

吊橋の風による自励振動に関する一考察

A STUDY ON THE SELF-EXCITED OSCILLATIONS
OF SUSPENSION BRIDGES BY WIND

宮田 利雄*・岡内 功**

By Toshio Miyata and Isao Okauchi

1. 緒 言

先に、著者らは全橋模型による風洞実験の結果などに基ついて、風圧による過大な横たわみ、横座屈および自励振動の3現象が吊橋の耐風性を主として支配することを示し、それぞれの現象に関する若干の考察結果を述べた^{1),2)}。しかしながら、上記の3現象のうち自励振動現象に関しては、吊構造部の断面形状、その他の条件に応じて複雑な特性が見られるために確固とした結論を示すことができず、より詳細な追及の必要性を強調したのとどまった。

もともと、吊橋の風による自励振動現象は、Tacoma Narrows 橋の例などに見られるようにその発生が吊橋を破壊に導くおそれが強いので、とくに重視されている現象である。したがって、この現象については先の論文にも述べたように、F. Bleich をはじめとする多くの研究者により、翼のフラッター理論の適用、あるいは各種の風洞実験の実施などを通じて、問題の究明が続けられている。しかしながら、これらの多くの研究にもかかわらず発生機構その他について、なお不明確な点が残されており、そのような事情から、現在のところ、個々の吊橋の自励振動に対する安定性を確かめるためには、既往の諸研究の成果を基盤としながらも、それぞれの吊橋を対象とした風洞実験を試みるという方法が最も一般的にとられている方法である。ただし、従来の研究によれば、吊構造部が平板、流線形箱桁などの場合で、水平に近い風を受けたときに発生する自励振動の発振風速は、いわゆる翼の曲げねじれフラッター理論を応用した Bleich の理論によってかなりの精度で推定できることが知られている。これに対して、吊構造部が上記の断面や迎角以外である場合に発生する振動に関しては、平板に作用す

る空気力を前提とした上記の理論によっても良い結果の得られないのは当然と考えられ、実験的にもこれが明らかに認められている。ところが、吊橋の耐風設計に際しては、その断面と迎角を一般的に考えるならば、後者のような場合についても配慮しておくことがきわめて重要であると考えられるのである。したがって、吊橋の自励振動に関して、当面最も問題としなければならないところは、曲げねじれフラッター型の自励振動が発生する場合以外のケースをより明確に解明することにあると考えられよう。

以上のような問題点に関して、著者らは、著者らの行なった既往の風洞実験結果に対して、その分析を一層進める一方、これらの実験の欠を補なうための2,3の風洞実験を改めて実施して、風による吊橋の自励振動の一般性状の追及に努めた。また、理論解析の面においてもいわゆる準定常理論を適用して問題を検討し、上述の実験的考察を裏付ける資料を求めた。これらの研究の結果従来に比して自励振動の特性をより詳細に把握することができ、それとともに、各種吊橋の自励振動に対する安定性の概略的判断、風洞実験の実施、あるいはその結果の、評価などに関して参考になると思われる若干の資料を得たが、ここにそれらの研究結果を総括して報告することにする。

2. 風洞実験結果とその定性的考察

(1) 風洞実験結果

先に著者らが報告した風洞実験結果^{1),2)}でも、吊橋に生ずる自励振動が、吊構造部の断面形状や迎角、さらに振動特性など、多くの要素の影響を受けて複雑な性状を示すことを述べたが、それらの結果を再確認するとともに、振動発生後の状態、すなわち振幅の変化状態、あるいはこれと発振風速との関連性などをとくに検討するた

* 正会員 工博 東京大学助手 工学部土木工学科

** 正会員 工博 中央大学教授 理工学部土木工学科

めに、図-1 に示すような断面、あるいは平板を吊構造部とする吊橋の全橋模型および部分模型によって風洞実験を行なった。これらの実験方法の詳細は前論文に述べたものと同様であるので省略するが、図-1 に示す模型のうち、ST 型および平板は前論文で述べた曲げねじれフラッター型自励振動が SP 型および OP 型は失速フラッター型自励振動が発生することをそれぞれ期待して製作した模型である。

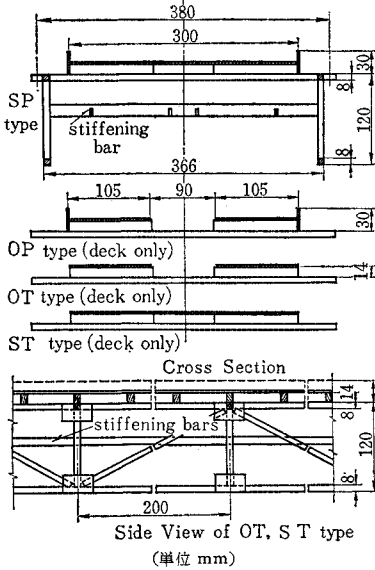


図-1 模型一般図

さて、これらの実験で観測された自励振動の発振風速や振動数を一覧すれば、表-1、図-2~4 のようになる。この表、あるいは図より、模型の断面形状、迎角、構造減衰率と発生した振動の性状との関係が、先に報告した結果¹⁾ とほぼ一致した傾向をもつことを知ることができるであろう。なお表-1、図-3、4 における発振風速は曲げとねじれの2自由度連成振動の場合、全橋模型実験では振動が急激に発散し始めた風速の値であり、部分模型実験では後に述べるように、ある特定振幅の不安定なリミットサイクルを呈する風速の値である。一方、ねじれ1自由度振動の場合には定常振動となるときに最小の風速値を発振風速としている。

以上のように、吊橋の風による自励

表-1 自励振動の発振風速 V_d と振動数 N_d 一覧

(a) 部分模型実験 (V_d は倍振幅 2° 付近における値である)

模型	主要諸元	迎角 (度)	実験値		備考
			V_d (m/sec)	N_d (c/sec)	
ST-1	$f_1=1.00$ $f_2=2.26$ $(w=83.83)$ $(\theta=12.08)$	6	5.3	2.19	閉床、縁端に充腹部材のないトラス型 $V_F=12.4$ } Bleich 理論による計算値 $N_F=1.54$ } 準曲げねじれフラッター発生
		3	9.7	2.11	
		0	15.1	1.88	
		-3	15.6	1.78	
		-6	12.6	1.97	
ST-2	$f_1=1.00$ $f_2=1.75$ $(w=83.83)$ $(\theta=12.08)$	6	4.5	1.72	$V_F=9.1$ } Bleich 理論による計算値 $N_F=1.33$ } 準曲げねじれフラッター発生
		3	7.0	1.65	
		0	11.1	1.47	
		-3	11.7	1.40	
		-6	9.3	1.58	
ST-3	$f_1=1.03$ $f_2=1.71$ $(w=94.36)$ $(\theta=13.35)$	6	4.4	1.67	準曲げねじれフラッター発生
		3	6.9	1.63	
		0	12.9	1.46	
		-3	13.4	1.36	
		-6	11.2	1.51	
OT-1	$f_1=1.01$ $f_2=2.26$ $(w=81.64)$ $(\theta=11.92)$	6	6.3	2.24	ST 型の開床 (開床率 30%) 模型
		3	---	---	
		0	---	---	
		-3	---	---	
		-6	17.8	2.02	
OT-2	$f_1=1.01$ $f_2=1.76$ $(w=81.64)$ $(\theta=11.92)$	6	5.6	1.75	準曲げねじれフラッター発生
		3	17.0	1.58	
		0	18.0	1.39	
		-3	17.2	1.38	
		-6	14.5	1.58	
SP-1	$f_1=0.99$ $f_2=2.22$ $(w=84.03)$ $(\theta=12.44)$	6	6.0	2.2	縁端に充腹部材を持つ閉床トラス型 失速フラッター発生
		3	4.9	"	
		0	4.6	"	
		-3	3.9	2.19	
		-6	4.2	"	
SP-2	$f_1=0.99$ $f_2=1.73$ $(w=84.03)$ $(\theta=12.44)$	6	5.5	1.72	失速フラッター発生
		3	3.5	"	
		0	3.3	"	
		-3	3.1	1.71	
		-6	3.4	"	
SP-3	$f_1=1.03$ $f_2=1.69$ $(w=94.56)$ $(\theta=13.71)$	6	6.0	1.69	失速フラッター発生
		3	4.1	"	
		0	3.8	1.70	
		-3	3.6	1.69	
		-6	3.7	"	
OP-1	$f_1=1.00$ $f_2=2.22$ $(w=83.35)$ $(\theta=13.38)$	6	12.9	2.28	SP 型の開床 (開床率 30%) 模型 失速フラッター発生
		3	6.8	2.24	
		0	2.7	2.20	
		-3	2.4	"	
		-6	4.0	2.24	
OP-2	$f_1=1.00$ $f_2=1.73$ $(w=83.35)$ $(\theta=13.38)$	6	11.0	1.80	失速フラッター発生
		3	6.2	1.76	
		0	1.9	1.72	
		-3	2.0	1.72	
		-6	2.8	1.74	
平板	$f_1=1.10$ $f_2=2.41$ $(w=69.62)$ $(\theta=10.84)$	6	11.1	2.15	幅 40 cm, 厚さ 1 cm, 円端を持つ模型 曲げねじれフラッター発生 $V_F=12.3$ } Bleich 理論による計算値 $N_F=1.79$ }
		3	13.4	1.9	
		0	13.4	1.73	
		-3	13.4	2.0	
		-6	11.0	2.18	

注：曲げ固有振動数 f_1 (c/sec), ねじれ固有振動数 f_2 (c/sec)
重量 w (g/cm), 質量慣性モーメント θ (gsec²)
Bleich 理論による計算値 V_F (m/sec), N_F (c/sec)

(b) 全橋模型実験 (スパン 16m, サグ 1.6m)

模型	主要諸元	迎角 (度)	実験値		備考
			V_d (m/sec)	N_d (c/sec)	
ST-1	$f_1=0.94, f_2=2.27$ $f_1=1.27, f_2=2.50$ " " " $(w=30.82)$ $(\theta=6.91)$ "	7	3.4~3.9	2.15	部分模型 ST 型と同じ 準曲げねじれフラッター発生
		4	5.5	2.35	
		2	6.7	2.40	
		0	—	—	
		-7	6.2~6.4	2.45	
ST-2	$f_1=0.94, f_2=2.26$ $f_1=0.94, f_2=1.64$ " " " $(w=$ 同上) "	7	4.0	2.15	準曲げねじれフラッター発生 $V_F=5.9$ } Bleich 理論に $N_F=1.38$ } よる計算値
		4	5.2	1.45	
		0	7.7	1.37	
		-4	5.9	1.45	
		-7	5.0	1.50	
ST-3	$f_1=0.95, f_2=2.04$ $f_1=0.89, f_2=1.61$ " " " $(w=$ 同上) "	4	5.6	1.90	準曲げねじれフラッター発生
		2	8.2	1.25	
		0	6.7	1.40	
		-2	5.9	1.45	
		-4	5.6	1.55	
OT-1	$f_1=1.28, f_2=2.49$	-7	7.8~8.7	2.50	失速フラッター $(w=30.0, \theta=6.86)$
OT-2	$f_1=1.30, f_2=2.59$	-4	8.2~8.4	2.57	失速フラッター発生($w=$ 同上)
		-7	8.7	2.70	
SP	$f_1=1.26, f_2=2.49$ " $f_1=0.95, f_2=2.22$ " " $(w=32.54)$ $(\theta=7.31)$ "	7	5.3~6.0	2.30	部分模型 SP 型と同じ 失速フラッター発生
		4	4.4	2.35	
		2	3.6	2.20	
		0	3.1	"	
		-4	2.9	"	
OP	$f_1=0.95, f_2=2.23$ $(w=31.74)$ $(\theta=7.16)$	7	—	—	部分模型 OP 型と同じ 失速フラッター発生
		4	2.6	2.23	
		0	2.1	2.15	
		-4	2.1~2.5	2.23	
		-7	3.1~3.5	2.20	
平板	$f_1=1.01, f_2=2.77$ $(w=9.15)$ $(\theta=4.19)$	8	4.7~5.0	2.45	幅 40cm, 厚さ 1cm, 半円端を持つ 曲げねじれフラッター発生 $V_F=7.62$ } Bleich 理論によ $N_F=2.02$ } る計算値
		0	7.5~7.7	2.06	
		-8	5.3~5.6	2.25	

注：(a)参照。

振動にはそれぞれ、特色ある性状が現われるが、発振風速などの調査に加えて、振動発生後の状態を検討するとその状態を以下の3つの特徴ある種類に分けることができることを見出された。そこで、それぞれの代表的実験結果を示せば、図-5~7 のようになる。これらは、模型に与えた振動、もしくは、自然に発生した振動の減衰率(もしくは発散率)が振幅や風速によって変化するので、その模様を調べて図示したものである。すなわち、風速と振幅に応じて等対数減衰率線を引いたものであるが、これらの図において、対数減衰率 δ が正の領域の風速と振幅では振動が減衰する方向にあり、一方、 δ が負の領域の風速と振幅では振動が発達する方向にあったことを意味するわけである。

つぎに各図の特徴について、説明を加えることとすれば、図-5 は、閉床で縁端を閉塞する部材の少ない模型

ST 型において初期迎角 $\alpha=0^\circ$ の場合に得られた結果である。ここで、 $\delta=0$ の線を太い点線で示したが、この曲線はこれより大きいねじれ振幅を初期変位として与えると曲げとねじれの連成した振動が発散し、小振幅の場合には与えたねじれ振動が減衰する境界をなしており、非線形振動論的には不安定なリミットサイクルと呼ぶものである。さらに、この曲線は低風速域で大きな振幅をとり、風速の増大とともに小さな振幅となるような形状をもっているが、このことは風速が高くなるほど発散振動を生ずる振幅が小さくなることを表わしており、したがって発振風速は振幅の大小と密接に関連していると認められる。なお、図-5はST型($\alpha=0^\circ$)の部分模型による実験から得られたものであるが、同じ断面の全橋模型による実験では、模型に生ずる微小な不規則振動(これは風洞気流のもつ乱れ、あるいは吊構造部の各部材から発生する渦を原因として発生すると考えられている)の大きさが不安定なリミットサイクルの振幅に到達したと思われる風速において自励振動が現われているようである。すなわち、不規則な振動が初期攪乱となって、その最大振幅が不安定なリミットサイクルの振幅に合致する風速に至って始めて振動が現われ、実験的にはこの風速を発振風速として記録していると考え

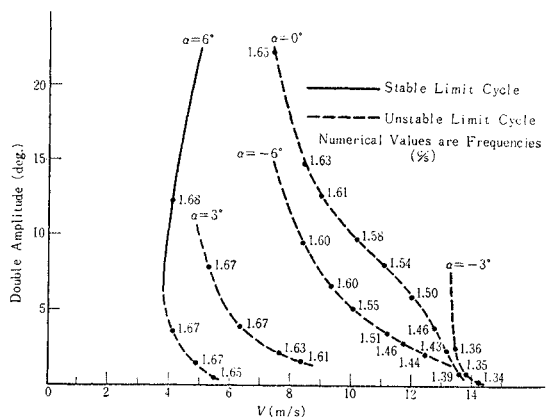


図-2 部分模型 ST-3 型(曲げ、ねじれ 2 自由度)の初期迎角とリミットサイクルの比較(数字は各風速でのねじれ振動数)

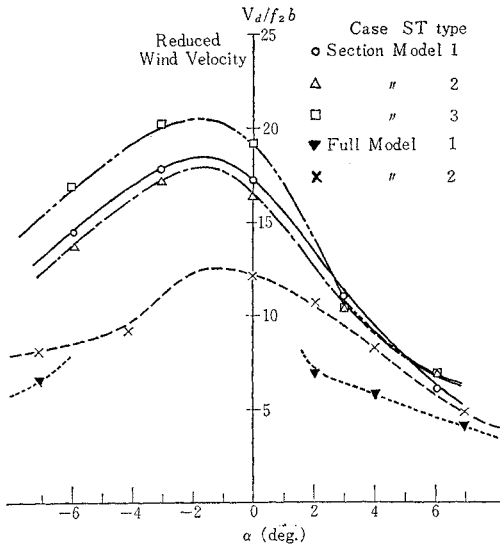


図-3 ST型模型の自動振動の換算
発振風速と初期迎角の関係

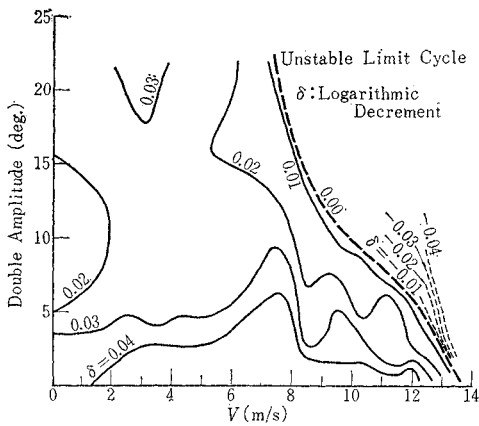


図-5 部分模型 ST-3 型の迎角 $\alpha=0^\circ$ 、
曲げとねじれ 2 自由度の場合の風
速—振幅—減衰率 応答図

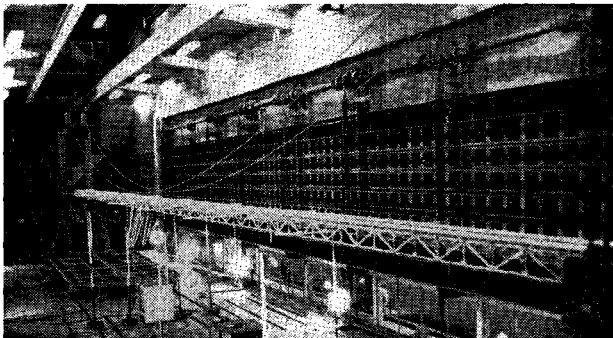


写真-1 全橋模型 OT 型と変動風発生用格子

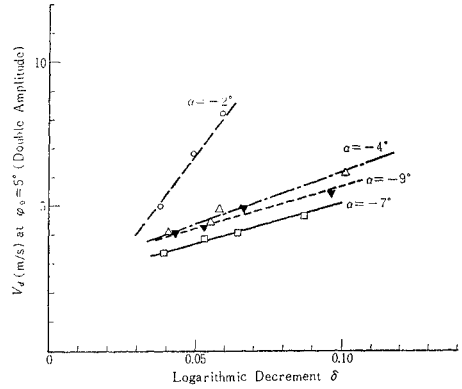


図-4 ねじれ 1 自由度振動の発振風速と
構造減衰率の関係 (トラス型)

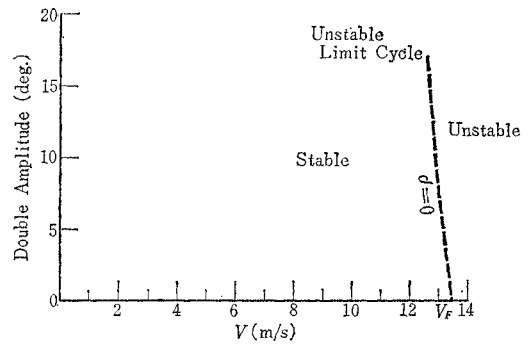


図-6 平板 (部分模型) の迎角 $\alpha=0^\circ$ 、曲げ
とねじれ 2 自由度の場合の応答図

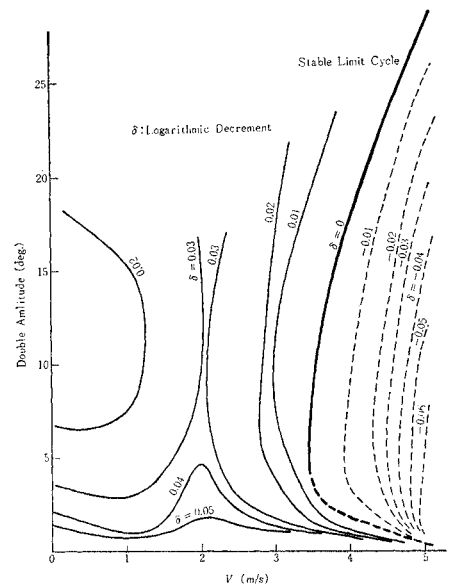


図-7 部分模型 SP-3 型の迎角 $\alpha=0^\circ$ 、
曲げとねじれ 2 自由度の場合の風
速—振幅—減衰率 応答図

られるのである。このように初期攪乱の大きさによって発振風速が変化するという事は、風洞気流にあらかじめ乱れを与えて模型の示す不規則振動の振幅を大きくすると、これに応じるように発振風速が低下する事実からも推測される。著者らは写真に示すように、風洞吹出口に格子を設置し気流を乱して風洞実験を試みたが（このときの乱れの強さは約8%，平均流方向の乱れのスケールはだいたい15~25cmであった）、乱れを与えない場合と与えた場合の実験結果がそれぞれ図-8, 9であり、両者を比較すれば後者の方が初期攪乱としての不規則振動が増大し、それによって発振風速が低下しているのを認めることができる。

これに対して、平板が水平に近い風を受けるときに示す振動について述べるとつぎのとおりである。図-6は迎角 $\alpha=0^\circ$ の場合の実験結果であるが、図にみられるようにこの場合にも一応不安定なリミットサイクルと見なされる状態が存在している。しかし、図-5の場合と異なるところは、その曲線の風速に対する立上り方が

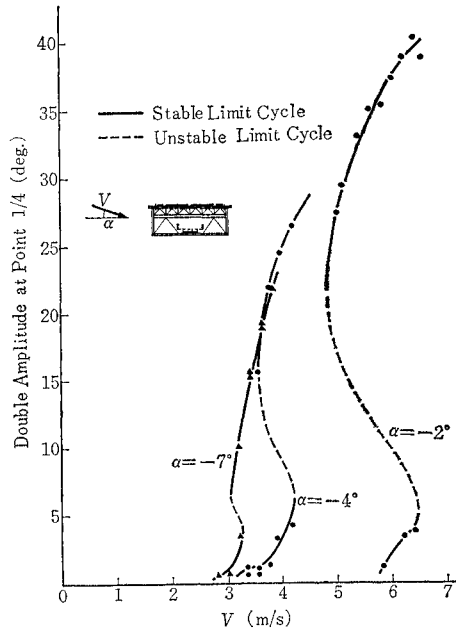


図-11 失速フラッター型自励振動の履歴特性 (トラス型全橋模型)

急なことである。この不安定なリミットサイクルの急激な立上りは、とりもなおさず、振動の発振する風速がほとんど振幅によらずほぼ一定な値をとるということの意味すると考えられる。しかも、実験的に求められたこの平板の発振風速は、表-1に示したようにポテンシャル流理論にもとづく Bleich の理論による計算結果に近いものである。一方、先の図-5に示したST型の場合、不安定なリミットサイクルの振幅が、風速によって大きく変化する状況からみて、振動の発振風速を振幅と対応させて考えねばならず、また、この場合の Bleich の理論による計算値は、表-1に示すように、これを振幅がきわめて小さい場合の発振風速の限界値であると考えても、一般に実験値とは一致していない。

このような相違に着目するとき、ポテンシャル流理論の仮定に沿う断面である平板の場合の自励振動を曲げねじれフラッター型として扱うならば、ST型のような断面をもつ吊橋に生ずる自励振動は、それと区別して扱うのが適当であると考えられるのである。

他方、図-7に示した結果は、縁端に気流を閉塞する部材を持つ閉床模型SP型の部分模型に対する実験から得られたものであるが、この場合には定常振動、すなわち安定なリ

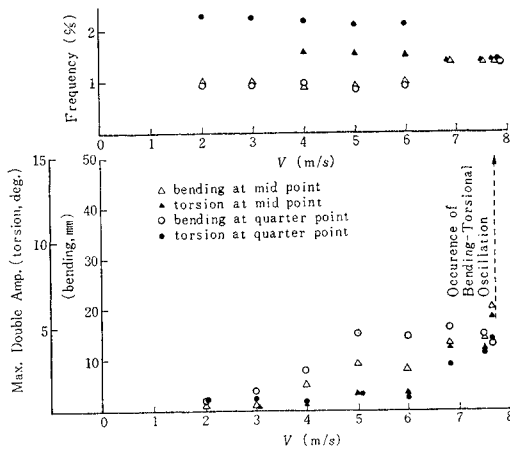


図-8 一定な気流中の全橋模型ST-2型の応答 (迎角 $\alpha=0^\circ$)

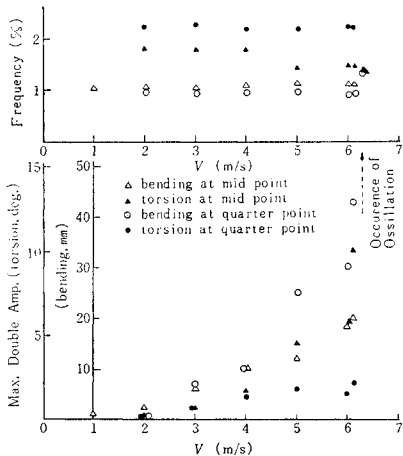


図-9 格子背後の乱流中の全橋模型ST-2型の応答 (迎角 $\alpha=0^\circ$)

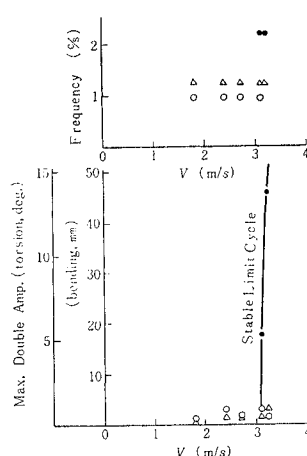


図-10 全橋模型SP型の応答図 (迎角 $\alpha=0^\circ$)

ミット サイクルの存在が確認され、これを図では太い実線で示している。なお、小振幅の領域において不安定なリミット サイクルも認められたが、その方は太い点線で示している。図に見られるように、風速 $V=3.5$ m/sec、倍振幅 4° 付近を境にしてこれより大きい振幅では安定なリミット サイクルが、小さい振幅では不安定なリミット サイクルが存在している。したがって、これらは $V=3.5$ m/sec 以下の風速では模型に与えた初期ねじれ振動がすべて減衰し、これ以上の風速においては、初期振幅の大きさが太い点線以下の値であるときには振動が減衰し、以上の値であるときには、発散して太い実線で示された振幅の定常振動に到達していることを示す。なお、この定常振動の振動数はほとんど固有振動数に近いものであった。図-7 の実験と同じ断面の全橋模型による実験でも、図-10 に示すようにねじれ振動が顕著に現われ、しかも定常振動状態を形成することが観察されている。

以上のように、安定なリミット サイクルが比較的小振幅から認められることがこの種の自励振動の大きな特徴であるが、図-11 にみられるような履歴曲線の存在も一つの特徴として考えられる。なお、図-11 は全橋模型による実験結果であるが、リミット サイクルについて初期迎角、振幅および風速が相互に影響しあっていることもこの図からうかがい知れるであろう。

(2) 吊橋の風による自励振動の分類

前節に示したような、吊橋の風による自励振動に関して、著者らは振動性状の類似性および振動中の吊構造部に作用する非定常(動的)空気力の傾向から判断して、これらの振動が航空機翼の研究においてよく知られている、曲げねじれフラッター型と失速フラッター型に分けられることを従来から指摘してきた³⁾。しかし、前節に述べたように、振動発生後の振幅の変化状態、あるいはこれと発振風速との関連性などにも着目するならば、上述の2種類の分類よりつぎに示すように3種類に分けるほうが現象を整理し、理解するうえにおいてより適切ではないかと考えるに至った。すなわち、

- (a) 曲げねじれフラッター型自励振動
- (b) 失速フラッター型自励振動
- (c) 準曲げねじれフラッター型自励振動

であるが、それぞれの特徴を記すと以下のようなものである。

(a) 曲げおよびねじれが連成する2自由度振動で、振動発生後急激に発達し、振動数は曲げおよびねじれの固有振動数のほぼ中間の値をとる。この振動の発生については T. Theodorsen の平板に対する非定常(動的)空気力を用いた Bleich の理論によってかなり正確な推定が可能である。この型の振動では、振動の減衰と発散

の境界をなす不安定なリミット サイクルが風速に対して急激な立上りを示している点が、他種の自励振動とくらべて特徴とするところである。振動が現われるのは、平板、流線形箱桁を吊構造部とする吊橋で、しかも風が水平に近い迎角で吹く場合である。

(b) ねじれのみ1自由度振動に近く、その振動数はねじれの固有振動数とほとんど変わらない。振動発生後、定常振動(安定なリミット サイクル)を形成し、その振幅は風速の上昇とともに増大している。また、リミット サイクルが風速に対し履歴曲線を描くことが見られる。この種の振動はだいたいにおいて充腹桁、充実率の大きいトラス(たとえば、前述の SP, OP 型断面)を吊構造部とする吊橋において発生する。発振風速は、Bleich の理論によって計算される値より大幅に下まわることが一般的である。

(c) 曲げとねじれの連成する振動であるが、(a) の曲げねじれフラッター型にくらべてねじれが卓越しており、振動発生後の振動はやや穏やかとなっている。この種の振動には不安定なリミット サイクルが顕著に認められるが、吊構造部の各部材から発生する渦などを原因とする初期攪乱が、この不安定なリミット サイクルの振幅に到達する風速において振動を生じていると見ることができ、そこでいわゆる発振風速が振幅によってかなり変化する。この点において、不安定なリミット サイクルが風速に対して急激な立上りを示す曲げねじれフラッター型の場合とは異なった特徴が認められる。振動数はねじれの固有振動数より若干低い、曲げねじれフラッター型の場合ほどの低下は見られない。この種の振動が現われるのは充実率の比較的小さい閉床トラス(たとえば、前述の ST 型断面)などを吊構造部とする場合である。

結局、以上の分類は、従来、曲げねじれフラッター型と失速フラッター型に分けていた自励振動の中間的特質を示す振動を新たに分離し、準曲げねじれフラッター型として分類してみたものであるが、これは、上に述べた各分類の特徴からわかるように、リミット サイクルの状態や、Bleich の理論の適合性に基づくところが大きい。なお、各分類に関連して述べた吊構造部の形式は便宜的なものであって、同一断面の場合でも風の作用角度によっては、異なった種類の振動が発生することを重ねて述べておく必要がある。このことは、断面形状、風の作用角度に応じて空気力の特性が変わってくることを示すわけで、それに吊橋系としての力学特性が加わって上述のような各種の振動が見られるということができよう。

3. 準定常理論の適用

(1) 準静的空気力⁹⁾

前述の各種の振動はいうまでもなく吊構造部に作用する空気力によって引き起こされるわけであるが、その空気力の値は流れに平行におかれた平板の場合を除けば、実験的に求めなければならない現状である。したがって問題の理論的検討が、非常に困難になっているのであるが、著者らは J.P. Den Hartog⁵⁾や、G.V. Parkinson⁶⁾らが曲げ 1 自由度の自励振動であるギャロッピング現象に対して適用した準定常理論が、ねじれを含む振動の場合にも適用できると考えて問題を処理することにした。すなわち、振動中の吊構造部に作用するある瞬間の空気力を、その瞬間に吹く風が吊構造部に対してのもつ相対迎角、および相対風速と同じ迎角、風速の定常風によって誘起される定常（静的）空気力に等しいとおき、この空気力に基づいて前記各分類の自励振動の解析を試みたのである。なお、ねじれを含む振動に対する準定常理論の適用については、すでに、翼に対する U. Blenk ら⁷⁾、軸流圧縮機の翼片に対する F. Sisto⁸⁾、吊橋に対する D.B. Steinman⁹⁾などの研究がみられる。しかし Steinman の研究についてはとくにその実用性に問題点があるとされており、著者らは主として Parkinson らが角柱の曲げの自励振動に関して適用した理論を、ねじれ振動や曲げとねじれの連成振動の場合に拡張した形で解析を進めている。

以下、著者らが考えた空気力についてまず述べることにする。Parkinson らが示しているように、物体が変位 y で上下方向の運動をしているときには、たとえ風が水平に速度 V で吹いていても、物体と気流間の相対運動によって相対迎角 $r = \tan^{-1}(\dot{y}/V)$ が現われ、さらに、このときの風速についても、 $V_{rel} = V \sec r$ なる相対風速を考える必要がある。そして、その際、物体に作用する力としては、迎角 r 、風速 V_{rel} で吹く風によって誘起される定常（静的）空気力を用いることが考えられる。これに対して、いまの場合は、風速 V の風が吊構造部の水平軸に関して初期迎角 α_0 で吹いているとして、この風の中で鉛直曲げ、ならびにねじれ方向に振動している吊構造部に作用する空気力を考えるのであるが、吊構造部の曲げ変位 $y(x, t)$ 、ねじれ変位 $\phi(x, t)$ ともなう空気流との相対運動による迎角を

$$r(x, t) = \tan^{-1} \frac{\dot{y} - b'\dot{\phi}}{V} \dots\dots\dots (1)$$

のように与えることにする。すなわち、吊構造部のねじれ振動ともない生ずる相対迎角を $\tan^{-1}(b'\dot{\phi}/V)$ と考

えたのである。もともと、ねじれ振動の場合の鉛直速度は、横断面内各点においてねじれ中心からの距離に比例して変わるものであるが、解析を簡単化するために、これを上記のように表わしたわけである。この考えは横断面内各点のねじれ振動にともなう鉛直方向の速度を回転中心から b' の距離にある点の値により代表させたといふことができよう。ただし、吊橋に発生する自励振動が各種の性状を示すことを考慮すれば、 b' が振動性状に係る諸因子、たとえば吊構造部の断面形状や風の作用迎角によって変化することは当然考えておかなければならないことである。

さて、以上のように相対迎角を考えると、吊構造部の空気流に対するある瞬間の迎角は

$$\alpha(x, t) = \alpha_0 + \phi(x, t) + r(x, t) \dots\dots\dots (2)$$

となり（これは初期迎角 α_0 に対して有効迎角と呼ぶべき値である）、さらに風速も 図-12 のような相対風速

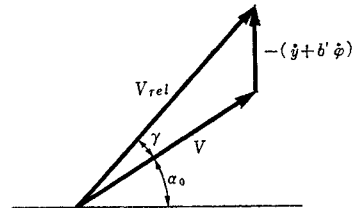


図-12 相対風速

V_{rel} を考えなければならない。その結果、吊構造部に働く空気力（揚力、抗力、空力モーメント）は、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} L(\alpha) &= C_L(\alpha) \frac{\rho}{2} b V_{rel}^2 \\ D(\alpha) &= C_D(\alpha) \frac{\rho}{2} b V_{rel}^2 \\ M(\alpha) &= C_M(\alpha) \frac{\rho}{2} b^2 V_{rel}^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

となる。ただし、ここで有効迎角 α は式 (2) に与えたものであり、空気力の作用方向は相対風速 V_{rel} の方向を規準とする（図-13）。

さらに、 $C_L(\alpha)$ 、 $C_D(\alpha)$ および $C_M(\alpha)$ は迎角 α に対する定常（静的）空気力係数、すなわち揚力係数、抗力

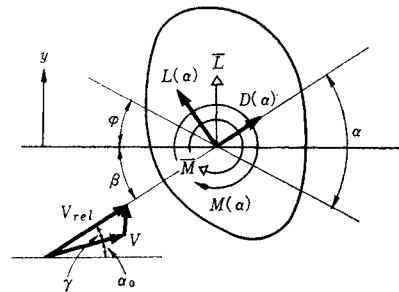


図-13 吊構造部に作用する空気力

係数および空力モーメント係数で、 ρ ：空気密度、 b ：吊構造部幅である。なお、上述のように空気が相対風速の方向を規準としているので、吊構造部の鉛直方向、ならびに回転方向に作用する空気力成分 \bar{L} 、 \bar{M} を求めるには

$$\bar{L} = L(\alpha) \cos \beta + D(\alpha) \sin \beta, \quad \bar{M} = M(\alpha)$$

ただし $\beta = \alpha_0 + r$ 、としなければならない。したがって、この \bar{L} 、 \bar{M} を

$$\bar{L} = C_{Ly} \frac{\rho}{2} - bV^2, \quad \bar{M} = C_{M\varphi} \frac{\rho}{2} b^2 V^2 \dots \dots \dots (4)$$

とおけば、 C_{Ly} 、 $C_{M\varphi}$ は

$$\left. \begin{aligned} C_{Ly} &= [C_L(\alpha) \cos \beta + C_D(\alpha) \sin \beta] \sec^2 \gamma \\ C_{M\varphi} &= C_M(\alpha) \sec^2 \gamma \end{aligned} \right\} (5)$$

と表わされる。一方、式(3)における空気力係数は、前述のように静止模型に対する三分力測定値により与えられるものであるが、これらの測定値を次式のように α の多項式で近似すれば、式(5)の C_{Ly} 、 $C_{M\varphi}$ は最終的にはねじれ変位 φ 、および相対迎角 γ の関数として表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} C_L(\alpha) &= a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + a_3\alpha^3 + \dots \\ C_D(\alpha) &= b_0 + b_2\alpha^2 + b_4\alpha^4 + \dots \\ C_M(\alpha) &= c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \dots \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

なお、ここで、 C_D はおおむね α の偶関数とみなすことができるとしている。また、初期迎角 α_0 は無視しても一般性は失われない。これは、式(6)のように多項式展開を行なう際に $\alpha = \alpha_0$ を原点として各係数を定めればよいからである。

(2) ねじれ1自由度振動への適用

前節に示した空気力を用いて、失速フラッター型自励振動の場合に現われるねじれ1自由度振動の検討を行なうことにすると、このときの吊橋の運動方程式はつぎのように書けるであろう。

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + C_{20} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + EC_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \\ - \left(GK + \frac{b^2}{2} H_w \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8fb}{l^2} H_2 = \bar{M}(x, t) \end{aligned} \dots \dots \dots (7)$$

ただし、 θ ：質量慣性モーメント、 C_{20} ：ねじれの減衰定数、 EC_w ：曲げねじれ剛性、 GK ：ねじれ剛性、 H_w ：死荷重によるケーブル水平張力、 H_2 ：ねじれ変位による張力の増分、 l ：スパン、 f ：サグ、 b ：ケーブル間隔である。

ここで、吊構造部の振動を

$$\varphi(x, t) = \sum_r q_{2r}(t) \phi_{2r}(x)$$

とおくと、モード間の連成がないものとすれば、式(7)より r 次モードに対して

$$\begin{aligned} (\ddot{q}_{2r} + 2\zeta_{2r}\omega_{2r}\dot{q}_{2r} + \omega_{2r}^2 q_{2r}) \int_I \phi_{2r}^2(x) dx \\ = \int_I \bar{M}(x, t) \phi_{2r}(x) dx \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

が得られる。ただし、 ω_{2r} ： r 次モードのねじれ固有円動振数、 ζ_{2r} ： r 次モードのねじれの減衰係数、 q_{2r} ：一般座標、 ϕ_{2r} ：直交関数である。式(8)の右辺の $\bar{M}(x, t)$ は、前節で述べたものを用いると φ 、および $\dot{\varphi}$ の関数として考えることができるから、特定モードに着目して $\varphi_2 = q_2 \phi_2$ 、 $\dot{\varphi}_2 = \dot{q}_2 \phi_2$ とおき、添字 r を省略すると、式(8)はさらにつぎのように書き直される。

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 \\ = K_2 \int_I C_{M\varphi}(q_2, \dot{q}_2) \phi_2(x) dx \dots \dots \dots (9) \end{aligned}$$

ここで、

$$K_2 = \frac{\rho b^2 V^2}{\left\{ 2 \theta \int_I \phi_2^2(x) dx \right\}}$$

である。

式(9)は明らかに非線形であるが、これはまた

$$\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 + \mu g(q_2, \dot{q}_2) = 0 \dots \dots \dots (10)$$

と表わすことができ、 μ が十分小さければ、Krylov-Bogoliubov の近似法¹⁰⁾により解を推定することができる。すなわち、解を

$$q_2(t) = A_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2)$$

とおき、振幅 A_2 、位相 ψ_2 は時間に対して徐々に変化する値であると考え、 A_2 、および $\psi = \omega_2 t + \psi_2$ は

$$\begin{aligned} \frac{dA_2}{dt} = -\frac{1}{2\pi\omega_2} \int_0^{2\pi} \mu g(A_2 \sin \phi, A_2 \omega_2 \cos \phi) \\ \cdot \cos \phi d\phi \equiv \Phi(A_2) \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} = \omega_2 + \frac{1}{2\pi A_2 \omega_2} \int_0^{2\pi} \mu g(A_2 \sin \phi, A_2 \omega_2 \cos \phi) \\ \cdot \sin \phi d\phi \equiv \Omega(A_2) \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

により定められる。

このようにして求められる式(9)の解が定常である条件、すなわち自励振動が定常状態を保ちリミットサイクルを形成する条件は式(11)から $\Phi(A_2) = 0$ であり、さらに振幅 A_2 のリミットサイクルが発散しないための条件は $d\Phi(A_2)/dA_2 < 0$ である。したがって、自励振動が静止の状態 ($A_2 = 0$) から発振するための条件は $\Phi(0) > 0$ 、および $\{d\Phi(A_2)/dA_2\}_{A_2=0} > 0$ であることがわかるが、これらの条件を用いてねじれ1自由度の自励振動が発振する風速領域を定めることにすればつぎのようである。いま、

$$\left. \begin{aligned} C_M(\alpha) &= c_0 + c_1\alpha + c_2\alpha^2 + \dots + c_7\alpha^7, \quad \varepsilon = -\frac{b'\dot{\varphi}}{V} \\ r(x, t) &= \tan^{-1} \varepsilon \doteq \varepsilon - \frac{1}{3}\varepsilon^3 + \frac{1}{5}\varepsilon^5 - \frac{1}{7}\varepsilon^7 \\ \sec^2 \gamma &\doteq 1 + \varepsilon^2 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (13)$$

とおけば、式 (9), (11) より

$$\begin{aligned} \phi(A_2) = & -\frac{K_2}{2\pi\omega_2} \left[A_2 \left(\frac{\omega_2 b'}{V} \right) \left\{ \left(\frac{2\zeta_2\omega_2 V}{K_2 b'} + c_1 \right) (0,2) \right\} \pi \right. \\ & + 3c_3(0,4) \frac{\pi A_2^2}{4} + 5c_5(0,6) \frac{\pi A_2^4}{8} \\ & + 7C_7(0,8) \frac{5\pi A_2^6}{64} \left. \right\} \\ & + \frac{A_2^3}{3} \left(\frac{\omega_2 b'}{V} \right)^3 \left\{ (2c_1 + 3c_3)(0,4) \frac{3\pi}{4} \right. \\ & + 6(c_3 + 5c_5)(0,6) \frac{\pi A_2^2}{8} + 5(2c_5 + 21c_7) \\ & \cdot (0,8) \frac{3\pi A_2^4}{64} + 14c_7(0,10) \frac{3\pi A_2^6}{128} \left. \right\} \\ & + \frac{A_2^5}{15} \left(\frac{\omega_2 b'}{V} \right)^5 \left\{ (15c_5 - 2c_1)(0,6) \frac{5\pi}{8} \right. \\ & + (315c_7 - 6c_3)(0,8) \frac{5\pi A_2^2}{32} - 10c_5(0,10) \\ & \cdot \frac{3\pi A_2^4}{128} - 14c_7(0,12) \frac{5\pi A_2^6}{512} \left. \right\} \\ & + \frac{A_2^7}{105} \left(\frac{\omega_2 b'}{V} \right)^7 \left\{ (6c_1 - 7c_3 - 70c_5 + 105c_7) \right. \\ & \cdot (0,8) \frac{35\pi}{64} + 2(9c_3 - 35c_5 - 735c_7)(0,10) \\ & \cdot \frac{7\pi A_2^2}{128} + 5(6c_5 - 49c_7)(0,12) \frac{7\pi A_2^4}{512} \\ & \left. + 42C_7(0,14) \frac{5\pi A_2^6}{1024} \right\} \dots\dots\dots(14) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $(0, n) = \int_0^1 \phi_2^n(x) dx$ である。

式 (14) より、 $A_2=0$ が $\phi(A_2)=0$ の根であることがわかるが、このとき

$$\left[\frac{d\phi(A_2)}{dA_2} \right]_{A_2=0} = -\frac{K_2 b'}{2V} \left\{ \frac{2\zeta_2\omega_2 V}{K_2 b'} + c_1 \right\} (0,2) \dots\dots\dots(15)$$

したがって、自励振動が発生する条件は

$$\frac{K_2 b'}{2V} \left\{ \frac{2\zeta_2\omega_2 V}{K_2 b'} + c_1 \right\} \leq 0 \dots\dots\dots(16)$$

となり、これより $c_1 < 0$ のとき

$$V \geq -\frac{4\zeta_2\omega_2\theta}{c_1 b' \rho b^2} \dots\dots\dots(17)$$

の風速において自励振動が現われることが予想される。なお、式 (14) において $A_2=0$ のときに $\phi(A_2)=0$ となつて、 $\phi(0) > 0$ の条件を満足していないが、これは風速が式 (17) で与えられる値以上になつても何らかの初期振幅が存在しなければ、自励振動が発現しないことを意味すると考えられる。

以上のように、発振風速には c_1 の値が関係するが、この値は式 (13) からわかるように空力モーメント係数 $C_M(\alpha)$ 曲線の勾配である。したがって、発振風速 V_F をつぎのように表わすことができる。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} V_F = & \frac{1}{(dC_M(\alpha)/d\alpha)} \frac{4\zeta_2\omega_2\theta}{\rho b' b^2}, \\ \text{ただし } & \frac{dC_M(\alpha)}{d\alpha} < 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(18)$$

これより、 $C_M(\alpha)$ 曲線が負勾配をもつ迎角範囲を初期迎角とする場合に、ねじれ 1 自由度の振動、すなわち前述の失速フラッター型自励振動の発生が予測されることになる。なお、振動が発生するときの振動数は、式 (12) を積分すると $A_2=0$ のとき $\psi = \varrho(0)t + \psi_0$ となるから

$$\varrho(0) = \omega_2 - \frac{c_1 \rho b^2 V^2}{4\omega_2 \theta} \dots\dots\dots(19)$$

が求める振動数となる。

また、振動の振幅 A_2 は式 (14) を時間に関して積分することにより求めることができるのであるが、ここではリミットサイクルに着目することにすると、式 (14) において、 $\phi(A_2)=0$ とおいたときの根 A_2 が求めるべきリミットサイクルの振幅となる。式 (14) において、

$$V_* = -\frac{4\zeta_2\omega_2\theta}{(-c_1)b'\rho b^2}, \quad k_0 = \frac{b'\omega_2}{V} \dots\dots\dots(20)$$

とおくと、 $\phi(A_2)=0$ の $A_2=0$ 以外の根は k_0 の関数となることがわかる。そして、求められたリミットサイクルが安定、すなわち振動が定常状態を保つ。不安定、すなわち振動が発散、または減衰するかを判定する条件は

$$\frac{d\phi(A_2)}{dA_2} > 0 \quad \text{または} \quad \frac{d\phi(A_2)}{dA_2} < 0 \dots\dots(21)$$

である。

(3) 曲げとねじれの 2 自由度振動への適用

引き続き曲げとねじれの 2 自由度振動の場合に準定常空気力を適用することとすれば、基本式は式 (7) に曲げ振動に関する運動方程式を加えてつぎのようになる。

$$\left. \begin{aligned} m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + C_{10} \frac{\partial y}{\partial t} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \\ - 2H_w \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{16f}{l^2} H_1 = \bar{L}(x, t) \\ \theta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + C_{20} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + EC_w \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} - \left(GK + \frac{b^2}{2} H_w \right) \\ \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8fb}{l^2} H_2 = \bar{M}(x, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(22)$$

ここで、 m : 単位長当りの質量、 C_{10} : 曲げの減衰定数、 EI : 鉛直曲げ剛性、 H_1 : 曲げ変位によるケーブル水平張力の増分である。

つぎに、吊構造部の振動を、 $y = b\eta$ として

$$\left. \begin{aligned} \eta(x, t) = \sum_r q_{1r}(t) \phi_{1r}(x) \\ \varphi(x, t) = \sum_r q_{2r}(t) \phi_{2r}(x) \end{aligned} \right\}$$

とおくと、式 (22) より r 次モードに対して

$$\left. \begin{aligned} (\ddot{q}_{1r} + 2\zeta_{1r}\omega_{1r}\dot{q}_{1r} + \omega_{1r}^2 q_{1r}) \\ \cdot \int_0^1 \phi_{1r}^2(x) dx = \frac{1}{m} \int_0^1 \bar{L}(x, t) \phi_{1r}(x) dx \\ (\ddot{q}_{2r} + 2\zeta_{2r}\omega_{2r}\dot{q}_{2r} + \omega_{2r}^2 q_{2r}) \\ \cdot \int_0^1 \phi_{2r}^2(x) dx = \frac{1}{\theta} \int_0^1 \bar{M}(x, t) \phi_{2r}(x) dx \end{aligned} \right\} \dots\dots(23)$$

が得られる。ただし、 ω_{1r} ： r 次モードの固有円振動数， ζ_{1r} ： r 次モードの曲げの減衰係数， q_{1r} ：一般座標， ϕ_{1r} ：直交関数である。なお，式(23)の右辺の $\bar{L}(x, t)$ ， $\bar{M}(x, t)$ は前節のねじれ1自由度の場合と相違して， φ および ϕ ばかりでなく， $\dot{\varphi}$ の関数でもある。いま，前節と同様に特定モードに着目すると式(23)は

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + 2\zeta_1\omega_1\dot{q}_1 + \omega_1^2q_1 \\ = K_1 \int_0^l C_{L\varphi}(\dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)\phi_1(x)dx \\ \ddot{q}_2 + 2\zeta_2\omega_2\dot{q}_2 + \omega_2^2q_2 \\ = K_2 \int_0^l C_{M\varphi}(\dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2)\phi_2(x)dx \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

と書き直される。ここで， $K_1 = \rho V^2 / (2m \int_0^l \phi_1^2(x) dx)$ である。

式(24)は空気力の項に各自由度間の連成があるために，連成非線形方程式となっているが，これを解の漸近的安定，不安定を論じた Lyapunov の方法¹⁰⁾にしたがって解くことにすれば以下ようになる。すなわち，式(24)を

$$\left. \begin{aligned} \ddot{q}_1 + \omega_1^2q_1 + f(\dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = 0 \\ \ddot{q}_2 + \omega_2^2q_2 + g(\dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(25)$$

とおき，変数変換

$$q_1 = x_1, \quad \dot{q}_1 = x_2, \quad q_2 = x_3, \quad \dot{q}_2 = x_4$$

を行なうと，

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega_1^2x_1 - f(x_2, x_3, x_4) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\omega_2^2x_3 - g(x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \right\} \dots\dots(26)$$

なる微分方程式系が求られる。この系のつりあい状態を

$$e = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})$$

とし，式(26)の右辺をそれぞれ $F_i (i=1, 2, 3, 4)$ とおいて， $F_i(e)$ の変数 x_j による偏微分

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i(e)}{\partial x_j} \quad (i, j=1, 2, 3, 4)$$

なる量を考える。

Lyapunov によれば，行列 $A=(a_{ij})$ の固有値が負の実部を持てば，式(26)のつりあい状態 e は漸近的に安定で，少なくとも，一つが正の実部を持てば不安定となる。ただし，いま，固有値の実部は0ではないとしている。この固有値 λ を求める特性方程式は，つりあい点 e において，

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -\omega_1^2 & -\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda & -\frac{\partial f}{\partial x_3} & -\frac{\partial f}{\partial x_4} \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & -\frac{\partial g}{\partial x_2} & -\omega_2^2 - \frac{\partial g}{\partial x_3} & -\frac{\partial g}{\partial x_4} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \dots\dots(27)$$

となる。上式を展開すると λ に関する4次式が得られる

が，これを

$$\lambda^4 + P_3\lambda^3 + P_2\lambda^2 + P_1\lambda + P_0 = 0 \dots\dots(28)$$

とおくとき，固有値 λ の実部の符号の判定は，Routh-Hurwitz の判別式にしたがうことにより，

$$\left. \begin{aligned} P_3, P_2, P_1, P_0, \quad \text{および} \\ F(V) = P_1(P_3P_2 - P_1) - P_3^2P_0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(29)$$

の正負を論ずればよいことになる。すなわち，上記の値のいずれかが負になるとき，系は不安定となるわけであり，したがって，いまの場合は上記の値を負とする最も低い風速が，曲げとねじれの連成振動の限界風速 V_F になる。また，振動発生時の振動数は，特性方程式の根の虚部から定めることができる。

さて，實際上最も問題となるのは，静止した状態が不安定となり，振動が発生し始める風速の限界値であるが，この値はつりあい状態 e を吊橋系が振動せず，静止した状態であると考えることにより，すなわち，式(26)の右辺を0とおくことにより求められる。ところが，普通の吊橋の場合，その限界風速は式(29)に示した条件のうち $F(V) \leq 0$ から定まるのであるが，これを具体的に示すことは各因子の結合関係が複雑なので面倒である。したがって，限界値の一般的傾向を知るために，粗雑な扱い方であるが，減衰率を0とおくならば振動の限界風速として

$$V_{F0} = \sqrt{\frac{(\omega_2^2 - \omega_1^2)b'}{\frac{\rho}{2} \left(\frac{a_1 D^2}{m} b + \frac{c_1 b^2}{\theta} - b' \right)}} \dots\dots(30)$$

が求められる。ただし， a_1, c_1 はそれぞれ揚力，空力モーメント係数曲線の勾配であり，

$$D = \frac{\left[\int_0^l \phi_1 \phi_2 dx \right]^2}{\int_0^l \phi_1^2 dx \int_0^l \phi_2^2 dx}$$

である。なお，式(30)によれば， a_1, c_1 が同時に負であるときは限界風速が存在しないことになるが，このときは曲げとねじれの連成した振動が発生しないと解釈される。

4. 準定常理論による風洞実験結果の検討

(1) 準定常理論における空気力と実測される非定常(動的)空気力の関係

前述のとおり，準静的空気力を用いて風による吊橋のねじれ1自由度振動および曲げとねじれの2自由度連成振動の解析を試み，それぞれの振動が発生する風速，そのさい振動数，あるいは，振幅などを与える条件を導いた。そこで，これらの条件によって2.に述べた風洞実験結果を検討することにするが，この時まず問題になるのは，式(18)あるいは(30)などを見ればわかるよう

に、ねじれ振動にともなう相対迎角を考えるにあたって導入した因子 b' の取扱いである。3.(1)にも述べたように、この b' はねじれ振動に際して吊構造部断面内各点が行なう鉛直運動を代表する点の回転中心からの距離と見なすことができるのであるが、当然その値は断面形状、迎角、さらに風速、振動数などの影響を受けると考えられる。したがって、 b' の決定は相当に困難な問題となるが、前節で考えた準定常理論による空気力は究極的には、振動中の吊構造部に働く、いわゆる非定常（動的）空気力と合致するはずであると考えられ、こうした考慮のもとに検討することも b' を決定する一つの方法と考えられる。

従来、吊橋の吊構造部に作用する非定常（動的）空気力に関しては、これを理論的に明らかにすることがむずかしいので、円振動数 ω で振動している吊構造の単位長当たり働く空気力を直接測定することによって求めることがよく行なわれている¹²⁾。その際、揚力、空力モーメントをつぎのように表示して、各係数を求めている。

$$\left. \begin{aligned} \uparrow L &= \pi \rho \left(\frac{b}{2}\right)^3 \omega^2 \left(L_y \frac{y}{b/2} + L_\varphi \varphi\right) \\ \downarrow M &= \pi \rho \left(\frac{b}{2}\right)^4 \omega^2 \left(M_y \frac{y}{b/2} + M_\varphi \varphi\right) \end{aligned} \right\} \dots\dots(31)$$

なお、 L_y 、 L_φ 、 M_y および M_φ は一般に空気力と変位との間に位相差があるので、さらにつぎのように複素表示される。

$$\left. \begin{aligned} L_y &= L_{yR} + iL_{yI}, \quad L_\varphi = L_{\varphi R} + iL_{\varphi I} \\ M_y &= M_{yR} + iM_{yI}, \quad M_\varphi = M_{\varphi R} + iM_{\varphi I} \end{aligned} \right\} \dots(32)$$

ここで、 L_{yR} 、 L_{yI} などはずべて実数であり、 $i = \sqrt{-1}$ である。このような空気力に対して本文中で考えられた空気力は、曲げとねじれが連成する場合には、定常（静的）空気力係数の多項式近似を簡略化すれば

$$\left. \begin{aligned} \uparrow \bar{L} &= \frac{\rho}{2} b V^2 \left[a_1 \varphi + (a_1 + b_0) \frac{-\dot{y} - b' \dot{\varphi}}{V} \right] \\ \downarrow \bar{M} &= \frac{\rho}{2} b^2 V^2 \left[c_1 \varphi + c_1 \frac{-\dot{y} - b' \dot{\varphi}}{V} \right] \end{aligned} \right\} \dots(33)$$

のように表わすことができる。したがって式(31)において、吊構造部が微小調和振動しているとして、

$$y = y_0 e^{i\omega t}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$$

とおき、また $k = \omega b/2 V$ とおくと、式(31)、(33)から

$$\left. \begin{aligned} L_{yR} &= 0 & M_{yR} &= 0 \\ L_{yI} &= -\frac{a_1 + b_0}{\pi k} & M_{yI} &= -\frac{2c_1}{\pi k} \\ L_{\varphi R} &= \frac{a_1}{\pi k^2} & M_{\varphi R} &= \frac{2c_1}{\pi k^2} \\ L_{\varphi I} &= -\frac{2b'(a_1 + b_0)}{\pi b k} & M_{\varphi I} &= -\frac{4b'c_1}{\pi b k} \end{aligned} \right\} \dots(34)$$

として準静的空気力と非定常（動的）空気力の実測値との関係が求められる。結局、これらの関係から、たとえば $L_{yR} \sim M_{\varphi I}$ の各係数の測定値が与えられるならば、

b' が逆算できるわけであり、これにより b' の特性を検討することが可能となるわけである。

なお、この点に関連して、平板に対する準定常理論による空気力と T. Theodorsen による非定常（動的）空気力を対応させてみることにする。Theodorsen によると加速度に比例する項を省略し、微小調和振動

$$y = y_0 e^{i\omega t}, \quad \varphi = \varphi_0 e^{i\omega t}$$

を考えると、平板に作用する空気力は

$$\left. \begin{aligned} \uparrow L &= \pi \rho b V \left[V \left(F + \frac{k}{2} G \right) \varphi - F \dot{y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} \left(-\frac{2}{k} G + F + 1 \right) \dot{\varphi} - \omega G y \right] \\ \downarrow M &= \frac{\pi}{4} \rho b^2 V \left[V \left(F + \frac{k}{2} G \right) \varphi - F \dot{y} \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{4} \left(-\frac{2}{k} G + F - 1 \right) \dot{\varphi} - \omega G y \right] \end{aligned} \right\} \dots(35)$$

のように書ける。一方、平板に対する定常（静的）空気力係数は理論的に求められるが、その係数曲線から

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \left(\frac{dC_L}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = 2\pi, \quad c_1 = \left(\frac{dC_M}{d\alpha} \right)_{\alpha=0} = \frac{\pi}{2}, \\ b_0 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

と定めることができる。したがって、これらの値を、式(33)に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} \uparrow \bar{L} &= \pi \rho b V [V \varphi - \dot{y} - b' \dot{\varphi}] \\ \downarrow \bar{M} &= \frac{\pi}{4} \rho b^2 V [V \varphi - \dot{y} - b' \dot{\varphi}] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(36)$$

となり、式(35)と式(36)を比較すれば、平板に関する空気力の準静的表示の適否を検討することができることとなる。ここでまず右辺第3項の $\dot{\varphi}$ に比例する項の比較により、準静的空気力では揚力、空力モーメントともに $-b'$ に比例するように表わされているのに対して式(35)では揚力、空力モーメントそれぞれの比例係数が異なっていることが知られるが、これは b' が揚力、空力モーメントについてそれぞれ別個に考えられねばならないことを示すと考えられる。また φ 、 \dot{y} 、および y に比例する項についても両者は一致しないが、このようなことから、 b' のみを用いた準静的表示によって平板に作用する非定常（動的）空気力を正確に表わすことは不可能であることがわかる。この結果は、変位と作用空気力の間の位相差が先に示した準静的空気力では適切に表現されていないことに主な理由があると考えられ、このような点において準定常理論の適用範囲にはおのずから限界があろうと考えられる。

(2) ねじれ1自由度振動

失速フラッター型自励振動が発生する場合には、ねじれ1自由度振動が現われるが、この場合に対して準定常理論を適用すると、式(18)のように C_M 曲線が負勾配となる迎角範囲に初期迎角があるとき、振動が現われる

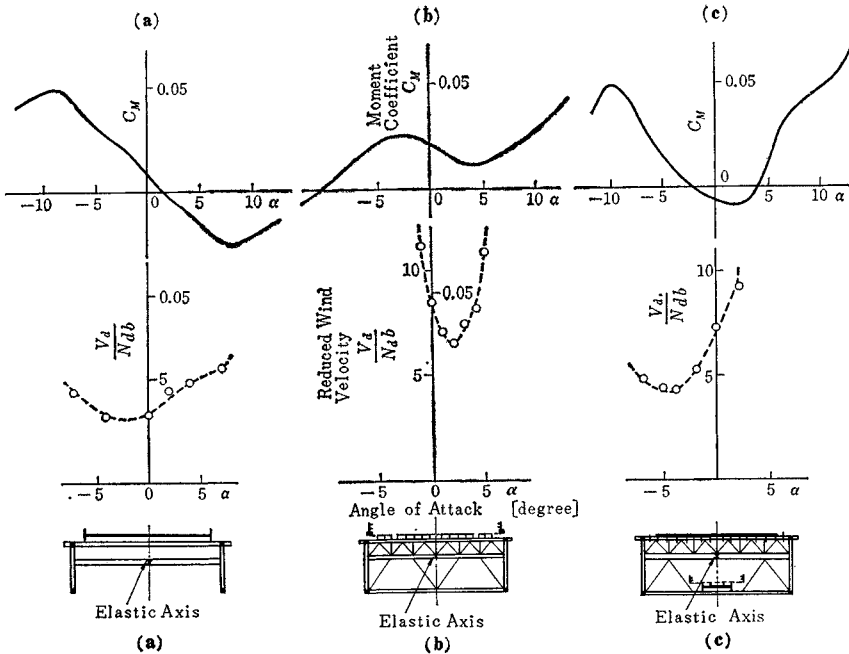


図-14 失速フラッター型自励振動の発生と空力モーメント係数曲線の関係 (全橋模型)

表-2 ねじれ1自由度振動の発振風速と振動数の実験値と計算値の比較 (全橋模型)

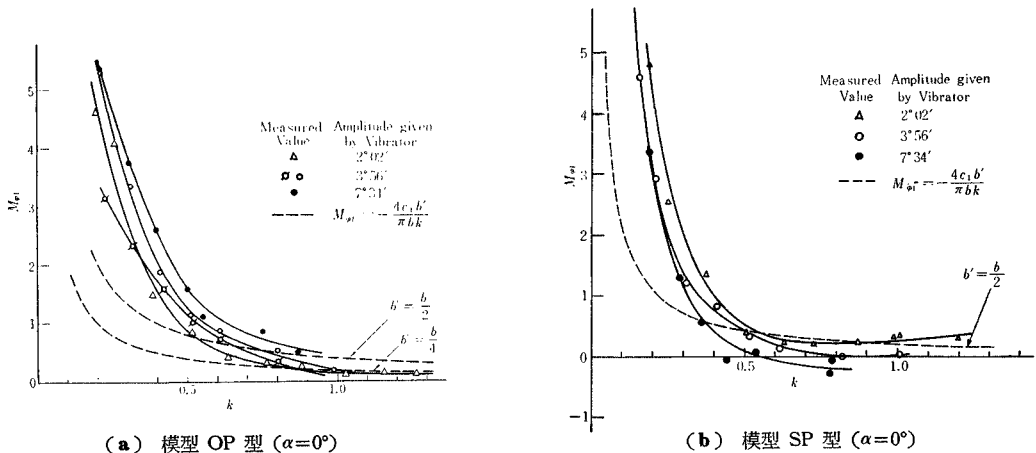
模 型	ねじれ固有振動数 f_2 (c/sec)	迎角 (度)	c_1	対数減衰率 δ_2	実 験 値		計 算 値*	
					V_d (m/sec)	N_d (c/sec)	V_F (m/sec)	N_F (c/sec)
OP ($\theta=7.16$)	2.23	7	-0.353	0.023	—	—	2.7	2.25
		4	-1.040		2.6	2.23	1.0	2.24
		0	-0.632		2.1	2.15	1.5	"
		-4	-0.999		2.1~2.5	2.23	1.0	"
		-7	-1.006		3.1~3.5	2.2	"	"
SP ($\theta=7.31$)	2.49	7	-0.102	0.033	5.3~6.0	2.3	7.7	2.53
		4	-0.278		4.4	2.35	2.8	2.49
		2	-0.351		3.6	2.2	1.4	2.22
		0	-0.344		3.1	"	1.4	"
		-4	-0.225		2.9	"	2.2	"
		-7	-0.310		3.8	"	1.6	"

注：* 準定常理論による計算値 (式(18)による), $c_1 = dC_M/d\alpha$, $b = 38$ cm, b' (SP) = $b/2$, b' (OP) = $b/4$, θ : 質量慣性モーメント ($g \cdot sec^2$)

という条件が導かれる。そこで、準定常理論による風洞実験結果の検討の最初として、 C_M 曲線の測定値と、失速フラッター型自励振動が実際に観察された迎角範囲とを対照してみれば、図-14のような結果が得られる。図-14 は実験結果の教例であるが、この他の場合も含めて、図示されているように、 C_M 曲線の負勾配の迎角範囲と自励振動の発生した迎角範囲がほぼ一致することが確かめられ、上記の条件は実験値の傾向をおおむねとらえていると認められる。ただし、 C_M 曲線が

極値をとる迎角付近ではこの限りでなく、上記条件の適合範囲を明確にすることは困難なようである。

ついで、風洞実験において現われた振動の発振風速の値と式(18)による計算値との比較であるが、この場合は前項で述べたように b' をいかに考えるかが重要な問題となる。そこで、前節に示した準静的空気力と非定常(動的)空気力の実測値との関係に基づいて、 b' の検討を試みたのであるが、その



(a) 模型 OP 型 ($\alpha=0^\circ$)

(b) 模型 SP 型 ($\alpha=0^\circ$)

図-15 非定常(動的)空気力の実測値と準定常理論による値との比較

結果の一例が図-15である。すなわち、図-15は失速フラッター型自励振動が典型的に発現したケースについて、この場合最も大きい影響をもつ非定常(動的)空気力成分 $M_{\phi I}$ の実測値を示したものであって、これに、 $b'=b/2$ 、または $b'=b/4$ としたとき式(33)から計算される $M_{\phi I}$ の値を併記して両者を比較したものである。この図によれば、両者はだいたい同じような傾向を示すが、 k が0.5以下では数値的にかなりかけ離れることが知られる。しかし、 k が0.5以上のときには、大きい違いがないのでSP型の場合 $b'=b/2$ 、OP型の場合 $b'=b/4$ と与えて式(18)によって発振風速を計算し、計算値を実験における風速値とともに表-2に一覧した。ただし、表中の実験値はいずれのケースも実験中に定常振動が認められた最小風速である。表-2によれば計算値はいずれも実験値より低くなっていることが知られるが、その大きな理由としては、 b' の値を上述のように一律に与えていることがあげられよう。さらに、空力モーメント係数の測定値のばらつきのため勾配(c_1 の値)を明確に定めがたいこと、また構造減衰率が振幅の小さいところでもかなり変動していることにもよると考えられる。したがって、式(18)の実用については、なお検討の余地が残されていると見なければならぬようである。

さて3.(2)にねじれ1自由度振動の場合にはリミットサイクルの振幅を計算することができることを述べたが、その計算結果の一例が図-16である。ここでは b' を k に無関係におくことには前述のように問題があるということから、 $M_{\phi I}$ の実測値が k^2 に反比例する傾向を示すので、 $M_{\phi I}=c/k^2$ (c :正の定数)とおき、式(34)より

$$b' = -\frac{\pi bc}{4c_1 k}$$

として計算を進めている。すなわち、上記の関係から、式(20)の k_0 を

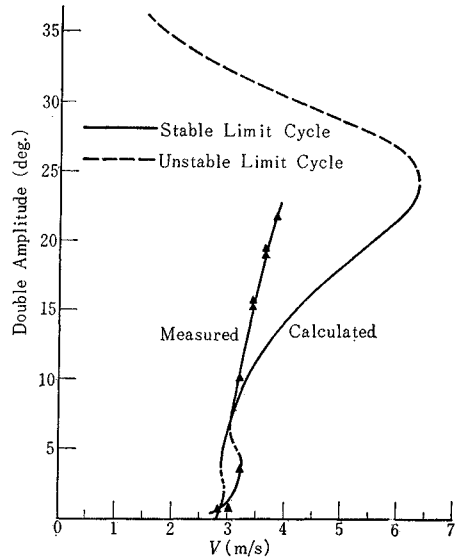
$$k_0 = \frac{\omega_2 b'}{V} = -\frac{\pi c}{2c_1} = \text{const.} (c_1 < 0)$$

と定めて計算したのである。図-16には計算値とともに実測値を併記したが、両者は、比較的良好一致している。ただし、実測値に認められる小振幅でのソフト型のリミットサイクルが、計算では明確に現れないなどの問題点も見られる。この点に関しても b' のとり方が影響していると推察される。

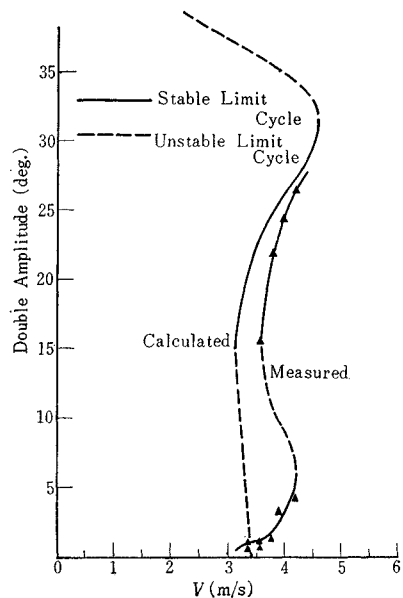
(3) 曲げとねじれの2自由度振動

曲げとねじれの連成振動が生ずる場合に準定常理論を適用すると、発振風速や振動数に関する条件が求められることは3.(3)に述べたとおりである。しかし、この

場合も前項と同様に b' の値が適切に与えられなければならない。曲げとねじれが連成する場合の b' は、曲げ振動をともなっているだけにねじれ1自由度の場合のそれとは本質的に異なっていると考えられるが、ここでは定常(静的)空気力の合力の作用点と回転中心の距離をあててみることにした。これは、準曲げねじれフラッター型自励振動を生ずるような場合には、吊構造部断面が



(a) 初期迎角 $\alpha = -7^\circ$



(b) 初期迎角 $\alpha = -4^\circ$

図-16 失速フラッター型自励振動のリミットサイクルの実測値と計算値の比較(全橋模型)

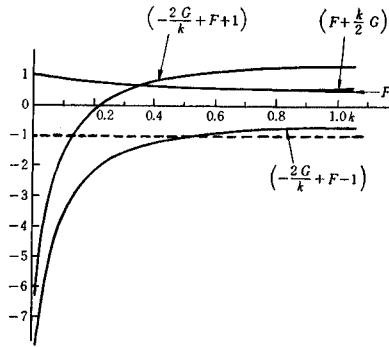


図-17 式(35)の右辺の各係数の換算振動数に対する変化(Theodorsenの平板空気力)

平板に比較的近い性質を持つと考えられることから導いた仮定である。すなわち、平板の場合の非定常(動的)空気力を表わす理論式(35)と準静的空気力を表わす式(36)において、空力モーメントの式のみに着目し、 b' を $-\frac{b}{4}(-\frac{2}{k}G+F-1)$ と対比させるならば、図-17に示すとおり、 $k \geq 0.4$ においては

$$\left(-\frac{2}{k}G+F-1\right) \approx -1$$

とおけるので $b' = b/4$ という関係を求めることができる。これは、とりもなおさず、平板に対しては、 b' を定常(静的)空気力の作用点と回転中心との距離とおくことができることを示していると考えられる。一方において、通常の吊構造部の断面の場合、空気力の作用点と回転中心との距離は、揚力ならびに空力モーメント係数曲線の勾配がそれぞれ a_1, c_1 であるとき、 $(c_1/a_1)b$ のように表わすことができる。したがって、 b' を一般的に

$$b' = \frac{c_1}{a_1} b$$

とおくならば、上述の平板の場合に照して、空力モーメントの準静的表示を実際に近づけることができると思われる。ただし、これらの仮定では空力モーメントの項を主体として考えているので、揚力項については何ら実を伴わないものになるが、ねじれ振動が卓越する場合にはそれほど大きな影響はないと考えられる。

さて、以上のように b' を考え、式(34)にしたがって $M_{\phi R}$ などを計算した結果と、それらの実測値とを比較したものが図-18である。これは模型 ST 型の場合であるが、 $M_{\phi R}$ については計算値と実測値がよく一致しているのに対して、 $M_{\phi I}$ の方は k の小さい領域で実測値の絶対値が計算値より相当大きくなっている。一方、 $L_{\phi I}$ については、符号自体が異なる結果となっているが、これは前述のように、空気力の準静的表示の際にねじれ振動に重点をおいて表現していることが、曲げとねじれが連成する場合には不適切となるためと考えられ

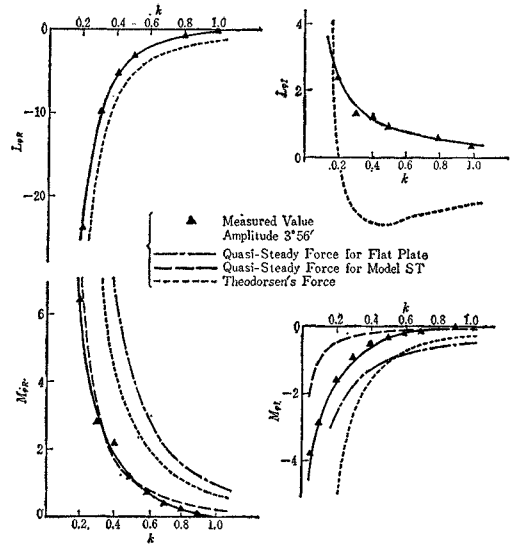


図-18 模型 ST 型(初期迎角 $\alpha=0^\circ$)の非定常(動的)空気力(部分)

る。なお、図-18には式(36)に示した平板に対する空気力の理論値を併記したが、この値と平板に対する準静的空気力との関係は、 $M_{\phi I}$ についてみる限り、模型 ST 型の場合における両者の関係に相似している。

以上のように、本項で考慮された b' の値も前項と同様に必ずしも適切であるとはいえないが、とにかくこの値を用いて式(29)により準曲げねじれフラッター型自励振動を生じた場合の発振風速と振動数を計算した結果が表-3である。ここに風洞実験で実測された値を併記しているが、これらの実験値は、部分模型実験の場合にはある特定振幅において不安定なリミットサイクルを呈する風速値であり、全橋模型実験の場合には振動が急激に発散し始めた風速値である。全橋模型実験では、先に述べたように、風速の上昇とともに増大する不規則な振動(これは吊構造部の各部材から発生する渦、あるいは風洞気流の乱れを原因とすると考えられる)の振幅が不安定なリミットサイクルの振幅に合致するか、あるいはこれを越す風速において振動が発振すると考えられる。したがって、表に示した風速値は、模型が静止状態から振動し始める風速ではないことを注意しておきたい。なお、振動が現われた各ケースの揚力、ならびに空力モーメント係数曲線の勾配 a_1, c_1 をみると、いずれも正の値である。これは式(30)から導かれた曲げとねじれが連成する自励振動の発生に関する条件の一つ、すなわち a_1, c_1 ともに負の場合にはこの種の振動が発生しないということを裏付けるものと考えられる。

表-3によれば、 b' の仮定が必ずしも十分でなかったにもかかわらず、準定常理論に基づく計算値と実測値

表-3 曲げ, ねじれ連成振動の発振風速と振動数の実験値と計算値の比較

(a) 部分模型実験 (*は倍振幅 2° 付近における値である)

模 型	固有振動数 (c/sec)		迎角 (度)	a_1	c_1	構造 (対数) 減衰率		実 験 値		計 算 値**	
	曲げ f_1	ねじれ f_2				曲げ δ_1	ねじれ δ_2^*	V_d (m/sec)*	N_d (c/sec)	V_F (m/sec)	N_F (c/sec)
ST-1 ($w=83.83$ $\theta=12.08$)	1.00	2.26	6	3.083	0.301	0.010	0.044	5.3	2.19	11.9	1.98
			3	2.672	0.481	0.008	0.042	9.7	2.11	13.9	1.87
			0	2.430	0.425	0.010	0.038	15.1	1.88	14.7	1.88
			-3	2.320	0.546	"	0.039	15.6	1.78	15.2	1.71
			-6	2.607	0.517	0.008	0.034	12.6	1.97	14.0	1.83
ST-2 ($w=$ 同上)	1.00	1.75	6	同上	同上	0.028	0.030	4.5	1.72	9.3	1.62
			3			0.013	0.042	7.0	1.65	10.5	1.47
			0			"	0.038	11.1	1.47	11.1	1.47
			-3			0.014	0.038	11.7	1.40	11.8	1.34
			-6			0.011	0.040	9.3	1.58	10.8	1.43
ST-3 ($w=94.36$ $\theta=13.35$)	1.03	1.71	6	同上	同上	0.007	0.033	4.4	1.67	9.9	1.56
			3			"	0.031	6.9	1.63	10.6	1.45
			0			0.006	0.034	12.9	1.46	11.6	1.43
			-3			"	0.032	13.4	1.36	12.7	1.29
			-6			0.018	0.029	11.2	1.51	10.8	1.41
OT-1 ($w=81.64$ $\theta=11.92$)	1.01	2.26	6	1.204	0.067	0.007	0.039	6.3	2.24	28.9	2.03
			3	1.722	0.132	"	0.038	—	—	20.3	2.04
			0	1.523	0.150	"	"	—	—	21.4	1.97
			-3	1.614	0.215	"	0.034	—	—	19.6	1.91
			-6	1.882	0.232	0.006	0.037	17.8	2.02	17.6	1.95
OT-2 ($w=$ 同上)	1.01	1.76	6	同上	同上	0.008	0.048	5.6	1.75	24.8	1.50
			3			"	0.053	17.0	1.58	17.3	1.55
			0			"	0.045	18.0	1.39	18.0	1.50
			-3			0.00	"	17.2	1.38	17.2	1.42
			-6			"	0.044	14.5	1.58	14.7	1.49

(b) 全橋模型実験

模 型	固有振動数 (c/s)		迎角 (度)	a_1	c_1	構造 (対数) 減衰率		実 験 値		計 算 値	
	曲げ f_1	ねじれ f_2				曲げ δ_1	ねじれ δ_2	V_d (m/s)	N_d (c/s)	V_F (m/s)	N_F (c/s)
ST-1 ($w=30.82$ $\theta=6.91$)	0.94	2.27	7	3.816	0.246	0.037	0.024	3.4~3.9	2.15	6.6	2.20
	1.27	2.50	4	2.719	0.453	0.021	0.059	5.5	2.35	—	—
	"	"	0	2.430	0.425	"	"	—	—	—	—
	"	"	-4	2.263	0.570	"	"	—	—	—	—
	"	"	-7	2.967	0.391	"	"	6.2~6.4	2.45	—	—
ST-2 ($w=$ 同上)	0.94	2.26	7	同上	同上	0.033	0.016	4.0	2.15	5.9	2.20
	"	1.64	4			0.42	0.30	5.2	1.45	7.6	1.40
	"	"	0			"	"	7.7	1.37	7.9	1.39
	"	"	-4			"	"	5.9	1.45	7.6	1.33
	"	"	-7			"	"	5.0	1.50	7.8	1.43
ST-3 ($w=30.82$ $\theta=5.73$)	0.95	2.04	4	2.719	0.453	0.039	0.023	5.6	1.90	5.9	1.90
	0.89	1.61	2	2.672	0.438	0.35	0.30	8.2	1.25	7.3	1.34
	"	"	0	2.430	0.425	"	"	6.7	1.40	7.6	1.31
	"	"	-2	2.263	0.438	"	"	5.9	1.45	7.8	1.30
	"	"	-4	2.263	0.570	"	"	5.6	1.55	7.3	1.30

注: **準定常理論による計算値 (式(28)の $F(V) \leq 0$ より), $a_1 = dC_L/d\alpha$, $c_1 = dC_M/d\alpha$, $b = 38$ cm, $b' = (c_1/a_1)b$, w : 重量 (g/cm), θ : 質量慣性モーメント (g/sec^2)

が少なくとも傾向的には一致していることを知ることができる。ただし、定常空気力係数、とくに空力モーメント係数曲線が極値を有する迎角付近を初期迎角とする場合はこの限りでない。また、全橋模型実験における実験値はほとんどのケースが計算値より低くなっている。これは計算における発振風速が静止状態から発振する場合の値として求められているのに対し、実験では、前述の

とおり、振動が不安定なリミット サイクルとある大きさの初期擾乱の相互関係により発生し、これにしたがう風速が観測されているので実験値の方が相対的に低くなっていると解することができる。

なお、実験では準曲げねじれフラッター型自励振動に際して不安定なリミット サイクルが認められたのであるが、その状態に関する理論的検討をこの論文では行な

っていない。しかし、3.(3)において曲げとねじれの2自由度振動の場合を解く際に考慮したつりあい状態を、静止状態として考えるだけでなく、初期攪乱の持つ振幅付近での状態と考えるならば、すなわち振幅が任意の大きさである状態の漸近的安定、不安定を検討するならば、問題の解決がはかられるのではないかと思われる。現在、この点につき検討中であることをここに付記しておきたい。

5. 結 語

吊橋の風による自励振動について風洞実験により観察を進めるとともに準定常理論により解析を試みたが、その結果を要約すればつぎのようになるであろう。

(1) 風洞実験で観察された各種の振動性状、なかんずくリミットサイクルの特徴と吊構造部の断面形状や迎角を対応させると、従来曲げねじれフラッター型と失速フラッター型に大別されていた吊橋の自励振動は、これらの分類のほかに、準曲げねじれフラッター型とも呼ぶべき分類を新たに加えた3種類に分けるほうが適切であろうと考えられた。

(2) 上記のように分類される自励振動について、それぞれ準定常理論を適用した結果、発振風速、振動数、リミットサイクルなどに関するいくつかの知識を得たが、これらは風洞実験結果を解釈するのに大いに役立つものであった。(1)に示した分類化もこの理論的検討が背景にあるのであり、このようにして吊橋に生ずる複雑で多様な自励振動の特性を、準定常理論により一応包括的、かつ系統的に把握することができた。

ただし、以上のような考察において、たとえば、準曲げねじれフラッター型の分類が発生機構を正確にとらえたうえでなされているものではない点、あるいは準定常理論の適用において設けた若干の仮定が、必ずしも十分に妥当なものでない点など検討の余地を多く残していることは本文の中でしばしば述べたとおりである。したがってここで述べた結果の適合範囲が限定されることはやむをえないこととして考えられる。

しかしながら、この考察により、吊橋の自励振動の発生に関係する因子とその影響度をおおよそながら明らかにしたことは実用上有用なことも多からうと思われる。とくに、準定常理論によって、定常(静止)空気力の測定結果から、自励振動に対する安定性をおおむね判断できる条件を導いたことは、その測定が比較的簡単であるだけに、吊構造部の断面選定を容易にすることであろう。また、失速フラッター型および準曲げフラッター型自励

振動におけるリミットサイクルの振幅が風速とともに変化するという事実を風洞実験と理論的解析の両面で認めたが、この事実は、風洞実験の実施、あるいはその結果の評価などに際して十分注意されなければならない事実として考えられよう。すなわち、この事実によって吊橋の耐風性の優劣を決定する発振風速は振幅と関連して考慮されなければならないことが示唆されるからである。

いずれにせよ、本研究は吊橋の自励振動の問題を解明するための一つのアプローチである。著者らとしては、今後ともこの種の研究を重ねて問題の核心を探りたいと考えていることを終りに述べておきたい。なお、本研究を行なうにあたり、平井 敦東大名誉教授、鷲津久一郎東大教授、伊藤 学東大助教授のご指導、ご鞭撻を戴いた。ここに記して感謝の意を表わす次第である。

参 考 文 献

- 1) Hirai, A., Okauchi, I., Miyata, T.: On the Behaviour of Suspension Bridges under Wind Action, Proc. Symp. of Suspension Bridge at Lisbon (1966)
- 2) 平井 敦・岡内 功・宮田利雄：吊橋の耐風性に関する風洞実験とその考察，土木学会論文集，第151号(1968)
- 3) 平井 敦・岡内 功：吊橋の耐風安定性に関する風洞実験報告，若戸吊橋の耐風安定性に関する実験的研究，東大橋梁研究室，日本道路公団(1960)
- 4) 平井 敦・宮田利雄：準静的空気力の吊橋の自励振動に対する適用，東大工学部総合試験所年報，Vol. 27(1968) 岡内 功・宮田利雄：第23回土木学会年次学術講演会概要集 1-95, Oct. (1968)
- 5) Den Hartog, J.P.: Mechanical Vibration
- 6) Parkinson, G.V., Brooks, N.P.H.: On the Aeroelastic Instability of Bluff Cylinders, Trans. A.S.M.E., Vol. 28 (1961); Parkinson, G.V., Smith, J.D.: An Aeroelastic Oscillator with Two Stable Limit Cycles, Trans. A.S.M.E., Vol. 29 (1962); The Square Prisms as an Aeroelastic Nonlinear Oscillator, Quart. J. Mech. and Applied Mathe., Vol. XVII, Part 2 (1964)
- 7) 妹沢克雄：振動学(工業物理学叢書)，岩波書店(1936)
- 8) Sisto, F.: Stall-Flutter in Cascades, JAS, 20 (1953)
- 9) Steinman, D.B.: Aerodynamic Theory of Bridge Oscillations, Trans. A.S.C.E., Vol. 115 (1950)
- 10) Minorsky, N.: Introduction to Non-linear Mechanics, Edwards, Ann Arbor, Mich. (1947)
- 11) たとえば， Pontryagin, L.S.: Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley Pub. Co. (1962 in English)
- 12) 笠口展宏・坂田 弘：吊橋の耐風性に関する基礎研究，日本航空学会誌，Vol. 13, No. 133 (1965); 続報 Vol. 14, No. 146 (1966); 田中 宏・伊藤 学：充腹構造物の自励振動における空気力の特性，土木学会論文報告集 118号(1969)
- 13) Theodorsen, T.: General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter, NACA, TR 496 (1935)

(1969. 7. 26・受付)