$  とし、オイラー相関のステップ間隔  $\Delta t_E, \Delta r_E$  をラグランジュ相関のステップ間隔  $\Delta t_L, \Delta r_L$  でおきかえればラグランジュ相関が得られて

$$\mathfrak{R}(n) = R(n \Delta t_L, n \Delta r_L) \dots (4)$$

となる。空間的なステップ間隔はオイラー相関においてもラグランジュ相関においても等しいと考えて、

$$\Delta r_E = \Delta r_L$$

とし、時間的なステップ間隔  $\Delta t_E$  と  $\Delta t_L$  の間に

$$\Delta t_L = \alpha \Delta t_E \dots\dots\dots(5)$$

の関係を仮定すると、ラグランジュ相関はオイラー相関の時間空間の単位で表わすことができ

$$\mathfrak{R}(n) = R(n \Delta r_E, n \alpha \Delta t_E) \dots\dots\dots(6)$$

の関係をj得る。

ここで、 $\Delta r_E$  は種々の値をとり得るランダム変数である<sup>13)</sup>と考えると、 $\mathfrak{R}(n)$  を  $\Delta r_E$  の確率分布にしたがって平均化したものが拡散に関するラグランジュ相関として利用し得る定常な関数である。それを  $\overline{\mathfrak{R}(n)}$  とすると

$$\overline{\mathfrak{R}(n)} = \int_{-\infty}^{+\infty} R(n \Delta r_E, n \alpha \Delta t_E) \rho(\Delta r_E) d \Delta r_E \dots\dots(7)$$

$\rho(\Delta r_E)$  は確率密度関数であり、正規分布をあてはめれば

$$\rho(\Delta r_E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\Delta r_E)^2}{2\sigma^2}\right) \dots\dots\dots(8)$$

と書くことができる。このとき  $\overline{\mathfrak{R}(n)}$  は

$$\begin{aligned} \overline{\mathfrak{R}(n)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} R(n \Delta r_E, n \alpha \Delta t_E) \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\Delta r_E)^2}{2\sigma^2}\right) d \Delta r_E \end{aligned}$$

で表わされる。

Taylor の理論<sup>1)</sup>によって、ラグランジュ相関  $\mathfrak{R}(\xi)$  を用いて、拡散距離の自乗平均値  $\overline{Y^2}$  は時間  $T$  まででは

$$\overline{Y^2} = \int_0^T \int_0^t 2 \bar{v}^2 \mathfrak{R}(\xi) d \xi dt$$

で表わされた。上述の手法により推定したラグランジュ相関  $\overline{\mathfrak{R}(n)}$  を用いると

$$\xi = n \Delta t_E \quad t' = n' \Delta t_E \quad T = N \Delta t_E$$

の変換により

$$\overline{Y^2} = 2 \bar{v}^2 (\Delta t)^2 \int_0^N \int_0^{n'} \overline{\mathfrak{R}(n)} d n d n' \dots\dots\dots(9)$$

となり、オイラー相関から拡散距離の自乗平均値が計算される。

つぎに、仮想的な定数  $\alpha$  はラグランジュの時間ステップ間隔とオイラーの時間ステップ間隔の比であるとしたので、Pasquill<sup>3),4),5)</sup> が示したオイラー相関とラグランジュ相関の時間軸変換の係数  $\beta$  と同じ性質のものである。Pasquill<sup>3),4),5)</sup> はこの  $\beta$  をオイラーとラグランジュの時間積分スケールの比によって定義したが、この考えによれば  $\beta$  は  $1/\alpha$  に対応する。Lumely ら<sup>14)</sup> はオイラーの時間と空間に関する速度相関が

$$R = R_1(k \Delta t_E) R_2(l \Delta r_E)$$

と表わされるとき、乱れの積分スケールとして

$$\mathfrak{L}_E = \int_0^\infty R_1(k \Delta t_E) dk \int_0^\infty R_2(l \Delta r_E) dl$$

によりオイラー相関の場合を示し、

$$\mathfrak{L}_L = \int_0^\infty \mathfrak{R}(n) dn$$

をラグランジュ相関の積分スケールであるとした。しかし、オイラーの時間空間の速度相関は時間と距離の関数であるとするほうが、時間相関と空間相関の積で与えられるとするよりも一般的であるので、オイラーの積分スケールは

$$\mathfrak{L}_E = \int_0^\infty \int_0^\infty R(k \Delta t_E, l \Delta r_E) dk dl$$

で与えることが妥当であると考えられる。この  $\mathfrak{L}_L$  および  $L_E$  を  $\alpha$  を定めるべき目盛の比と考えると

$$\mathfrak{L}_L = L_E$$

によって  $\Delta t_L$  と  $\Delta t_E$  の比  $\alpha$  が与えられる。ただし、このとき、空間ステップ間隔  $\Delta r_L$  と  $\Delta r_E$  とは等しいものとしている。すなわち、 $\mathfrak{R}(n)$  は式 (6) によって与えられるから

$$\begin{aligned} \int_0^\infty R(n \Delta r_E, n \alpha \Delta t_E) dn \\ = \int_0^\infty \int_0^\infty R(k \Delta t_E, l \Delta r_E) dk dl \dots\dots\dots(10) \end{aligned}$$

によって  $\alpha$  が与えられる。

### 3. 実 験

#### (1) 装置および方法

実験装置の概要を図-1 に示す。使用した風洞はエッフェル型で最大風速 25 m/sec、測定部断面 2.5 m × 1.5 m、測定部長 6.8 m の大気汚染研究用緩速風洞である。風洞内に平板を設置し、その上に形成される乱流境界層を乱れの場としてえらんだ。平板は幅 1 m、長さ 5 m で、風洞の床面上 0.5 m の高さに水平に設置した。風洞中心線と平板の長さ方向とは平行に設置した。乱流境界層を厚くする目的で、平板には粗度をあたえた。粗度は砂粒によってあたえ、砂の直径は 1.25~2.5 mm と

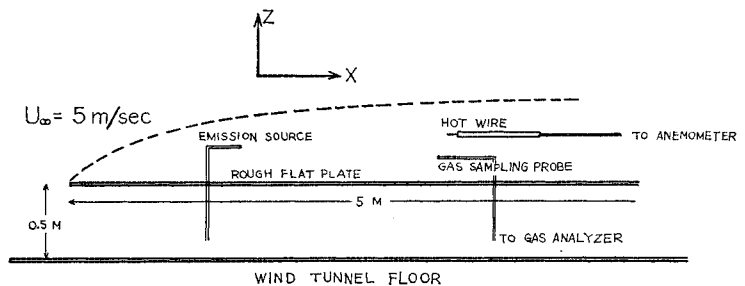


図-1 Experiment Apparatus

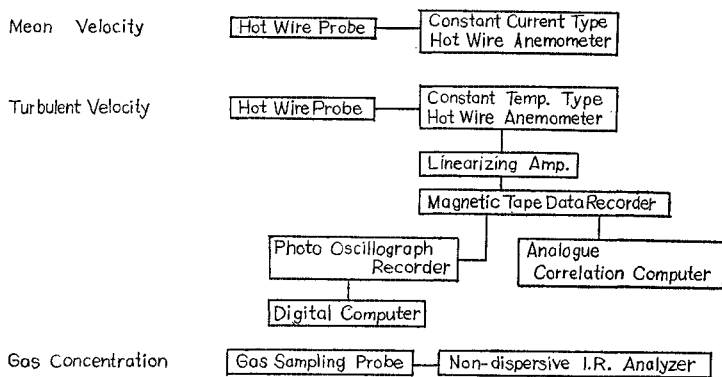


図-2 Measuring Instrument

した。

図-1には座標軸の設定についても示す。流下方向に  $X$  軸を、高さ方向に  $Z$  軸をとり、 $X$  軸および  $Z$  軸に直角な方向を  $Y$  軸とする。速度成分に対しては、 $X$  軸  $Y$  軸、 $Z$  軸にそれぞれ対応して添字 1, 2, 3 を用いる。

測定器およびその計測システムを図-2に示す。平均風速の測定はヒーター管および定電流型熱線風速計 (AM-B型, 日本科学工業, 大阪) を用いた。乱流風速の測定には定温度型熱線風速計 (IAM-60, 日本科学工業, 大阪) を用いた。熱線風速計へ熱線部分から送られる信号は風速とは一次関係にない<sup>16)</sup> ために、記録計へ入力するには一次関係になおす必要があり、そのために直線化増幅器 (FLN-60, 日本科学工業, 大阪) を用いた。 $X$  および  $Y$  方向の乱流風速測定のために熱線風速計および直線化増幅器を2台ずつ用いた。風速の計測システムからの出力は記録装置への入力とした。記録装置には磁気テープデータレコーダー (R-400, TEAC, 東京) および風速のデジタル化のための電磁オシログラフ (応答周波数 0~2 kHz, PR-62, 横河, 東京) を用いた。

速度相関の測定にはアナログ相関計 (C-10, TEAC, 東京) を用いてオイラーの時間相関を測定し、オイラーの空間相関については電磁オシログラフの記録紙上に記録された乱流風速波形を読みとり、電子計算機 (京都大学 KDC-II) により計算した。相関係数測定のためのデータは、オイラー時間相関の場合には、アナログ相関計への入力として実時間で約 10 秒であり、空間相関の場合については実時間で1秒間につき 1000 個のデータで2秒間を用いて計算した。

拡散状態の測定にはエタンガスをトレーサーとして用いた。トレーサーガスの放出は平板前縁より下流方向に 3.2 m の地点にて行ない、高さ 50 mm で平均流と平行に流下方向に向けて放出した。放出の速度は平均流と同じく 4.4 m/sec とした。濃度分布の測定には非分散型赤外ガス分析計 (URAS-1, 島津, 京都) を用いて十分に長い時間にわたり測定した。濃度の測定は放出口より下

流 50 cm, 60 cm, 80 cm, 100 cm, 120 cm, 150 cm の地点において高さ 50 mm で  $Y$  方向にわたり測定した。自由流風速は一定とし、すべての場合について約 5 m/sec とした。

## (2) 結果

平板の前縁より 4 m の地点で風速 5 m/sec において測定した風速分布は図-3のごとくである。縦軸に平均風速  $U$  (m/sec) を、横軸に高さ  $Z$  (mm) の対数  $\ln Z$  をとった。2本の直線に

よって、近似されることが図より認められる。これは Grant<sup>17)</sup> の得た結果と一致しており、境界層内の風速分布が対数分布であるとされていること<sup>18), 19), 20)</sup> にも一致する。境界層厚さは自由流の 99% の平均風速を持つ高さとして 9.2 cm であった。

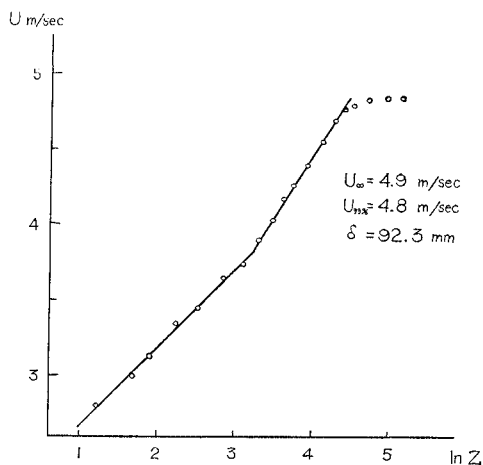


図-3 Velocity Distribution in Boundary Layer

平板の前縁より 4 m の地点で、自由流の平均風速 5 m/sec の条件において測定した乱流強度分布を図-4に示す。図には縦軸に乱流強度%を対数目盛で示し、横軸には高さ  $Z$  mm を対数目盛で示す。乱流強度分布は、Laufer<sup>21)</sup>, Schlichting<sup>18)</sup>, Hinze<sup>22)</sup> の与えた結果とほぼ同様の傾向を示す。

乱れのスペクトルの一例を図-5に示す。これは平板前縁より 4 m, 高さ 47.3 mm における測定を示すもので、縦軸には波数 ( $\kappa = 2\pi/\lambda$ ) あたりの乱れエネルギー ( $v^2/\kappa$  (cm<sup>3</sup>/sec<sup>2</sup>)) を対数目盛で示し、横軸には波数を対数目盛で示す。 $u_1, u_2, u_3$  とも、ほとんど同様の値を示すが、とくに波数の大きい領域ではこれが著しい。また、波数の小さい領域では  $u_1, u_2, u_3$  の順で波数あたりのエネルギーが小さくなり、乱れの非等方性に寄与していることが認められる。この事実は Laufer<sup>21)</sup> の得た結果と

同様である。しかし波数あたりのエネルギーの値は大きく異なり、これは自由流の平均風速が Laufer<sup>21)</sup> の場合には 30 m/sec であったのに比して、著者らの場合は 5 m/sec と大きく異なるためと考えられる。

平板の前縁より 4 m の地点において  $u_1, u_2, u_3$  につ

いての自己相関係数を測定した。その一例を、高さ  $Z=47.3$  mm の場合について  $u_1$  の自己相関係数および  $u_2$  の自己相関係数を 図-6, 図-7 に示す。オイラーの空間相関については平板前縁より 4 m, 高さ  $Z=47.3$  mm の点において、 $u_1$  の乱流速度成分に対して  $Y$  方向に距

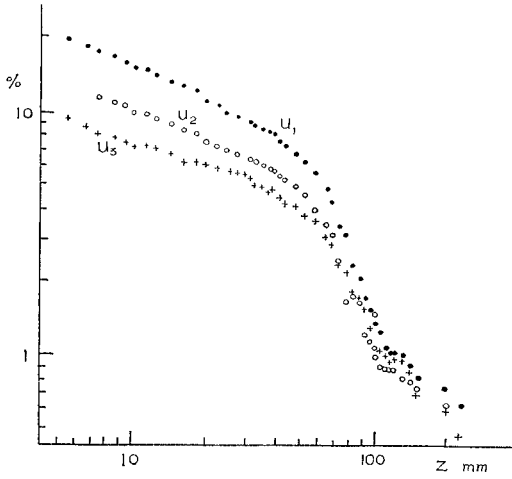


図-4 Turbulent Intensity in Boundary Layer

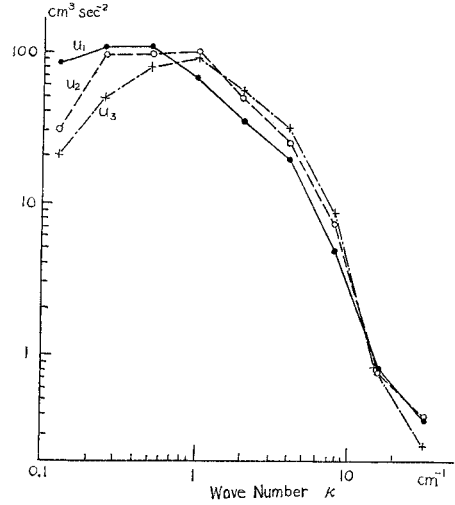


図-5 Turbulent Energy Spectra

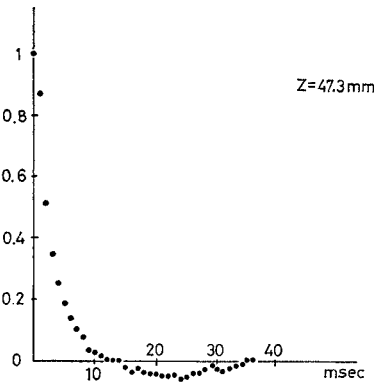


図-6 Eulerian Time Correlation of  $u_1$

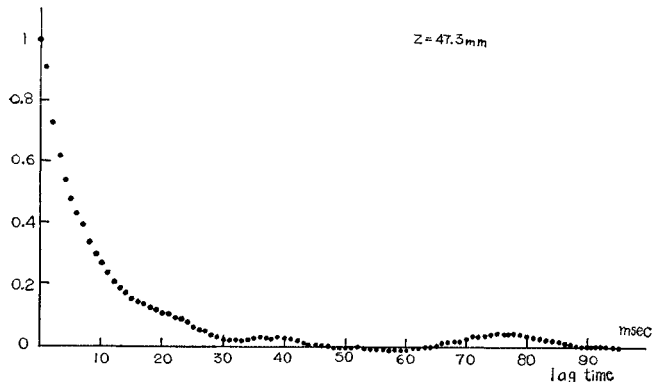


図-7 Eulerian Time Correlation Coefficient of  $u_2$

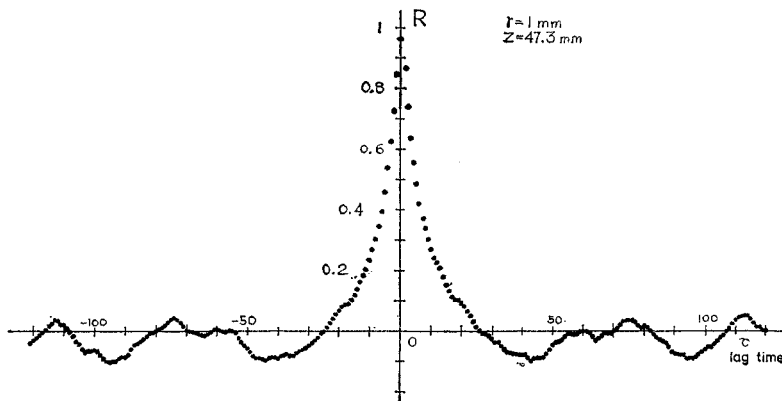


図-8 Eulerian Space-Time Correlation  $R_{22}(0, r, 0, \tau)$

離  $r$  だけ離れた二点においての同時観測から得た結果の一例を図-8, 図-9 に示す。図-8 は  $r = 1 \text{ mm}$  の場合について示し, 図-9 は,  $r = 10 \text{ mm}$  における場合について示す。

拡散の状況の測定結果を, トレーサーガスの放出口より下流 50 cm, 60 cm, 80 cm, 100 cm, 120 cm, 150 cm の距離について, 高さ 47.3 mm の場合を図-10 に示す。縦軸には煙の中心軸濃度を 1 とした相対的な濃度を対数目盛で示し, 横軸には煙の中心軸からの距離の自乗を示す。図中の直線は最小自乗法による回帰直線を示す。濃度の分布は  $Y$  方向に正規分布をなすことを正規確率紙によって検定した。格子によってつくられる等方性乱流の場合においても濃度分布は正規型となることが報告されている<sup>23)</sup>。

#### 4. 解 析

##### (1) 速度相関の推定

速度相関係数は Navier-Stokes の式からその一般形が導かれている。Batchelor<sup>24)</sup> は Navier-Stokes の式 of 非線型項の省略の仮定のもとで空間相関関数の一般形を導いている。その一例は

$$R_{11}(0, r, 0) = \left(1 - \frac{r^2}{4\nu(t-t_0)c}\right) \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu(t-t_0)}\right) \dots\dots\dots (11)$$

$$R_{22}(0, r, 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu(t-t_0)}\right) \dots\dots\dots (12)$$

である。 $R_{11}(0, r, 0)$  は  $u_1$  の  $Y$  方向に関する相関を表わし,  $R_{22}(0, r, 0)$  は  $u_2$  の  $Y$  方向に関する相関を表わす。これを図-11 に示す。 $c$  は初期条件により定まり, 時間に関係しない定数である。 $t$  は現在の時刻であり,  $t_0$  は Navier-Stokes の式の中の非線型項の省略が達成された時刻である。非等方性乱流の場合は  $R_{11}(0, r, 0)$  の式 (11) の中に表われる  $t_0$  と  $R_{22}(0, r, 0)$  の式 (12) の中に表われる  $t_0$  とは一致しないが,  $(X, Y)$  平面内では等方性にきわめて近いと考えると,  $(t-t_0)$  は両者について, ほぼ一致すると仮定できる。さらに, Deissler<sup>6)</sup> によれば, Navier-Stokes の式からの誘導に

$$R_{11}(0, r, 0, \tau) = \left(\frac{t-t_0}{t-t_0+\frac{1}{2}\tau}\right)^{5/2} \left(1 - \frac{r^2}{4\nu(t-t_0+\frac{1}{2}\tau)}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu(t-t_0+\frac{1}{2}\tau)}\right) \dots\dots\dots (13)$$

$$R_{22}(0, r, 0, \tau) = \left(\frac{t-t_0}{t-t_0+\frac{1}{2}\tau}\right)^{5/2} \exp\left(-\frac{r^2}{8\nu(t-t_0+\frac{1}{2}\tau)}\right) \dots\dots\dots (14)$$

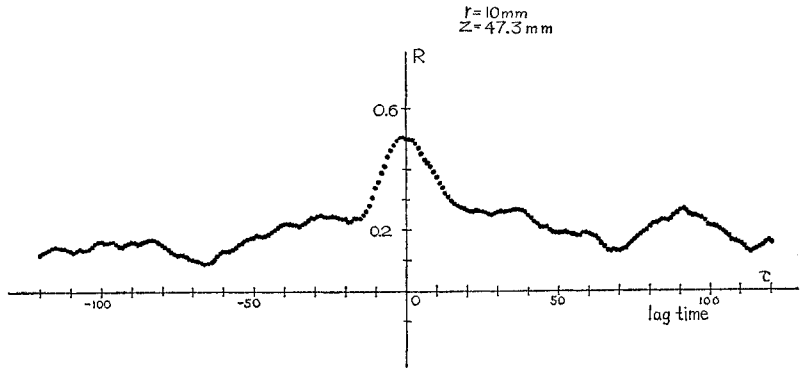


図-9 Eulerian Space-Time Correlation  $R_{22}(0, r, 0, \tau)$

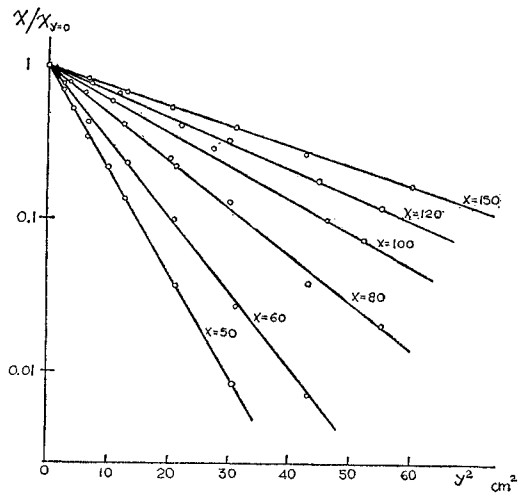


図-10 Concentration Distribution

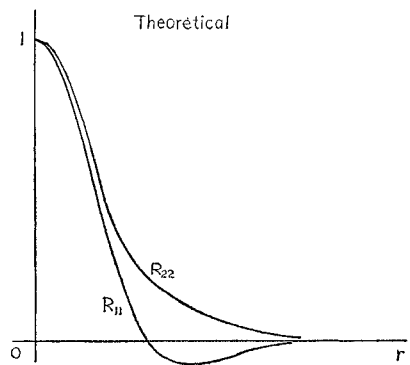


図-11 Theoretical form of  $R_{11}(0, r, 0)$  and  $R_{22}(0, r, 0)$

において三重相関を無視することにより, 時間と空間に関する速度相関の一般形を導いている。その一例は

である。 $\tau$  は遅延時間を表わす。Deissler<sup>6)</sup> によって与えられた速度相関の一般形において、 $\tau=0$  とおけば、Batchelor<sup>24)</sup> の与えた速度相関の一般形に一致する。Batchelor<sup>24)</sup> らは、Navier-Stokes の式の中の非線型項の省略ができる時期は非常に小さいメッシュの乱流格子のもとでは約 450 M (M はメッシュサイズを表わす) の点であると報告しており、Klebanoff ら<sup>26)</sup> の測定によって非線型項の無視可能な時期以前でも三重相関はきわめて小さいことが認められているので、Deissler<sup>6)</sup> の相関の一般形が筆者らの実験においても適用可能であると考えられる。なお、円柱のうしろの乱れのような特殊の場合においても、この一般形の適用が可能なることを Grant<sup>17)</sup> が示している。Lappe ら<sup>27)</sup> や Strohheln ら<sup>28)</sup> は大気中で速度相関を測定していくつかの相関関数の形式を求めているが、この中には Batchelor<sup>24)</sup> の示した相関関数も含まれている。また Favre<sup>29), 30)</sup> や Tritton<sup>31)</sup> は風洞中において速度相関を測定しており、Raichlen<sup>32)</sup> は水中において速度相関を測定しているが、相関関数の形式については論じていない。しかし、それらの結果は Batchelor<sup>24)</sup> や Deissler<sup>6)</sup> の一般形と同様な傾向を示している。

測定した  $R_{11}(0, r, 0)$  は 図-12 に示すが、これは Grant<sup>17)</sup> の結果ときわめてよく似た傾向を示し、先に述べた相関関数の理論形ともほぼ同様の傾向を示す。

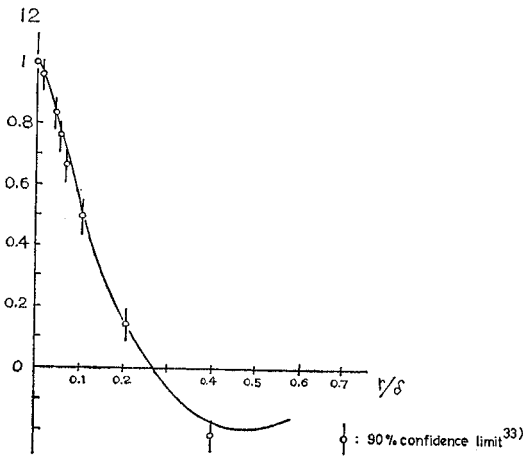


図-12 Eulerian Space Correlation  $R_{11}(0, r, 0)$

$R_{22}(0, r, 0)$  については著者らは実験の都合によって測定し得なかつたので、以下に述べる方法によって推定した。 $R_{22}(0, r, 0)$  の測定は、X 型熱線の持つ大きさが Y 方向の距離  $r$  の大きさに比して無視できないために、風洞中のごとき小規模の乱れに対しては、正確に行なうことはかなり困難であると考えられる。

測定した  $R_{11}(0, r, 0)$  が相関関数の理論形式 (11) に一致すると考えるときには、二つのパラメーター  $c$  お

よび  $4\nu(t-t_0)$  が未知定数である。式 (11) の理論形で  $R_{11}(0, r, 0)$  を表わすために、2 個のパラメーターを定める条件として、乱れのマイクロスケールと積分スケールとを用いた。すなわち、測定したマイクロスケールと積分スケールを持つ理論形によって相関関数を表わした。

式 (11) に対するマイクロスケール  $\lambda_{11}$  は、通常のマイクロスケールの定義

$$\frac{u^2}{\lambda^2} = - \left[ \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \right]_{r=0}$$

にしたがえば

$$\lambda_{11}^2(0, r, 0) = 4\nu(t-t_0) \frac{1}{1+2/c} \dots \dots \dots (15)$$

で与えられる。同様に積分スケールの通常の定義

$$L = \int_0^\infty R dr$$

にしたがえば

$$L_{11}(0, r, 0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sqrt{8\nu(t-t_0)} \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots (16)$$

で積分スケールが与えられる。測定したマイクロスケールおよび積分スケールは

$$\nu_{11}^2(0, r, 0) = \left(\frac{1}{98.95}\right) \delta^2$$

$$L_{11}(0, r, 0) = 0.114 \delta$$

であったので、式 (15), (16) にこれを代入して

$$c = 8.05, \quad 8\nu(t-t_0) = 0.025 \delta^2$$

を得る。 $\delta$  は境界層厚さで 92 mm である。これら 2 個のパラメーターによって

$$R_{11}(0, r, 0) = \left(1 - \frac{r^2}{0.101 \delta^2}\right) \exp\left(-\frac{r^2}{0.025 \delta^2}\right)$$

となる。これを 図-13 に示す。実測値と比較すれば、 $r/\delta$  が 0.3 までは両者はよく一致しているが、0.3 以上では、両者の距離は、やや大きくなっている。これは Navier-Stokes における線非型項の無視が可能な状態、あるいは三重相関の無視が可能な状態が達成されないために、測定した  $R_{11}(0, r, 0)$  が式 (11) の形からのずれを生じたためと考えられる。上に求めたパラメーターが

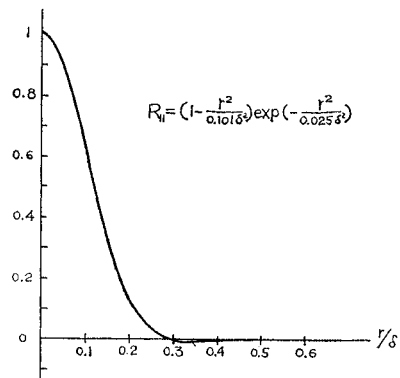


図-13 Estimated Theoretical form of  $R_{11}(0, r, 0)$

$R_{22}(0, r, 0)$  においても  $R_{11}(0, r, 0)$  と同じであると考えられると

$$R_{22}(0, r, 0) = \exp\left(-\frac{r^2}{0.025 \delta^2}\right)$$

となり、これを 図-14 に示す。 $R_{22}(0, r, 0)$  の推定については、Grant<sup>17)</sup> の測定した結果を用いて検討した。その結果、Grant<sup>17)</sup> の結果を代表させた理論形は実測値とは細部において異なりを示すが、推定した  $R_{22}(0, r, 0)$  の積分スケールおよびマイクロ スケールは測定された相関係数から得られた値と大差はなく、十分に有意であると考えられる。これを 表-1 に示す。

オイラーの時間相関係数は、Deissler<sup>6)</sup> によれば、式 (13)、(14) における相関関数の一般形において  $r=0$  とすれば得られて、

$$R(\tau) = \left(\frac{t-t_0}{t-t_0+\tau/2}\right)^{5/2} \dots\dots\dots(17)$$

Fig- 14

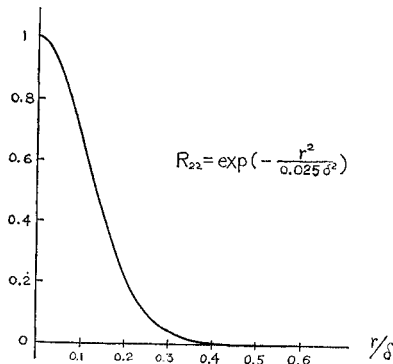


図-14 Estimated  $R_{22}(0, r, 0)$

表-1 Integral Scale and Microscale

	$L_{22}(0, r, 0)$	$\lambda_{22}^2(0, r, 0)$
Observed	$0.145 \delta$	$\delta^2/98.9$
Estimated	$0.131 \delta$	$\delta^2/93.5$

$\delta$  : Boundary Layer Thickness

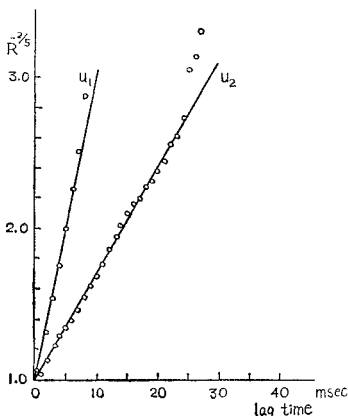


図-15 Eulerian Auto-Correlation

で与えられる。本実験において測定したオイラーの自己相関関数  $R(\tau)$  を 図-6 および 図-7 に示したが、式 (17) の関係を満足するかどうかを検討するために  $(R(\tau))^{-2/5}$  と  $\tau$  とをプロットしたものを 図-15 に示す。この結果、 $(R(\tau))^{-2/5}$  と  $\tau$  とはきわめてよい直線関係にあり、式 (17) の成立することが認められる。この結果、 $u_2$  のオイラー自己相関に関しては

$$R_{22}(\tau) = \left(\frac{13.8}{13.8+\tau}\right)^{5/2} \quad (\tau : \text{msec})$$

の関係が得られた。パラメータ  $(t-t_0)$  は空間相関係数 (式 (13)、(14)) における場合とは原則として一致せねばならないが、Navier-Stokes における非線形項の無視の条件が完全には満たされないために、両者において異なると考えられる。 $u_1$  と  $u_2$  の場合の  $(t-t_0)$  の異なりも同様の原因と考えられる。

以上のごとく、 $u_2$  に関するオイラーの時間空間相関  $R_{22}(0, r, 0)$  を推定した結果、式 (14) の形については

$$R_{22}(0, r, 0, \tau) = \left(\frac{13.8}{13.8+\tau}\right)^{5/2} \times \exp\left(-\frac{r^2}{215.6+0.056 \tau}\right) \dots\dots\dots(18)$$

を得る。

(2) ラグランジュ相関の推定

式 (18) により表わされるオイラーの相関に対して、式 (3) の変換を施し、式 (4) の  $\Re(n)$  を求めると

$$\Re_{22}(n) = \left(\frac{13.8}{13.8+n \Delta t_L}\right)^{5/2} \exp\left(-\frac{n^2(\Delta r_L)^2}{215.6+0.056 n \Delta t_L}\right)$$

さらに、式 (5)、(6) によって

$$\Re_{22}(n) = \left(\frac{13.8}{13.8+\alpha n \Delta t_E}\right)^{5/2} \exp\left(-\frac{n^2(\Delta r_E)^2}{215.6+0.056 \alpha n \Delta t_E}\right)$$

$\Delta r_E$  はランダム変数と考え、式 (7)、(8) により

$$\begin{aligned} \overline{\Re(n)} &= \int_{-0}^{\infty} \left(\frac{13.8}{13.8+\alpha n \Delta t_E}\right)^{5/2} \exp\left(-\frac{n^2(\Delta r_E)^2}{215.6+0.056 \alpha n \Delta t_E}\right) \\ &\cdot \frac{1}{\sqrt{2 \pi \sigma_{\Delta r_E}}} \exp\left(-\frac{(\Delta r_E)^2}{2 \sigma_{\Delta r_E}^2}\right) d \Delta r_E \\ &\equiv \left(\frac{13.8}{13.8+\alpha n \Delta t_E}\right)^{5/2} \left(\frac{215.6}{2 n^2 \sigma_{\Delta r_E}^2 + 215.6}\right)^{1/2} \dots\dots\dots(19) \end{aligned}$$

を得る。

(3) 拡散状況の推定

式 (19) により与えられたラグランジュ相関から式 (9) によって、拡散の自乗平均値  $\overline{Y^2}$  を求めると

$$\begin{aligned} \overline{Y^2} &= 2 \bar{v}^2 (\Delta t_E)^2 \int_0^N \int_0^{n'} \left(\frac{13.8}{13.8+\alpha n \Delta t_E}\right)^{5/2} \\ &\times \left(\frac{215.6}{2 n^2 \sigma_{\Delta r_E}^2 + 215.6}\right)^{1/2} d n d n' \\ &\equiv 2 \bar{v}^2 \left[ \frac{4}{3} \left(\frac{13.8}{\alpha}\right)^{5/2} \left(\frac{13.8}{\alpha} + T\right)^{-1/2} + \frac{4}{3} \left(\frac{13.8}{\alpha}\right)^2 \right. \\ &\left. + \frac{2}{3} \left(\frac{13.8}{\alpha}\right) T \right] \dots\dots\dots(20) \end{aligned}$$



を得る。 $T$  は拡散時間 (msec) である。 $\bar{v}^2$  は拡散物質の速度の自乗平均値であるが、流体の乱流速度成分  $u_2$  の自乗平均値に等しいと考えて、 $(\bar{u}_2^2)^{1/2} = 0.23 \text{ m/sec}$  の測定値を  $(\bar{v}^2)^{1/2}$  として用いた。 $\sigma_{\Delta r_E}$  は、粒子の1回の移動行程  $\Delta r_E$  の RMS 値であり、きわめて小さいので  $\sigma_{\Delta r_E}^2 \rightarrow 0$  として計算を行なった。得られた結果の式 (20) を  $\alpha = 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/10, 1/16$  について 図-16 に示す。図には縦軸に拡散距離の自乗平均値を示し、横軸には、拡散時間を示す。図より、拡散時間  $T$  が 100 msec をこえると、拡散距離の自乗平均値と拡散時間とは直線関係に近くなることが認められる。

また、図中には  $Y$  方向の濃度分布の測定から求めた拡散距離の自乗平均値  $\bar{Y}^2$  の測定結果を  $T = 100 \text{ msec}, 120 \text{ msec}, 160 \text{ msec}, 200 \text{ msec}, 240 \text{ msec}, 300 \text{ msec}$  について示す。その結果、計算値と測定値とは ( $\alpha = 1/10$  において) きわめてよく一致する。

オイラー-ラグランジュの仮想的な時間目盛の比  $\alpha$  を、式 (10) により求めるため、 $\mathfrak{L}_L, \mathfrak{L}_E$  を

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}_L &= \int_0^\infty \left( \frac{13.8}{13.8 + n \Delta t_L} \right)^{5/2} \exp\left(-\frac{n^2 (\Delta r)^2}{215.6 + 0.056 n \Delta t_L}\right) dn \\ &= \mathfrak{L}_E = \int_0^\infty \int_0^\infty \left( \frac{13.8}{13.8 + k \Delta t_E} \right)^{5/2} \exp\left(-\frac{l^2 (\Delta r)^2}{215.6 + 0.056 k \Delta t_E}\right) dk dl \end{aligned}$$

とし、 $\Delta t_E, \Delta t_L, \Delta r$  を任意に与えて近似計算した結果を 図-17 に示す。ただし、 $\Delta r_E = \Delta r_L = \Delta r$  と仮定している。図には縦軸に  $\mathfrak{L}$ 、横軸に  $\Delta t$  を示す。 $\mathfrak{L}_L$  およ

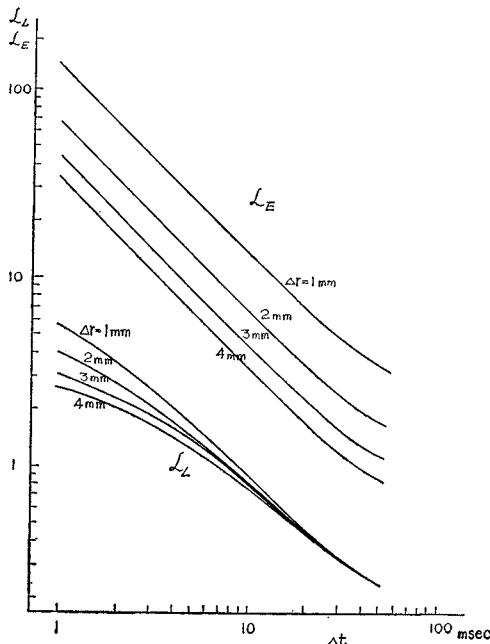


図-17  $\mathfrak{L}_L$  and  $\mathfrak{L}_E$

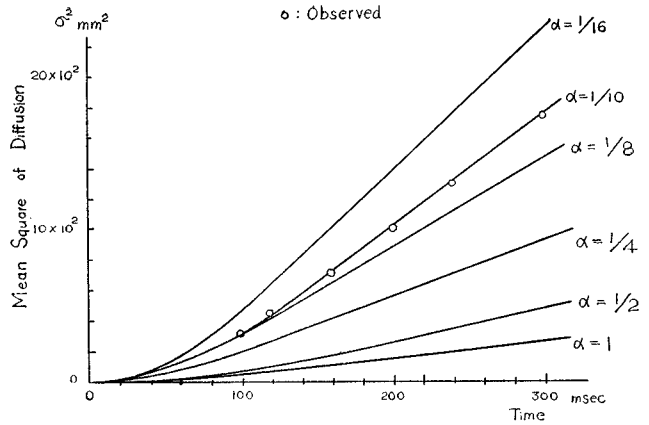


図-16 Estimated Diffusion

び  $\mathfrak{L}_E$  はほぼ平行の関係にあり、同じ値の  $\mathfrak{L}_L$  と  $\mathfrak{L}_E$  に対して  $\Delta t_L$  と  $\Delta t_E$  とは一次関係の傾向を示す。定数  $\alpha$  は  $\Delta r$  により異なり、 $\Delta r = 1 \text{ mm}$  の場合に  $\alpha$  は約  $1/25$ 、 $\Delta r = 2 \text{ mm}$  の場合は約  $1/13$  の値を示す。 $\Delta r = 3 \text{ mm}$ 、 $4 \text{ mm}$  の場合には、それぞれ、おおむね  $1/10$  の値を示す。

### 5. 結 語

単純マルコフ連鎖を用いた Lumely ら<sup>14)</sup> の、オイラー相関とラグランジュ相関の関係式を考察した結果、これを風洞内における乱流境界層内の拡散に適用したところ、つぎの結果を得た。

ラグランジュ相関  $\mathfrak{R}(\xi)$  はオイラーの時間空間の速度相関  $R(r, \tau)$  と

$$\mathfrak{R}(n) = R(n, n)$$

$$\xi = n \Delta t_L, \quad \tau = n \Delta t_E, \quad r = n \Delta r_E$$

の対応を持つ。 $\Delta t_L, \Delta r_E, \Delta t_E$  はそれぞれラグランジュ相関における粒子の1回の移動の時間的な長さ、オイラー相関における粒子の1回の移動の空間的な長さ、および時間的な長さである。

以上の結果を実験によって検討し、本実験においては十分に成立することを認めた。このとき  $\Delta t_L = \alpha \Delta t_E$  として計算を行ない、拡散実験からは  $\alpha = 1/10$ 、オイラーとラグランジュの積分スケールの比較からは  $\Delta r$  により異なるが、 $1/25 \sim 1/10$  の値を得た。普遍的に成立し得るか否かについては、 $\Delta t_L$  と  $\Delta t_E$  の間の対応関係とともに、今後さらに検討を要する。

終りに、本研究を行なうにあたり、多大のご助力を賜った京都大学工学部衛生工学教室講師 西田耕之助氏に深くお礼申しあげる次第である。

### Nomenclature

$Y$ :  $y$  方向の拡散距離

$T$ : 拡散時間

- $v$  : 粒子の持つ  $y$  方向の速度  
 $\mathfrak{R}$  : ラグランジュ相関  
 $\mathfrak{E}$  : ラグランジュ相関のラグタイム  
 $R$  : オイラー相関  
 $\tau$  : オイラー相関のラグタイム  
 $r$  : 距離  
 $\Delta t$  : 粒子の1回の移動に要する時間  
 $\Delta t_L$  : ラグランジュ的に見た粒子の1回の移動時間  
 $\Delta t_E$  : オイラー的に見た粒子の1回の移動時間  
 $\Delta r$  : 粒子の1回の移動距離  
 $n$  : 粒子の移動回数  
 $N$  : 粒子の拡散時間内の総移動回数  
 $\mathfrak{S}_L$  : 粒子の移動回数によるラグランジュの積分スケール  
 $\mathfrak{S}_E$  : 粒子の移動回数によるオイラーの積分スケール  
 $U$  : 自由流の風速  
 $Z$  : 高さ  
 $\delta$  : 境界層厚さ  
 $\kappa$  : 単位長さあたりの波数  
 $u_1$  :  $x$  方向の乱流速度  
 $u_2$  :  $y$  方向の乱流速度  
 $u_3$  :  $z$  方向の乱流速度  
 $\chi$  : トレーサーガス濃度  
 $\nu$  : 空気の動粘性係数  
 $L$  : オイラーの積分スケール  
 $\lambda$  : オイラーのミクスケール

## 参 考 文 献

- 1) Taylor, G.I. : Diffusion by Continuous Movements, Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2, Vol. 20, 196-211, 1921
- 2) Taylor, G.I. : The Statistical Theory of Turbulence, Parts I-IV, Proc. Roy. Soc., Ser. A, Vol. 151, 421-478, 1935
- 3) Hay, J.S., Pasquill, F. : Diffusion from a Continuous Source in Relation to the Spectrum and Scale of Turbulence, Advances in Geophys. 6, 345-365, 1959
- 4) Pasquill, F. : Relation between the Lagrangean and Eulerian Properties of Turbulence, Jr. Atm. Sci., Vol. 20, 621-622, 1963
- 5) Pasquill, F. : Atmospheric Diffusion, the Dispersion of Windborne Material from Industrial and Other Sources, 92-101, D. van Nostrand Co. Ltd., N.Y., 1962
- 6) Deissler, R.G. : Analysis of Multipoint-Multitime Correlations and Diffusion in Decaying Homogeneous Turbulence, N.A.S.A. Tech. Rep. R-96, 1961
- 7) Mickelsen, W.R. : An Experimental Comparison of the Lagrangean and Eulerian Correlation in Homogeneous Isotropic Turbulence, N.A.S.A. Tech. Note, No. 3570, 1955
- 8) Kraichnan, R.H. : Relation between Lagrangean and Eulerian Correlation Times of Turbulent Velocity Field, Physics of Fluids, Vol. 7, No. 1, 142-143, 1964
- 9) Corrsin, S. : Estimates of the Relation between Eulerian and Lagrangean Scales in Large Reynolds Number Turbulence, Jr. Atm. Sci., Vol. 20, 115-119, 1963
- 10) Kolmogoroff, A.N. : The Local Structure of Turbulence in Incompressible Viscous Fluid for Very Large Reynolds Numbers, Comptes Rendus (Doklady) del'Academie des Sciences del'U.R.S.S., Vol. 30, No. 4, 301-305, 1941
- 11) Kolmogoroff, A.N. : Dissipation of Energy in Locally Isotropic Turbulence, Comptes Rendus (Doklady) del'Academie des Sciences del'U.R.S.S., Vol. 32, 16-18, 1941
- 12) Saffman, P.G. : An Approximate Calculation of the Lagrangean Auto-Correlation Coefficient for Stationary Homogeneous Turbulence, Appl. Sci. Res., Sec. A, Vol. 11, 245-255, 1963
- 13) Peskin, R.L. : Short Time Eulerian-Lagrangean Independence, Physics of Fluids, Vol. 8, No. 5, 993-994, 1965
- 14) Lumely, J.L., Corrsin, S. : A Random Walk with Both Lagrangean and Eulerian Statistics, Advances in Geophys., 6, 179-183, 1959
- 15) Feller, W. : An Introduction to the Probability Theory and its Applications, Vol. 1, 323-327, Tuttle Willey, N.Y. 1950
- 16) King, L.V. : On the Convection of Heat from Small Cylinders in Stream Fluid : Determination of the Convection Constants of Small Platinum Wires with Applications to Hot-Wire Anemometry, Phil. Trans., A, Vol 214, 373-432, 1914
- 17) Grant, H.L. : The Large Eddies of Turbulence Motion, Jr. Fluid Mech., Vol. 4, 149-190, 1958
- 18) Schlichting, H. : Boundary Layer Theory, 553-558, McGraw-Hill, N.Y. 1968
- 19) Clauser, F.H. : Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, Jr. Aero. Sci., Vol 21, 91-108, 1954
- 20) Hornung, H.G., Joubert, P.N. : The Mean Velocity Profile in Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers, Jr. Fluid Mech., Vol. 15, Part 3, 368-384, 1962
- 21) Laufer, J. : The Structure of Turbulence in Fully Developed Pipe Flow, N.A.C.A. Tech. Rep., No. 1174, 1953
- 22) Hinze, O. : Turbulence, An Introduction to Its Mechanism and Theory, 487-503, McGraw-Hill, N.Y., 1959
- 23) Uberoi, M.S., Corrsin, S. : Diffusion of Heat from a Line Source in Isotropic Turbulences, N.A.C.A. Tech. Rep., No. 1142, 1953
- 24) Batchelor, G.K. : The Theory of Homogeneous Turbulence, 187, Cambridge Univ. Press, London, 1953
- 25) Batchelor, G.K., Townsend, A.A. : Decay of Turbulence in the Final Period, Proc. Roy. Soc., Ser. A, 194, 527, 1948
- 26) Klebanoff, P.S., Frenkiel, F.N. : Correlation Measurements in a Turbulent Flow Using High-Speed Computing Methods, Physics of Fluids, Vol. 10, No. 8, 1737-1747, 1967
- 27) Lappe, U.O., Davidson, B. : On the Range of Vali-

- dity of Taylor's Hypothesis and Kolmogoroff Spectral Law, Jr. *Atm. Sci.*, Vol. 20, 569-576, 1963
- 28) Strohbehn, J.W. : The Feasibility of Laser Experiment for Measuring Atmospheric Turbulence Parameter, Jr. *Geophys. Res.*, Vol. 71, No. 24, 5793-5808, 1966
- 29) Favre, A.J., Gaviglio, J.J., Dumas, R.J. : Space-Time Double Correlations and Spectra in a Turbulent Boundary Layer, Jr. *Fluid Mech.*, Vol. 2, 313-342, 1957
- 30) Favre, A.J., Gaviglio, J.J., Dumas, R.J. : Further Space-Time Correlations of Velocity in a Turbulent Boundary Layer, Jr. *Fluid Mech.*, Vol. 3, 344-356, 1958
- 31) Tritton, D.J. : Some New Correlation Measurements in a Turbulent Boundary Layer, Jr. *Fluid Mech.*, Vol. 28, Part 3, 439-462, 1967
- 32) Raichlen, F. : Some Turbulence Measurements in Water, *Proc. A.S.C.E.* Vol. 93, EM 2, 73-97, 1967
- 33) Anderson, R.L. : Distribution of the Serial Correlation Coefficient, *Ann. Math. Stat.*, Vol. 13, 1942

(1969.8.1・受付)

---