

三次元直交異方性弾性岩盤内の円形坑道 周辺の応力および変形*

STRESSES AND DEFORMATIONS AROUND A CIRCULAR TUNNEL
EXCAVATED IN ORTHOTROPIC ELASTIC GROUND UNDER
A THREE-DIMENSIONAL STRESS STATE

丹羽 義次**・小林 昭一***・平島 健一****
By Yoshiji Niwa, Shoichi Kobayashi and Ken-ichi Hirashima

1. 緒 言

岩盤内の三つの地山初期主応力は一般的には鉛直や水平に対して傾斜した状態にあり、その方向と大きさを知ることが、地下構造物を設計するうえで最も重要である。

最近になって各種の試験方法により実験的に坑道内での初期主応力（2次主応力）を求める試みがなされている^{1)~3)}。このような場合、坑道内周辺で得た応力から坑道開削の影響をうけていない位置での初期主応力（1次主応力）を算定することが必要である。

現在、2次主応力から1次主応力を算出するに際しては、岩盤は等質等方の完全弾性体であるという仮定を設けた解析がなされている。すなわち、任意方向より三つの地山初期主応力が作用する場合の坑道周辺に生じる応力（2次応力）の弾性解が理論的に求められている^{4), 5)}。

しかしながら、地山を形成する岩盤は複雑な性質を有しており、とくに地山の成層状態や地質学的分離面などの存在によって、いわゆる異方性体と考えられるものがきわめて多い。

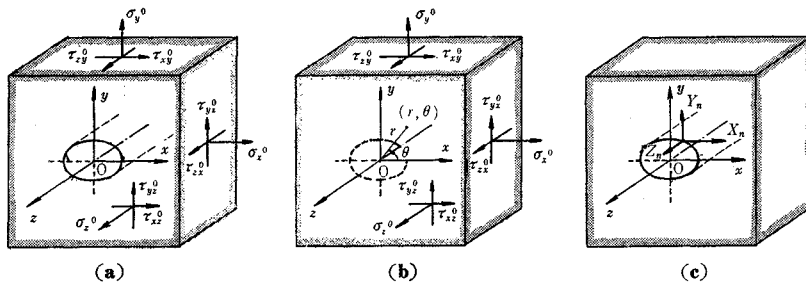


図-1

この論文は、岩盤をより一般的に等質の三次元直交異方性弾性体と仮定し、この岩盤内の弾性主軸に対して任意の角度をなす円形、またはだ円形坑道を開削した場合に、任意方向の三つの独立な地山初期主応力の作用に対して坑道周辺に生じる応力および変形状態を理論的に求めたものである。この一般解を求めるに際して設けた仮定はつぎのようである。

- (a) 岩盤は等質の三次元異方性弾性体である。
- (b) 坑道の断面は円ないしだ円形状である。
- (c) 坑道軸方向に対して応力は変化しない。
- (d) 物体力 (body force) は無視する。

これらの仮定をもとにして求めた一般解を以下に導きつぎに二、三の例をとりあげ数値計算を行なった結果を示す。

2. 問題の設定

いま岩盤内に開削された円形ないしだ円形坑道の坑道軸方向に z 軸、これに直交して x, y 軸の直交座標系をとる。この場合、三次元直交異方性弾性体と仮定した岩盤の弾性主軸は、この座標系 (x, y, z) とは独立に任意方向に傾斜しているものとする。

三次元的な地山初期主応力 $\sigma_1^0, \sigma_2^0, \sigma_3^0$ が坑道軸および岩盤の弾性主軸の方向とは無関係に任意方向より作用する場合、これらの三主応力は図-1 (a) に示すような6個の座標軸方向の応力成分に分解することが可能である。しかるに岩盤は弾性体であるとい

* 昭和44年5月11日、昭和44年度関西支部年次学術講演会において一部発表

** 正会員 工博 京都大学教授 工学部土木工学教室

*** 正会員 工修 京都大学助教授 工学部土木工学教室

**** 正会員 工修 京都大学助手 工学部土木工学教室

う仮定から 図-1(a) の応力状態は 図-1(b) および (c) の二つに分解した応力分布を重ね合わせたものに等しくなる。ここに、図-1 (b) は岩盤内に円形ないしは円形の坑道がないとした場合に、図-

$$\left. \begin{aligned} L_2 &= \beta_{44} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 2\beta_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta_{55} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_3 &= -\beta_{24} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (\beta_{25} + \beta_{46}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} - (\beta_{14} + \beta_{56}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + \beta_{15} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \\ L_4 &= \beta_{22} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 2\beta_{26} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + (2\beta_{12} + \beta_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 2\beta_{16} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + \beta_{11} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.5)$$

$$\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3} a_{j3}}{a_{33}} \quad (i, j = 1, 2, 4, 5, 6) \dots\dots (3.6)$$

1 (a) と同じ外荷重応力 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ および τ_{xy}^0 が無限遠より作用した場合である。この場合、仮定の円形ないしは円形の坑道位置における応力、すなわち $-X_n, -Y_n$ および $-Z_n$ は簡単に求めることができる。図-1 (c) は空洞境界周辺にこれらの応力と大きさ等しく方向反対の応力、すなわち X_n, Y_n および Z_n が作用した場合の図である。ところで 図-1(b) の応力分布および仮想した坑道周辺の応力 $-X_n, -Y_n$ および Z_n は簡単に求められるから、結局、問題は 図-1(c) の外荷重応力が作用した場合の三次元直交異方性弾性体内の坑道周辺の応力状態を求めることに帰着する。

3. 三次元異方性弾性体における応力および変形

応力のつりあい条件式は 1. の仮定 (c) および (d) からつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.1)$$

さらに、三次元異方性弾性体の応力-ひずみ関係は一般的に、

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z + a_{14}\tau_{xy} \\ &\quad + a_{15}\tau_{zx} + a_{16}\tau_{yz} \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{22}\sigma_y + a_{23}\sigma_z + \dots\dots + a_{26}\tau_{xy} \\ \dots\dots\dots \\ \tau_{xy} &= a_{16}\sigma_x + a_{26}\sigma_y + a_{36}\sigma_z + \dots\dots + a_{66}\tau_{xy} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.2)$$

と与えられる。上式の係数 $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{66}$ は考えている物体 (岩盤) の弾性性質を示す定数である。

いま、つりあい条件式(3.1) を満たすような2つの応力関数 $F(x, y)$ および $\psi(x, y)$ を導入すると、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \\ \tau_{zx} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.3)$$

が成立する。これらの応力関数 F および ψ は変位の適合条件式 (3.2) を満足しなければならないことから、結局、つぎの連立微分方程式が得られる⁶⁾。

$$L_4 F + L_3 \psi = 0, \quad L_3 F + L_2 \psi = 0 \dots\dots (3.4)$$

ここに、 L_2, L_3 および L_4 はつぎのような形を有する微分演算子である。

式 (3.4) より ψ を消去すると

$$(L_4 L_2 - L_3^2) F = 0 \dots\dots (3.7)$$

が得られる。 ψ に対する微分方程式も同様にして得られる。上式中の $(L_4 L_2 - L_3^2)$ は6次の微分演算子であるが、これはつぎのような1次の線型微分演算子に分解できる⁶⁾。

$$\left. \begin{aligned} D_6 D_5 D_4 D_3 D_2 D_1 F = 0, \\ D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}, \quad (k=1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.8)$$

μ_k は式 (3.7) の特性方程式：

$$l_4(\mu) \cdot l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0 \dots\dots (3.9)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} l_2(\mu) &= \beta_{55}\mu^2 - 2\beta_{45}\mu + \beta_{44} \\ l_3(\mu) &= \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14} + \beta_{56})\mu^2 \\ &\quad + (\beta_{25} + \beta_{46})\mu - \beta_{24} \\ l_4(\mu) &= \beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 \\ &\quad + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.10)$$

の根である。

このようにすると応力関数 F および ψ の一般解はつぎのような形で示される。

$$\left. \begin{aligned} F(x, y) &= 2R_e [F_1(z_1) + F_2(z_2) + F_3(z_3)] \\ \psi(x, y) &= 2R_e \left[\lambda_1 F_1'(z_1) + \lambda_2 F_2'(z_2) + \frac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3) \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.11)$$

ここに、 R_e は右辺のカッコ内の複素式の実部を示す記号であり、 $F_k(z_k)$ 、($k=1, 2, 3$) は複素変数 $z_k = x + \mu_k y$ の解析関数である。また λ_1, λ_2 および λ_3 はそれぞれつぎの複素数を表わす。

$$\left. \begin{aligned} \lambda_1 &= -\frac{l_3(\mu_1)}{l_2(\mu_1)}, \quad \lambda_2 = -\frac{l_3(\mu_2)}{l_2(\mu_2)}, \\ \lambda_3 &= -\frac{l_3(\mu_3)}{l_4(\mu_3)} \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.12)$$

いま新しい関数を

$$\left. \begin{aligned} \phi_k(z_k) &= F_k'(z_k), \quad (k=1, 2), \\ \phi_3(z_3) &= \frac{1}{\lambda_3} F_3'(z_3) \end{aligned} \right\} \dots\dots (3.13)$$

とすれば、式 (3.11) より各応力成分の式 (3.3) は、これらの三つの解析関数によってつぎのように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= 2R_e[\mu_1^2\phi_1'(z_1) + \mu_2^2\phi_2'(z_2) + \mu_3^2\lambda_3\phi_3'(z_3)] \\ \sigma_y &= 2R_e[\phi_1'(z_1) + \phi_2'(z_2) + \lambda_3\phi_3'(z_3)] \\ \tau_{xy} &= -2R_e[\mu_1\phi_1'(z_1) + \mu_2\phi_2'(z_2) + \mu_3\lambda_3\phi_3'(z_3)] \\ \tau_{zx} &= 2R_e[\mu_1\lambda_1\phi_1'(z_1) + \mu_2\lambda_2\phi_2'(z_2) + \mu_3\phi_3'(z_3)] \\ \tau_{yz} &= -2R_e[\lambda_1\phi_1'(z_1) + \lambda_2\phi_2'(z_2) + \phi_3'(z_3)] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3.14)$$

なお、坑道軸方向の直応力 σ_z は z 方向のひずみが無いことから次式で与えられる。

$$\sigma_z = -\frac{1}{a_{33}} \cdot (a_{13}\sigma_x + a_{23}\sigma_y + a_{34}\tau_{yz} + a_{35}\tau_{zx} + a_{36}\tau_{xy}) \dots(3.15)$$

これらの応力を式(3.2)に代入し積分して整理すれば、座標軸方向の変位 u, v および w はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} u &= 2R_e \sum_{k=1}^3 p_k \phi_k(z_k) - \omega_3 y + u_0 \\ v &= 2R_e \sum_{k=1}^3 q_k \phi_k(z_k) + \omega_3 x + v_0 \\ w &= 2R_e \sum_{k=1}^3 r_k \phi_k(z_k) + w_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} p_k &= \beta_{11}\mu_k^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_k + \lambda_k(\beta_{15}\mu_k - \beta_{14}), \\ p_3 &= \lambda_3(\beta_{11}\mu_3^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_3) + \beta_{15}\mu_3 - \beta_{14}, \\ q_k &= \beta_{12}\mu_k + \frac{\beta_{22}}{\mu_k} - \beta_{26} + \lambda_k\left(\beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_k}\right), \\ q_3 &= \lambda_3\left(\beta_{12}\mu_3 + \frac{\beta_{22}}{\mu_3} - \beta_{26}\right) + \beta_{25} - \frac{\beta_{24}}{\mu_3}, \\ r_k &= \beta_{14}\mu_k + \frac{\beta_{24}}{\mu_k} - \beta_{46} + \lambda_k\left(\beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_k}\right), \\ r_3 &= \lambda_3\left(\beta_{14}\mu_3 + \frac{\beta_{24}}{\mu_3} - \beta_{46}\right) + \beta_{45} - \frac{\beta_{44}}{\mu_3} \end{aligned} \right\} \dots\dots(3.17)$$

($k=1, 2$)

を表す。なお式(3.16)の $(-\omega_3 y + u_0)$, $(\omega_3 x + v_0)$ および w_0 は考えている物体全体の回転および剛体変位を表す項であって、ここで取り扱う問題の場合には考慮しなくてもよい。

4. 境界条件

円形ないしだ円形坑道の周辺に作用する外荷重応力を図-2(または図-1(c))に示すように X_n, Y_n および Z_n とすれば、境界条件は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x \cos(n, x) + \tau_{xy} \cos(n, y) &= X_n \\ \tau_{xy} \cos(n, x) + \sigma_y \cos(n, y) &= Y_n \\ \tau_{zx} \cos(n, x) + \tau_{yz} \cos(n, y) &= Z_n \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.1)$$

ここに、 n は坑道の境界にたてた法線で、中心Oの側に向う単位ベクトルを示す。

ところで、境界に沿って時計まわりの接線単位ベクトルを s とすれば、

$$\left. \begin{aligned} \cos(n, x) &= -\frac{dx}{dn} = \frac{dy}{ds} \\ \cos(n, y) &= -\frac{dy}{dn} = -\frac{dx}{ds} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(4.2)$$

が成立する。

したがって、式(3.3)、(4.2)を式(4.1)に代入し、境界上の任意の初期点 $s=0$ から $s=s$ まで積分を行なうと、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2R_e[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) + \lambda_3\phi_3(z_3)] \\ &= -\int_0^s Y_n ds + c_1 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2R_e[\mu_1\phi_1(z_1) + \mu_2\phi_2(z_2) + \mu_3\lambda_3\phi_3(z_3)] \\ &= \int_0^s X_n ds + c_2 \\ \psi &= 2R_e[\lambda_1\phi_1(z_1) + \lambda_2\phi_2(z_2) + \phi_3(z_3)] \\ &= \int_0^s Z_n ds + c_3 \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.3)$$

が得られる。ここに、 c_1, c_2 および c_3 は坑道の境界上で任意にえらべる定数である。

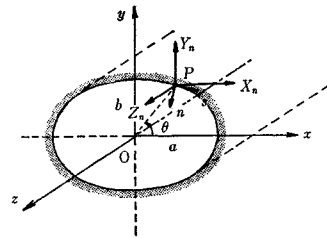


図-2

図-2に示すように、 x - y 断面は仮定によりだ円形坑道を有する無限板の形をもつ。この坑道の境界を表わす方程式は

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta \dots\dots\dots(4.4)$$

で与えられる。ここに、 θ は境界上を反時計まわりにOから 2π まで変化する値をとるパラメーターである。なお円形坑道の場合には式(4.4)において $a=b$ とおけばよい。したがって、外荷重応力 X_n, Y_n および Z_n は周期を 2π とするパラメーター θ の関数と考えることができる。そこで、いま、これらの応力が $\cos m\theta$ および $\sin m\theta$ の項でフーリエ級数に展開されたものとするとき(4.3)はつぎのように書き表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} 2R_e[\phi_1(z_1) + \phi_2(z_2) + \lambda_3\phi_3(z_3)] \\ = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m e^{im\theta} + \bar{a}_m e^{-im\theta}) \\ 2R_e[\mu_1\phi_1(z_1) + \mu_2\phi_2(z_2) + \mu_3\lambda_3\phi_3(z_3)] \\ = b_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (b_m e^{im\theta} + \bar{b}_m e^{-im\theta}) \\ 2R_e[\lambda_1\phi_1(z_1) + \lambda_2\phi_2(z_2) + \phi_3(z_3)] \\ = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} (c_m e^{im\theta} + \bar{c}_m e^{-im\theta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots(4.5)$$

右辺の式の値は境界上の弧長に沿って $-Y_n, X_n$ および Z_n を積分することによって得られる。ここに、係数 a_m, b_m および c_m は外荷重応力のフーリエ級数展開から得られる既知の複素数であり、 \bar{a}_m, \bar{b}_m および \bar{c}_m はそれらと共役な複素数である。また a_0, b_0 および c_0 は任意定数であり、いま考えている問題の場合 0 におくことができる。

いま、 $z_k = x + \mu_k y$, ($k=1, 2, 3$) によって z_0 平面 ($z_0 = x + iy$) 上の円形坑道の境界およびその外部領域を z_k 平面上の境界およびその外部領域に写像し、さらに

$$z_k = \omega(\zeta_k) = \frac{a - i\mu_k b}{2} \cdot \zeta_k + \frac{a + i\mu_k b}{2} \cdot \frac{1}{\zeta_k}, \quad (k=1, 2, 3) \dots \dots \dots (4.6)$$

によって z_k 平面上の境界およびその外部を ζ_k 平面上の単位円上およびその外部に写像して考える。ここで関数 $\phi_k(z_k)$ を

$$\phi_k(z_k) = \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_{km} \zeta_k^{-m}, \quad (k=1, 2, 3) \dots \dots \dots (4.7)$$

と表すものとすれば、上式の係数 Γ_{km} は境界条件式 (4.5) から求めることができ、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(z_1) &= \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} [(\mu_2 - \mu_3 \lambda_2 \lambda_3) \bar{a}_m + (\lambda_2 \lambda_3 - 1) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2) \bar{c}_m] \zeta_1^{-m} \\ \phi_2(z_2) &= \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} [(\mu_3 \lambda_1 \lambda_3 - \mu_1) \bar{a}_m + (1 - \lambda_1 \lambda_3) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) \bar{c}_m] \zeta_2^{-m} \\ \phi_3(z_3) &= \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} [(\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) \bar{a}_m + (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{b}_m + (\mu_2 - \mu_1) \bar{c}_m] \zeta_3^{-m} \end{aligned} \right\} \dots \dots (4.8)$$

ここに、

$$d = \mu_2 - \mu_1 + \lambda_2 \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) + \lambda_1 \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2) \dots \dots (4.9)$$

また、式 (4.8) を z_k に関して 1 回微分することにより、

$$\left. \begin{aligned} \phi_1'(z_1) &= -\frac{1}{\sqrt{z_1^2 - a^2 - \mu_1^2 b^2}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m [(\mu_2 - \mu_3 \lambda_2 \lambda_3) \bar{a}_m + (\lambda_2 \lambda_3 - 1) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_3 - \mu_2) \bar{c}_m] \zeta_1^{-m} \\ \phi_2'(z_2) &= -\frac{1}{\sqrt{z_2^2 - a^2 - \mu_2^2 b^2}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m [(\mu_3 \lambda_1 \lambda_3 - \mu_1) \bar{a}_m + (1 - \lambda_1 \lambda_3) \bar{b}_m + \lambda_3 (\mu_1 - \mu_3) \bar{c}_m] \zeta_2^{-m} \\ \phi_3'(z_3) &= -\frac{1}{\sqrt{z_3^2 - a^2 - \mu_3^2 b^2}} \cdot \frac{1}{d} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} m [(\mu_1 \lambda_2 - \mu_2 \lambda_1) \bar{a}_m + (\lambda_1 - \lambda_2) \bar{b}_m + (\mu_2 - \mu_1) \bar{c}_m] \zeta_3^{-m} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4.10)$$

が得られる。

したがって、式 (4.10), (4.8) を応力および変位の式 (3.14) および式 (3.17) に代入することにより、円形ないしは円形坑道の境界上の外荷重応力 X_n, Y_n および

Z_n が作用した場合の三次元異方性の無限弾性体内の応力および変形分布が求められる。

5. 係数 $\bar{a}_m, \bar{b}_m, \bar{c}_m$ の決定

いま直交座標系 (x, y, z) を 図-1 (b) のようにとり、座標軸方向の応力成分 $\sigma^0_x, \sigma^0_y, \dots, \tau^0_{xy}$ が作用するものとする。ここで、直交座標系に対して z 軸が一致するような円柱座標系 (r, θ, z) を採用するものとするれば、この座標系に対する応力成分は、次式で与えられることが容易にわかる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma^0_x \cos^2 \theta + \sigma^0_y \sin^2 \theta + 2 \tau^0_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \sigma_\theta &= \sigma^0_x \sin^2 \theta + \sigma^0_y \cos^2 \theta - 2 \tau^0_{xy} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma^0_y - \sigma^0_x) \sin \theta \cos \theta + \tau^0_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \\ \tau_{rz} &= \tau^0_{zx} \cos \theta + \tau^0_{yz} \sin \theta \\ \tau_{\theta z} &= -\tau^0_{zx} \sin \theta + \tau^0_{yz} \cos \theta \\ \sigma_z &= \sigma^0_z \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.1)$$

ここに、 θ は x 軸の正の方向より反時計まわりに測った角度である。

さて、いまだ円形坑道の境界上の一点 P に外荷重応力 \bar{p} および \bar{q} (\bar{p} は垂直応力、 \bar{q} は接線応力) が 図-3 のように働くものとすれば、 \bar{p} および \bar{q}

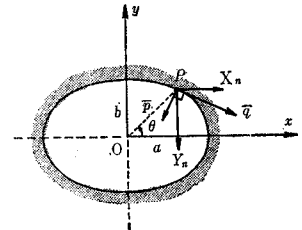


図-3

の作用によって生じる直交座標 (x, y) 軸方向へ変換した応力成分 X_n および Y_n はつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} X_n &= (\bar{p} b \cos \theta - \bar{q} a \sin \theta) \frac{d\theta}{ds} \\ Y_n &= (\bar{p} a \sin \theta + \bar{q} b \cos \theta) \frac{d\theta}{ds} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.2)$$

同様に Z_n は、 P 点での z 軸方向に作用する外荷重応力を \bar{r} とすれば、

$$Z_n = -\bar{r} \frac{d\theta}{ds} \dots \dots \dots (5.3)$$

で与えられる。

しかるに、 \bar{p}, \bar{q} および \bar{r} は 2. で述べた題意より、それぞれ $\sigma^0_r, \tau^0_{r\theta}$ および τ^0_{rz} に等しく方向が反対の応力成分でなければならない。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \bar{p} &= -\sigma^0_r = -(\sigma^0_x \cos^2 \theta + \sigma^0_y \sin^2 \theta + 2 \tau^0_{xy} \sin \theta \cos \theta) \\ \bar{q} &= -\tau^0_{r\theta} = -[(\sigma^0_y - \sigma^0_x) \sin \theta \cos \theta + \tau^0_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)] \\ \bar{r} &= -\tau^0_{rz} = -(\tau^0_{zx} \cos \theta + \tau^0_{yz} \sin \theta) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (5.4)$$

これより、式 (5.2), (5.3) を利用して式 (4.3) の右辺の値を計算し、式 (4.5) との係数比較により \bar{a}_m, \bar{b}_m

および \bar{c}_m を求めると、結局、つぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{a}_1 &= -\frac{1}{2}(\sigma^0_{xy}a - i\tau^0_{xy}b) \\ \bar{b}_1 &= \frac{1}{2}(\tau^0_{xy}a - i\sigma^0_{xy}b) \\ \bar{c}_1 &= \frac{1}{2}(\tau^0_{yz}a - i\tau^0_{zx}b) \\ \bar{a}_m &= \bar{b}_m = \bar{c}_m = 0, \quad m \geq 2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(5.5)$$

これらの値を式(4.8)あるいは式(4.10)に代入し、式(3.14)、(3.17)によって計算すれば、式(5.4)の外荷重応力 \bar{p} 、 \bar{q} および \bar{r} が坑道境界に作用した場合の応力および変形が具体的に求められる。したがってこのようにして求めた応力および変形に坑道が存在しないとしたときの応力および変形を加え合わせれば、坑道軸方向とは無関係に任意の方向より三つの独立な地山初期主応力が作用する場合の坑道周辺の応力ならびに変形が求められる。

6. 坑道軸と弾性主軸との関係

前述したように円形ないしだ円形坑道の軸方向すなわち z 軸と、これに直交する座標系 (x, y, z) に対して、地山を形成する三次元直交異方性岩盤の主弾性方向とは一般的には任意に傾いている。それゆえ、直交異方性弾性体と考えた岩盤の弾性定数が新しい直交座標系に対して、どのような関係になるかを明確にしなければならぬ。したがって以下にこれについて簡単に触れることにする。

いま、座標系 (x', y', z') に対する弾性定数の逆数 $a'_{ij}(i, j=1, 2, \dots, 6)$ が既知であると、新しい座標系 (x, y, z) との方向余弦が一般的に表-1で与えられるものとする、新座標系 (x, y, z) における弾性定数の逆数 a_{ij} は次式で与えられる⁷⁾。

表-1 二つの直交座標系の間の関係

	x	y	z
x'	α_1	β_1	γ_1
y'	α_2	β_2	γ_2
z'	α_3	β_3	γ_3

$$a_{ij} = \sum_{m=1}^6 \sum_{n=1}^6 a'_{mn} \cdot q_{mi} \cdot q_{nj} \dots\dots\dots(6.1)$$

ここに、 q_{ij} は表-2に示す値をとる。表中の最初の

表-2 係数 q_{ij}

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6
1	α_1^2	α_2^2	α_3^2	$2\alpha_2\alpha_3$	$2\alpha_3\alpha_1$	$2\alpha_1\alpha_2$
2	β_1^2	β_2^2	β_3^2	$2\beta_2\beta_3$	$2\beta_3\beta_1$	$2\beta_1\beta_2$
3	γ_1^2	γ_2^2	γ_3^2	$2\gamma_2\gamma_3$	$2\gamma_3\gamma_1$	$2\gamma_1\gamma_2$
4	$\beta_1\gamma_1$	$\beta_2\gamma_2$	$\beta_3\gamma_3$	$\beta_2\gamma_3 + \beta_3\gamma_2$	$\beta_1\gamma_3 + \beta_3\gamma_1$	$\beta_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1$
5	$\gamma_1\alpha_1$	$\gamma_2\alpha_2$	$\gamma_3\alpha_3$	$\gamma_2\alpha_3 + \gamma_3\alpha_2$	$\gamma_1\alpha_3 + \gamma_3\alpha_1$	$\gamma_1\alpha_2 + \gamma_2\alpha_1$
6	$\alpha_1\beta_1$	$\alpha_2\beta_2$	$\alpha_3\beta_3$	$\alpha_2\beta_3 + \alpha_3\beta_2$	$\alpha_1\beta_3 + \alpha_3\beta_1$	$\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1$

指標 i は行を、 j は列を表わす。

しかるに、三次元直交異方性弾性体の弾性主軸と座標系 (x', y', z') の座標軸方向が一致するものとすれば、この場合の弾性定数の逆数 a'_{ij} はつぎのように書き表わされる。

$$\left. \begin{aligned} a'_{11} &= \frac{1}{E_1}, \quad a'_{22} = \frac{1}{E_2}, \quad a'_{33} = \frac{1}{E_3}, \\ a'_{12} &= a'_{21} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2}, \\ a'_{13} &= a'_{31} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3}, \\ a'_{23} &= a'_{32} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3}, \\ a'_{44} &= \frac{1}{G_{23}}, \quad a'_{55} = \frac{1}{G_{31}}, \quad a'_{66} = \frac{1}{G_{12}}, \\ \text{その他の } a'_{ij} &= 0, \quad (i, j=1, 2, \dots, 6) \end{aligned} \right\} \dots\dots(6.2)$$

ここに、 E_1, E_2, E_3 は x', y', z' 軸方向の弾性係数(ヤング係数)、 G_{12}, G_{23}, G_{31} はそれぞれ $x'-y', y'-z', z'-x'$ 面内のせん断弾性係数であり、 $\nu_{12}, \nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{13}, \nu_{23}$ および ν_{32} はポアソン比を表わす。

したがって坑道軸方向を z 軸、これに直交する2つの軸を x, y とした座標系 (x, y, z) における弾性定数の逆数 a_{ij} は、旧座標系と新座標系との間の方向余弦が与えられれば、式(6.2)および(6.1)により容易に求めることが可能である。

7. 数値計算例

直交異方性弾性体の主弾性軸 x', y' および z' から、つぎの手順によって傾斜している坑道を考える。

- (1) α : x' 軸のまわりに回転した角度 → 座標系 (x_1, y_1, z_1)
- (2) β : y_1 軸のまわりに回転した角度 → 座標系 (x_2, y_2, z_2)
- (3) γ : z_2 軸のまわりに回転した角度 → 座標系 (x, y, z)

回転角 α, β および γ が 0° から 90° までの任意の値をとるように上述の座標回転を行なうと、坑道軸に対して、直交異方性体の主弾性軸があらゆる傾斜をなす場合が求められる。このような座標変換を行なうと、座標系 (x', y', z') および (x, y, z) の間に成立する関係は図-4 および表-3に示すとおりである。

さて、以下では前節までに誘導した一般解を用いて二、三の数値計算例を示そう。

この場合、岩盤は主弾性係数を $E_1 = E_2 = 6.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $E_3 = 2.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, せん断弾性係数を $G_{23} = G_{31} = 1.39 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, $G_{12} = 2.4 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$, ポアソン比を $\nu_{23} = \nu_{31} = 0.15$, $\nu_{12} = 0.25$ とする横等方性の異方性弾性体であると仮

表-3

	x	y	z
x'	$\cos \beta \cos \gamma$	$-\cos \beta \sin \gamma$	$\sin \beta$
y'	$\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma$	$\cos \alpha \cos \gamma - \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$-\sin \alpha \cos \beta$
z'	$-\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma$	$\sin \alpha \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma$	$\cos \alpha \cos \beta$

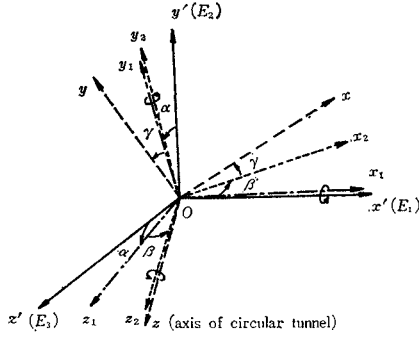


図-4 二つの直交座標系 (x', y', z') と (x, y, z) の間の関係

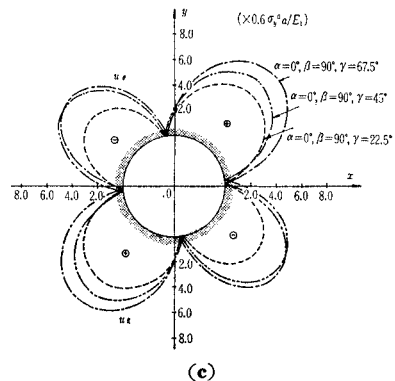
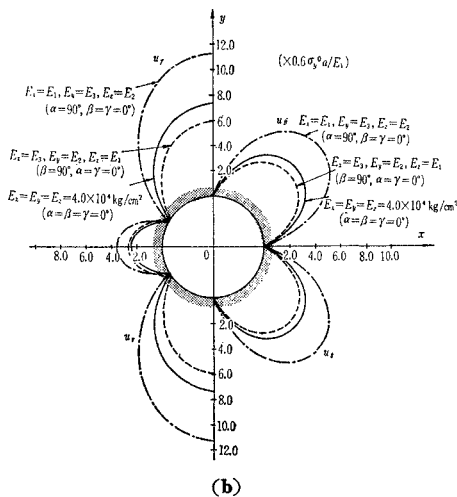
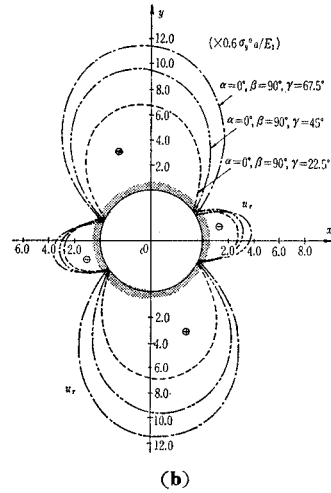
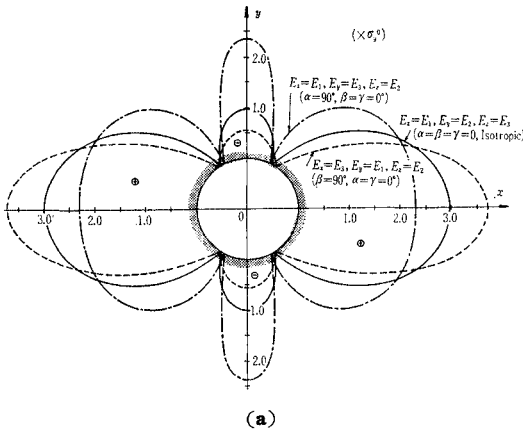
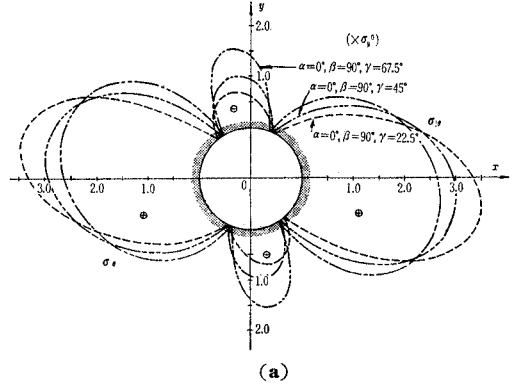


図-5 座標軸 (x, y, z) と主弾性軸が一致した場合の円孔周辺の応力および変形 (σ_y^0 が作用)

図-6 主弾性軸が面内回転した場合の円孔周辺の応力および変形 (σ_y^0 が作用)

定する。また数値計算を行なうに際して、座標回転を行

なう前の座標系 (x', y', z') の軸方向と岩盤の主弾性軸とは一致している。すなわち

$$E_x' = E_1, \quad E_y' = E_2, \quad E_z' = E_3$$

であると仮定する。

(計算例 1) y 軸方向より鉛直荷重応力 σ_y^0 が作用する場合

座標軸と主弾性軸とが一致している場合の円形坑道周辺の応力、変形分布を図示したものが図-5 (a), (b) である。つぎに、坑道軸 (z 軸) のまわりに主弾性係数 E_1, E_3 または E_2, E_3 が回転した場合の同様の図が図-6 (a), (b), (c) である。この場合、坑道軸方向の主弾性係数が E_3 の場合には、坑道軸のまわりに主弾性軸が回転しても横等方性弾性体と仮定しているため等方性体としたものに等しく回転角には何ら関係しない。これらの応力および変形は、すでに提示された円孔を有する二次元直交異方性板に対する解析から得られるものと同一である⁸⁾。つぎに主弾性軸方向が坑道軸に平行ないし垂直な面内にない、いわゆる面外へ傾斜している場合に対する円形坑道周辺の応力および変形分布を図-7 (a)~(f) に示す。これらの図の左半分は x 軸 (E_1 方向) を軸にし

て主弾性係数 E_2, E_3 が面外に回転した場合に対するものであり、 $\alpha=0^\circ$ の場合は図-5 の実線、 $\alpha=90^\circ$ の場合には一点鎖線のようなになる。右半分は y 軸 (E_2 方向) を軸にして主弾性係数 E_1, E_3 が面外に回転した場合のものである。この場合は $\beta=0^\circ$ のとき図-5 の実線、 $\beta=90^\circ$ になると点線のような応力、変形状態になる。主弾性係数が面外へ傾斜している図-7 のような場合、坑道軸 (z 軸) 方向の変形 w が生じる。その状態を図-7 (e) および (f) に示したが、これらの図よりわかることは 3. および文献 6) にも多少示されているように坑道軸方向の変形 w は x および y のみの関数であり、かつ x, y の一次関数であることから z 軸方向への変形は完全に平面変形である。すなわち、この場合の w は warping の現象が生じないような面外変形である。図-7 (b) に示すように、面内鉛直荷重応力 σ_y^0 の作用によっても坑道周辺に多少の面外せん断応力 $\tau_{\theta z}$ が生じる。これは異方性弾性体特有の力学的性質である。図-8 は主弾性軸方向が面外傾斜した場合の応力 σ_θ の最大および最小の値の傾斜角に対する変化を主弾性係数比 $e = E_1/E_3$ ($= E_2/E_3$) をパラメーターとして図示したものである。

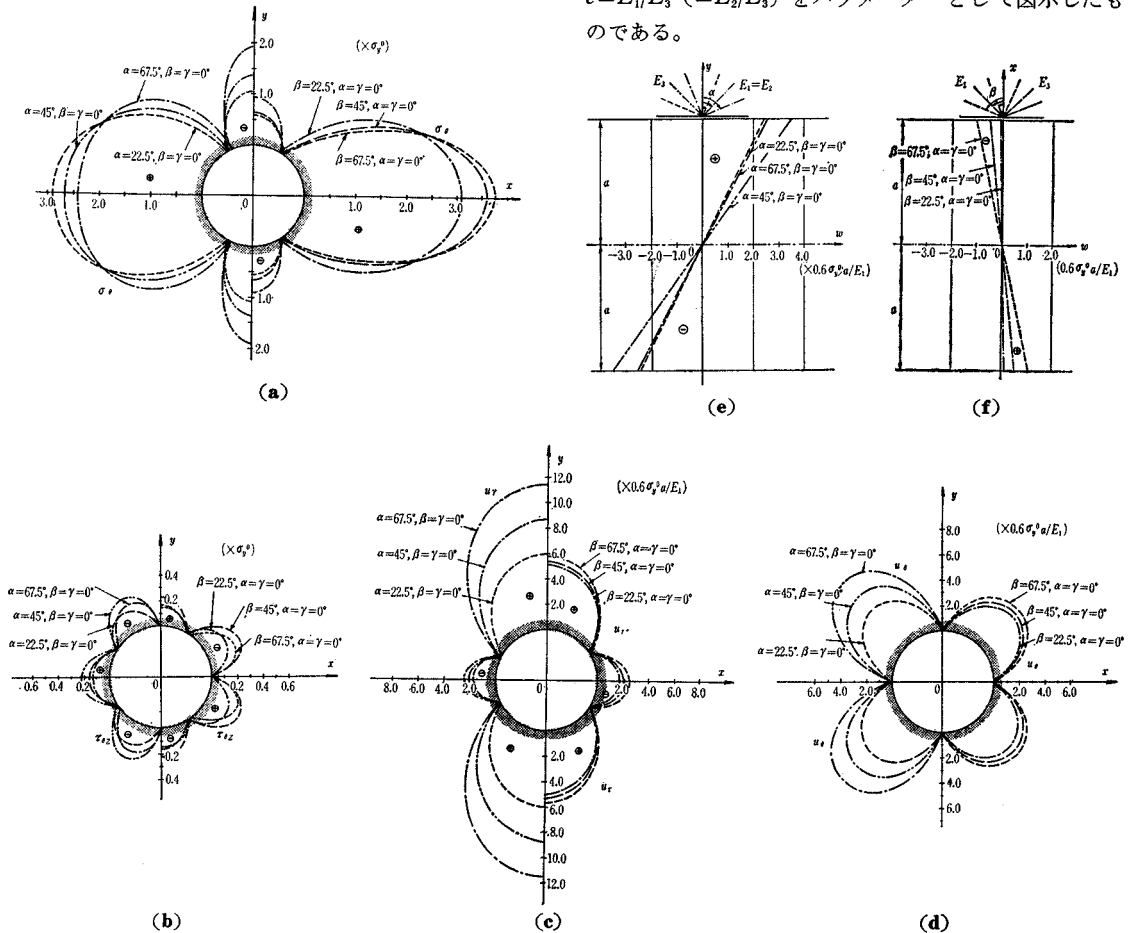


図-7 主弾性軸が面外回転した場合の円孔周辺の応力および変形 (σ_y^0 が作用)

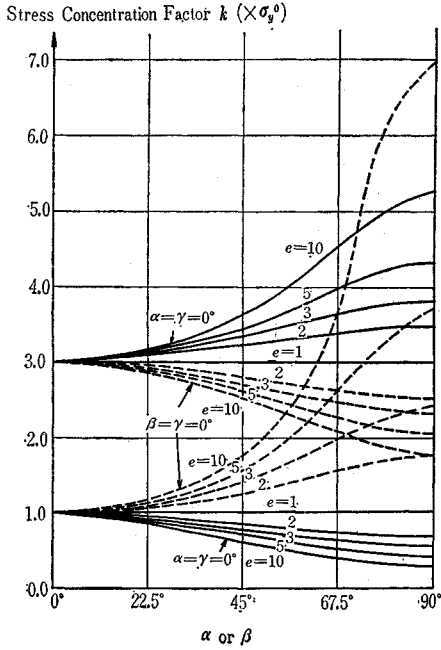


図-8 面外回転角 α, β と最大および最小応力 σ_θ の関係 (σ_y^0 が作用し、主弾性係数比 $e=E_1/E_3=E_2/E_3$ が変化する場合)

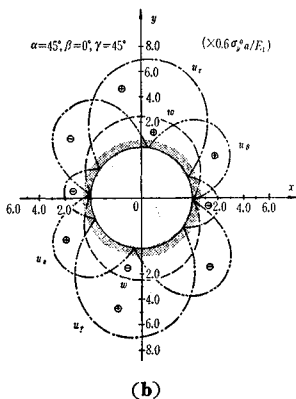
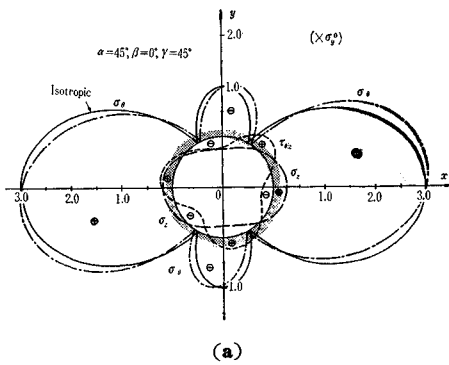


図-9 $\alpha=45^\circ, \beta=0^\circ, \gamma=45^\circ$ の場合の円孔周辺の応力および変形 (σ_y^0 が作用)

主弾性係数 E_1, E_2, E_3 が坑道軸に対して一般的な傾斜をしている場合の一例として、 $\alpha=45^\circ, \beta=0, \gamma=45^\circ$ の場合の応力および変形を 図-9 (a), (b) に示した。この場合も数値としては小さいが $\tau_{\theta z}$ が作用する。

(計算例 2) 面外接線荷重応力 τ_{yz}^0 が作用する場合 円形ないしは円形坑道を有する等質等方の弾性体に面外せん断応力が作用する場合の理論的な解は与えられている⁹⁾が、前節までに示した方法によれば、円形ないしは円形坑道を有する異方性弾性体に面外せん断応力が作用した場合の応力および変形を求めることが可能である。

図-10 は坑道軸方向の弾性係数 E_2 が主弾性係数 E_1 (または E_2) に等しく、この軸のまわりに、主弾性係数 E_2 (または E_1)、 E_3 が面内で回転した場合の円孔周辺の応力 $\tau_{\theta z}$ を示したものである。この場合の坑道軸方向の変形 w は 計算例 1 のときと同じく、平面変形を行なう。図-11(d) の一点鎖線は変形 w の中心軸を適当に回転し、坑道軸に垂直な方向から透視した場合の変形 w の最大値を主弾性軸の座標回転角 r に対してプロットしたものである。 $r=0^\circ$ および 90° の場合、変形 w の中心軸は当然 x 軸である。 r が 0° から 90° の間の場合、 x 軸より数度回転した軸が、変形 w の中心軸となる。なお 図-10 のような場合、半径方向ならびに接線方向の面内変形 u_r, u_θ は生じない。図-11 (a), (b), (c) は主弾性軸が面外へ傾斜した場合に対する円形坑道周辺の応力 $\tau_{\theta z}$ および変位 u_r, u_θ を図示したものである。これらの図の左半分は x 軸 (E_1 方向) を中心軸にして主弾性 (E_2, E_3) が、面外に回転した場合であり、右半分は y 軸 (E_2 方向) を中心軸にして、主弾性 (E_1, E_3) が、面外に回転した場合のものである。図-11 (d) は面外変形 w の最大値 w_{max} を面外回転角 α または β に対してプロットしたものである。この場合の w ももちろん x 軸を中心軸にした平面変形である。図-12 は 図-8 に対応するもので主弾性軸方向が面外傾斜した場合の最大せん断応力 $(\tau_{\theta z})_{max}$ の傾斜角 α または β に対する変化を $e=E_1/E_3(=E_2/E_3)$ をパラメーターとして図

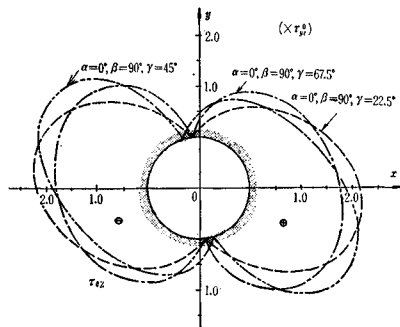
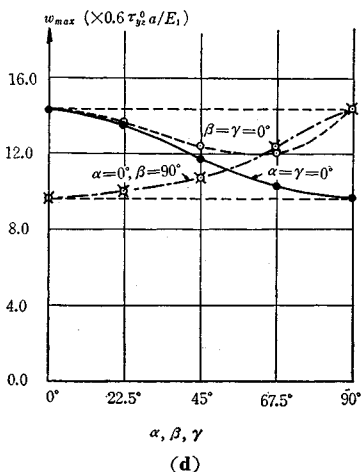
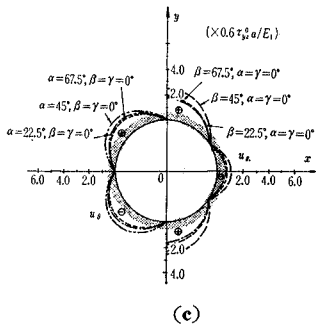
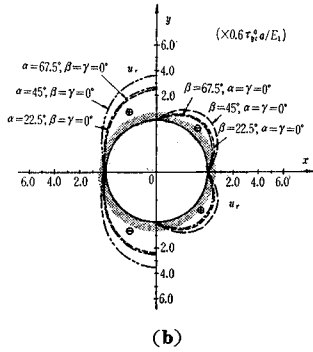
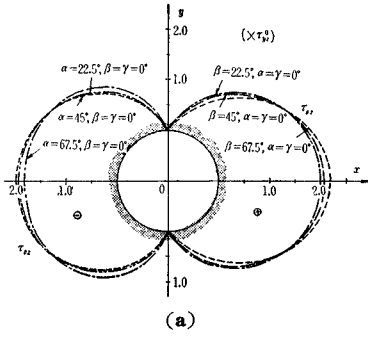
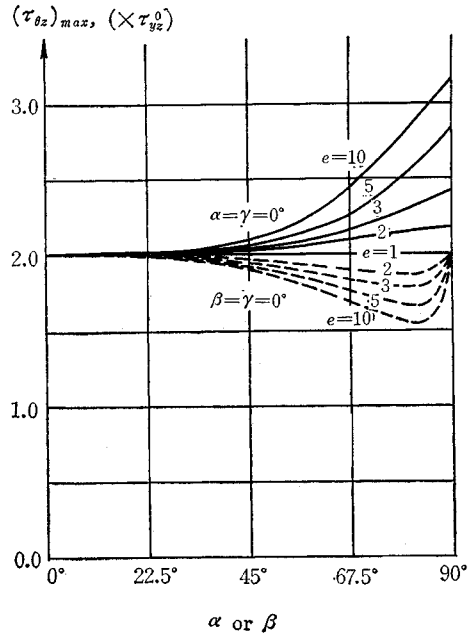


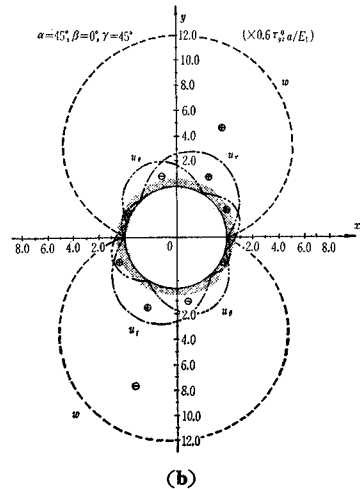
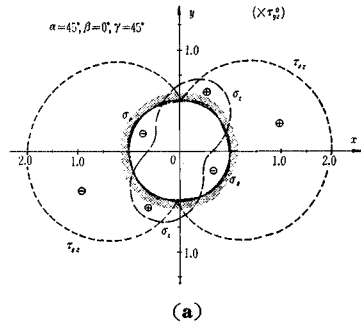
図-10 主弾性軸が面内回転した場合の円孔周辺の応力 $\tau_{\theta z}$ の分布 (面外せん断力 τ_{yz}^0 が作用)



図一11 主弾性軸が面外回転した場合の円孔周辺の応力および変形 (τ_{yz}^0 が作用)



図一12 面外回転角 α, β と最大せん断応力 $(\tau_{\theta z})_{max}$ の関係 (τ_{yz}^0 が作用)



図一13 $\alpha=45^\circ, \beta=0^\circ, \gamma=45^\circ$ の場合の円孔周辺の応力および変形 (τ_{yz}^0 が作用)

示したものである。

$\alpha=45^\circ, \beta=0^\circ, \gamma=45^\circ$ の主弾性軸傾斜の場合の応力および変形を 図-13 (a), (b) に示した。

なお、上記の計算例 1, 2 では、坑道軸方向の直応力 σ_z については何も触れなかったが、これは式 (3.15) により容易に計算することができる。したがって、以上の

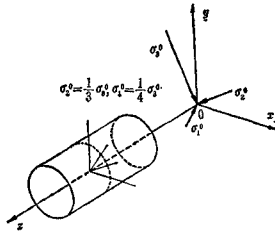


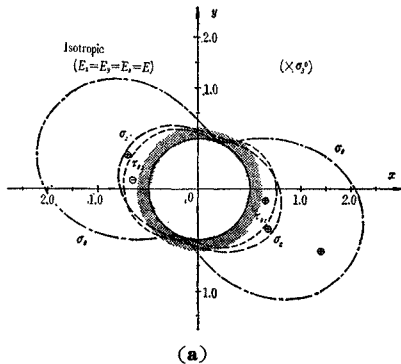
図-14 地山内の応力状態の一例

表-4

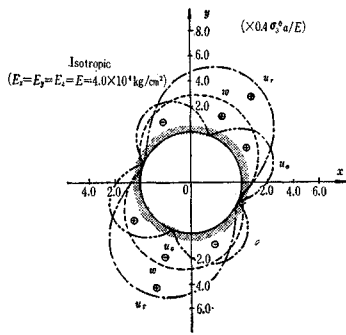
	σ_1^0 方向	σ_2^0 方向	σ_3^0 方向
x	$64^\circ 14'$	$32^\circ 43'$	$71^\circ 15'$
y	$119^\circ 37'$	$94^\circ 20'$	$30^\circ 00'$
z	$41^\circ 09'$	$122^\circ 22'$	$67^\circ 27'$

$$\sigma_2^0 = \frac{1}{3} \sigma_3^0, \quad \sigma_1^0 = \frac{1}{4} \sigma_3^0$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_x^0 = 0.387 \sigma_3^0, \quad \sigma_y^0 = 0.813 \sigma_3^0, \quad \sigma_z^0 = 0.384 \sigma_3^0 \\ \tau_{xy}^0 = 0.203 \sigma_3^0, \quad \tau_{xz}^0 = 0.055 \sigma_3^0, \quad \tau_{yz}^0 = 0.253 \sigma_3^0 \end{array} \right)$$



(a)



(b)

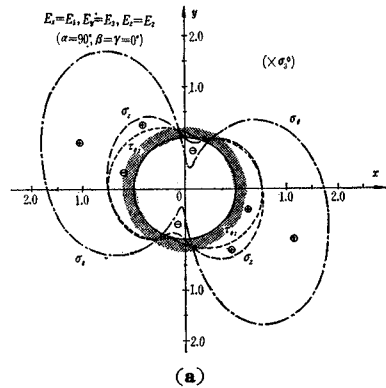
図-15 図-14 に示された応力状態の等方性地山 ($E=4.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2, \nu=0.25$) 内の円形坑道周辺に生じる応力および変形

計算結果を適当に組み合わせれば任意の三次元地山応力が作用した場合の円形坑道周辺の応力および変形を求めることが可能である。

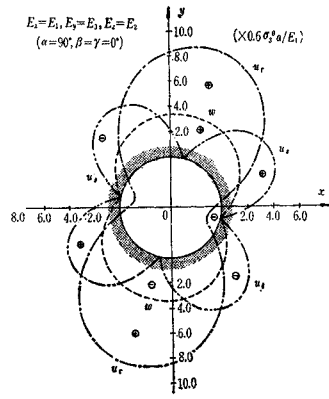
(計算例 3) 異方性弾性地山に三次元地山応力が任意方向より作用する場合

さきに仮定した弾性定数を有する岩盤に、図-14 に示すような地山初期主応力 σ_1^0, σ_2^0 および σ_3^0 が作用する場合の円形坑道周辺に生じる応力および変形について考える。座標系 (x, y, z) に対して主応力 σ_1^0, σ_2^0 および σ_3^0 の大きさ、および方向は 表-4 のとおりとする¹⁰⁾。このような組み合わせ外荷重を座標軸方向の応力成分に変換すると同表に示したようになる。

前節までに示した理論解析に基づいて、等方性弾性体として、応力および変形を計算し図示したものを 図-15 (a), (b) に示す。この場合、弾性係数を $E=4.0 \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比を $\nu=0.25$ とした。この結果は等方性弾性体に対して求められている理論解から計算したものと完全に一致する¹⁰⁾。図-16 (a), (b) は座標軸と主弾性軸とが一致している場合 (すなわち、 $E_x = E_1,$



(a)



(b)

図-16 図-14 に示された 応力状態の 異方性地山内の円形坑道周辺に生じる応力および変形 ($E_x = E_1, E_y = E_2, E_z = E_2$ の場合)

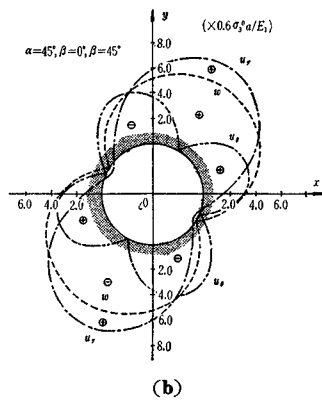
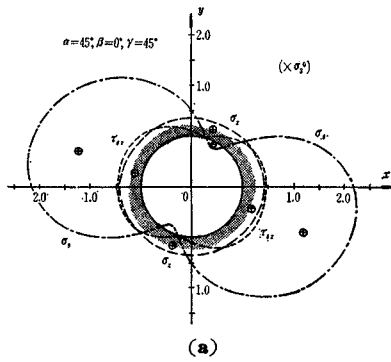


図-17 図-14 に示された応力状態の異方性地山内の円形坑道周辺に生じる応力および変形 ($\alpha=45^\circ, \beta=0^\circ, \gamma=45^\circ$ の場合)

$E_y=E_3, E_z=E_2$ の応力および変形分布の図である。この場合円孔周辺にかなり大きな引張応力 σ_θ の作用する領域が生じる。同じく 図-17 (a), (b) は主弾性軸が任意の傾斜を有する場合の一例として、図-8, 12 に対応して $\alpha=45^\circ, \beta=0^\circ, \gamma=45^\circ$ の場合の応力および変形状態を示したものである。この場合も多少 σ_θ の分布に引張の作用する領域が存在する。このように等方性と異方性では円孔周辺に生じる応力の大きさも符号も異なる場合がある。すなわち、場合によっては引張応力領域が広がったり、 σ_θ したがって主応力 σ_1, σ_2 がかなり大きくなるような主弾性軸の傾斜が存在することを明記しておかなければならない。

8. 結 語

三次元異方性弾性体の弾性主軸に対して任意の角度をなす円形またはだ円形坑道を開削した場合に、任意方向の三次元地山応力の作用に対して坑道周辺に生じる応力および変形状態を理論的に求めた。現在、地山応力を求めるに際して等質等方弾性体と考えた解析が行なわれて

いるが、この論文により、地山をより実的な三次元異方性弾性体とした場合の地山応力を求めることが可能になった。

この理論解を求めるに際して坑道軸方向に対して応力は変化しないと仮定したが、これは地表面下かなり深いところに空洞を開削する場合には妥当な仮定であり、等方性弾性体に対する理論解¹⁾においても設けられている仮定である。数値計算例では概念的に把握しやすいように横等方性の異方性弾性体としたが、ここに示した理論は三次元直交異方性弾性体のみならず、もっとも一般的に任意の弾性定数を有する異方性弾性体に対しても適用できるものである。

理論計算を進めるにあたって写像の比較的簡単な円形ないしだ円形坑道を対象としたが、適当な写像関数を採用することによって長方形、台形など任意形状の断面を有する坑道に対する理論解を求めることも可能である¹¹⁾。なお数値計算は、京都大学大型計算機センターの FACOM 230-60 によった。

参 考 文 献

- 1) Merrill, R.H.: In Situ Determination of Stress by Relief Techniques, Intern. Conf. on State of Stress in Earth's Crust, Santa Monica, 1963, pp. 343-378
- 2) Leeman, E.R.: The Determination of the Complete State of Stress in Rock in a Single Borehole—Laboratory and Underground Measurements, Intern. Jour. Rock Mech. Min. Sci., Vol. 5, 1968, pp. 31-56
- 3) Obert, L.: Determination of Stress in Rock, ASTM Special Technical Publication, No. 429, 1966, pp. 1-56
- 4) Hiramatsu, Y. and Oka, Y.: Stress Around a Shaft or Level Excavated in Ground with a Three-Dimensional Stress State, Mem. Fac. Eng., Kyoto Univ., 24, 1962, pp. 56-76
- 5) Fairhurst, C.: Measurement of In Situ Rock Stress, with Particular Reference to Hydraulic Fracturing, Felsmechanik II, 1964, pp. 129-147
- 6) Lekhnitskii, S.G.: Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body, Holden-Day, Inc. San Francisco, 1963, pp. 1-174
- 7) 前出 6) pp. 32-35
- 8) 川本脩万: 異方性弾性地山における素掘円形トンネルの変形について, 土木学会論文集, 71, 1960, pp. 20-27
- 9) Barenblatt, G.I. and Cherepanov, G.P.: On Brittle Cracks under Longitudinal Shear, PMM (Soviet Journal of Applied Mathematics), Vol. 25, No. 6, pp. 1654-1666, Translated edition, Pergamon Press (New York), 1961
- 10) 前出 4) p. 73
- 11) 丹羽義次・小林昭一・平島健一: 三次元異方性弾性岩盤内に任意形状の断面を有する坑道周辺における応力状態, 材料 投稿中

(1969.7.4・受付)